

Exercice 1. Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général :

(a) nz^n ; (b) $n!z^n$; (c) $\frac{z^n}{n!}$; (d) $\frac{n^n}{n!}z^n$; (e) $2^{-n}(1 + \frac{1}{n})^{n^2}z^n$.

Rappels

Déf $R = \sup \left\{ |z| : z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge simplement} \right\} \in [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}^+}$.

$|z| > R$ DV grossièrement

$|z| < R$ CVN

$|z| = R$ tt est possible !

$$\text{Thm} \quad 1/R = \limsup |a_n|^{1/n} \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$a_n = nz^n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty$$

donc $R=1$

en effet

$$\sum a_n z^n = z \sum n z^{n-1} = z \frac{d}{dz} \sum z^n = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z}$$

$$= z \frac{1}{(1-z)^2}$$

On voit que R doit être ≤ 1 car $\rightarrow \infty \quad z \rightarrow 1$

Indication $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp n \log(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow e \quad n \rightarrow \infty$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

(a) si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée ne tendant pas vers 0.

(b) si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0, telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

a) On considère qq exemples

$$a_n = 1 \quad \sum a_n z^n = \sum z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad R = 1 = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Maintenant

$$|a_n| \leq M, \forall n \Rightarrow \left| \sum a_n z^n \right| \leq \sum |a_n| |z|^n \quad \text{à justifier}$$

$$\leq M \sum |z|^n$$

$$\text{cv si } |z| < 1 \quad \text{à justifier}$$

$$\Rightarrow R \geq 1$$

On suppose $|a_n| \geq \varepsilon > 0, \forall n$ mq $R \leq 1$

on peut supposer $R > 1$ et mq

le rayon de cv de $\sum z^n \geq R$

b/

On pourra considérer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^{n+1}$

c'est l'exemple de base vérifiant l'hypothèse

Exercice 3. Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de conv respectivement.

(a) Montrer que si on a $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R \geq R'$.

(b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R = R'$.

a/ on suppose que $|a_n| \leq |b_n| \quad \forall n \geq N$

on n'a que $\sum b_n z^n \text{ cvn } |z| < R'$

il suffit de mq $\sum a_n z^n \text{ cvn } |z| < R'$

considère $\sup_{|z| \leq R'} |a_n z^n| \leq ?$

b/ Rappel

$$|a_n| \sim |b_n| \Leftrightarrow \lim \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \rightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ tq}$$

$$1 - \varepsilon \leq \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \leq 1 + \varepsilon$$

Maintenant il y a 2 étapes

$$\text{Mq } \exists N \text{ tq } \frac{1}{2} |b_n| \leq |a_n| \leq 2 |b_n|$$

$$\text{Mq si } |a_n| \leq 2 |b_n| \text{ alors } R \geq R'$$