Généralités sur les types de croissance

Arthur Ledieu

ENS Lyon

2021

Généralités sur les types de croissance

- Domination faible
- Domination forte
- Affinements et conséquences dans le cas de groupes de type fini

Introduction

- Motivations
- Rappels
- Fonction de croissance généralisée

Motivations

- On souhaite étendre la définition de fonction de croissance (vue dans le cas de groupes de type fini la semaine dernière avec $\beta(\Gamma, S; k)$) pour plusieurs raisons :
    1. Apporter un cadre plus général aux résultats qui vont être énoncés ;
    2. Se ramener aux hypothèses les plus faibles possibles sur ces fonctions pour simplifier les démonstrations.
- Les résultats énoncés vont nous permettre d'aboutir à des résultats pratiques sur les groupes de type fini.
- Historiquement, l'étude de la croissance des groupes fut menée par *Efremovic* et *Milnor* pour aboutir à un théorème sur les variétés Riemanniennes qu'on n'étudiera pas.

Rappels

Définition :

- Si Γ est de type fini engendré par S, $|S| < \infty$ alors :

$$\ell_s := \begin{cases} \Gamma \longrightarrow \mathbb{N} \\ \gamma \longmapsto \min\{k; \exists a_1, a_2, \cdots a_n \in S \cup S^{-1}; \gamma = a_1 a_2 \cdots a_n\} \end{cases}$$

$$\beta(\Gamma, S; k) := \{\gamma \in \Gamma; \ell_s(\gamma) \leqslant k\}$$

- β ainsi créée est **sensible au choix de** S**. On montrera plus tard qu'on peut chercher à trouver une classe de** β **indépendante du choix du générateur.**

Rappels

Définitions :

- Un espace (X, d) est *pseudométrique* s'il vérifie toutes les conditions d'un espace métrique métrique sauf le caractère défini de d. On notera dans la suite que c'est un *esp. p-m*.
- Si X et X' sont des esp. p-m, $\Phi : X \to X'$ est un *plongement quasi-isométrique* (noté *q-isom*) si $\exists \lambda \geqslant 1, C \geqslant 0$;

$$\forall (x, y) \in X^2, \lambda^{-1} d(x, y) - C \leqslant d'(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant \lambda d(x, y) + C$$

- X et X' seront de plus *quasi-isométriques* si, $\exists D \geqslant 0; \forall x' \in X', \exists x \in X; x' \in B(\Phi(x), D)$

Fonction de croissance généralisée

Définition : Fonction de croissance

Une *fonction de croissance* est une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
On notera dans la suite $\mathfrak{C}$ l'ensemble de ces fonctions.

Exemples :

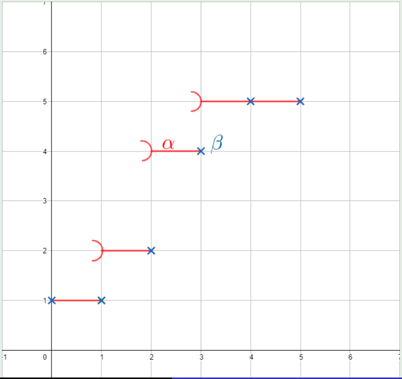
Les fonctions de croissance de groupes de type fini sont définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On se demande ainsi si il est possible de les prolonger sur $\mathbb{R}_+$. Plusieurs méthodes sont détaillées dans le chapitre.

Fonction de croissance généralisée

Exemples :

Si β est une fonction de croissance de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On cherche $\alpha \in \mathfrak{C}$ qui prolonge β :

- On peut poser $\forall t \in \mathbb{R}_+, \alpha(t) := \beta(\lceil t \rceil)$

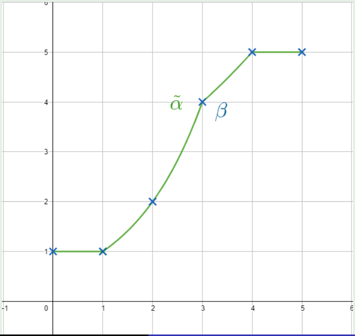


Fonction de croissance généralisée

Exemples :

