

QUENTIN RAJON

Utilisation des algorithmes Géodésique et Zipper pour le calcul de domaines doublement connexes

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

Faculté des sciences et de génie
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2007

Résumé

Le but de ce mémoire est de présenter une généralisation des algorithmes Zipper et Géodésique, dans les cas de calculs d'applications conformes entre deux domaines doubllement connexes. Nous aurons donc besoin dans un premier temps, de connaître les domaines doublement connexes et de classifier les domaines multiplement connexes de référence, ainsi que les applications analytiques permettant de s'y ramener. On définira brièvement, par la suite, les notions de capacité et de capacité hyperbolique. Ceci nous permettra d'énoncer un théorème de représentation conforme en connectivité 2. Nous travaillerons ensuite sur les revêtements universels des domaines considérés, de sorte à pouvoir récupérer les algorithmes existants dans le cas simplement connexe, et principalement, les algorithmes Zipper et Géodésique.

Avant-propos

Je tiens avant toute chose à remercier le professeur Jérémie Rostand, professeur au département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval, notamment pour son soutien ainsi que pour avoir dirigé mes travaux et recherches pendant toute la durée de ma maîtrise. Je tiens également à remercier pour son soutien, le professeur Thomas Ransford, titulaire de la chaire de recherche canadienne en théorie spectrale et également professeur au département de mathématiques et de statistique. Merci également à eux ainsi qu'au professeur Line Baribeau pour toutes les remarques et corrections qu'ils ont su apporter à ce mémoire.

J'aimerais également remercier Martin, Dominique, Simon, Malik et Jean-Philippe pour leur présence quotidienne, leur soutien durant l'écriture de ce mémoire et leur amitié. Merci également à Rosalie pour m'avoir soutenu pendant la quasi-totalité de la rédaction du mémoire. Merci enfin à Dominique et Noël pour leur affection et leur soutien inconditionnel.

Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Table des figures	vi
Introduction	1
1 Calcul d'applications conformes	1
1.1 Rudiments de géométrie hyperbolique	1
1.2 Le théorème de Jørgensen	1
1.2.1 Version faible	1
1.2.2 Version forte	1
1.3 Les algorithmes de calcul d'applications conformes	1
1.3.1 L'algorithme Géodésique	1
1.3.2 L'algorithme de la fermeture à glissière (Zipper)	1
1.3.3 Convergence de l'algorithme Géodésique	1
2 Les domaines multiplement connexes	27
2.1 Les domaines à fentes parallèles	27
2.2 Domaines à fentes radiales et circulaires	27
2.3 Les disques à fentes radiales ou circulaires	28
2.4 Couronnes à fentes circulaires ou radiales	28

3 Théorie du potentiel et capacité hyperbolique	47
3.1 Théorie du potentiel	47
3.1.1 Les domaines doublement connexes et le théorème de représentation	51
3.1.2 Laplacien généralisé	51
3.2 Calcul de capacité hyperbolique	58
4 Surfaces de Riemann	62
4.1 Introduction aux surfaces de Riemann	62
4.1.1 Motivation et surfaces de Riemann associées à une fonction algébrique	62
4.1.2 Surfaces de Riemann abstraites	64
4.2 Homotopie et groupe fondamental	67
4.3 Revêtements et relèvements	73
5 L'algorithme de calcul	83
5.1 Construction de l'algorithme sur une surface de Riemann	83
5.2 Simulations	88
Conclusion	95
Bibliographie	97

Table des figures

1.1	En gras, le bord du domaine. En pointillés, une courbe qui ne peut pas être une géodésique.	10
1.2	La géodésique S est en gras et la droite réelle en pointillés. La géodésique est piégée une fois qu'elle est sortie du cercle.	13
1.3	Aucune de ces configurations n'est possible.	14
1.4	Si une telle géodésique existait, cela contredirait le théorème faible pour les cercles en pointillés.	15
1.5	Algorithme Géodésique.	18
1.6	Algorithme Zipper.	20
1.7	Une chaîne de disques recouvrant un polygone de Jordan.	21
2.1	Disques à fentes circulaires à gauche et radiales à droite	39
2.2	Anneau à fentes circulaires à gauche et radiales à droite.	41
5.1	Le domaine de départ.	90
5.2	L'anneau canonique conforme.	91
5.3	Mobius de Hello!.	91
5.4	Zoom 0.	92
5.5	Zoom 1.	93
5.6	Zoom 2.	93

Introduction

Les nombres complexes ont été introduits au XVI^e siècle, afin de déterminer les solutions d'équations polynomiales de degré 3 et 4. On peut les voir comme une généralisation des nombres réels, en ce sens que si un nombre réel détermine exactement une longueur et une seule, un nombre complexe détermine un et un seul vecteur du plan. Ainsi, l'arithmétique des nombres complexes peut, en quelque sorte, se transposer à une arithmétique sur les vecteurs du plan. D'une manière plus générale, les applications vectorielles peuvent se traduire analytiquement via les nombres complexes et inversement. L'analyse complexe s'intéresse justement à la compréhension de ces applications, notamment à travers certains concepts analytiques usuels, comme par exemple celui de dérivation de fonction. Parmi ces fonctions complexes, il y a une classe que l'on affectionne particulièrement, qui sont les applications conformes, c'est-à-dire les applications qui conservent localement les angles. On peut montrer facilement qu'une application complexe est conforme si et seulement si elle est dérivable et de dérivée jamais nulle. En 1854, Riemann expose le théorème de représentation des domaines simplement connexe qui énonce que tout domaine propre du plan, simplement connexe, est conforme au disque unité ouvert. La démonstration qu'il énonce est cependant fausse, et il faudra attendre le début du XX^e siècle pour voir la première démonstration rigoureuse du théorème. Ce théorème est le théorème fondamental de la théorie des applications conformes pour les domaines simplement connexes du plan. Notamment, il nous indique que certains problèmes que l'on se pose dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, peuvent être transposés à des problèmes dans un autre domaine où la solution serait éventuellement plus simple.

Malheureusement, si en théorie il existe toujours une application conforme qui permet de passer d'un domaine à l'autre, nous sommes dans l'incapacité d'exhiber une telle application, dans la plupart des cas. Pour remédier à ce problème, on a développé de nombreux algorithmes de calculs qui permettent d'approximer des applications à la précision souhaitée. Parmi ces algorithmes, on trouve par exemple les transformations de Schwarz-Christoffel qui permettent de résoudre le problème de façon exacte dans les cas des domaines à frontière polygonale. On trouve également les algorithmes Géodésique et Zipper, qui seront les deux algorithmes que j'ai utilisés dans ce mémoire et que je décris au premier chapitre.

Le problème étant entièrement résolu dans le cas des domaines simplement connexes, le nouveau problème à résoudre est celui qui se pose dans le cas des domaines doublement connexes et plus généralement, dans le cas des domaines multiplement connexes. On remarquera dans un premier temps que tout n'est pas aussi facile dans le cas des domaines doublement connexes que dans le cas précédent. Notre premier objectif sera donc de classifier les domaines que l'on peut mettre en relation, et éventuellement de donner un équivalent au théorème de Riemann dans le cas des domaines multiplement connexes. Ce sera le rôle du second chapitre de ce mémoire, et cette étude sera essentiellement basée sur le livre [Tsu1].

Dans un second temps, il faudra se poser la question de la généralisation des algorithmes déjà existants, au cas des domaines doublement connexes et éventuellement aux cas des connectivités supérieures. Pour cela, il faudra énoncer quelques résultats de base de la géométrie hyperbolique de Poincaré, ce qui constituera essentiellement notre premier chapitre. La raison de l'introduction de la géométrie hyperbolique se situe dans le fait que les algorithmes que nous allons traiter s'expriment en termes de géodésiques hyperboliques. Les résultats essentiels de ce chapitre seront tirés des livres [Ahl2], [And] et [Beard]. Une deuxième motivation prend sa source dans le troisième chapitre, où il sera question de généraliser la théorie du potentiel aux cas de variétés particulières, notamment au cas du disque de Poincaré, qui est une variété hyperbolique. Par exemple, l'équivalent du théorème de Riemann dans le cas des domaines 2-connexes s'énoncera alors facilement grâce à l'introduction du concept de capacité hyperbolique. Finalement,

nous définirons brièvement les surfaces de Riemann dans le dernier chapitre. Le but ultime étant, un peu à la manière de Embree et Trefethen, dans leur article [Embr–Tref], d'associer à un domaine doublement connexe X et à une couronne Y , deux surfaces de Riemann simplement connexes respectivement \tilde{X} et \tilde{Y} , de sorte à pouvoir utiliser nos algorithmes entre \tilde{X} et \tilde{Y} , et de telle manière que la projection de la fonction calculée, soit une application conforme entre X et Y .

Chapitre 1

Calcul d'applications conformes

Dans ce chapitre, nous avons besoin de définir ce qu'est la k -connexité d'un espace topologique. Il sera relativement facile de donner une définition qui sera suffisante pour nos besoins dans le cas des domaines de \mathbb{C} et qui ne requiert que des connaissances de base. Cependant, il faudra avoir en tête que cette définition n'est valable que dans \mathbb{C} , et qu'il faudra un peu plus de travail pour trouver une définition concordante dans des espaces plus généraux. Nous ne donnerons pas de preuve de l'équivalence des définitions dans \mathbb{C} (voir par exemple le théorème de monodromie et ses corollaires, [Ahl1, p295–299]).

On dit qu'un domaine D de \mathbb{C} est *simplement connexe* si son complémentaire relativement à $\overline{\mathbb{C}}$ est connexe. Dans le cas où ce dernier possède k composantes connexes, on dira qu'il est *k -connexe*, ou encore, *multiplement connexe de connectivité k* . L'idée géométrique derrière cette définition est qu'un domaine de connectivité k est un domaine qui possède $k - 1$ trous.

Définition 1.0.1 Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} . On dit qu'une application $f : U \rightarrow V$ est *conforme* lorsqu'elle conserve les angles orientés en tout points de U , c'est à dire que pour tout point $z_0 \in U$ et pour toutes courbes γ_1 et γ_2 telles que

¹On trouve parfois cette notation pour signifier que les k - premiers groupes d'homotopie sont triviaux.

$z_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, f préserve l'angle orienté entre γ_1 et γ_2 au point z_0 .

Théorème 1.0.2 Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} et f une application de U dans V . Si f est holomorphe sur U et si f' ne s'annule pas sur U , alors f est conforme sur U . Réciproquement, si la différentielle de f existe et n'est pas nulle en un point $z_0 \in U$ et si f conserve les angles en z_0 , alors $f'(z_0)$ existe et n'est pas nulle.

La démonstration n'est pas très difficile et réside dans le fait que f' s'exprime localement comme la composée d'une homothétie et d'une rotation si f' ne s'annule pas en z_0 . On peut également généraliser cette remarque, et voir que si z_0 est un zéro d'ordre m pour $f - f(z_0)$, alors f multiplie localement les angles par m au voisinage de z_0 .

Définition 1.0.3 Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines du plan complexe. On dit que Ω_1 et Ω_2 sont *conformes* ou encore, *conformément équivalents*, s'il existe une application bi-holomorphe f , entre Ω_1 et Ω_2 .

Remarquons immédiatement qu'une telle application f est nécessairement conforme. Réciproquement, par le théorème d'inversion locale, une application conforme est nécessairement localement bi-holomorphe.

On peut également remarquer que la relation d'équivalence conforme est une relation d'équivalence.

