.**Q**uick Test 1

NOM Prénom :
GITHUB Copilot

.

.

Exo 1 : forme algébrique

Mettre les expressions suivantes sous forme algébrique :

1. $$\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

2. $$(2+i)^2 + \operatorname{Im}\overline{1+i} = 3+4i-1 = 2+4i$$

3. $$5\times\left(\overline{\frac{4+7i}{8+i}})\right) = 5\times\frac{(4+7i)(8+i)}{8^2+1^2} = 5\times\frac{32+4i+56i+7i^2}{65} = 5\times\frac{25+60i}{65} = \frac{25}{13}+i\frac{60}{13}$$

4. $$\frac{a+i}{1-ai} = \frac{(a+i)(1+ai)}{(1-ai)(1+ai)} = \frac{a+a^2i+i-a}{1+a^2} = \frac{(a^2+1)i}{1+a^2} = i$$

Exo 2 : forme exponentielle

Mettre les expressions suivantes sous forme exponentielle :

1. $$Z = (1+i)^4 = (\sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4}))^4 = (\sqrt{2})^4\exp(i\pi) = 4\exp(i\pi)$$

2. $$Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{2\exp(i\frac{\pi}{6})}{\sqrt{2}\exp(-i\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\exp(i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\exp(i\frac{5\pi}{12})$$

3. $$Z = \frac{\exp(i\frac{\pi}{6})\times\exp(-i\frac{\pi}{3})}{\exp(i\frac{\pi}{4})} = \exp(i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})) = \exp(-i\frac{5\pi}{12})$$

4. $$Z = \frac{\left(\exp(i\frac{\pi}{3})\right)^3}{\left(\exp(-i\frac{\pi}{2})\right)^2} = \frac{\exp(i\pi)}{\exp(-i\pi)} = \exp(2i\pi) = 1$$

Exo 3

Résoudre les équations :

1. $X^2 - 4X + 8 = 0$
   si $X = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\Delta = 16 - 32 = -16$ et les solution sont
   $$\frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i$$
2. $X^2 = -3 - 4i$
   si $X = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors
   $$X^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$$
   donc $x^2 - y^2 = -3$ et $2xy = -4$, soit $xy = -2$. On a donc
   $$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ x^2 - y^2 & = & -3 \end{array}$$
   d'où $2x^2 = 2$ et $x = \pm 1$. Si $x = 1$, alors $y = -2$ et si $x = -1$, alors $y = 2$. Donc les solutions sont $\pm(1 - 2i)$.
3. Résoudre à la fois : $X^2 = -7 - 24i \quad \text{et} \quad X^2 = -7 + 24i$
   - Pour la première équation : si $X = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors
     $$X^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i$$
     donc $x^2 - y^2 = -7$ et $2xy = -24$, soit $xy = -12$. On a donc
     $$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{7^2 + 24^2} = 25 \\ x^2 - y^2 & = & -7 \end{array}$$
     d'où $2x^2 = 18$ et $x = \pm 3$. Si $x = 3$, alors $y = -4$ et si $x = -3$, alors $y = 4$. Donc les solutions de la première équation sont $\pm(3 - 4i)$.
   - De même, pour la deuxième équation, on trouve les solutions $\pm(3+4i)$ car $-7 + 24i$ est le conjugué de $-7 - 24i$. et $3 + 4i$ est le conjugué de $3 - 4i$.