Exercice 1 : Séries à la limite de la convergence On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$. Soit (c_n) une suite de coefficients strictement positifs qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et soit T l'application de X dans X définie par $Tx = T(x_n) = (c_n x_n)$.
1) Montrer que T est bien définie et injective.
2) Montrer que T ne peut admettre d'inverse borné et en déduire que T n'est pas surjective.
3) Montrer que pour toute suite positive (c_n) qui tend vers 0, il existe une suite positive (u_n) telle que $(\sum c_n u_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge. 4) (*) Etant donné une séries (c_n) de coefficients strictement positifs qui tend vers 0 construire explicitement une suite positive (u_n) telle que $(\sum_n c_n u_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

1) $c_n \to 0 \Rightarrow (c_n)$ bornée $\Rightarrow \|(c_n)\|_\infty < \infty$

$$\|Tx\| = \sum_n |c_n x_n| = \sum_n c_n |x_n| \leq \|(c_n)\|_\infty \, \|(x_n)\|_1$$

ou appliquer Holder

$$x \in \ker T \Rightarrow c_n x_n = 0 \ \forall n \Rightarrow x_n = 0 \ \forall n \Rightarrow x = 0$$

$c_n > 0$

donc $\ker T = 0$ et T injectif

2) $T^{-1}x \to (x_n / c_n)$ est bien défini car $c_n > 0$

$$\|T^{-1}x\| = \sup_{\|x\|=1} |T^{-1}x| \geq T^{-1}e_i = 1/c_i \to +\infty, \ i \to \infty$$

T surjectif $\Rightarrow T$ ouvert $\Rightarrow T^{-1}$ borné

T ~~surjectif~~ $\Leftarrow T$ ~~ouvert~~ $\Leftarrow T^{-1}$ non borné

$$U = \{ \|x\| < 1 \}$$

$T(U)$ ouvert $\Rightarrow \exists\, r > 0$ tq $V = \{ \|v\| < r \} \subset U$

$$T^{-1}V \subset T^{-1}(TU) = U$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| < r} |T^{-1}x| \leq 1$$

$$\Rightarrow \|T^{-1}\| \leq 1/r$$

3) Soit $c = (c_n)$, $c_n \to 0$

$\mathrm{Im}\, T \subsetneq \ell^1 \Rightarrow \exists\ v = (v_n) \notin \mathrm{Im}\, T$

si $u = (u_n)$, $u_n = v_n / c_n$ alors $Tu = v \Rightarrow u \notin \ell^1$ car $v \notin \mathrm{Im}\, T$

4/