1.1 Rudiments de géométrie hyperbolique

La géométrie hyperbolique est une géométrie basée sur la réfutation du 5^e postulat d'Euclide tout en conservant les autres. Elle apparaît dans un premier temps comme une curiosité mathématique et il faut véritablement attendre Poincaré pour lui donner

un peu plus de crédibilité. La géométrie hyperbolique est devenue essentielle en mathématiques actuelles, notamment en analyse complexe, où on peut la voir comme une géométrie vraiment naturelle. Le but de ce chapitre est d'introduire quelques concepts de base de la géométrie hyperbolique. Les principaux objectifs sont, dans un premier temps, de pouvoir énoncer le théorème de Jørgensen, et, dans un second temps, de faciliter la construction future d'une théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann de type hyperbolique.

Commençons par étudier l'exemple du disque hyperbolique de Poincaré. Pour cela, remarquons que les isomorphismes analytiques du disque unité ouvert \mathbb{D} sont les applications de la forme

$$S(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } z_0 \in \mathbb{D}$$

que l'on peut encore voir comme les applications de la forme

$$S(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \text{ où } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Notons $\text{Aut}(\mathbb{D})$ l'ensemble de ces applications.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ et soient $w_i = S(z_i)$, $i = 1, 2$. On remarque que

$$w_1 - w_2 = \frac{z_1 - z_2}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})}$$

et également que

$$1 - \overline{w_1}w_2 = \frac{1 - \overline{z_1}z_2}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})}$$

et, on obtient donc que

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right| = \left| \frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1}w_2} \right| \quad (1.1)$$

On dit que la quantité $\delta(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|$ est un invariant conforme, car $\delta(z_1, z_2) = \delta(S(z_1), S(z_2))$, pour toute application $S \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Si l'on fait tendre z_1 vers z_2 dans l'équation (1.1), on trouve alors

$$\frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \frac{|dw|}{1 - |w|^2}.$$

Soit ρ une application mesurable positive sur un domaine simplement connexe Ω . Pour $w_1, w_2 \in \Omega$, posons $d(w_1, w_2) = \inf\{\int_{\gamma} \rho(z)|dz|\}$ où l'infimum est pris sur toutes les courbes C^1 reliant w_1 à w_2 . L'application d est alors une distance sur Ω et le facteur ρ est appelé *facteur de distorsion conforme*. On a donc montré que la métrique définie par l'élément de distorsion conforme $\rho(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ est invariante sous les automorphismes analytiques de \mathbb{D} . On appelle alors *métrique hyperbolique* la métrique ainsi obtenue.

Les arcs rectifiables, c'est à dire les arcs qui se « laissent bien approcher » par des courbes polygonales, sont alors de longueur $\int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. De même, les ensembles mesurables X du disque hyperbolique, ont une aire hyperbolique définie par $\int_X \frac{4dxdy}{(1-|z|^2)^2}$. Il n'est pas très difficile de voir, en conservant comme définition de droite entre deux points, un chemin de longueur minimale entre ceux-ci, que les droites hyperboliques (on parle plus aisément de géodésiques hyperboliques ou de h-lignes) sont exactement les arcs de cercle orthogonaux au cercle unité. Dans le cas particulier de points diamétralement opposés, ce n'est rien d'autre qu'un segment de droite euclidien.

Nous avons construit dans ce cas, une géométrie hyperbolique sur le disque unité. Il est assez naturel de se demander si on peut en faire de même avec n'importe quel domaine de \mathbb{C} . Nous allons nous limiter à une réponse partielle, dans le cas de certains domaines simplement connexes de \mathbb{C} .

Soit ρ le facteur de distorsion conforme défini par

$$\rho(z) = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Soit Ω un domaine simplement connexe distinct du plan. Alors on sait d'après le théorème de représentation de Riemann, qu'il existe une certaine application conforme f de D sur Ω . Notamment, il est naturel de se demander si ρ est « transportée » sur Ω via f . La réponse est positive [Ahl2] et ce pour notre plus grand plaisir, car lorsque l'on aura un problème de géométrie hyperbolique dans un domaine simplement connexe quelconque, il suffira dans un grand nombre de cas, de se ramener au disque unité ou au demi plan supérieur \mathbb{H} pour le résoudre. Un autre avantage est donné par le fait que les applications conformes conservent localement les angles euclidiens, ce qui peut être très intéressant en géométrie. C'est pour cela que l'on définit la notion d'angle hyperbolique

entre deux vecteurs comme étant tout simplement l'angle des deux vecteurs lorsqu'ils sont vus en géométrie euclidienne.

Ces réponses nous permettent de déterminer facilement les droites de \mathbb{H} . En effet, les droites de \mathbb{H} sont exactement les images des droites de \mathbb{D} via une application conforme de \mathbb{D} . Une application conforme qui fait l'affaire est l'homographie $M := z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. On sait que les homographies transforment les cercles et droites en des cercles ou des droites. De plus, M est conforme et conserve donc les angles. Ainsi, les droites de \mathbb{H} sont les demi cercles qui sont perpendiculaires à \mathbb{R} ou des droites perpendiculaires à \mathbb{R} dans le cas où leur préimage par f est un arc de cercle coupant le bord du disque unité en $-i$.

Proposition 1.1.1 *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et γ_1, γ_2 deux géodésiques de Ω . On a alors $\text{card}(\gamma_1 \cap \gamma_2) \leq 1$. De plus, si $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{x\} \subset \Omega$, γ_1 et γ_2 ne peuvent être tangentes en x .*

La démonstration est triviale. Il suffit de remarquer que les géodésiques de Ω sont les images des géodésiques de \mathbb{H} par une application bi-holomorphe f . Une application bi-holomorphe étant nécessairement conforme, on a le résultat souhaité. Notons cependant, que deux géodésiques peuvent être tangentes en $\partial\Omega$.

Remarques

Dans le cas général, il est impossible de connaître les géodésiques d'un domaine simplement connexe donné, du fait que l'on ne connaît pas toujours une application conforme entre le disque et notre domaine. Cependant le théorème de Jørgensen va nous permettre d'avoir quelques informations sur les géodésiques hyperboliques d'un domaine.

1.2 Le théorème de Jørgensen

Le théorème de Jørgensen est un théorème qui nous donne des informations quant au comportement des géodésiques hyperboliques dans un domaine simplement connexe. Il nous enseigne en quelque sorte, le fait que les géodésiques ne peuvent pas se courber n'importe comment localement, mais également globalement, comme le suggère la figure 1.1.

1.2.1 Version faible

Pour nos besoins, rappelons un théorème de topologie standard.

Lemme 1.2.1 [Ahl1] *Soit f un homéomorphisme envoyant un domaine D sur un domaine Ω . Si (ζ_n) tend vers ∂D , alors $(f(\zeta_n))$ tend vers $\partial\Omega$.*

Pour la suite du mémoire, nous avons besoin de définir la notation $B(z_0, r)$, qui désignera la boule ouverte de centre z_0 et de rayon r , c'est à dire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$. Muni de quelques outils de géométrie hyperbolique, nous voilà prêt à énoncer et à démontrer le théorème de Jørgensen.

Théorème 1.2.2 (« Jørgensen faible ») [Mar-Rohd] *Soit Ω un domaine simplement connexe strict de \mathbb{C} . Soient Δ un disque ouvert de Ω tel que $\overline{\Delta} \subset \Omega$ et soit γ une géodésique. Alors $\gamma \cap \Delta$ est connexe, et si de plus $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, alors γ n'est pas tangent à $\partial\Delta$.*

Preuve

Soit γ une géodésique de Ω telle que $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Puisque γ est une courbe simple dont

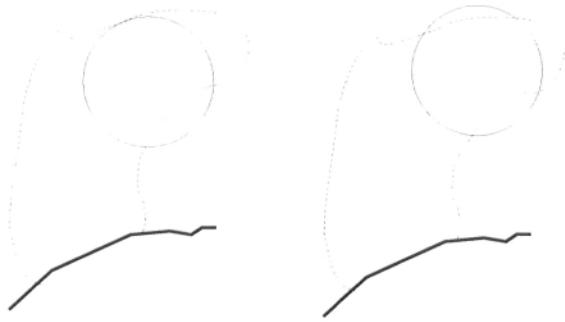


FIG. 1.1 – En gras, le bord du domaine. En pointillés, une courbe qui ne peut pas être une géodésique.

les extrémités sont dans $\partial\Omega$, on doit avoir $\text{card}(\gamma \cap \partial\Delta) \geq 2$. Nous allons montrer que $\text{card}(\gamma \cap \partial\Delta) = 2$.

Soit γ_1 une composante connexe de $\gamma \cap \Delta$. Pour montrer que $\text{card}(\gamma \cap \partial\Delta) = 2$, il suffit de montrer que $\gamma_1 = \gamma \cap \Delta$. Soit $\{x, y\} = \gamma_1 \cap \partial\Delta$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x = 0$ et que $\Delta \subset \mathbb{H} \subset \overline{\mathbb{H}} \subset \Omega$.

Soit f une application conforme de \mathbb{D} vers Ω normalisée par les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$. Définissons h de la manière suivante.

$$h(z) = \frac{f'(0)}{f(z)} - \left(\frac{1}{z} + z \right)$$

Il est clair que h est analytique sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. De plus

$$\begin{aligned} |h(z)| &= \left| \frac{f'(0)}{f(z)} - \left(\frac{1}{z} + z \right) \right| \leq \left| \frac{f'(0)}{f(z)} - \frac{1}{z} \right| + |z| \\ &= \left| \frac{zf'(0)}{z(f(z) - f(0))} - \frac{1}{z} \right| + |z| \\ &= \left| \frac{f'(0)}{z} \frac{z}{(f(z) - f(0))} - \frac{1}{z} \right| + |z| \\ &= O(1) + |z| \text{ lorsque } z \rightarrow 0 \\ &= O(1) \text{ lorsque } z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc h possède une singularité enlevable en 0. Notamment h est analytique partout sur \mathbb{D} et la fonction u définie par

$$u(z) = \text{Im}(h(z))$$

est harmonique sur \mathbb{D} . Supposons de plus qu'elle est positive sur \mathbb{D} (on le montrera en dernier lieu). Puisque l'on a que

$$u(z) = \operatorname{Im} \left(\frac{f'(0)}{f(z)} \right) \quad \forall z \in (-1, 1)$$

on en déduit alors que

$$\operatorname{Im} \left(\frac{f'(0)}{f(z)} \right) \geq 0 \quad \forall z \in (-1, 1).$$

Posons $f(z) = r(z) + iv(z)$ où bien entendu, r et v sont respectivement les parties réelles et imaginaires de f . Alors, $\forall z \in (-1, 1)$ on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \operatorname{Im} \left(\frac{f'(0)}{f(z)} \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{f'(0)}{(r(z)) + iv(z)} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{f'(0)(r(z) - iv(z))}{r(z)^2 + v(z)^2} \right) \\ &= \frac{-f'(0)v(z)}{r(z)^2 + v(z)^2} \end{aligned}$$

et donc $\forall z \in (-1, 1)$, $v(z) = \operatorname{Im}(f(z)) \leq 0$.

