Exercice 9 : Convexes et demi-espaces fermés

Soit C un convexe fermé dun espace de Banach E. On appelle demi-espace fermé de E tout ensemble de la forme

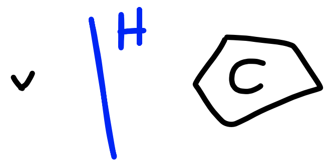
$$D = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

où $f \in E^*$ et $\alpha \in E$. Montrer que C est l'intersection de tous les demi-espaces fermes qui le contiennent.

Soit $\{D_\lambda, \lambda \in I\}$ la famille de demi espace fermé tq $C \subset D_\lambda$

$C \subset \bigcap_\lambda D_\lambda$ mais il faut égalité

Soit $v \notin C$, $\exists$ hyperplan qui sépare v, C



Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique) : Soient A et B deux ensembles convexes non vides disjoints de l'espace vectoriel normé E.

- Si A est ouvert, il existe un hyperplan qui sépare A et B (au sens large).
- Si A est fermé et B est compact, il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.

$A = C$ et $B = \{v\}$ vérifie les hypothèse

$\Rightarrow$ $\exists$ H fermé qui sépare

et $\exists f \in E^*$ tq $H = \ker f + f(y)$ $\forall y \in H$

quitte à remplacer f par $-f$ si nécessaire $\quad f(v) > f(y) \geq f(x) \quad \forall x \in C$

$\Rightarrow v \notin \bigcap_\lambda D_\lambda$