Comme dans le cours, si f est une fonction d'un ensemble A dans $\mathbb{R}$, on note $\sup_A f$ la borne supérieure de $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$, et $\inf_A f$ sa borne inférieure.

Exercice 1. En fonction du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$, donner la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $D_n = \left\{ \frac{x^2 - n^2}{x^2 + n^2},\ x \in \mathbb{R}_+ \right\}$, si elles existent. Cet ensemble admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

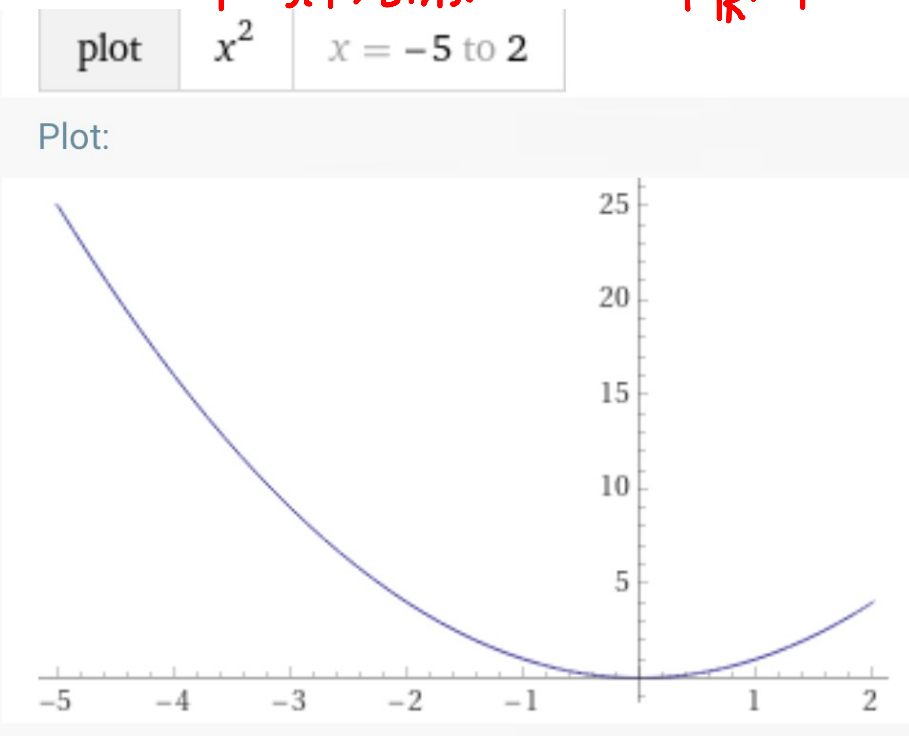
$M = \sup_A f$ alors 1/ $\forall x \in A \quad f(x) \leq M$

2/ $\forall M' < M \quad \exists a \in A \quad M' < f(a)$

$\sup_A f$ = la plus petite majoration

Ex $f \quad x \mapsto x^2$, $\quad \sup_{]-5,2[} f = ?$

$f \quad x \mapsto \sin x \qquad \sup_{\mathbb{R}^+} f = ?$



$f(x) = x^2$

$f'(x) = -2x$

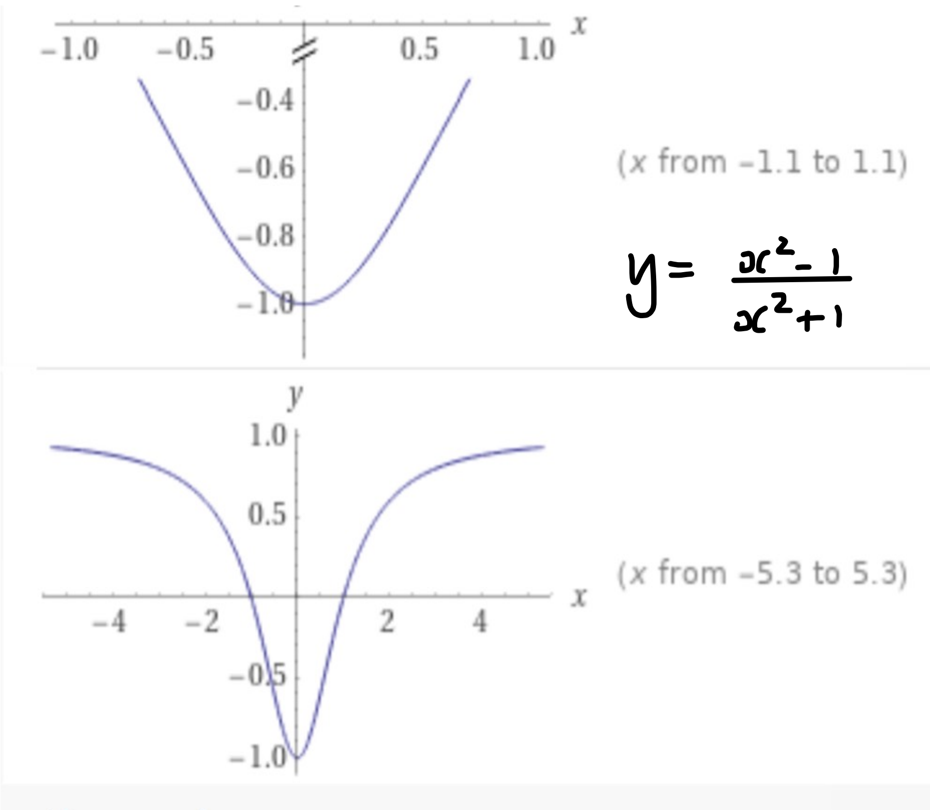
variations

x		0	
$f'(x)$	<0	0	>0
f	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

$\sup_{]-5,2[} = \max\{f(5), f(2)\}$ $\qquad \inf_{]-5,2[} = f(0)$

Exo1 définir $g(x) = \dfrac{x^2-n^2}{x^2+n^2}$ et faire une étude de ce fn

effectivement j'avais inversé ☹



$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$x^2-n^2 < x^2+n^2 \quad \forall x, n \Rightarrow \dfrac{x^2-n^2}{x^2+n^2} < 1 \Rightarrow \sup D_n \leqslant 1$

