Exo 1

Quels sont les ss espaces du

$\mathbb{R}$ - 0 $\{0\}$ est tjrs un ss espace !

- $\mathbb{R}$ l'espace tt entier aussi

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est ss espace vectoriel

$\dim E = ??$

$\dim E = 1 \Rightarrow$ droite qui passe par O

$2 \Rightarrow$ plan

$\geq 3 \Rightarrow$ hyperplan

Dans $\mathbb{R}^3$ un plan = l'ensemble de vecteurs perpendiculaire à un vecteur $\vec{v} \neq 0$ donnée

l'intersection de 2 plans = droite

Rappels

Soit f $E \to \mathbb{R}$ une application linéaire
alors $f^{-1}(\{0\}) = \{v, f(v)=0\}$ est ss e v

Déf $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ est le noyau de f

i) $0 \in f^{-1}(\{0\})$ car $f(0) = 0$

ii) Soient $x, y \in E$ avec $f(x) = f(y) = 0$

Alors $f(x+y) = f(x) + f(y)$ car f linéaire

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x + y \in f^{-1}(\{0\})$

iii) Soient $x \in \mathbb{R}$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f(x) = 0$

Alors $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$= \lambda 0$ f linéaire

$= 0$

Soient $F_1, F_2 \subset E$ ss esp linéaire
alors $F_1 \cap F_2$ est aussi

i) $0 \in F_1$ $0 \in F_2$ $\Rightarrow 0 \in F_1 \cap F_2$

ii) $x, y \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x, y \in F_1 \Rightarrow x + y \in F_1$
$x, y \in F_2$ $x + y \in F_2$

$\Rightarrow x + y \in F_1 \cap F_2$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$
$x \in F_1 \cap F_2$ similaire à vérifier

Exo 2

1) $f \quad (x,y,z) \mapsto x+y-7z$ app linéaire

$E_1 = f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow$ ss esp vectoriel

2) E_2 n'est pas

$(0,0,0) \notin E_2 \qquad 4\times 0 + 5\times 0 - 0 = 0 \neq 1$

3) E_3 n'est pas

verifier que $(0,0,0) \notin E_3$

4) $E_4 = E_1 \cap F$

$E_1 = \{ x+y-7z = 0 \}$

$F = \{ x-y = 0 \} = g^{-1}(\{0\})$

où $g(x,y,z) = x-z$

est une application lin

5) E_5 non

verifier que $(1,-1,0) \in E_5$ et ??

$(1,1,0) \in E_5$

Exo 3 $V = \{ \text{polynômes degré} \leq d \}$

$= \{ \sum_0^n a_i X^i , \; a_i \in \mathbb{R} \}$

Ex polynômes de degré $= 1$

$P(X) = aX+b \qquad Q(X) = cX+d \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $(P+Q)(X) = (a+b)X + (c+d) \Rightarrow \deg \leq 1$

$= 0$ si $a+b=0$

iii) $(\lambda P)(X) = (\lambda a)X + (\lambda b) \Rightarrow \deg \leq 1$

$= 0$ si $\lambda a = 0$

i) $0_V = \sum_0^d 0 X^i$

ii) Soient $P(X) = \sum_0^d a_i X^i$

$Q(X) = \sum_0^d b_i X^i$

mq $(P+Q)(X)$ est de degré $\leq d$

iii) Mq si $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda P(X)$ est de degré $\leq d$