UGA
2023-24

L2

CC1 MAT305

You can write in english.

Exercice 1

Calculer les derivées partielles f_x, f_y et f_{xy}, f_{yx} pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = x^3y^2 + 5y^2 - x + 7$

$$f_x = 3x^2y^2 - 1 \Rightarrow f_{yx} = 6x^2y$$
$$f_y = 2x^3y - 10y \Rightarrow f_{yx} = 6x^2y$$

2. $f(x, y) = \cos(xy^2) + \sin x$

$$f_x = -y^2\sin(xy^2) + \cos x \Rightarrow f_{yx} = -2xy^3cos(xy^2) - 2ysin(xy^2))$$
$$f_y = -2xy\sin(xy^2)$$

3. $f(x, y) = e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$

$$f = e^{x^2}\sqrt{x^2+1} \times e^{y^3} = u(x)v(y)$$

$$f_y = u(x)v'(y) = u(x) \times 3y^2e^{y^3}$$
$$f_x = u'(x)v(y) = e^{x^2} \times \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{y^3}$$
$$\Rightarrow f_{yx} = u'(x)v'(y) = e^{x^2} \times \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}} \times 3y^2e^{y^3}$$

4. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+1}$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions f suivantes calculer $f_{xx} + f_{yy}$:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -2$$

2. $f(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$

$$f = u + y$$

$$u = u_x = u_{xx} = e^x \sin(y)$$
$$u_y = e^x \cos(y) \Rightarrow u_{yy} = -e^x \sin(y) = -u$$

De même

$$v_x = e^y \sin(x) \Rightarrow v_{xx} = -e^y \cos() = -v$$
$$v = u_y = u_{yy} = e^y \cos(x)$$

finalement

$$f_{xx} + f_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) + (v_{xx} + v_{yy}) = 0 + 0$$

3. $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$

$f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$

$$f_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow f_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

De même

$$f_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -f_{xx} \Rightarrow f_{xx} + f_{yy} = 0$$

Exercice 3

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$.

1. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interpretation geométrique.

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^c$$

C'est l'equation d'un cercle de centre (0,0) de rayon e^c.

2. Monter que $f \circ \gamma$ est constante où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et préciser la valeur du constant.

$$f \circ \gamma(t) = \log(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = \log(1) = 0$$

3. Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ.

$$\mathrm{grad} f = (f_x, f_y) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}) = \frac{2}{x^2+y^2} \times (x,y)$$

$$\dot{\gamma} = (-\sin(t), \cos(t))$$

4. Calculer le produit scalaire $(\mathrm{grad}\, f).\dot{\gamma}$ et representer le résultat graphiquement.

$$\mathrm{grad} f.\dot{\gamma} = (\cos(t), \sin(t)).(-\sin(t), \cos(t))$$