Ces remarques sont les points clés de la démonstration, le reste repose sur des considérations géométriques évidentes, compte tenu de ce que l'on a développé auparavant. En effet, $S = f((-1, 1))$ est une géodésique dans Ω puisque $(-1, 1)$ en est une dans \mathbb{D} . De plus cette géodésique est contenue dans $\Omega \setminus \mathbb{H}$ puisque $\operatorname{Im}(f) \leq 0$. La condition $f(0) = 0$ revient à dire que S touche $\partial\Delta$ en 0 et la condition $f'(0) > 0$ équivaut à dire que la géodésique S y est en fait même tangente.

Remarquons que $(-1, 1)$ partage \mathbb{D} en deux domaines \mathbb{D}^+ et \mathbb{D}^- , qui sont respectivement le demi-disque ouvert supérieur et inférieur. Ainsi, on a que $S = f((-1, 1))$ partage Ω en deux parties ouvertes non vides et disjointes qui sont respectivement $\Omega^+ = f(\mathbb{D}^+)$ et $\Omega^- = f(\mathbb{D}^-)$. Supposons sans perte de généralité, que Ω^+ est la partie de Ω qui contient \mathbb{H} . Supposons à présent que $\gamma \cap \Omega^- = \emptyset$. Alors γ_1 est tangente à \mathbb{R} en 0. Le théorème de conformité de Riemann affirme qu'il existe une application g qui envoie conformément Ω sur \mathbb{H} . Ainsi, $g(S)$ et $g(\gamma)$ sont deux h-lignes et puisque g conserve les angles orientés, l'angle formé par leurs tangentes respectives est conservé en $g(0)$. En

particulier, celui-ci est de $0 \bmod \pi$, et on se retrouve donc avec deux h-lignes distinctes et tangentes en un point. Ceci étant impossible, on voit alors que l'hypothèse de départ était fausse, et ainsi $\gamma \cap \Omega^- \neq \emptyset$.

Puisque $\Omega \setminus S$ est disconnexe, il n'est pas connexe par arcs. Notamment γ ne peut « sortir » de Ω^- qu'en coupant S une seconde fois, soit en un point distinct de 0, soit en revenant en 0. La première possibilité est immédiatement écartée puisqu' alors $g(S)$ et $g(\gamma)$ seraient deux h-lignes distinctes de \mathbb{H} qui s'intersectent en plus d'un point, ce qui est impossible. Ainsi γ « revient » en 0, mais cette possibilité est également absurde, car γ est une géodésique, et donc une courbe de longueur minimale reliant des points de Ω . Puisque la courbe constante égale à 0 est de longueur strictement inférieure à $\gamma \cap \Omega^-$, alors on a une contradiction. Ainsi γ ne sort pas de Ω^- , comme le montre la figure 1.2. La géodésique est donc « piégée » dans la région Ω^- et par connexité, ne peut pas revenir dans $\Delta \subset \Omega^+$.

Il ne reste alors plus qu'à montrer que u est positive sur \mathbb{D} et la démonstration est complète.

Soit $m := z \mapsto \frac{1}{z}$. Il est clair que $m(\partial\Delta)$ est un cercle dans $\overline{\mathbb{C}}$. Puisque $0 \in \partial\Delta$, le cercle est une droite euclidienne horizontale et puisque $\partial\Delta \subset \mathbb{H}$, on a alors que $\text{Im}(m(\partial\Delta)) < 0$.

En effet si $\delta \in \partial\Delta \setminus \{0\}$, alors $\text{Im}(\delta) > 0$

$$\text{Im}\left(\frac{1}{\delta}\right) = \text{Im}\left(\frac{\bar{\delta}}{|\delta|^2}\right) = \alpha < 0.$$

Par connexité, on a donc que $m(\Delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < \alpha\}$ ou alors

$$m(\Delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > \alpha\}.$$

Comme $m(1) = 1 \in \mathbb{R}$, un point de $\Omega \setminus \overline{\Delta}$ est envoyé sur \mathbb{R} . Par connexité, on obtient que $\mathbb{R} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < \alpha\} = \emptyset$ et donc que

$$m(\Delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < \alpha\}.$$

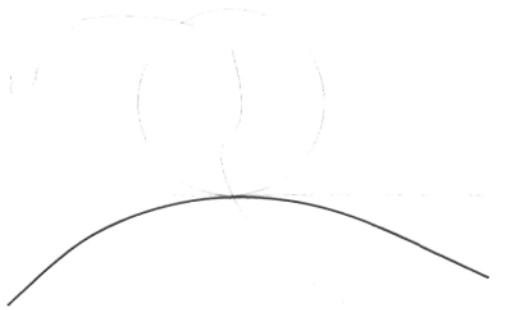


FIG. 1.2 – La géodésique S est en gras et la droite réelle en pointillés. La géodésique est piégée une fois qu'elle est sortie du cercle.

Il est clair que pour n suffisamment grand on a que $(f(\zeta_n))$ est dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$. On a alors que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{-v(z)}{r(z)^2 + v(z)^2} > 0.$$

En particulier, en passant à la limite inf, on trouve de manière triviale que

$$\liminf_{|z| \rightarrow 1} \operatorname{Im}(h(z)) = \liminf_{|z| \rightarrow 1} \operatorname{Im}\left(\frac{f'(0)}{f(z) - f(0)}\right) \geq 0.$$

Finalement, par le principe du maximum appliqué à chacun des disques $|z| = r < 1$, on trouve que u est positive sur \mathbb{D} et le résultat est enfin démontré. \square

1.2.2 Version forte

La version du théorème cité précédemment ne prend en compte que le cas particulier où $\partial\Delta \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ alors qu'il est possible de supprimer cette hypothèse. On se propose donc de donner ci-dessous une généralisation du théorème de Jørgensen. La figure illustre une telle configuration.

Théorème 1.2.3 (« Jørgensen fort ») [Mar-Rohd] Soit Ω un domaine simplement connexe de \mathbb{C} , distinct du plan lui-même. Soient Δ un disque ouvert de Ω et γ une géodésique de Ω telle que $\gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Alors $\gamma \cap \Delta$ est connexe et γ n'est pas tangente à $\partial\Delta$.



FIG. 1.3 – Aucune de ces configurations n'est possible.

Preuve La démonstration repose essentiellement sur la version faible du théorème.

Sans perte de généralité on peut supposer que Δ est centré en 0. Notons r le rayon de Δ . Soit γ une géodésique de Ω . On veut montrer que la situation $\Delta \cap \gamma$ disconnexe est impossible. Supposons alors que c'est le cas, et soient γ_1 et γ_2 deux composantes connexes de γ . Posons $\delta = \max(d(\gamma_1, 0), d(\gamma_2, 0))$ et $\delta' = \frac{\delta+r}{2}$.

Ainsi $B(0, \delta') \cap \gamma$ est disconnexe, ce qui contredit le principe faible, et on conclut que $\Delta \cap \gamma$ est connexe.

Il reste à montrer que « l'entrée » ou la « sortie » de γ ne se fait jamais de manière tangentielle à Δ , mais il suffit de reprendre l'idée développée dans le cas précédent pour se convaincre du résultat, à la différence près que l'on ne prendra plus la boule $B(0, \delta')$, mais une boule incluse dans Δ tangente à γ . Une illustration de ces idées est donnée par la figure 1.3.

On a alors réussi à montrer une version plus forte du théorème de Jørgensen que celle proposée dans la prépublication [Mar–Rohd] ou dans [Pom] et c'est ce dont on aura besoin pour montrer la convergence de l'algorithme Géodésique. \square

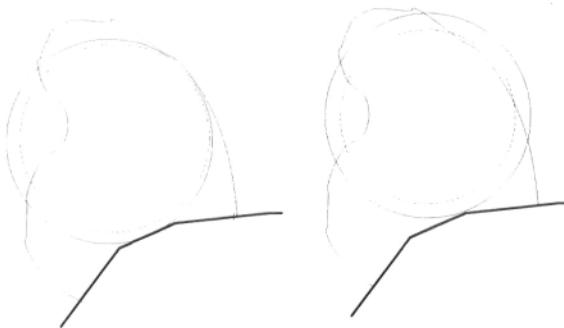


FIG. 1.4 – Si une telle géodésique existait, cela contredirait le théorème faible pour les cercles en pointillés.

1.3 Les algorithmes de calcul d'applications conformes

Le théorème de Riemann affirme l'existence d'une certaine application conforme entre deux domaines simplement connexes plans quelconques, mais distincts du plan lui-même. Les preuves sont non constructives en général, de sorte qu'excepté les cas triviaux, on est souvent dans l'incapacité de trouver une application qui fasse l'affaire. Il y a cependant une classe de domaines que l'on maîtrise relativement bien, qui sont les domaines de frontière polygonale. Les transformations de Schwarz-Christoffel nous donnent, sous forme intégrale, une application conforme entre le demi-plan supérieur et notre domaine polygonal. Il y a cependant un coût à payer, qui est celui d'un calcul d'intégrale, qui peut s'avérer d'autant plus difficile qu'il y a d'angles au polygone. Une idée dans le cas général serait par exemple d'approximer notre domaine par des polygones et d'utiliser une transformation de Schwarz-Christoffel. Ce n'est cependant pas le chemin que l'on va suivre dans la suite. Les approximations polygonales ont aussi leurs défauts et l'on a été amené à développer d'autres algorithmes. Par exemple, l'algorithme Géodésique utilise une approximation par des géodésiques hyperboliques, tandis que l'algorithme Zipper utilise des approximations quadratiques. Ce sont essentiellement les deux algorithmes que l'on va brièvement décrire dans la suite et sur lesquelles sont basées nos simulations. Nous n'entrerons pas dans les détails du fonctionnement

des algorithmes, nous allons seulement nous contenter de les décrire et, dans le premier cas, de fournir une preuve de convergence.

1.3.1 L'algorithme Géodésique

L'algorithme Géodésique est un algorithme de calcul élémentaire. Son principe repose sur le fait que l'on connaît bien les applications conformes envoyant un arc de cercle sur un segment de droite. Notamment, si on approxime la frontière de notre domaine par des arcs de cercles, on peut récursivement appliquer cette idée pour finalement obtenir une application conforme entre une approximation du domaine et un demi-plan.

Supposons que f_a soit une application conforme de $\mathbb{H} \setminus \gamma \longrightarrow \mathbb{H}$ où γ est l'arc de cercle orthogonal à la droite dont les extrémités sont 0 et $a \in \mathbb{H}$. On veut envoyer $\mathbb{H} \setminus \gamma$ sur \mathbb{H} au moyen de f_a .

On sait notamment que les homographies transforment des cercles en des droites ou en des cercles. De plus, l'orthogonalité de γ à \mathbb{R} en 0 est clairement préservée. Ici, l'homographie $M_b := z \mapsto \frac{z}{1-z/b}$ envoie γ sur le segment $[0, ic]$ où $b = \frac{|a|^2}{\operatorname{Re}(a)}$ est le second point d'intersection entre le demi cercle dans \mathbb{H} qui porte γ et où $c = \frac{|a|^2}{\operatorname{Im}(a)}$. Le segment $i[0, c]$ est à son tour envoyé sur $[0, c^2]$ via l'application $z \mapsto z^2 + c^2$ et en prenant la racine carrée de cette dernière, on aura réussi à envoyer $\mathbb{H} \setminus \gamma$ sur \mathbb{H} (ici il est question de la détermination de la racine carrée de $(0, 2\pi)$ vers $(0, \pi)$). L'application f_a qui est la composée de ces trois applications sera appelée *application de base*.