Or $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-n^2}{x^2+n^2} = 1 \Rightarrow \sup D_n = 1$

$n^2-x^2 \leqslant x^2+n^2 \quad \forall x, n \Rightarrow \dfrac{n^2-x^2}{x^2+n^2} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{x^2-n^2}{x^2+n^2} \geqslant -1$

$\inf D_n \geqslant -1$ mais $\forall t \quad \dfrac{x^2-t^2}{x^2+t^2} > -1$ si $x \neq 0$

Conclusion $\sup D_n = 1$ non atteint

$\inf D_n = -1$ atteint en 0

Exercice 2. Soit f et g deux fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup_{\mathbb{R}}(f+g) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$.

Exercice 3. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Déterminer $\sup_A f$.

Exo 2 il suffit de mq $\sup f + \sup g$ est une majoration de $f(t) + g(t)$ $\forall t$

On a $f(t) \leq \sup f$, $g(t) \leq \sup g$ $\Rightarrow$ $(f+g)(t) = f(t) + g(t) \leq \sup f + \sup g$

$\sup(f+g)$ = plus petit majoration de $(f+g)(t)$ $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ $\square$

Exo 3 f est croissante $\Rightarrow$ $\forall t \in A$, $f(t) \leq f(\sqrt{2})$

$\Rightarrow \sup_A f \leq f(\sqrt{2})$

$a_n = E(10^n \sqrt{2}) \times 10^{-n} \in \mathbb{Q}$, $a_n < \sqrt{2}$ $\Rightarrow a_n \in A, \forall n$

et $a_n \to \sqrt{2}$ $\underset{f \text{ cont}}{\Rightarrow}$ $f(a_n) \to f(\sqrt{2})$ $\Rightarrow \sup_A f = f(\sqrt{2})$

Rq on a pas besoin d'expliciter a_n car $\mathbb{Q}$ dense, A ouvert

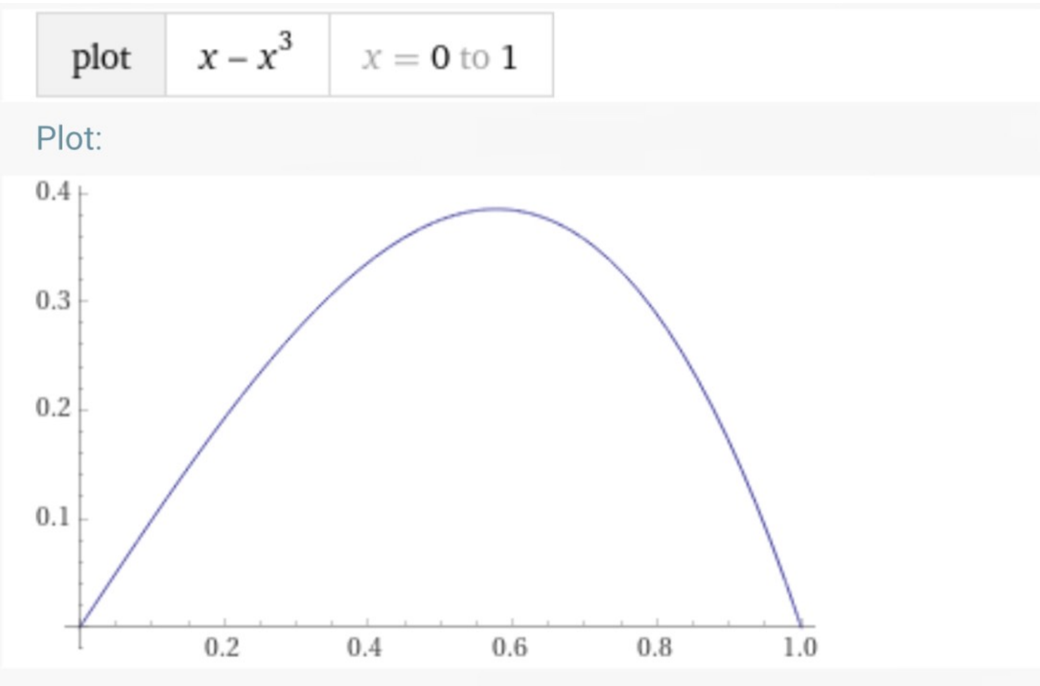
Exercice 4. Soit $B = \mathbb{Q} \cap]0,1[$. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $g(x) = x - x^3$. Déterminer $\sup_B g$ et $\inf_B g$.

On commence par faire comme si $B = [0,1]$

$g(x) = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$

$\Rightarrow$ $g(0) = g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]0,1[$

car $x > 0$ et $1-x^2 > 0$



Donc $\inf_B g = 0$, $B = [0,1]$

g est de classe C^2 car polynôme et on cherche pts crit

$g'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$g''(x) = -6x < 0$ si $x = 1/\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ maximum avec $g(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2}{3}$

$= 2/3^{3/2}$

$\approx 0{,}385$

$\sup_B g = 2(3^{-3/2})$

Puis on se dit $]0,1[\cap \mathbb{Q}$ dense dans $[0,1]$ pour conclure