## Exercice 4

Pour la fonction  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , voici les étapes demandées :

## 1. Déterminer le domaine de définition

La fonction  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  est une fonction rationnelle. Elle est définie tant que le dénominateur n'est pas nul.

Il faut donc résoudre :

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

Le domaine de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

#### 2. Calculer la dérivée

Pour calculer la dérivée de  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , nous utilisons la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{(u/v)' = u'v - uv'}{v^2}$$

où u(x) = x - 1 et v(x) = x + 1.

- La dérivée de u(x) = x 1 est u'(x) = 1,
- La dérivée de v(x) = x + 1 est v'(x) = 1.

En appliquant la formule, nous avons :

$$f'(x) = \frac{(1)(x+1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

Simplifions l'expression:

$$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

#### 3. Tableau de variations

La dérivée  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$  est toujours positive pour  $x \neq -1$ , car le carré est toujours positif et 2 est un nombre positif. Cela signifie que la fonction est **strictement croissante** sur chacun des intervalles  $]-\infty, -1[$  et  $]-1, +\infty[$ .

Il existe une asymptote verticale en x=-1, car la fonction n'est pas définie en ce point et tend vers  $\pm \infty$  à proximité de cette valeur.

## Asymptote horizontale

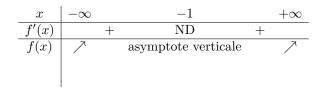
Il est utile de calculer la limite de la fonction lorsque x tend vers  $\pm \infty$ :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x+1}=1\quad \text{et}\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$$

La fonction admet donc une asymptote horizontale en y = 1.

## Tableau de variations

Le tableau de variations est donc :



# Conclusion

- Domaine de définition : R \ {-1}
  Dérivée : f'(x) = <sup>2</sup>/<sub>(x+1)<sup>2</sup></sub>, toujours positive sauf en x = -1.
  La fonction est strictement croissante et présente une asymptote verticale en x = -1 ainsi qu'une asymptote horizontale en y = 1.