Essayons à présent d'appliquer cette idée pour créer un algorithme de calcul d'applications conformes. Supposons que $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ soit une famille de points dans le plan complexe. Le complément de $\gamma_0 = [z_0, z_1]$ peut être envoyé sur \mathbb{H} au moyen de $\phi_1(z) = i\sqrt{\frac{z-z_1}{z-z_0}}$ (il s'agit ici de la détermination de la racine carrée de $(-\pi, \pi)$ vers $(-\pi/2, \pi/2)$). Notamment, z_1 est envoyé sur 0 et z_0 sur le point à l'infini. Posons alors $\zeta_2 = \phi_1(z_2)$ et $\phi_2 = f_{\zeta_2}$ où f_{ζ_2} est l'application de base envoyant l'arc de cercle orthogonal à \mathbb{R} en 0, ayant 0 et ζ_2 pour extrémités.

Il suffit alors de réitérer le procédé et de poser

$$\zeta_k = \phi_{k-1} \circ \phi_{k-2} \circ \cdots \circ \phi_1(z_k)$$

et

$$\phi_k = f_{\zeta_k}.$$

Finalement, posons $\zeta_{n+1} = \phi_n \circ \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1(z_0)$ et $\phi_{n+1} = \pm M_{\zeta_{n+1}}^2$, le signe + étant choisi si la famille de points (z_i) est parcourue dans le sens horaire, le signe - étant choisi dans le cas contraire. Posons alors $\phi = \phi_{n+1} \circ \phi_n \circ \cdots \circ \phi_1$. Cette fonction est clairement bijective d'inverse $\phi^{-1} = \phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ \cdots \circ \phi_{n+1}^{-1}$ et ϕ^{-1} est une application conforme entre \mathbb{H} et une région Ω_c telle que $z_j \in \partial\Omega_c$. De plus $\partial\Omega_c$ est lisse en ce sens qu'elle possède en tout point une tangente et que celle-ci varie continûment. En effet, comme on le verra au théorème 1.3.3, l'inverse de l'application de base f_a double les angles en 0 et les divise par deux en $\pm c$. Une illustration est donnée par la figure 1.5.

1.3.2 L'algorithme de la fermeture à glissière (Zipper)

L'algorithme de coupures

L'algorithme de coupures est très semblable à l'algorithme Géodésique à cette différence près que les coupures ne sont pas des arcs de cercles orthogonaux à \mathbb{R} mais des segments de droite. On remplace donc les applications f_a^{-1} par les applications $g_a : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \setminus L$ où L est un segment de droite de 0 à a . De façon explicite, on a

$$g_a(z) = C(z - p)^p(z + 1 - p)^{1-p},$$

où p représente en quelque sorte la fraction de rotation du segment, soit $p = \arg(a)/\pi$ et où C est la constante $C = |a|/(p^p(1 - p)^{1-p})$. On peut montrer (mais on ne le fera pas) que g_a est bien une application conforme de \mathbb{H} sur $\mathbb{H} \setminus L$ [Mar-Rohd].

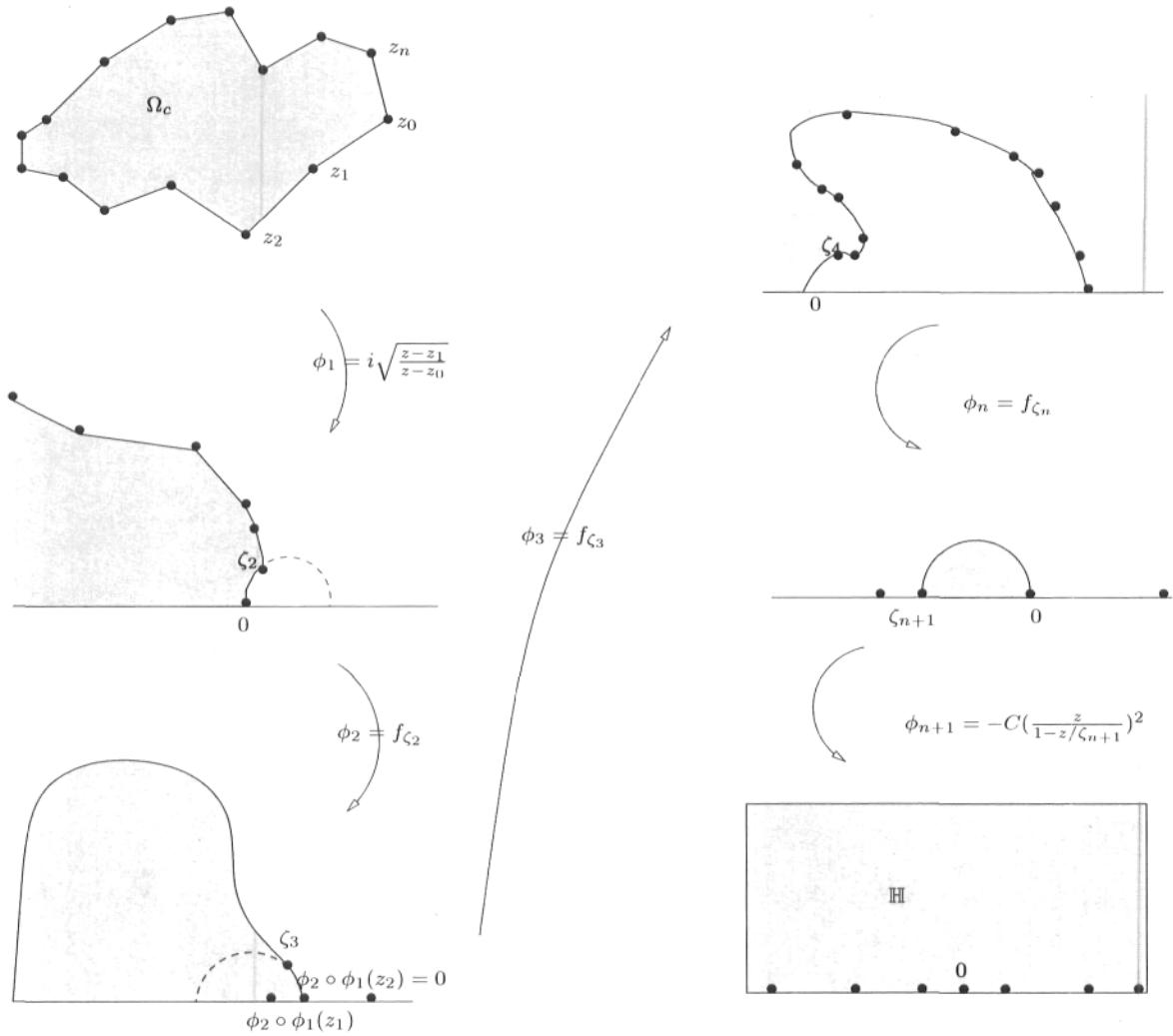


FIG. 1.5 – Algorithme Géodésique.

L'algorithme de la fermeture à glissière

L'algorithme Géodésique approxime les portions de frontière entre les points d'interpolation par des arcs de cercle orthogonaux à \mathbb{R} . On peut généraliser un peu cet algorithme en remplaçant les arcs de cercles orthogonaux à \mathbb{R} par des arcs de cercles passant par 0 et par deux points d'interpolation ζ_{2k-1} et ζ_{2k} (ou plutôt leurs images par les itérations précédentes de l'algorithme).

Tout d'abord, supposons que l'on ait affaire à un nombre pair de points à la frontière z_0, \dots, z_{2n+1} . L'application de départ est remplacée par l'application ϕ_1 définie par

$$\phi_1(z) = \sqrt{\frac{(z_1 - z_0)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(z - z_0)}}$$

qui envoie le complément de l'arc de cercle passant par z_0, z_1, z_2 sur \mathbb{H} . Il est en effet facile de voir que cette application n'est rien d'autre que la racine du bi-rapport $[z, z_0, z_1, z_2]$. Ensuite, plutôt que de « tirer » un nombre complexe ζ_k sur \mathbb{R} comme le ferait l'algorithme Géodésique, on décide plutôt de considérer l'unique arc de cercle qui passe par 0 et par deux points consécutifs ζ_{2k-1} et ζ_{2k} . Si on suppose de plus que l'arc est non tangent à \mathbb{R} , on envoie cet arc sur un segment de droite via une homographie qui préserve \mathbb{H} . Une homographie conservant les angles, on a que l'angle formé par notre arc et par \mathbb{R} est conservé par cette homographie. Si on appelle b le point d'intersection non nul de l'arc avec \mathbb{R} , alors une telle homographie est donnée par $l_a(z) = \frac{z}{1 - z/b}$. On peut alors envoyer ce nouveau domaine sur un segment de \mathbb{R} comme décrit dans l'algorithme de coupures décrit ci dessus via l'application g_d^{-1} où $d = l_a(a) = \frac{a}{1-a/b}$. La composition $h_{a,d} = g_d^{-1} \circ l_a$ envoie alors le complément de notre arc de cercle sur \mathbb{H} tout entier. Ainsi, à chaque étape de l'algorithme, on donne une approximation quadratique de la frontière plutôt qu'une approximation linéaire, comme faite dans le cas de l'algorithme de coupures. La dernière application ϕ_{n+1} est une application conforme de l'intersection d'un disque avec le demi plan supérieur sur \mathbb{H} , telle que la frontière passe par les points 0, ζ_{2n+1} et l'image de z_0 par l'application $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1$. Une illustration est donnée par la figure .

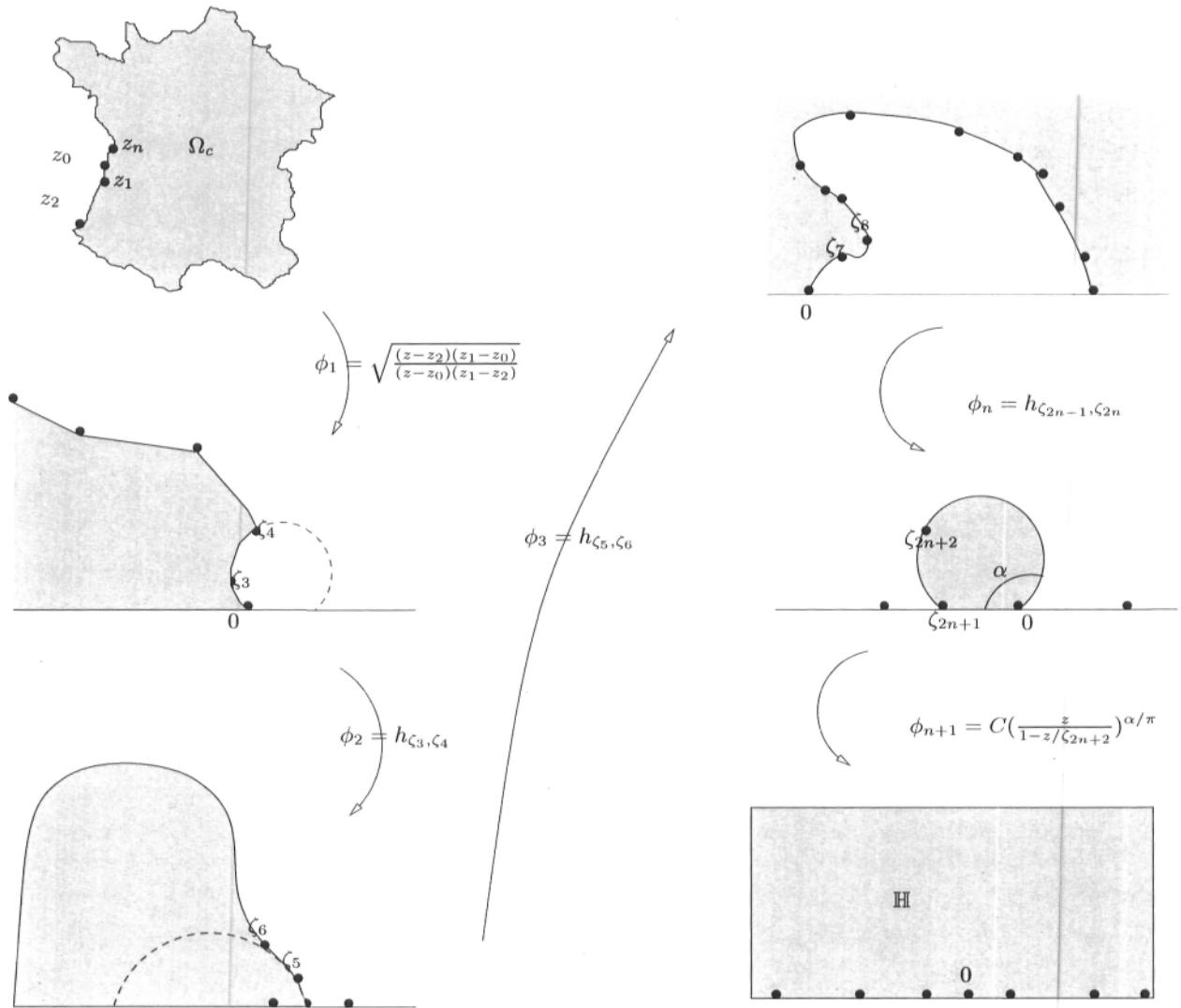


FIG. 1.6 – Algorithme Zipper.

