Exercice 4 : Injections

Soient p et q des nombres réels tels que $1 \leq q < p \leq +\infty$. Il y a-t-il une inclusion entre $\ell^q(\mathbb{N})$ et $\ell^q(\mathbb{N})$? Entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$? Entre $L^p([0,1])$ et $L^q([0,1])$? Démonstration ou contre-exemple. Lorsqu'une telle inclusion existe, est ce qu'elle est continue ?

Soit $f \in \ell^p(\mathbb{N})$ $p < \infty$, $\Rightarrow f(n) \to 0 \quad n \to \infty$

$\Rightarrow \exists M \quad \forall n > M \quad |f(n)| < 1$

$\Rightarrow \|f\|_\infty < \infty$

Donc $\ell^1 \subset \ell^\infty$ mais $f \quad n \mapsto 1$, $\|f\|_\infty = 1$, $f \not\to 0 \Rightarrow f \notin \ell^p$, $p < \infty$

$$\|f\|_p = \sum_n |f(n)|^p \leq M \|f\|_\infty^p + \sum_{n>M} |f(n)|^p$$

$$\leq M \|f\|_\infty^p + \sum_{n>M} |f(n)|$$

$$\leq M \|f\|_\infty^p + \|f\|_1$$

On peut remplacer ℓ^1 par ℓ^q avec $q < p$

$f(n) = 1/n+1 \quad \|f\|_2^2 = \sum 1/n^2 = \pi^2/6 < \infty.$

mais $\|f\|_1 = \sum 1/n$ DV

Donc $\ell^1 \subset \ell^2$ mais $\ell^2 \not\subset \ell^1$

En effet $\|f\|_p^p = \sum 1/n^p$ CV car série de R $p>1$

Donc $\ell^1 \subset \ell^p$ mais $\ell^p \not\subset \ell^1$

Jouez avec l'exposant pour mq $\ell^p \not\subset \ell^q$ $p>q$

Soit $f \in L^2[0,1]$ D'après Holder

$$\|f\|_1 = \|f \chi_{[0,1]}\| = \|f\|_p \|\chi_{[0,1]}\|_q = \|f_p\|$$

Donc $L^p \subset L^1$, $1 \leq p < \infty$

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = [2x^{1/2}]_0^1 = 2$$

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 x^{-1}\, dx = [-\ln x]_0^1 \quad \text{DV}\ \text{''}$$

Donc $L^1 \not\subset L^2$ et on penx "jouer" avec l'indice pour mq $L^1 \not\subset L^p$ $p>1$

Finalement $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$ car avec, un peu près le m̂ f

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \|f\|_1 &= 2 \quad \text{tjrs} \\ \|f\|_2^2 &\quad \text{DV} \end{aligned}$$

MAIS $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$

$$g(x) = \begin{cases} 1/x & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \qquad \|f\|_1 = \int_1^\infty x^{-1}\, dx = 2[\ln x]_1^\infty \quad \text{DV}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_1^\infty 1/x^2\, dx = -[1/x]_1^\infty = 1$$

en jouant avec les exposants

$$L^p \subset L^q \iff p = q$$

On commence avec le cas facile

$\ell^p \hookrightarrow \ell^\infty$ continue ??

Continue $\iff \exists\, M>0,\ \|f\|_\infty \leq M\|f\|_p \quad \forall f$

$$\|f\|_p^p = \sum |f(n)|^p > \max |f|^p \geq \|f\|_\infty^p \Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|f\|_p$$

Plus généralement

$\forall\, q>p \quad \|f\|_q \leq \|f\|_p$

il suffit de mq $\|f\|_p = 1 \Rightarrow \|f\|_q \leq 1$

Soit f, $1 = \|f\|_p^p = \sum |f|^p \Rightarrow |f(n)| \leq 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow |f(n)|^q \leq |f(n)|^p \quad \forall n$

$\Rightarrow \sum |f(n)|^q \leq \sum |f(n)|^p = 1$

$\Rightarrow \|f\|_q^q \leq 1 \Rightarrow \|f\|_q \leq 1$