- On peut également choisir de poser $\forall t \in \mathbb{R}_+$; si $\tau = t - \lfloor t \rfloor$:

$$\tilde{\alpha}(t) := \beta(\lfloor t \rfloor)\left(\frac{\beta(\lfloor t \rfloor + 1)}{\beta(\lfloor t \rfloor)}\right)^{\tau} ; \alpha \in C^0(\mathbb{R}_+)$$



Fonction de croissance généralisée

Définition : Fonction sous-multiplicative

β est *sous-multiplicative* $\iff \forall x, y, \beta(x+y) \leqslant \beta(x)\beta(y)$

Remarque :

- Si β de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ fonction de croissance sous-multiplicative, alors les fonctions α et $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{C}$ restent sous-multiplicatives.
- D'autres définitions de prolongement sont possibles mais ne conservent pas pour la plupart le caractère sous-multiplicatif de β.
- On a montré la semaine dernière que $k \mapsto \beta(\Gamma, S; k)$ était sous-multiplicative.

Domination faible

- Domination faible
- Version simplifiée de la condition de domination faible

Domination faible

Définition : Domination faible

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$, on dit que α_2 *domine faiblement* α_1 si,
$\exists \lambda \geqslant 1, \exists C \geqslant 0$;

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \alpha_1(t) \leqslant \lambda \alpha_2(\lambda t + C) + C$$

On notera alors $\alpha_1 \overset{w}{\prec} \alpha_2$ ou $\alpha_1(t) \overset{w}{\prec} \alpha_2(t)$.

Définition : Équivalence faible

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$ sont *faiblement équivalentes* si $\alpha_1 \overset{w}{\prec} \alpha_2$ et $\alpha_2 \overset{w}{\prec} \alpha_1$.
  On notera alors $\alpha_1 \overset{w}{\sim} \alpha_2$ ou $\alpha_1(t) \overset{w}{\sim} \alpha_2(t)$.
- $\overset{w}{\sim}$ est une *relation d'équivalence*, on écrit $[\alpha]_w$ la classe de α.

Domination faible

Exemples

Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $e^{at} \overset{w}{\sim} e^{bt}$ car $e^{at} \leqslant \frac{a}{b} e^{b\frac{a}{b}t+C} + C$ en choisissant C assez grand.
- $t^a \overset{w}{\prec} t^b \iff a \leqslant b$:
  ($\Rightarrow$) Si $t^a \leqslant \lambda(\lambda t + C)^b + C$, alors si $a > b$ on aboutit à une absurdité car la croissance d'un polynôme de degré a serait alors plus rapide que celle d'un polynôme de degré b.
  ($\Leftarrow$) Si $a \leqslant b$ on a $t^a \leqslant (t+1)^b + 1$.
- Un polynôme $\alpha \in \mathfrak{C}$ de degré d est tel que $\alpha(t) \overset{w}{\prec} t^a \iff d \leqslant a$ et $\alpha(t) \overset{w}{\sim} t^a \iff d = a$.

Version simplifiée de la condition de domination faible

Proposition

Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$, et si $\alpha_2(0) > 0, \alpha_2(t) \geqslant 1$ ultimement, alors :

$$\alpha_1 \overset{w}{\prec} \alpha_2 \iff \exists \rho \geqslant 1; \forall t \in \mathbb{R}_+, \alpha_1(t) \leqslant \rho\alpha_2(\rho t)$$

Qui est un corollaire direct du lemme suivant :

Lemme

Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$, et si $t_0; \alpha_2(t_0) > 0$ et, $\alpha_2(t) \geqslant 1$ ultimement, alors :

$$\alpha_1 \overset{w}{\prec} \alpha_2 \implies \exists \rho \geqslant 1; \forall t \geqslant t_0, \alpha_1(t) \leqslant \rho\alpha_2(\rho t)$$

Version simplifiée de la condition de domination faible

Démonstration du lemme :

Il existe par hypothèse $t_1 \geqslant 1; \alpha_2(\lambda t_1 + C) \geqslant 1$. Donc, pour $t \geqslant t_1$:

$$\alpha_1(t) \leqslant \lambda\alpha_2(\lambda t + C) + C \times 1 \leqslant \lambda\alpha_2(\lambda t + C) + C\alpha_2(\lambda t_1 + C)$$

