Devoir à la maison 2

Exercice 1.

1. Étant donnés $n+1$ points distincts $x_0,\ x_1, \dots, x_n$ de $[-1, 1]$ fixés. Montrez qu'il existe une unique famille de poids $w_0, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait l'identité
$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i). \tag{1}$$

2. La méthode de Gauss consiste à choisir $x_0, \dots, x_n$ tels qu'avec les poids $w_0, \dots, w_n$ associés on ait la relation (1) pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$! On admettra l'existence de tels points $x_0, \dots, x_n$. On appelle polynôme de Legendre la suite de polynômes définie par la relation de récurence
$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x),\ \ L_{-1} = 0, L_0 = 1.$$
On rappelle que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à racines simples et est orthogonale : elle vérifie la relation que l'on ne cherchera pas à redémontrer
$$\forall (n,\ m) \in \mathbb{N}^2,\ \int_{-1}^{1} L_n(x)L_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$
où $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. On définit $M_n = L_n/\sqrt{\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\, dx}$ pour n entier positif ou nul et on pose $M_{-1} = 0$. Montrez que la suite de polynômes $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait
$$c_{n+1}M_{n+1}(x) = xM_n(x) - c_nM_{n-1}(x),\ \text{où}\ c_n = (n^2/(4n^2-1))^{1/2}.$$

3. Montrez l'égalité vectorielle
$$xM(x) = TM(x) + c_{n+1}M_{n+1}(x)e_n$$

où e_n est le n-ième vecteur de la base canonique,

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_0(x) \\ M_1(x) \\ \vdots \\ M_n(x) \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & & \\ c_1 & 0 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & 0 & c_n \\ & & & c_n & 0 \end{pmatrix}.$$

4. En déduire que $M_{n+1}(x) = 0$ si et seulement si x est une valeur propre de T.
5. Soient $x_0 \leq \cdots \leq x_n$ les valeurs propres de T et $v_0, \ldots, v_n$ des vecteurs propres associés. Montrez que

$$v_i = \alpha_i(M_0(x_i), \ldots, M_n(x_i)) \text{ avec } \alpha_i \neq 0.$$

6. Montrez que pour des points $x_0, \ldots, x_n$ associés à la méthode de Gauss, on a pour tout $P = M_i M_j$ avec $0 \leq i, j \leq n$,

$$\delta_{ij} = \int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \int_{-1}^{1} M_i(x) M_j(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} w_k M_i(x_k) M_j(x_k).$$

7. Montrez que $Id = P^t W P$ où

$$W = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & w_n \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} M_0(x_0) & \ldots & M_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ M_0(x_n) & \ldots & M_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

8. En déduire que $W^{-1} = PP^t$ et que $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Conclure que les poids de la méthode de Gauss sont donnés par

$$w_i = 2\frac{(v_i)_1^2}{\sum_{k=1}^{n+1} (v_i)_k^2}$$

où $(v_i)_k$ désigne la k-ième coordonnée du vecteur propre v_i. Il s'agit de la méthode de la méthode de Golub-Welsch.

1) Unicité : Si de tels coefficients existent, les polynômes de Lagrange P_k associés aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de degrés au plus n vérifient $P_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$ et $P_k(x_k) = 0$. On aurait donc nécessairement

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\,dx = w_k$$

pour $k = 0, \ldots, n$ ce qui assure l'unicité des poids $(w_k)_{0\leq k\leq n}$.
Existence : en choisissant les poids $w_k = \int_{-1}^{1} P_k(x)\,dx$ pour $0 \leq k \leq n$, on voit que la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de Lagranges d'ordre n . Comme ceux-ci forment une base de $\mathbb{R}^n[X]$ et que l'intégrale est linéaire, on voit que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}^n[X]$. En effet si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, on a $\sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} w_i a_k P_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k w_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} P_k(x)\,dx == \int_{-1}^{1} P(x)\,dx$.
2) On sait que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} L_n(x)^2\,dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Ainsi d'après la relation de récurence définissant les polynômes L_n, on peut écrire

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}M_{n+1}(x) = (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}xM_n(x) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1}(x).$$

