Titre : Loi de réciprocité quadratique

Résumé : en théorie des nombres, la loi de réciprocité quadratique, établit des liens entre les nombres premiers ; plus précisément, elle décrit la possibilité d'exprimer un nombre premier comme un carré modulo un autre nombre premier. Conjecturée par Euler et reformulée par Legendre, elle a été correctement démontrée pour la première fois par Gauss en 1801. Elle permet de résoudre les deux problèmes de base de la théorie des résidus quadratiques et est considérée comme un des théorèmes les plus importants de la théorie des nombres, ayant de nombreuses généralisations.

Théorème fondamental

Étant donnés deux nombres premiers impairs distincts p et q :

- si p ou q est congru à 1 modulo 4, alors p est un carré modulo q si et seulement si q est un carré modulo p.
- si p et q sont congrus à 3 modulo 4, alors p est un carré modulo q si et seulement si q n'est pas un carré modulo.

Les premières démonstrations aujourd'hui considérées comme complètes sont publiées par Gauss dans ses Disquisitiones arithmeticae en 1801. On compte plus de 200 démonstrations et parmi elles la preuve de D. Zagier est remarquable car elle ne tient qu'une ligne.

On va étudier trois preuves de ce résultat :

- à la base de la division euclidienne dans les entiers de Gauss.
- en étudiant des modules libre de rang 2 suivant Lucas.
- avec l'involution de Zagier et son interpretation en termes de la combinatoire des moulins à vents decouverte par A. Spivak.

En particulier, on mettra en avant la géométrie sous adjacente dans les preuves.

Prérequis :

Algèbre II

Références

1. Christian Elsholtz, A combinatorial approach to sums of two squares and related problems télécharger
2. Wagon, S.: The Euclidean algorithm strikes again. Amer. Math. Monthly 97 (1990), 125–129.
3. Zagier, D.: A one-sentence proof that every prime p = 1 (mod 4) is a sum of two squares, Amer. Math. Monthly 97(2) (1990), 144. p