1.3.3 Convergence de l'algorithme Géodésique

Comme pour tout algorithme de calcul, les questions intéressantes à se poser sont celles de sa convergence et également de sa précision. Cette sous section reprend essentiellement les idées de base de l'article [Mar-Rohd] sur la convergence de l'algorithme, sans trop entrer dans les détails. Nous ne donnerons donc que quelques éléments de réponses quant à la convergence de l'algorithme. L'idée est éventuellement de pouvoir reprendre le travail afin de le généraliser à notre algorithme de calcul de domaines doublement connexes. Pour cela, on va commencer par aborder quelques concepts de base utiles pour la démonstration de la convergence de l'algorithme.

Définition 1.3.1 Une *chaîne de disques* est une famille finie D_0, \dots, D_n de disques ouverts deux à deux disjoints, telle que D_j soit tangent à D_{j+1} où $D_{n+1} = D_0$.

Tout polygone non dégénéré P (i.e. qui est une courbe de Jordan) peut être recouvert par une chaîne de disques centrés sur P , comme le montre la figure 1.7. Il suffit pour cela, de centrer un disque en chacun des angles. Il va alors « rester » une union finie de segments disjoints, que l'on peut trivialement recouvrir d'un nombre fini de disques ouverts de rayon arbitrairement petit.

On peut construire de diverses façons des chaînes de disques. Pour ce faire, on peut utiliser une décomposition de Whitney ou considérer les cercles frontières d'un remplissage par disques.



FIG. 1.7 – Une chaîne de disques recouvrant un polygone de Jordan.

Définition 1.3.2 Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $z_0 \in U$. Soit f et g deux fonctions complexes définies sur $U \setminus \{z_0\}$. On dit que f et g sont équivalentes en z_0 et on note $f \sim_{z_0} g$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$$

Théorème 1.3.3 [Mar Rohd] Soit D_0, \dots, D_n une chaîne de disques et soit (z_j) la famille de points définis par $z_j = \partial D_j \cap \partial D_{j+1}$ où $D_{n+1} = D_0$. L'algorithme Géodésique appliqué à la famille de points (z_j) fournit une application conforme ϕ_c^{-1} du demi-plan supérieur \mathbb{H} sur la région bordée par une courbe de Jordan γ qui est C^1 et analytique par morceaux et qui vérifie

$$\gamma \subset \bigcup_0^n (D_j \cup z_j).$$

Autrement dit, la courbe que l'on calcule avec l'algorithme Géodésique est contrôlée par les chaînes de disques que l'on se donne et qui produit les points d'interpolation.

Démonstration

Un arc de cercle orthogonal à \mathbb{R} est une géodésique hyperbolique dans le demi plan supérieur \mathbb{H} . Soit γ_j la portion de $\partial \Omega_c$ entre z_j et z_{j+1} , où Ω_c est le domaine effectivement calculé par notre algorithme. Comme remarqué au début du chapitre, les géodésiques hyperboliques sont conservées par les applications conformes. Notamment, γ_j est une géodésique hyperbolique dans $\mathbb{C}^* \setminus \bigcup_k^{j-1} \gamma_k$. En reprenant les notations de la section 1.3.1, alors chaque application de base f_a^{-1} est une application analytique sur chaque composante de $\mathbb{R} \setminus \{\pm c\}$. De plus $f_a^{-1}(z) \sim_{\pm c} \sqrt{z}$ et $f_a^{-1}(z) \sim_0 z^2$ et donc toute composée $f_b^{-1} \circ f_a^{-1}$ préserve les angles aux points $\pm c$. La géodésique γ_j est donc un arc analytique qui joint γ_{j-1} en z_j avec un angle de π . Ainsi, la frontière que l'on calcule est bien C^1 et analytique par morceaux. De plus, $\gamma_0 \subset D_0$. Le fait que γ_{j-1} rencontre γ_j en z_j avec un angle de π implique également que $\gamma_j \cap D_j \neq \emptyset$ et par le théorème de Jørgensen que $\gamma_j \subset D_j$ ce qui termine la démonstration. \square

On voit bien comment le théorème de Jørgensen intervient dans la démonstration de ce théorème de convergence. Cependant, dans l'article [Mar–Rohd], seule la version faible était énoncée tandis que la démonstration recourt bel et bien la version forte du théorème.

Lemme 1.3.4 *Soit Ω un domaine simplement connexe borné. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver des disques D_0, \dots, D_n de sorte que chaque D_j ait un rayon d'au plus ϵ et de sorte que $d_H(\partial\Omega, \bigcup_0^n D_j) < \epsilon$ où d_H est la distance de Hausdorff relative à la distance euclidienne.*

Pour la démonstration de ce lemme nous aurons à définir la décomposition de Whitney d'un domaine simplement connexe. Soit Ω un domaine simplement connexe contenu dans le carré unité. Le carré unité est lui-même décomposé en 4 carrés de cotés égaux, eux-mêmes décomposés en 4 carrés de cotés égaux et ainsi de suite. Si Q est un carré, notons alors $2Q$ le carré de même centre et de côté deux fois plus grand. Dans ce procédé de subdivision, on se donne la règle suivante : si Q est un carré tel que $2Q \subset \Omega$, alors on ne subdivise plus Q . Soit U_n l'union de tous les carrés Q obtenus par cette méthode, de cotés au moins 2^{-n} et tels que $2Q \subset \Omega$. Soit $z_0 \in \Omega$. Posons alors Ω_n comme étant la composante de l'intérieur de U_n contenant z_0 . Eventuellement, ceci n'est possible que pour n assez grand. Ainsi Ω_n est un polygone de Jordan, constitué de carrés de cotés d'au plus 2^{-n} . On peut alors former une chaîne de disques en plaçant un disque de rayon 2^{n+1} sur chaque sommet du polygone. Il est clair que l'on obtient bien une chaîne de disques et que celle-ci vérifie bien les propriétés requises.

Définition 1.3.5 Soient C et C_n deux courbes de Jordan dans le plan et T_n un homéomorphisme de C sur C_n . Soit $w \in C$ et $w_n = T_n(w)$ le point correspondant sur C_n . Posons alors $d_n = \max_{w \in C} |w_n - w|$. Si on peut trouver une suite (T_n) d'homéomorphismes de C sur C_n telle que la distance (d_n) , associée à (T_n) , converge vers 0, on dit que la suite C_n converge vers C au sens de Fréchet.

Dans la suite du mémoire, nous ferons plusieurs fois référence au théorème suivant. Il nous permettra dans un premier temps, de donner un exemple de non convergence au sens de Fréchet.

Théorème 1.3.6 (Hurwitz) [Conway] Soit (f_n) une suite de fonctions analytiques injectives sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si (f_n) converge de façon compacte sur Ω vers une fonction f , alors f est injective ou identiquement constante.

Exemples

Soient C le cercle unité et C_n le cercle défini par $C_n = (1 - \frac{1}{n})C$. Alors il est clair que C_n converge vers C au sens de Fréchet.

D'une manière plus générale, soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes injectives définies sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, convergeant de façon compacte vers une fonction f . Ainsi $f_n(e^{2\pi it})$ converge uniformément vers $f(e^{2\pi it})$ sur $0 \leq t \leq 1$. Si f est injective, alors la famille (C_n) de courbes de Jordan induite par les f_n , converge au sens de Fréchet vers la courbe de Jordan C , paramétrisée par $t \mapsto f(e^{2\pi it})$. Si f n'est pas injective, alors par le théorème de Hurwitz, f est identiquement constante et il n'existe aucun homéomorphisme entre C et un C_n . Ceci nous donne un premier exemple de non convergence au sens de Fréchet. Notamment, un exemple précis nous est donné par la construction mentionnée ci dessus avec la suite de fonctions f_n définie sur \mathbb{C} par $z \mapsto \frac{z}{n}$, qui converge de façon compacte vers 0.

Théorème 1.3.7 [Tsu1, p.383] Soient D et D_1, \dots, D_j, \dots des domaines simplement connexes du plan qui contiennent tous le point $w = 0$. Supposons que chacun des domaines soit borné respectivement par des courbes de Jordan C et C_j telles que C_j converge vers C au sens de Fréchet. Si f envoie conformément le disque unité sur D , normalisée par les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$ et si les f_j envoient respectivement le disque unité sur D_j , chacune normalisée par les conditions $f_j(0) = 0$ et $f'_j(0) > 0$, alors chaque f_j , de même que f , se prolonge de façon homéomorphe sur le bord du disque et la suite (f_j) converge uniformément vers f sur le disque unité fermé.

Le point culminant de cette section est le théorème suivant, qui nous donne en quelque sorte la précision de l'algorithme.

Théorème 1.3.8 *Soit Ω un domaine simplement connexe et borné dans le plan complexe. Alors l'algorithme Géodésique peut être utilisé pour trouver une application conforme f_c , du disque unité dans une région de Jordan Ω_c , de sorte que*

$$d_H(\partial\Omega, \partial\Omega_c) < \epsilon.$$

Si $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan, on peut également trouver f_c de sorte que

$$\sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z) - f_c(z)| < \epsilon.$$

La démonstration est maintenant triviale, car il suffit de voir que la première assertion est une conséquence directe du théorème 1.3.3 et du lemme 1.3.1. La seconde assertion est une conséquence directe de la première partie du théorème 1.3.7.

Expérimentations

Nous venons de présenter deux versions de l'algorithme géodésique. La première utilise des approximations d'un domaine via des arcs de cercle orthogonaux à \mathbb{R} , c'est à dire des géodésiques hyperboliques dans la géométrie du plan de Poincaré. Cet algorithme est l'algorithme géodésique classique. La seconde utilise des arcs de cercles passant par deux points d'interpolation successifs, c'est l'algorithme Zipper. Il est intéressant de confronter brièvement dans cette section, les deux algorithmes ainsi obtenus.