Et par croissance de $\alpha_2, \alpha_2(\lambda t_1 + C) \leqslant \alpha_2(\lambda t + C)$ et $t \geqslant 1$ donc $C \leqslant Ct$ ainsi $\alpha_2(\lambda t + C) \leqslant \alpha_2(\lambda t + Ct) = \alpha_2((\lambda + C)t)$. Et donc :

$$\alpha_1(t) \leqslant (\lambda + C)\alpha_2((\lambda + C)t)$$

Si $t_1 \leqslant t_0$, on a alors conclu, sinon le cas épineux est $[t_0; t_1]$:

$$\rho := \max\left\{\frac{\alpha_1(t_1)}{\alpha_2(t_0)}, \lambda + C\right\}$$

et on a bien $\alpha_1(t) \leqslant \alpha_1(t_1) \leqslant \rho\alpha_2(t_0) \leqslant \rho\alpha_2(\rho t)$.

Domination forte

- Domination forte

Domination forte

Définition : Domination forte

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$, on dit que α_2 *domine fortement* α_1 si, $\exists \lambda \geqslant 1$;

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \alpha_1(t) \leqslant \alpha_2(\lambda t)$$

On notera alors $\alpha_1 \overset{s}{\prec} \alpha_2$ ou $\alpha_1(t) \overset{s}{\prec} \alpha_2(t)$.

Définition : Équivalence forte

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{C}^2$ sont *fortement équivalentes* si $\alpha_1 \overset{s}{\prec} \alpha_2$ et $\alpha_2 \overset{s}{\prec} \alpha_1$.
  On notera alors $\alpha_1 \overset{s}{\sim} \alpha_2$ ou $\alpha_1(t) \overset{s}{\sim} \alpha_2(t)$.
- $\overset{s}{\sim}$ est une *relation d'équivalence*, on écrit $[\alpha]_s$ la classe de α.

Domination forte

Remarques, exemples

- La domination forte implique la domination faible.
- $\overset{w}{\prec} \neq \overset{s}{\prec}$, en effet, si $\alpha \in \mathfrak{C}$ est telle que $\alpha(0) > 0$ alors posons $\beta(t) := 2\alpha(2t)$. On a ainsi $\beta(t) \leqslant 2\alpha(2t) \implies \beta \overset{w}{\prec} \alpha$ mais si $\beta(t) \leqslant \alpha(2t)$ alors on aurait en $t = 0$: $2\alpha(0) = \beta(0) \leqslant \alpha(0)$ absurde.
- La domination forte est ainsi strictement plus forte que la domination faible.
- On a de nouveau $\forall a, b > 0, e^{at} \overset{s}{\sim} e^{bt} \forall a, b > 0$.
- De même, $\forall a, b > 0, t^a \overset{s}{\prec} t^b \iff a \leqslant b$

Affinements et conséquences dans le cas de groupes de type fini

- Domination faible : cas des groupes de type fini
- Précisions dans le cas des espaces uqulf : domination faible forte
- Conséquences

Domination faible : cas des groupes de type fini

Remarque

Pour un groupe $\Gamma = < S >$ de type fini, on a construit la semaine dernière la fonction de croissance $\beta(\Gamma, S; k)$ qui était de plus sous-multiplicative. Or on a construit en **Partie-1** des prolongements de β qui conservaient cette propriété.

Exemple

Soit Γ groupe de type fini engendré par l'ensemble S; $|S| = n$.

- On a montré la semaine dernière que :

$$\beta(\Gamma, S; k) \leqslant 2n(2n-1)^{k-1} = 2ne^{k\ln(2n-1)-\ln(2n-1)} \leqslant 2ne^{2nk}$$

Ainsi on a $\boxed{\beta(\Gamma, S; k) \overset{w}{\prec} e^k}$

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf

Définition : Espace uniformément quasi-localement fermé

Si X est un esp. p-m, on dira qu'il est *uniformément quasi-localement fermé* et on notera qu'il est *uqulf* dès que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \sup_{x \in X} |B(x,t)| < \infty$$

Ce sont des espaces utiles pour l'étude de certains opérateurs apparemment.
Si $x_0 \in X$,

$$t \mapsto \beta(t) := |B(x_0, t)|$$

Défini une fonction de croissance associée à cet ensemble.

