M1–Analyse Fonctionnelle
2020-2021

TD n°4 : Application ouverte et graphe fermé

Exercice 1 : Séries à la limite de la convergence On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$. Soit (c_n) une suite de coefficients strictement positifs qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et soit T l'application de X dans X définie par $Tx = T(x_n) = (c_n x_n)$.
1) Montrer que T est bien définie et injective.
2) Montrer que T ne peut admettre d'inverse borné et en déduire que T n'est pas surjective.
3) Montrer que pour toute suite positive (c_n) qui tend vers 0, il existe une suite positive (u_n) telle que $(\sum c_n u_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

4) (*) Etant donné une séries (c_n) de coefficients strictement positifs qui tend vers 0 construire explicitement une suite positive (u_n) telle que $(\sum_n c_n u_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

Exercice 2 : Injection duale Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach tels que $Y \subset X$ est dense dans $(X, \|\cdot\|_X)$ et $Y \neq X, \emptyset$. On suppose que l'injection $I : y \in Y \mapsto y \in X$ est continue, c'est-à-dire, qu'il existe $c > 0$ tel que $\|y\|_X \leq c\|y\|_Y$ pour tout $y \in Y$. On notera que les normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ ne peuvent pas être équivalentes (car cela impliquerait $Y = X$).

1) Montrer que, par exemple, $X = L^1(]0,1[)$ et $Y = L^2(]0,1[)$ répondent à ces conditions.
2) Montrer que l'application linéaire duale I^* de I associe à toute forme linéaire bornée f sur X sa restriction $f|_Y$ à Y. On rappelle que l'application duale I^* est définie de X' sur Y' par $I^*(f) = f \circ I$.
3) Montrer que I^* est injective.
4) Montrer que I^* n'est pas surjective. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et montrer à l'aide du théorème de l'application ouverte et de la caractérisation* $\|y\|_Y = \sup_{\{f \in Y', \|f\|_{Y'} \leq 1\}} f(y)$, *que si* I^* *est une bijection, alors les normes* $\|\cdot\|_X$ *et* $\|\cdot\|_Y$ *sont équivalentes.*
5) Soit $f \in Y'$. Montrer que $f \in I^*(X')$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $|f(y)| \leq C\|y\|_X$ pour tout $y \in Y$.
6) On considère le cas $X = L^1(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1}$) et

$$Y = \{h \in X ; \|h\|_Y < \infty\} \quad \text{où} \quad \|h\|_Y = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)|h(t)|\, dt\ .$$

Montrer que l'on se trouve bien dans les hypothèses de départ. Donner un exemple de forme linéaire $f \in Y'$ qui n'est pas dans $I^*(X')$.

Exercice 3 : Divergence des séries de Fourier des fonctions continues.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques,

muni de la norme L^∞.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on note $c_k(f)$ la coefficient de Fourier de f définie par

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ikt) f(t) dt.$$

La n-ième somme partielle de Fourier de f est définie par

$$S_n(f) : x \to \sum_{|k| \leq n} c_k(f) \exp(ikx).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

   où $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.
2. Montrer que les formes linéaires définies par $L_n(f) = S_n(f)(0)$ sont continues.
3. Montrer que $||L_n|| \to \infty$. (Indication : on commencera par trouver une borne inférieure pour $\int_{k\pi/(2n+1)}^{(k+1)\pi/(2n+1} |D_n(t)| dt$).
4. Déduire qu'il existe une fonction $f \in E$ dont la séries de Fourier ne converge pas en 0.

Exercice 4 : L'importance d'être Banach.
Montrer par des exemples explicits que les théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte peuvent être faux si les espaces normés ne sont pas supposés complets.

Exercice 5 : Supplémentaires algèbriques et topologiques.
Soit E un espace de Banach. Soient F et G des sous-espaces de E. On dit que F et G sont des supplémentaires algèbriques si tout $x \in E$ se décompose de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On dit que F et G sont des supplémentaires topologiques si en plus l'application induite

$$T : F \oplus G \to E$$

donnée par $T(x,y) = x + y$ est un homéomorphisme. (Ici, nous munissons F et G de la norme induite de E et $F \oplus G$ de la norme produite $||(x,y)|| = ||x|| + ||y||$.)

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. F et G sont des supplémentaires topologiques.
2. Les projections $\pi_F : x \to x_F$ et $\pi_G : x \to x_G$ sont continues.

3. F et G sont fermés.

Exercice 6 : Un critère de continuité
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire, pas forcément continu. Montrer à l'aide du théorème du graphe fermé l'équivalence entre « T est continu » et « pour tout $f \in Y'$, $f \circ T$ est dans X' ».

Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ est borné si et seulement si pour tout $f \in E^*$ l'ensemble $f(A)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Le théorème de Hellinger-Toeplitz
Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire qui est symétrique, c'est-à-dire que $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$. Montrer que T est continu.

Indication : on vérifiera que le graphe de T est fermé en utilisant que si pour tout $y \in H$ $\langle x|y\rangle = \langle x'|y\rangle$, alors $x = x'$.