Dans un premier temps, remarquons que l'une des forces de ces algorithmes est de calculer à la fois une application conforme entre un domaine simplement connexe Ω et \mathbb{D} mais aussi son inverse, ce que les autres algorithmes ne permettent pas en général.

²Pour une confrontation des algorithmes plus en profondeur, se référer à [Mar-Rohd].

On peut ensuite voir que la vitesse de l'algorithme géodésique ne dépend pas de la forme de la région ou de la distribution des points d'interpolation que l'on choisit. En effet, toutes les applications de base s'expriment en terme de trois applications élémentaires. Par exemple, pour se donner une idée de la vitesse et de la précision de l'algorithme, lorsque 10 000 points d'interpolation sont donnés, l'algorithme géodésique met 20 secondes pour calculer les applications conformes sur un Pentium IV cadencé à 3.2 GHz. Le calcul d'erreur peut se faire de façon exacte lorsque les applications conformes sont connues. Si on prend l'exemple de la fonction

$$f(z) = \frac{rz}{1 - (rz)^2}$$

alors f envoie le disque unité sur une ellipse inversée dans le cas où $r < 1$. Pour l'expérience, on choisit de prendre 10 000 points d'interpolation, également répartis sur le cercle et $r = 0.95$. L'erreur commise par l'algorithme géodésique est inférieure à 1.8×10^{-6} . Sous les mêmes conditions, l'algorithme Zipper met 84 secondes pour calculer les applications conformes et l'erreur commise est inférieure à 9.2×10^{-8} . Le temps d'exécution de l'algorithme géodésique passe à 25 minutes lorsque l'on demande de calculer l'image de 100 000 points et l'erreur commise est alors inférieure à 2×10^{-8} . On peut cependant espérer qu'en choisissant les points d'une meilleure manière, la précision de l'algorithme augmente. Par exemple, en choisissant les points de sorte que trois points d'interpolations successifs forment un angle assez « petit » et que le rapport des longueurs des arcs successifs soient toujours proches de 1. En comparant l'image de 9890 points d'interpolation ayant ces propriétés avec leurs images réelles, on remarque que l'erreur maximale est de 5.3×10^{-6} . On peut également remarquer que la distance maximale séparant deux points successifs sur le cercle est de 4.2×10^{-2} , c'est à dire que l'erreur commise est inférieure bien inférieure à la mesure harmonique des arcs correspondants.

Chapitre 2

Les domaines multiplement connexes

Le but de cette section est de jeter quelques bases sur les domaines multiplement connexes. Par exemple, s'il est toujours possible d'identifier deux domaines simplement connexes stricts du plan via une application conforme, on verra que tout ne se passe pas aussi bien dans le cas des domaines multiplement connexes. Nous allons nous intéresser aux domaines doublement connexes et essayer de trouver des domaines que l'on qualifiera de canoniques, en ce sens qu'ils seront des représentants naturels des classes, modulo la relation de conformité des domaines.

Si le domaine canonique (usuel) pour la simple connexité est le disque unité, il est naturel de se demander à quelles conditions des couronnes (ou anneaux), qui ne sont rien d'autre que des disques que l'on a troués, sont conformes entre elles. Notamment, si l'on note $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$, il est clair qu'une couronne est entièrement déterminée par les paramètres r et R . Il est évident que le rapport R/r est conservé par dilatation, tandis que ce n'est le cas ni de R ni de r . C'est donc un bon candidat pour une invariance possible sous les transformations conformes. Appelons alors *module de la couronne* cette quantité. Pour la suite, $A(r, R)$ sera la couronne dont les frontières

sont les cercles centrés en 0, de rayon intérieur r et de rayon extérieur R . Nous voilà prêts à énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.0.9 *Soient A_1 et A_2 deux couronnes du plan complexe. Alors A_1 et A_2 sont conformes si et seulement si elles ont le même module.*

Avant de donner la preuve de ce théorème, remarquons qu'il est clair que tous les disques pointés sont conformes entre eux, et il est même facile d'exhiber une application qui fonctionne. Pour cette raison, nous ne considérerons pas ces cas triviaux.

Preuve

La preuve suivante est inspirée des livres [Rud] et [Neha]. Nous nous proposons de donner une autre preuve, plus calculatoire, au chapitre 5.

On peut supposer sans perte de généralité que les couronnes sont

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R_1\} \text{ et } A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < R_2\}.$$

Supposons qu'il existe une fonction f holomorphe sur A_1 , injective et telle que $f(A_1) = A_2$.

Soit K le cercle de centre 0 et de rayon $r = \sqrt{R_2}$. Puisque $f^{-1} : A_2 \rightarrow A_1$, est aussi une fonction holomorphe, $f^{-1}(K)$ est compact. Donc pour un $\epsilon \in (R_1 - 1, 0)$, on a que

$$A(1, 1 + \epsilon) \cap f^{-1}(K) = \emptyset.$$

Ainsi $V = f(A(1, 1 + \epsilon))$ est un sous-ensemble connexe de A_2 qui n'intersecte pas K , tel que $V \subset A(r, r')$ pour un $r > 1$ ou $V \subset A(r', R_2)$ pour un $r' > 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on est dans le premier cas, sinon il suffit de remplacer f par R_2/f , ce qui échange les bords de A_2 .

Soit (z_n) telle que $1 < |z_n| < 1 + \epsilon$ et $|z_n| \rightarrow 1$. On a alors $f(z_n) \in V$ et $\{f(z_n)\}$ n'a pas de point d'accumulation dans A_2 , sinon par continuité de f^{-1} , on aurait que $\{(z_n)\}$ en a un dans A_1 ce qui contredit notre hypothèse selon laquelle $|z_n| \rightarrow 1$. Notamment, on obtient que $|f(z_n)| \rightarrow 1$.

On montre de la même manière que $|f(z_n)| \rightarrow R_2$ lorsque $|z_n| \rightarrow R_1$.

Soit h définie sur A_1 par

$$h(z) = \log(R_1) \log |f(z)| - \log(R_2) \log |z|.$$

Cette fonction est harmonique sur A_1 , car f est holomorphe. On peut facilement voir grâce aux calculs précédents, que h peut se prolonger par continuité aux bords, et ce, de sorte que h s'annule en tout point de ∂A_1 . Par le principe du maximum, h est identiquement nulle et il en est donc de même pour ∂h . On trouve alors que

$$0 = \log(R_1) \frac{f'}{f} - \frac{\log(R_2)}{z}$$

ou, d'une manière équivalente,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z}$$

où $\alpha = \frac{\log(R_2)}{\log(R_1)}$.

Posons $\gamma = \sqrt{R_1}e^{it}$ et $\Gamma = f \circ \gamma$. Alors en intégrant l'équation précédente, on trouve que

$$\alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \text{Ind}_{\Gamma}(0)$$

Or, l'indice de Γ autour de 0 est nécessairement un nombre entier et, par définition de α , il est de plus positif.

Soit $w(z) = \frac{f(z)}{z^{\alpha}}$, alors

$$w'(z) = \frac{f'(z)z - \alpha f(z)}{z^{\alpha+1}} \equiv 0.$$

Ainsi, $f(z) = kz^{\alpha}$ et puisque f est injective, on peut conclure que $\alpha = 1$ et donc que $R_1 = R_2$, ce qui achève la preuve, la réciproque étant triviale. \square

2.1 Les domaines à fentes parallèles

A l'instar des domaines simplement connexes, où il est bon d'avoir plusieurs domaines de référence (ce que sont par exemple \mathbb{H} et \mathbb{D}) nous nous proposons d'étudier plusieurs exemples de domaines multiplement connexes.

De la même façon que pour la démonstration classique du théorème de représentation de Riemann, nous ne donnerons pas de preuve constructive de l'existence d'applications conformes entre nos domaines. Les fonctions que l'on va trouver ne seront rien d'autre

que des fonctions extrémales pour certaines propriétés. Remarquons que la démonstration typique du théorème de Riemann se fait en 3 étapes¹. On commence par construire l'ensemble Σ des fonctions univalentes g (i.e. injectives et holomorphes) sur un ouvert propre et non vide $U \subset \mathbb{C}$ telles que (i) $|g(z)| \leq 1$, (ii) $g(z_0) = 0$ (iii) $g'(z_0) > 0$. On montre dans un premier temps que cet ensemble est non vide. Ensuite, on définit une certaine condition de maximalité pour les fonctions de notre classe et on montre que ce maximum est atteint par une certaine fonction f . Finalement cette fonction extrême f est une application qui envoie conformément U sur \mathbb{D} . On a alors réussi à exhiber une solution via un problème de maximisation. On ne sera donc pas surpris des démarches suivantes qui vont également suivre un schéma de maximisation ou de minimisation, suivant le domaine canonique sur lequel on veut travailler. Commençons par énoncer deux lemmes et quelques définitions qui nous seront utiles à la fois dans la démonstration, mais également dans l'énoncé du théorème qui nous intéresse, et qui concerne le premier domaine canonique.

Définition 2.1.1 Soient I un ensemble non nécessairement dénombrable et $(K_i)_{i \in I}$ une famille de segments parallèles et soit $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. On appelle *plan à fentes parallèles*, tout ensemble de la forme $\mathbb{C} \setminus K$.

Les théorèmes qui vont suivre sont importants pour plusieurs démonstrations de ce chapitre et sont énoncés sans démonstration.

Théorème 2.1.2 (Bieberbach–de Branges–Koebe) [Rud, p.344] Soit f une fonction injective et holomorphe sur \mathbb{D} , normalisée par les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

¹Cette démonstration reprend de manière simplifiée la preuve originale de Koebe, considérée comme la première satisfaisante, même si Ahlfors fait remarquer [Ahlfors, p.230] que W.F. Osgood avait démontré antérieurement un théorème de théorie du potentiel qui permet de retrouver le résultat.

²Bieberbach conjectura le résultat en 1916 et résolut lui-même le cas de l'inégalité particulière $|a_n| \leq 2$. En 1931, Dieudonné résolut le cas particulier des coefficients réels et il fallu attendre de Branges pour voir une démonstration complète en 1985. La deuxième assertion du théorème est connue sous le nom de « théorème du quart de disque de Koebe ».

Ainsi, f s'écrit au voisinage de 0, comme une série entière de la forme

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

On a alors

1. $|a_n| \leq n, \quad \forall n > 1,$
2. $B(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D}).$

On a un résultat analogue dans le cas du disque pointé en 0.

Théorème 2.1.3 (Théorème de l'aire) [Rud, p.332] Soit f une fonction injective et holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ telle que

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$. En particulier $|a_1| \leq 1$.

Lemme 2.1.4 Soit D un domaine simplement connexe du plan donc le complémentaire dans \mathbb{C} est relativement compact et dont la frontière est un continu (i.e. un compact connexe) qui n'est pas un segment parallèle à l'axe réel.

Si, au voisinage de l'infini, on a $w = f(z) = z + \frac{a}{z} + \dots$ où f envoie conformément D sur un plan à fentes parallèles Δ du plan, alors

$$\operatorname{Re}(a) > 0.$$

Preuve

Supposons que la frontière de Δ soit le segment $\alpha \leq \xi \leq \beta, \eta = cte$ où $w = \xi + i\eta$. Alors $v = \frac{w-B}{A}$ pour des constantes réelles A et B convenablement choisies, est une application qui envoie Δ sur un nouveau domaine Δ^* à fentes parallèles, et envoie $\partial\Delta$ sur le segment $[-2, 2]$ dans le plan $v = \xi^* + i\eta^*$.