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf : domination faible

Si Γ est un groupe de type fini muni de la métrique des mots introduite au début de la séance, alors Γ est un espace p-m uqulf. De plus, la fonction de croissance associée à l'ensemble coïncide avec la fonction introduite dans le cas général :

$$\beta = \beta(\Gamma, S; .)$$

Lemme

Soit X_1 et X_2 des esp p-m uqulf et soit $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, et $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{C}^2$ les fonctions de croissance qui leur sont associées. Si il existe une q-isom de $X_1 \to X_2$ alors :

$$\beta_1 \overset{w}{\prec} \beta_2$$

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf : domination faible

Démonstration de la proposition : Il existe $\Phi : X_1 \to X_2$;

(1) : $\forall x, y \in X_1, \lambda^{-1} d_1(x,y) - C \leqslant d_2(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant \lambda d_1(x,y) + C$

Posons $D = C + d_2(x_2, \Phi(x_1))$, alors :
$\forall t, \Phi(X(x_1, t)) \subset B(x_2, \lambda t + D)$

$$(2) : \forall t \in \mathbb{R}_+ |\Phi(B(x_1, t)| \leqslant \beta_2(\lambda t + D)$$

Si $\Phi(x) = \Phi(y)$ alors $d_1(x,y) \leqslant \lambda C$ d'après (1). Or les espaces sont uqulf donc il existe $E \geqslant 1$; $\sup\limits_{z \in X_2} |\Phi^{-1}(z)| \leqslant E$.

$$(3) : \forall t \in \mathbb{R}_+, \beta_1(t) = |B(x_1, t)| \leqslant E|\Phi(B(x_1, t))|$$

Et (2) + (3) concluent.

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf : domination faible

Corollaire 1/ Définition

Soit Γ un groupe de type fini et S, T deux ensembles finis générateurs de Γ. Les espaces métriques ainsi crées (Γ, d_S) et (Γ, d_T) sont quasi-isométriques (cours de Clément et Pierre) et donc :

$$\beta(\Gamma, S; k) \overset{w}{\sim} \beta(\Gamma, T; k)$$

La classe $[\beta(\Gamma; k)]_w$ ne dépend ainsi que de Γ. On l'appelle *le caractère de croissance faible* du groupe.

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf : domination faible

Corollaire 2

Si X est un espace métrique *géodésique* et *propre* et Γ_1, Γ_2 deux groupes agissant sur X par isométrie ; leur action soit propre et Γ_i/X compact. Alors on a montré que Γ_1 et Γ_2 étaient quasi-isométriques à X, donc quasi-isométriques entre eux.
Ainsi les groupes Γ_1 et Γ_2 de type fini admettent avec le théorème précédent les mêmes types de croissance.

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf : domination forte

Lemme

Si X est un espace p-m uqulf et $x_1, x_2 \in X^2$. Les fonctions $\beta_j : t \mapsto |B(x_j, t)|, \beta_j \in \mathfrak{C}$ sont fortement équivalentes.

En effet on a $\forall t, \beta_1(t) \leqslant \beta_2(t + d(x_1, x_2))$ donc *a fortiori* $\beta_1(t) \leqslant \beta_2(\lambda t)$ où $\lambda := 1 + \frac{d(x_1,x_2)}{t_{min}}$ où t_{min} est la distance minimale séparant x_2 d'un autre point de X (existe car on est dans dans un esp p-m uqulf par définition)

$\longrightarrow$ *On a ainsi également un résultat identique au Corollaire 1 mais dans le cadre de la domination forte.*

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf

Lemme

Si Γ est un groupe de type fini de générateur fini S, soit $\beta(k) := \beta(\Gamma, S; k)$. Alors, pour tout $\rho \geqslant 1, \exists K \in \mathbb{N}^*$;

$$\forall k \geqslant 1, \rho\beta(\rho k) \leqslant \beta(Kk)$$

Démonstration du lemme : Admise car utilise un résultat non-démontré.

Précisions dans le cas des espaces p-m uqulf

Proposition

Si Γ_1, Γ_2 des groupes de type fini de générateur fini S_1 et S_2 , soit $\beta_j(k) := \beta(\Gamma_j, S_j; k)$. Alors :

$$\beta_1 \overset{w}{\prec} \beta_2 \iff \beta_1 \overset{s}{\prec} \beta_2$$

Démonstration : Version simplifiée de la condition de domination faible + lemme précédent.

$\longrightarrow$ *Finalement, le type de croissance d'un groupe de type fini est indépendant du choix du générateur* ***et*** *de la domination faible / forte.*