3.3 Géométrie élémentaire en dimensions 2 et 3

On va ici s'intéresser au **plan affine** et à l'**espace affine**, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ vus comme des ensembles de points.

3.3.1 Repère cartésien - Coordonnées d'un point

Définition Un **repère cartésien** du plan (respectivement : de l'espace) est formé d'un point O (l'origine du repère) et d'une base de $\mathbb{R}^2$ (respectivement de $\mathbb{R}^3$).

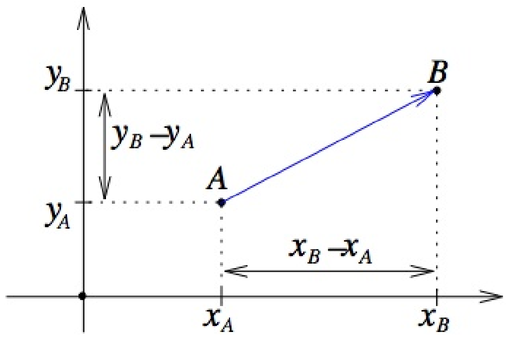
Dans un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on dit que le point M défini par $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ a pour **coordonnées** (x, y), et on note $M(x, y)$.
Dans un repère cartésien $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, on dit que le point M défini par $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ a pour **coordonnées** (x, y, z), et on note $M(x, y, z)$.

Ainsi, nous pouvons déterminer les composantes d'un vecteur à partir des coordonnées des deux points qui définissent ce vecteur :

Théorème Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère cartésien du plan. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont données par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

On a bien sûr la même relation dans $\mathbb{R}^3$, avec $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, et $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

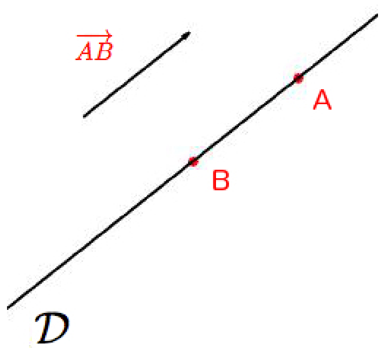


Exemple *Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan et soient $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(5, 0)$ et $D(2, -1)$ quatre points du plan. Les composantes de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 2 - 1) = (3, 1)$.*
Les composantes de $\overrightarrow{DC}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont $\overrightarrow{DC} = (5 - 2, 0 - (-1)) = (3, 1)$.
On remarque que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ce qui signifie que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3.3.2 Géométrie élémentaire dans le plan affine (dimension 2)

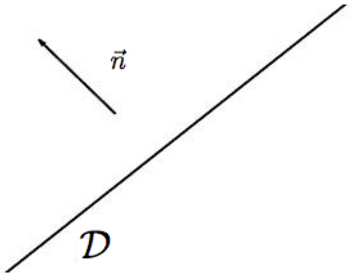
3.3.2.1 Vecteur directeur et vecteur normal à une droite

Définition On appelle **vecteur directeur** d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$. Ainsi un vecteur directeur détermine la direction d'une droite.



Remarque Pour une droite donnée, il existe une infinité de vecteurs directeurs. Tous ces vecteurs directeurs sont colinéaires entre eux.

Définition On appelle **vecteur normal** d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur directeur $\vec{n}$ d'une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$



$\vec{n}$ est donc perpendiculaire à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque Là encore, pour une droite donnée, il existe une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.

3.3.2.2 Equation d'une droite dans le plan

On va expliciter ici les deux façons principales d'exprimer une droite dans le plan affine : par une **équation cartésienne** ou sous une **forme paramétrique**.

Définition Soient α, β et γ trois réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (i.e. au moins un des deux n'est pas nul). Alors l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{D} = \{M(x, y);\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$$

est une droite. On dit que l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une **équation cartésienne** de cette droite.
Notons que cette caractérisation n'est pas unique puisque, par exemple, $2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma = 0$ est aussi une équation cartésienne de la même droite.