Par hypothèse, on a $w = z + \frac{a}{z} + o(\frac{1}{z})$ au voisinage de l'infini, ce qui nous permet de

calculer les premiers termes du développement asymptotique de $z(w)$. Notamment on cherche à résoudre $z^2 - wz + a = 0$ et donc $z = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4a}}{2}$. Remarquons qu'il est beaucoup plus facile de calculer un développement limité autour de 0, plutôt qu'un développement asymptotique au voisinage de ∞ . Utilisant l'astuce $w = \frac{1}{w^{-1}}$, il est facile de se ramener au point 0, puisque w est au voisinage de ∞ lorsque la variable w^{-1} est au voisinage de 0. Puisque nous n'avons besoin que du terme d'ordre 1 dans notre développement limité, on peut se permettre de remarquer qu'au voisinage de 0, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$. Notamment ici on a $\pm\sqrt{w^2 - 4a} = \pm\frac{1}{w^{-1}}\sqrt{1 - 4aw^{-2}} = \pm(w - \frac{2a}{w} + o(\frac{1}{w}))$. Puisque $w(z)$ tend vers ∞ lorsque z tend vers ∞ , on a également que $z(w)$ tend vers ∞ lorsque w tend vers ∞ . Notamment, le premier terme du développement asymptotique de $z(w)$ ne peut être $O(1)$. Autrement dit, le cas $z = \frac{a}{w} + o(\frac{1}{w})$ est impossible et donc $z = w - \frac{a}{w} + o(\frac{1}{w})$. On en déduit alors que

$$z = w - \frac{a}{w} + o\left(\frac{1}{w}\right) = Av + B - \frac{a}{Av + B} + o\left(\frac{1}{v}\right) = Av + B - \frac{a}{Av} + o\left(\frac{1}{v}\right)$$

Posons $z^* = \frac{z-B}{A}$, et ζ l'application telle que $v(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}$. Ainsi, $\zeta(v)$ est une application qui envoie Δ^* sur l'extérieur du cercle unité, et on a que

$$z^*(\zeta) = \zeta + (1 - \frac{a}{A^2})\frac{1}{\zeta} + \dots$$

L'application $z^*(\zeta)$ est univalente pour $\zeta > 1$, et donc par le théorème de l'aire, on obtient que

$$\left|1 - \frac{a}{A^2}\right| \leq 1.$$

Puisque A est réel, on obtient que $\operatorname{Re}(a) \geq 0$. Si $\operatorname{Re}(a) = 0$, alors on obtient que $z^* = \zeta + \frac{1}{\zeta} = v$ et notamment $w = z$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Ainsi $\operatorname{Re}(a) > 0$, et le lemme est prouvé. \square

Définition 2.1.5 Soit f une fonction analytique sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ sauf peut-être en certains points isolés $(z_i)_{i=1\dots n}$ qui sont des singularités pour f . Alors, d'après le théorème de Laurent, pour chaque singularité z_i , il existe une unique suite $(\alpha_k^{(i)})_{k \geq -\infty}$ de nombres complexes, et un voisinage V_i de z_i , tel que sur $V_i \setminus \{z_i\}$ f soit donnée par la représentation suivante

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k^{(i)} z^k.$$

Dans ce cas, le nombre $\alpha_{-1}^{(i)}$ est appelé *le résidu de f en z_i* et on le note $\text{Res}(f, z_i)$. On appelle *résidu de f en ∞* , le résidu de $z \mapsto f(1/z)/z^2$ en 0, et on le note $\text{Res}(f, \infty)$.

Lemme 2.1.6 *Soit D un domaine multiplement connexe dont le complémentaire dans \mathbb{C} est relativement compact. Soit Σ la famille de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :*

- f est méromorphe et univalente dans D ,
- $f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$ au voisinage de $z = \infty$.

Posons

$$\mu = \sup_{f \in \Sigma} \text{Re}(a_1).$$

Alors il existe une fonction $f_0 \in \Sigma$ telle que $\text{Res}(f_0, \infty) = \mu$.

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin de définir les notations suivantes.

Si γ est une courbe de Jordan dans le plan complexe, on sait que celle-ci partage \mathbb{C} en deux domaines C_1 et C_2 en ce sens que $C_1 \cup C_2 \cup \gamma = \mathbb{C}$. Notamment, un seul des ensembles parmi C_1 et C_2 est borné. Celui-ci est alors appelé *l'intérieur de γ* , noté $\text{Int}(\gamma)$. L'ensemble non borné est appelé *l'extérieur de γ* .

Définition 2.1.7 Soit Σ une famille d'applications holomorphes sur un domaine Ω de \mathbb{C} . On dit que Σ est *normale*, si toute suite de Σ possède une sous-suite qui converge de façon compacte sur Ω , i.e. qui converge uniformément sur tout compact de Ω .

Remarquons que la définition d'une famille normale Σ ressemble beaucoup à la propriété de Bolzano-Weierstrass. La différence réside dans le fait que l'on n'impose pas à la limite de la suite extraite d'être dans Σ . On verra cependant qu'une famille normale ressemble beaucoup à un ensemble compact.

Le théorème suivant reviendra fréquemment dans les démonstrations de résultats concernant les familles normales. C'est donc probablement un bon moment pour l'énoncer.

Théorème 2.1.8 (Montel) [Rud,] Soit Σ une famille de fonctions holomorphes sur un domaine Ω de \mathbb{C} . Supposons de plus que Σ est uniformément bornée sur tout compact de Ω . Alors Σ est une famille normale.

Preuve du lemme 2.1.6

On peut choisir $r > 0$ assez grand pour que ∂D soit contenu dans $B(0, r)$.

Soient $f \in \Sigma$ et soit Γ_r l'image du cercle $|z| = r$ par $w = f(z)$. Soit $w_0 \in \text{Int}(\Gamma_r)$, et définissons $\chi(\zeta) = r/(f(z) - w_0)$ où $\zeta = \frac{r}{z}$.

Il est clair que $\chi(\zeta)$ est univalente dans le disque unité et au voisinage de 0, on a

$$\chi(\zeta) = \frac{r}{z + a_1/z + \dots - w_0} = \zeta + \frac{w_0}{r}\zeta^2 + \dots$$

Une version forte du théorème du quart de disque Koebe, ou plus simplement la conjecture de Bieberbach, nous permet d'avoir la majoration $|\frac{w_0}{r}| \leq 2$ ou, d'une manière équivalente, $|w_0| \leq 2r$.

On peut encore appliquer le théorème du quart de disque de Koebe pour obtenir $|\chi(\zeta)| \geq \frac{1}{4}$ sur le cercle $|\zeta| = 1$. Autrement dit, sur le cercle $|z| = r$, on a la minoration suivante

$$\left| \frac{r}{f(z) - w_0} \right| \geq \frac{1}{4}$$

et notamment $|f(z) - w_0| \leq 4r$. Finalement, $|f(z)| \leq 6r$ pour $z \in B(0, r)$ et Σ est une famille normale par le théorème de Montel.

Par définition de μ , on peut trouver une suite $f_n \in \Sigma$ telle que $a_1^{(n)} \rightarrow \mu$ où $a_1^{(n)} = \text{Res}(f_n, \infty)$.

Puisque la famille Σ est normale, on peut choisir les f_n de sorte que $f_n \rightarrow f_0$ uniformément sur tout compact de D . Les théorèmes de Hurwitz et de Morera nous permettent donc de dire que $f_0 \in \Sigma$. Notamment

$$a_1^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} f_n(z) dz \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} f_0(z) dz = a_1^0$$

et finalement $\text{Re}(a_1^0) = \mu$ ce qui est le résultat souhaité. \square

On peut à présent énoncer le théorème qui nous intéresse.

Théorème 2.1.9 Soit D un domaine multiplement connexe dans le plan et dont le complémentaire dans \mathbb{C} est relativement compact et soit f_0 , la fonction définie dans le lemme précédent. Nous avons les résultats suivants :

1. D est envoyé conformément par f_0 sur un plan à fentes parallèles Δ .
2. La mesure (de surface) de $\partial\Delta$ est nulle.

Ce théorème est donc très intéressant, puisqu'il affirme que tout domaine multiplement connexe qui contient le point à l'infini est conforme à un plan à fentes parallèles, et que ses fentes ne sont pas trop rapprochées.

Pour y voir plus clair, considérons l'exemple suivant :

Soit K_3 l'ensemble triadique de Cantor. Cet ensemble est la limite de la suite définie de la manière suivante :

$$K(0) = [0, 1],$$

$K(n+1)$ est l'ensemble $K(n)$ auquel on a « enlevé » le tiers du milieu à chacune de ses composantes connexes.

La limite

$$K_3 = \bigcap K(n)$$

est un ensemble trivialement compact, totalement disconnexe et de mesure nulle. On peut utiliser la même idée en changeant légèrement la construction, de façon à obtenir un ensemble qui soit toujours totalement disconnexe et compact, mais de mesure non nulle. Par exemple, soit

$$P = \{z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}(z) \in [-1, 1], \quad \text{Im}(z) \in K\}$$

où K est l'ensemble de Smith-Volterra-Cantor, c'est à dire la variante de l'ensemble décrit précédemment, défini de la façon suivante.

On considère $K_0 = [0, 1]$. Pour obtenir K_1 , on enlève à K_0 , le quart central de ce dernier, c'est à dire $K_1 = K_0 \setminus [1/2 - 1/8, 1/2 + 1/8]$. On enlève ensuite à K_1 , un huitième à chacune des composantes connexes de celui ci. On définit alors la suite récurrente (K_n) en enlevant un segment de longueur $\frac{1}{2^{2n}}$ à chacune des composantes connexes de $K(n-1)$

pour $n > 1$. K est défini comme la limite de la suite, en ce sens que $K = \bigcap K_n$. On a alors $\lambda(K) = \frac{1}{2}$, où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Chacun des K_n est trivialement compact et par suite on a la compacité de K . Aussi le théorème de Tychonov nous assure la compacité de P et il est clair que $\lambda_2(K) = 1$ où λ_2 est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Alors $D = \mathbb{C} \setminus P$ est un domaine vérifiant les conditions du théorème et tel que $\lambda(\partial D) > 0$. Cela signifie entre autre qu'il existe une application conforme non triviale envoyant D sur un plan à fentes parallèles Δ , où $\lambda_2(\Delta) = 0$. Notamment, cet exemple nous permet de montrer qu'il n'y a pas, en général, unicité des applications conformes d'un tel domaine vers un plan à fentes parallèles.

En effet, supposons qu'il existe une unique application f_1 entre le domaine D et un plan à fentes parallèles. D étant un plan à fentes parallèles, l'application identité est donc cette unique application f_1 . Le théorème précédent affirme également qu'il existe une application conforme f_2 entre D et un plan à fentes parallèle P , telle que $\lambda_2(\partial P) = 0$. Puisque par construction de D , on a que $\lambda_2(\partial(D)) = 1$, on ne peut avoir $f_1 = f_2$, ce qui prouve qu'il n'y a pas, en général, unicité d'une application conforme entre un domaine D et un plan à fentes parallèles. On verra cependant au prochain théorème que c'est le cas si la connectivité est finie.

Preuve du théorème 2.1.9 Nous ne prouverons que la première partie du théorème (Pour plus de renseignements sur la seconde partie, voir [Tsu1, p401]).

