CC2 4 decembre
Durée : 1h

Documents et appareils electroniques (dont telephones portables et calculatrices) interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+3z \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ x+3y \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f, g ainsi que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications linéaires.
2. Trouver le noyau de f et de g.
3. Calculer la matrice de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
4. Calculer le determinant de chacune de ces matrices.
5. L'application f est-elle surjective ? Justifier.
6. L'image de g est un plan de $\mathbb{R}^3$.
   - Donner une forme paramétrique de ce plan.
   - Donner une équation cartésienne de ce plan.

---

1. L'application f est linéaire car elle s'ecrit sous forme matricielle :

   $$f(\vec{x}) = A_f \vec{x}$$

   ou A_f est la matrice de f :

   $$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   De même pour g sa matrice est :

   $$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Si (x, y, z) est dans le noyau de f alors

   $$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \qquad (1) \\ x+2y+3z &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Il en résulte que $y+2z=0$ et donc $y=-2z$. En remplaçant y par $-2z$ dans (1) on obtient $x=z$. Donc le noyau de f est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si (x,y) est dans le noyau de g alors

$$\begin{aligned} x+y &= 0, && (3) \\ x+2y &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Il en résulte que $y=0$ et donc $x=0$. Donc le noyau de g est trivial.

3. La matrice de $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par le produit $A_f A_g$:

$$A_f A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

De même pour $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donnée par le produit $A_g A_f$:

$$A_g A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

4. Le determinant de $A_f A_g$ est 6 et celui de $A_g A_f$ est 0.

5. L'application f est surjective car tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison lineaire de $(1,1)$ et $(1,2)$ qui sont les premières colonnes de A_f.

6. L'image de g est le plan passant par l'origine et généré par les vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,2,3)$.

   - Une forme paramétrique de ce plan est

   $$\left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

   - ce plan consiste des vecteurs perpendiculaire au produit vectoriel de $(1,1,1)$ et $(1,2,3)$ à savoir $(1,-2,1)$. Donc une équation cartésienne de ce plan est

   $$x - 2y + z = 0.$$

Exercice 2

En interprétant la conservation des divers éléments comme une condition linéaire sur les quantités de réactif, équilibrer les réactions suivantes :

- $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

$$2C_4H_{10} + 13O_2 \rightarrow 8CO_2 + 10H_2O$$

- $FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$

$$4FeS_2 + 11O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$$

$$aC_4H_{10} + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

- Étape 1 : Écrire les équations de conservation
  - Carbone (C) : $4a = c$
  - Hydrogène (H) : $10a = 2d$
  - Oxygène (O) : $2b = 2c + d$
- Étape 2 : Résoudre le système Introduisez un paramètre (par exemple, $a = 1$) pour simplifier. Alors :
  - À partir de $4a = c$: $c = 4$
  - À partir de $10a = 2d$: $d = 5$
  - À partir de $2b = 2c + d$: $2b = 8 + 5 \Rightarrow b = 6\frac{1}{2}$
- Pour éliminer les coefficients fractionnaires, multipliez par 2 :

$$2C_4H_{10} + 13O_2 \rightarrow 8CO_2 + 10H_2O$$

Exercice 3

- Calculer le determinant de chacune de matrices.
- Determiner le noyau de l'application lineaire associée.
- **Point bonus :** Montrer que deux matrices sont inversibles et l'une est l'inverse de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- Le determinant de A est 1, celui de B est 0 et celui de C est 1.
- En effet A et C sont inverses l'une de l'autre car

$$AC = CA = I_3.$$

Il s'en suit que $\ker f_A = \{0\}$ et $\ker f_C = \{0\}$.

- Quant à B il n'est pas inversible car son determinant est nul. Si (x, y, z) est dans le noyau de f_B alors

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0, &(5)\\ 3x + y + 2z &= 0, &(6)\\ -7x - y - 8z &= 0. &(7) \end{aligned}$$

En sommant (1) et (3) on obtient $-6x - 9z = 0$ et donc $x = -\frac{3}{2}z$. En remplaçant x par $-\frac{3}{2}z$ dans (1) on obtient $y = \frac{5}{2}z$. Donc le noyau de f_B est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$