1. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la suite $(\frac{1}{n}(a_1 + ... + a_{n_0}))_{n\in\mathbb{N}^*}$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $b_n - l$ en fonction des $a_i - l$, avec $i = 1, ..., n$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et des réels $x_1, ..., x_k$ tels que $x_1, ..., x_k \in]-\epsilon, +\epsilon[$. Montrer pour tout entier $m \geqslant k$, on a $\frac{1}{m}(x_1 + ... + x_k) \in]-\epsilon, +\epsilon[$.
4. Montrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
5. La réciproque est-elle vraie ?
6. Que peut-on dire si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$?

1/ $(a_i)_i$ CV $\Rightarrow \{a_i, i \geqslant 0\}$ bornē $\exists\, m, M$

$m \leqslant a_i \leqslant M$

$\Rightarrow m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{1} a_i \leqslant M$

donc $\frac{1}{n}\sum^{n} a_i$ bornēe

2/ $b_n - l = \frac{1}{n}\sum^{n} a_i - l = \frac{1}{n}\left(\sum^{n} a_i - nl\right) = \frac{1}{n}\sum^{n}(a_i - l)$

3/ $x_i \in]-\varepsilon, \varepsilon[\Leftrightarrow -\varepsilon < x_i < \varepsilon$

$\Rightarrow -n\varepsilon < \sum^{n} x_i < n\varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n}\sum^{n} x_i < \varepsilon$

4) $a_n \to l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \quad -\varepsilon < b_n - l < \varepsilon \quad \forall n > N$

3/ avec $x_i = a_i - l$

$\Rightarrow b_n \to l$

5/ $a_n = (-1)^n \qquad b_n = \begin{cases} -1/n & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases} \qquad b_n \to 0$

6/

$a_n \to \infty \Rightarrow \forall M > 0 \ \exists N > 0$ tq

$a_n > M \quad n \geq N$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum^{N-1} a_n + \frac{1}{n} \sum_N a_n$$

$$\geq \frac{1}{n} S + \frac{1}{n}(n-N) M$$

$$= O(1/n) + (1 - O(1/n)) M \to M$$

Donc $\exists N'$ tq $b_n \geq M-1 \quad \forall n \geq N'$

c-à-d $\forall M' = M-1 \ \exists N' \geq N$ tq $b_n \geq M'$

$\Rightarrow b_n \to +\infty$