Remarque Si $\beta = 0$ l'équation se ramène à $x = r$ avec $r = -\gamma/\alpha$ (puisque $\alpha \neq 0$) : c'est une droite parallèle à l'axe Oy. Si $\beta \neq 0$, l'équation se ramène à $y = ax + b$ avec $a = -\alpha/\beta$ et $b = -\gamma/\beta$, ce qui une forme très souvent utilisée pour caractériser une droite. L'équation cartésienne a l'avantage de couvrir les 2 cas, sans caractériser différemment les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

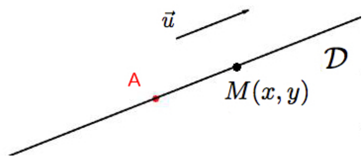
Théorème Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

$\vec{n} = (\alpha, \beta)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ (et donc $\vec{u} = (\beta, -\alpha)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$).

On peut aussi remarquer que pour définir une droite $\mathcal{D}$ du plan, il suffit en fait d'un point $A(x_A, y_A)$ appartenant à $\mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ de $\mathcal{D}$. Ces deux informations permettent notamment d'obtenir une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$:

Théorème Un point $M(x, y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel λ (appelé *paramètre*) tel que

$$\begin{cases} x &= x_A + \lambda x_{\vec{u}} \\ y &= y_A + \lambda y_{\vec{u}} \end{cases}$$



Exemple *Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(2, 1)$ et dont $\vec{u} = (-3, -1)$ est un vecteur directeur. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel λ tel que*

$$\begin{cases} x &= 2 - 3\lambda \\ y &= 1 - \lambda \end{cases}$$

Autrement dit : $\mathcal{D} = \{M(2 - 3\lambda, 1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Cette phrase se lit : "la droite $\mathcal{D}$ est constituée des points M de coordonnées $(2 - 3\lambda, 1 - \lambda)$, pour toutes les valeurs possibles du réel λ".

Remarque Pour une droite donnée, le choix d'un point et d'un vecteur directeur n'est évidemment pas unique. Il existe donc une infinité de représentations paramétriques.

Passage d'une forme à l'autre On peut évidemment facilement passer d'une équation de droite sous forme cartésienne à une équation de droite sous forme paramétrique, et vice versa. Par exemple :

- Considérons la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne : $2x - y + 5 = 0$, et cherchons en une forme paramétrique. En $x = 0$, la droite passe par l'ordonnée $y = 5$. Le point $A(0, 5)$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Le vecteur $\vec{u} = (-1, -2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Ainsi un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel λ tel que

$$\begin{cases} x &= -\lambda \\ y &= 5 - 2\lambda \end{cases}$$

- Considérons la droite $\mathcal{D}$ définie par la forme paramétrique $\{M(4 + \lambda, -1 + 2\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$, et cherchons une équation cartésienne de cette droite : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. $\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2)$ (coefficients devant le paramètre λ) et donc pour vecteur normal $\vec{n} = (-2, 1)$. Ainsi nous pouvons choisir $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. De plus le point $A(4, -1)$ (obtenu en choisissant $\lambda = 0$) appartient à $\mathcal{D}$ donc $\gamma = -\alpha x_A - \beta y_A = -(-2) \times 4 - 1 \times (-1) = 9$. Ainsi un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il vérifie l'équation $-2x + y + 9 = 0$.

3.3.2.3 Intersection de 2 droites dans le plan

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ peuvent être **sécantes** (elles possèdent alors un seul point commun). Dans le cas contraire, elles sont **parallèles** : elles sont alors **confondues** (et possèdent une infinité de points communs) ou **strictement parallèles** (et n'ont aucun point commun).

Théorème Deux droites sont parallèles si et seulement si l'une des caractérisations suivantes est vérifiée :

— leurs deux vecteurs directeurs sont colinéaires

— leurs deux vecteurs normaux sont colinéaires

— le vecteur directeur de l'une est orthogonal au vecteur normal de l'autre

Pour déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes, on est amené à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Les 3 cas de figures possibles sont exposés dans les exemples ci-dessous.

Exemples

- *Intersection de* $\mathcal{D} = \{(x, y), x + y = 0\}$ *et* $\mathcal{D}' = \{(x, y) = (2 - \lambda, 1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  On a $x+y = 0$. *Or* $x = 2-\lambda$ *et* $y = 1-\lambda$ *donc* $(2-\lambda)+(1-\lambda) = 0$, *qui donne immédiatement* $\lambda = \frac{3}{2}$. *Ainsi,* $x = 2-\lambda = \frac{1}{2}$ *et* $y = 1-\lambda = -\frac{1}{2}$. *L'unique point d'intersection a pour coordonnées* $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

- *Intersection de* $\mathcal{D}: \ x + 2y + 2 = 0$ *et* $\mathcal{D}': \ 4x - y - 1 = 0$.

