Sommes géométriques complexes

Formule générale

Pour tout $q \neq 1$:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

—

(d)

$$\sum_{l=0}^{7} (-1+i)^l$$

Ici :

$$q = -1 + i, \quad N = 7$$

Calculons q^8 :

$$(-1+i) = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$$
$$q^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i8(3\pi/4)} = 2^4 e^{i6\pi} = 16$$

Ainsi :

$$S_d = \frac{1 - q^8}{1 - q} = \frac{1 - 16}{1 - (-1+i)} = \frac{-15}{2 - i}$$

Multiplions par le conjugué $2 + i$:

$$S_d = \frac{-15(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-15(2+i)}{5} = -3(2+i) = -6 - 3i$$

$$\boxed{S_d = -6 - 3i}$$

—

(e)

$$\sum_{k=0}^{7} (1+i)^k$$

Ici :

$$q = 1 + i, \quad N = 7$$

$$(1+i)=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \quad \Rightarrow \quad q^8=(\sqrt{2})^8 e^{i8(\pi/4)}=2^4 e^{i2\pi}=16$$

Ainsi :

$$S_e=\frac{1-q^8}{1-q}=\frac{1-16}{1-(1+i)}=\frac{-15}{-i}=-15i$$

$$\boxed{S_e=-15i}$$

—

(f)

$$\sum_{m=0}^{12} e^{i(2\pi m/3)}$$

Ici :

$$q=e^{i(2\pi/3)}$$

C'est une racine cubique de l'unité :

$$1+q+q^2=0, \quad \text{et} \quad q^3=1$$

Les termes se répètent tous les trois :

$$(1,q,q^2,1,q,q^2,\dots)$$

Puisqu'il y a 12 termes, soit 4 cycles complets :

$$\sum_{m=0}^{12} q^m=4(1+q+q^2)=4\times 0=0$$

$$\boxed{S_f=0}$$

—

Résultats finaux

$$\boxed{\begin{array}{l} d)=-6-3i \\ e)=-15i \\ f)=0 \end{array}}$$