En divisant cette égalité par $\sqrt{2}\sqrt{2n+1}$ et en simplifiant, on trouve bien la relation de récurence demandée.
3) Il s'agit d'une éécriture matricielle directe de la relation de récurence, tenant compte du fait que $M_{-1} = 0$ pour la première ligne.
4) L'équivalence est immédiate d'après l'égalité précédente si l'on sait que $M(x)$ est bien un vecteur non nul. Ceci est vrai puisque $M_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.
5) T étant symétrique réelle, elle est bien diagonalisable dans $\mathbb{R}$. De plus d'après 4) les $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont des racines de M_{n+1} qui est à

racines simples. Ainsi $x_0 < \cdots < x_n$ et chaque espace propre est donc de dimension 1 ce qui assure la propriété demandée.

6) L'égalité vient du fait que l'on a supposé que la méthode d'intégration de Gauss est exacte pour des polynômes de degré plus petit que $2n+1$. C'est le cas ici puisque les polynômes M_i sont de degré plus petit que n. L'orthogonalité des polynômes de Legendre assure alors l'égalité.

7) $P = (M_j(x_i))_{0\leq i,j\leq n)}$ donc $WP = (w_i M_j(x_i))_{0\leq i,j\leq n)}$ et

$$P^t WP = (\sum_{k=0}^{n} M_i(x_k) w_k M_j(x_k))_{0\leq i,j\leq n)}$$

ce qui donne bien la matrice identité en utilisant le résultat de la question 6).

8) D'après 7), on a $P^t W = P^{-1}$. Si l'on multiplie cette égalité à gauche par P on obtient bien $PP^t W = Id$ d'où $W^{-1} = PP^t$. De plus comme

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix},$$

le calcul des coefficients diagonaux dans la relation $W^{-1} = PP^t$ donne bien l'identité $\frac{1}{w_i} = \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$.

Par ailleurs, d'après l'expression obtenue à la question 5), on a

$$||v_i||^2 = \alpha_i^2 \sum_{k=0}^{n} M_k(x_i)^2$$

ce qui avec l'égalité ci-dessus donne

$$w_i = \frac{\alpha_i^2}{||v_i||^2}.$$

Comme $M_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a aussi $(v_i)_1 = \frac{\alpha_i}{\sqrt{2}}$ pour tout $0 \leq i \leq n$ d'où l'identité souhaitée.

Exercice 2. On considère un entier $N \geq 1$ fixé, et on note $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ la première racine N-ième de l'unité. On considère une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, et on note $L_N(f)$ son polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux abscisses $x_0 = 1,\ x_1 = \omega,\ , ..., x_{N-1} = \omega^{N-1}$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}$ on a $\prod_{k=1}^{N-1}(X-\omega^k) = \sum_{k=0}^{N-1} X^k$, et que pour tout $n \in \{0, ..., N-1\}$ on a
$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kn} = \begin{cases} N & \text{si n=0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Soit $a_{k,N}(f) \in \mathbb{C}$ le k-ième coefficient de $L_N(f)$, de telle sorte que $L_N(f)(x) = a_{0,N}(f) + a_{1,N}(f)x + ... + a_{N-1,N}(f)x^{N-1}$. Montrer que
$$a_{k,N}(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\omega^n)\omega^{-nk} \ .$$
3. On suppose que $N = 2M$ pour un certain $M \in \mathbb{N}$, et on pose $g(x) = f(x\omega)$. Montrer que pour tout $k \leq M-1$, on a
$$a_{k,N}(f) = \frac{1}{2}\left(a_{k,M}(f) + \omega^{-k} a_{k,M}(g)\right)$$
et pour tout $k \in \{M, ..., N-1\}$ on a
$$a_{k,N}(f) = \frac{1}{2}\left(a_{k-M,M}(f) + \omega^{-k} a_{k-M,M}(g)\right) \ .$$
4. On suppose que $N = 2^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Proposer un algorithme récursif calculant la liste des $a_{k,N}$ en $O(n2^n)$ opérations. On supposera que l'évaluation de f en un point est instantané.
5. (Bonus) Discuter de la conjecture suivante, inspirée par l'estimation de l'erreur d'interpolation pour les fonctions réelles :
Conjecture : *Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| \leq 1$, on a*
$$|f(x) - L_N(f)(x)| \leq \frac{1}{N!} \prod_{k=0}^{N-1} \left|x - \omega^k\right| \max_{|z|\leq 1} \left|f^{(n)}(z)\right|$$