  Il faut donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrl} x + 2y & = & -2 & (L_1) \\ 4x - y & = & 1 & (L_2) \end{array}\right.$

  Pour éliminer x *dans la deuxième équation, on effectue la transformation* $(L_2) \leftarrow (L_2) - 4(L_1)$ *:*

  $$\left\{\begin{array}{rcrl} x + 2y & = & -2 & (L_1) \\ -9y & = & 9 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 4(L_1) \end{array}\right.$$

  On trouve alors $y = -1$. *Ce résultat est inséré dans* (L_1) *qui devient* $x - 2 = -2$, *ce qui donne* $x = 0$. *Par conséquent, l'unique point d'intersection entre* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *a pour coordonnées* $(0, -1)$.

- *Intersection de* $\mathcal{D} = \{(x, y) = (1 - 2\lambda, 2 + \lambda), \ \lambda \in \mathcal{R}\}$ *et* $\mathcal{D}' = \{(x, y) = (\mu, 1 + 3\mu), \ \mu \in \mathbb{R}\}$

  Un point d'intersection $M(x, y)$ *de* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *doit vérifier les deux caractérisations, ce qui donne* $x = 1 - 2\lambda = \mu$ *et* $y = 2 + \lambda = 1 + 3\mu$. *On a donc le système linéaire :*

  $$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -2\lambda & - & \mu & = & -1 & (L_1) \\ \lambda & - & 3\mu & = & -1 & (L_2) \end{array}\right.$$

  En faisant $(L_1)+2(L_2)$, *on élimine* λ *et on obtient* $-7\mu = -3$, *soit* $\mu = 3/7$. *D'où* $\lambda = -1+3\mu = 2/7$. *On en déduit alors* $x = 1 - 2\lambda = \mu = 3/7$ *et* $y = 2 + \lambda = 1 + 3\mu = 16/7$. *L'unique point d'intersection entre* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *a pour coordonnées* $(3/7, 16/7)$.

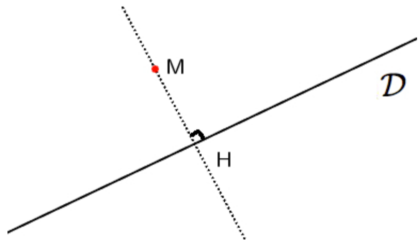
3.3.2.4 Distance entre deux points dans le plan

Théorème Soient A et B deux points du plan $\mathbb{R}^2$. La distance entre ces deux points est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3.3.2.5 Projection d'un point sur une droite - distance d'un point à une droite

Définition Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et M un point du plan. On appelle **projeté orthogonal** (ou **projection orthogonale**) de M sur la droite $\mathcal{D}$ le point d'intersection H entre la droite $\mathcal{D}$ et la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par M.



Définition La distance d'un point M à une droite $\mathcal{D}$ est la distance la plus courte entre M et un point appartenant à $\mathcal{D}$.

Théorème Le théorème de Pythagore permet d'affirmer que la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ correspond à la distance entre M et son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$.

Si l'équation de $\mathcal{D}$ est $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, et si M a pour coordonnées (x_0, y_0), alors la distance de M à la droite $\mathcal{D}$ vaut :

$$d(M, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

3.3.3 Géométrie élémentaire dans l'espace affine (dimension 3)

On va maintenant énoncer des définitions et des résultats similaires à ceux du §3.3.2, mais dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et non plus dans le plan $\mathbb{R}^2$.

3.3.3.1 Equation d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Un plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ peut être défini sous une **forme paramétrique** ou sous une **forme cartésienne**.

Définition Soient α, β, γ et δ quatre réels tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ (i.e. au moins un des trois n'est pas nul). Alors l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{M(x, y, z);\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}$$

est un plan. On dit que l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une **équation cartésienne** de ce plan. Notons que cette caractérisation n'est pas unique puisque, par exemple, $2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + 2\delta = 0$ est aussi une équation cartésienne du même plan.

Théorème Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une équation cartésienne de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

De plus, $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.