Exercice 5 : En dimension infinie

1) Donner un exemple de forme linéaire non-continue sur l'espace des polynômes muni de la norme $\|P\| = \int_0^1 |P(x)|\,dx$.

2) Montrer qu'il y a toujours des formes linéaires non bornées sur un espace vectoriel normé de dimension infinie (on se rappellera qu'il existe une base algébrique de taille infinie).

3) En déduire qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si toutes ses normes sont équivalentes.

1/ $P \mapsto P(0)$ $\quad U_n(x) = (n+1)\,x^n$

$$\|U_n\|_1 = \int_0^1 (n+1)x^n = [x^{n+1}]_0^1 = 1$$

$$U_n(1) = n+1 \to \infty \quad n \to \infty$$

2/ U_i est une base alg pour les polynômes

Soit B banach par AC $\exists$ une base alg e_λ, $\lambda \in \Lambda$

On choisit $\mathbb{N} \hookrightarrow \Lambda$, $f_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}$ lin indep

On définit ϕ $B \to \mathbb{R}$

$\phi(f_i) = i$, $\phi(\sum^n x_i f_i) = \sum i x_i$

$\phi(g) = 0$ $\quad g \notin \langle f_i \rangle_{i \in I}$

3/ Si $\dim B < \infty$, $\quad \{f, \|f\|_\infty \leq 1\}$ cpt

$B = \langle e_i \rangle_{i=1}^n$ $\quad \{f, \|f\|_\infty = 1\}$

Soit $\|\ \|$ une norme sur B

$$\|v\| = \|\sum x_i e_i\| \leq \sum |x_i|\,\|e_i\| \leq \|v\|_\infty \max\{e_i\}$$

$\Rightarrow$ $v \mapsto \|v\|$ cont

$\Rightarrow$ $\inf\{\|f\|, f \in S\} > 0$ car $\|\ \|$ norme

atteint

$\| \|_\infty , \| \|_1$ sur les poly $[0,1] \to \mathbb{R}$ pas equiv

Version 1/

On suppose f_i, une base alg de B

$\|f_i\| = 1$

$\forall g \in B, \exists y_i \in \mathbb{R}$ tq $g = \sum^n y_i f_i$

On définit $\|g\| = \sup |y_i|$

$\frac{\|f_i\|_\infty}{\|f_i\|} = i \to \infty \quad i \to \infty$

Version II/

D'après l'exo 2 2 $\|f\|_\phi = \|f\| + \|\phi(f)\|$

est une norme et notre forme non bornée pour $\| \|$

est bornée pour $\| \|_\phi$

$\| \|$ et $\| \|_\phi$ sont pas équiv

si équiv $\exists\ 0 < m < M < \infty$ tq $m\|f\| \leq \|f\|_\phi \leq M\|f\|$

en part $\|f\|_\phi / \|f\| \leq M, \forall f \neq 0$

<u>Mais</u>

$$\frac{\|f_i\|_\phi}{\|f_i\|} = \frac{1 + i}{1} \to +\infty \text{ quand } i \to \infty$$