1. La deuxième formule est une simple sommation géométrique, en utilisant le fait que $\omega^N = 1$. Pour la première formule, on sait que

   $$X^N - 1 = (X-1)(1+X+X^2+...+X^{N-1}) = (X-1)(X-\omega)...(X-\omega^{N-1})$$

   ce qui donne la formule attendue en divisant par $(X-1)$ si $X \neq 1$. Comme il s'agit d'une égalité entre deux polynômes, valable en une infinité de points, elle est valable en tous les points et donc aussi en $X = 1$.

2. Deux méthodes : premièrement, on peut vérifier qu'avec la formule demandée, le polynôme $P(x) = \sum_k a_{k,N} x^k$ satisfait bien $P(\omega^n) = f(\omega^n)$ pour tout n, ce qui suffit pour conclure par unicité du polynôme d'interpolation. La formule est bien vérifiée :

   $$P(\omega^n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{n-1} f(\omega^l) \omega^{-lk} \right) \omega^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(\omega^l) \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(n-l)}$$

   et la somme sur k est non nulle uniquement pour $l - n = 0$, comme montré à la question 1.

   La deuxième méthode consiste à appliquer la formule d'interpolation directement : on a

   $$f(x) = \sum_{l=0}^{N-1} f(\omega^l) \frac{p_k(x)}{p_k(\omega^l)} .$$

   où $p_l(x) = \prod_{k \neq l, 0 \leq k \leq N-1} (x - \omega^k)$. Simplifions $p_l(x)$. On met ω^l en facteur dans chaque terme :

   $$p_l(x) = \left(\prod_{k \neq l, 0 \leq k \leq N-1} \omega^l \right) \prod_{k \neq l, 0 \leq k \leq N-1} (x\omega^{-l} - \omega^{k-l})$$

   On peut réindexer le deuxième produit par $j = k - l$, pour $j \neq 0, -l \leq j \leq N-1-l$. Mais $\omega^j = \omega^{j+N}$, donc on peut remplacer j par $j + N$ pour $-l \leq j < 0$. On a donc un produit pour j allant de 1 à $N-1$. En appliquant la question 1 on obtient

$$p_l(x) = \left(\prod_{k\neq l, 0\leq k\leq N-1} \omega^l\right)\prod_{j=1}^{N-1}(x\omega^{-l}-\omega^j) = \left(\prod_{k\neq l, 0\leq k\leq N-1} \omega^l\right)(1+x\omega^{-l}+...+x^{N}$$

Ainsi, $p_l(\omega^l) = N$, et

$$f(x) = \sum_{l=0}^{N-1} f(\omega^l)\frac{1+x\omega^{-l}+...+x^{N-1}\omega^{-l(N-1)}}{N}$$

et on obtient la formule désirée en regroupant les termes de même degré en x.

3. Ces formules sont immédiates, en utilisant le fait que si ω' est la première racine M-ième de l'unité alors $\omega' = \omega^2$.

4. On applique les formules de la question 4. Si $n = 0$ le calcul est immédiat, $a_{0,0}(f) = f(0)$. Sinon on commence par calculer récursivement la liste des $a_{k,2^{n-1}}(f)$ et des $a_{k,2^{n-1}}(g)$ pour $k = 0, ..., 2^{n-1}-1$ puis on en déduit $a_{k,2^n}(f)$ pour $k = 0, ..., 2^n - 1$ par la question 4. Si c_n est le coût pour calculer les $a_{k,n}$, alors on a un coût c_{n-1} à payer deux fois (pour les $a_{k,2^{n-1}}(f)$ et pour les $a_{k,2^{n-1}}(g)$), puis 3 opération par indice (deux multiplications et une addition), donc un coût total de $c_n = 2c_{n-1}+3*2^n$. Avec $c_0 = 0$ on obtient aisément par récurrence que $c_n = n2^n$.