Soit Δ l'image de D par la fonction $w = f_0(z)$ dans le plan, et supposons que Δ ne soit pas un plan à fentes parallèles. Alors il existe une composante γ de $\partial\Delta$ qui est un continu qui n'est pas un segment parallèle à l'axe réel. Soit $\Delta_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, qui est un domaine simplement connexe borné par γ . D'après le théorème de représentation de Riemann on peut envoyer Δ_0 sur un plan à fentes parallèles du plan ζ via une application ϕ telle que l'on ait au voisinage de l'infini

$$\phi(w) = w + \frac{a}{w} + \dots$$

Par le lemme 2.1, on obtient alors que $\operatorname{Re}(a) > 0$.

On a $\phi(f_0(z)) \in \Sigma$ et

$$\phi(f_0(z)) = f_0(z) + \frac{a}{f_0(z)} + \dots = z + \frac{a_1^0 + a}{z} + \dots$$

Notamment on obtient que $\operatorname{Re}(a_1^0 + a) = \mu + \operatorname{Re}(a) > \mu$ ce qui nous fournit une contradiction, et le résultat est alors démontré. \square

Théorème 2.1.10 *Si D est de connectivité finie et est envoyé conformément par $w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$ sur un plan à fentes parallèles, alors f est unique.*

La démonstration est quasi triviale. En effet, si l'on a deux telles fonctions, alors leur différence est bornée et holomorphe là où définie. Notamment elle envoie D dans un domaine borné dont la frontière est une union finie de segments parallèles à l'axe réel, ce qui est impossible.

2.2 Domaines à fentes radiales et circulaires

Il ne serait pas sans intérêt de trouver d'autres domaines canoniques et de refaire le même cheminement. Malheureusement, cela deviendrait vite trop lourd, et trop long. On se propose plutôt de donner les sept domaines canoniques usuels et d'énoncer uniquement les théorèmes qui nous intéressent, sans démonstration. (Pour une démonstration des résultats plus en détails, se référer à [Neha], ou à [Tsu1].)

Un domaine multiplement connexe Δ qui contient les points 0 et ∞ , et dont la frontière est une union d'arcs de cercles du type $|z| = cte$, est appelé un *domaine à fentes circulaires*.

Un domaine du même type, où la frontière est une union de segments portés par des lignes du type $\arg(z) = cte$ est appelé un *domaine à fentes radiales*.

Lemme 2.2.1 *Soit D un domaine multiplement connexe dans le plan qui contient le point 0 et dont le complémentaire relatif à \mathbb{C} est relativement compact.*

Soit Σ la famille des fonctions f méromorphes et univalentes dans D telles que $f(0) = 0$ et $f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$ au voisinage de l'infini.

Posons

$$\underline{\mu} = \inf_{f \in \Sigma} |f'(0)| \text{ et } \bar{\mu} = \sup_{f \in \Sigma} |f'(0)|.$$

Alors il existe ϕ et ψ dans Σ telles que $|\phi'(0)| = \bar{\mu}$ et $|\psi'(0)| = \underline{\mu}$.

Théorème 2.2.2 Soit D un domaine multiplement connexe dans le plan qui contient le point 0 et dont le complémentaire relatif à \mathbb{C} est relativement compact. Soient ϕ et ψ les fonctions définies dans le lemme ci dessus. Alors

1. ϕ envoie conformément D sur un plan à fentes circulaires Δ .
2. ψ envoie conformément D sur un plan à fentes radiales Δ^* .

De plus, $\lambda_2(\partial\Delta) = \lambda_2(\partial\Delta^*) = 0$

Encore une fois, ce théorème nous dit que le domaine canonique a ses fentes qui ne sont pas trop rapprochées, et on évite ainsi des cas « pathologiques » de frontière de mesure non nulle.

Théorème 2.2.3 Dans le cas où D est de connectivité finie et est envoyé via f sur l'un des deux domaines canoniques précédents, (avec $f(0)=0$ et $w = f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$ au voisinage de l'infini), alors f est unique.

Encore une fois, il est relativement facile de voir que dans le cas d'une connectivité infinie, le résultat est en général faux. Un exemple semblable au cas du plan à fentes parallèles fait l'affaire.

2.3 Les disques à fentes radiales ou circulaires

On appelle disque à fentes circulaires (resp. radiales) le disque unité fendu suivant des arcs de cercle du type $|z| = cte < 1$ (resp. $\arg(z) = cte$). Cette définition est illustrée



FIG. 2.1 – Disques à fentes circulaires à gauche et radiales à droite

par la figure 2.1.

Définition 2.3.1 Soit Ω une domaine multiplement connexe du plan complexe. Il existe donc un domaine simplement connexe $\tilde{\Omega}$ et une famille (K_i) de continus relatifs à $\tilde{\Omega}$, tels que $\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \bigcup_i K_i$. Si pour i_0 , il existe un voisinage V_{i_0} de K_{i_0} tel que $V_{i_0} \cap \bigcup_i K_i = K_{i_0}$, on dit que K_{i_0} est *une composante de frontière libre*.

Il est facile de voir qu'un domaine de connectivité finie a toutes ses frontières libres.

Soit $\Omega = \mathbb{D} \setminus (\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 2} \cup \{0\})$. Il est clair que $\{0\}$ est une composante de frontière non libre de Ω et que c'est la seule.

Pour plus de confort, nous adopterons pour la suite du mémoire la convention suivante. Lorsque U et V sont deux ouverts de \mathbb{C} , on dira qu'une application holomorphe $f : U \rightarrow V$ envoie $\gamma_1 \subset \partial U$ sur $\gamma_2 \subset \partial V$ si f se prolonge de façon continue en tout point de γ_1 et si $f(\gamma_1) = \gamma_2$. Cet abus de langage permettra notamment d'assouplir les notations.

Lemme 2.3.2 Soit D un domaine multiplement connexe du plan des z , contenu dans le disque unité ouvert. Supposons de plus que $0 \in D$, et qu'il existe une composante libre $\gamma \in \partial D$.

Alors on peut envoyer conformément l'extérieur de γ sur le disque $|w| < 1$ par $w = f(z)$, où $f(0) = 0$ et $|f(z)| = 1$ sur γ .

Soit Σ la famille des fonctions $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

- g est univalente et $|g(z)| < 1$ dans D ,
- $g(0) = 0$,
- $|g(z)| = 1$ sur γ .

Puisque $f \in \Sigma$, la famille est non vide. Posons

$$\underline{\mu} = \inf_{g \in \Sigma} |g'(0)| \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \sup_{g \in \Sigma} |g'(0)|.$$

Alors il existe des fonctions $\phi, \psi \in \Sigma$ telles que $|\phi'(0)| = \bar{\mu}$ et $|\psi'(0)| = \underline{\mu}$.

Théorème 2.3.3 Soit D un domaine multiplement connexe du plan des z qui contient 0 et dont la frontière contient une composante libre γ .

Soient ψ et ϕ les fonctions définies au lemme précédent, alors

- $w = \phi(z)$ envoie D conformément sur un disque à fentes circulaires Δ dans le plan des w , de sorte que γ soit envoyé sur $|w| = 1$, et de plus, $\lambda_2(\partial\Delta) = 0$.
- $w = \psi(z)$ envoie D conformément sur un disque à fentes radiales Δ dans le plan des w , de sorte que γ soit envoyé sur $|w| = 1$, et de plus, $\lambda_2(\partial\Delta) = 0$.

Enfin, si la connectivité est finie, l'existence d'une frontière libre est assurée de manière triviale, et on a l'unicité des fonctions dans chacun des cas.

Dans ce théorème il est question de l'existence d'une composantes de frontière libre, ce qui est relativement fort. En réalité, on peut se passer de cette condition pour les disques à fentes circulaires. Nous avons en effet le lemme suivant :

Lemme 2.3.4 Soit D un domaine multiplement connexe du plan des z qui contient 0 et dont la frontière contient un continu γ . Alors on peut envoyer conformément l'extérieur de γ sur $|w| < 1$ par $w = f(z)$ où $f(0) = 0$. Ainsi la famille Σ définie par

- f est univalente et $|f(z)| < 1$ dans D
- $f(0)=0$

est non vide. Posons

$$\bar{\mu} = \sup_{f \in \Sigma} |f'(0)|.$$

Alors il existe une fonction $\phi \in \Sigma$ telle que $\bar{\mu} = |\phi'(0)|$.

On s'attend donc naturellement à avoir le théorème suivant.

Théorème 2.3.5 *La fonction ϕ définie précédemment envoie conformément D sur un disque à fentes circulaires dont la frontière est de mesure nulle.*

2.4 Couronnes à fentes circulaires ou radiales

Les deux derniers domaines que l'on va considérer sont les couronnes à fentes circulaires ou radiales. Leur définition est essentiellement la même que le disque à fentes circulaires, où le disque est remplacé par une couronne $A(\rho, 1)$. Une illustration est donnée par la figure 2.2.

Lemme 2.4.1 *Soit D un domaine multiplement connexe dans le plan des z , dont la frontière contient respectivement les cercles $|z| = 1$ et $|z| = \rho$, où $0 < \rho < 1$.*

Soit Σ la famille des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

- *f est univalente dans D ,*
- *$|f(z)| < 1$ sur $|z| = 1$ et $|f(z)| = r(f) = \text{cte}$ sur $|z| = \rho$,*
- *$r(f) < |f(z)| < 1$ dans D .*

Posons

$$\bar{r} = \sup_{f \in \Sigma} r(f)$$

et

$$\underline{r} = \inf_{f \in \Sigma} r(f).$$



FIG. 2.2 – Anneau à fentes circulaires à gauche et radiales à droite.

Alors on peut trouver deux fonctions ϕ et ψ telles que $r(\phi) = \bar{r}$, et $r(\psi) = \underline{r}$.

On verra au théorème 3.1.7, que ce lemme est encore vrai lorsque le domaine multiplement connexe D n'est plus une couronne, mais est un domaine ayant deux composantes de frontière libre.

On ne sera pas surpris d'avoir le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 *Soit D un domaine multiplement connexe dans le plan des z , contenu dans la couronne $A(\rho, 1)$ et tel que $|z| = \rho$ et $|z| = 1$ soient deux composantes de ∂D , isolées des autres frontières.*

Soient ϕ et ψ les fonctions définies plus haut. Alors

- $w = \phi(z)$ envoie D conformément sur une couronne à fentes circulaires dans le plan des w , contenue dans $A(\bar{r}, 1)$, et telle que $|z| = 1$ et $|z| = \rho$ soient respectivement envoyés sur $|w| = 1$ et $|w| = \bar{r}$. De plus la frontière de l'ensemble d'arrivée est de mesure nulle.
- $w = \psi(z)$ envoie D conformément sur une couronne à fentes circulaires dans le plan des w , contenue dans $A(\underline{r}, 1)$, et telle que $|z| = 1$ et $|z| = \rho$ soient respectivement envoyés sur $|w| = 1$ et $|w| = \underline{r}$. De plus la frontière de l'ensemble d'arrivée est de mesure nulle.

Si de plus, on suppose que D est de connectivité finie, alors les deux fonctions sont uniques à une rotation de centre 0 près.

On a maintenant sept domaines multiplement connexes canoniques, ce qui nous facilite l'étude des propriétés invariantes par transformation conforme. Il est également clair que l'on n'a pas besoin d'autant de domaines pour cette étude, mais qu'il peut être utile de jongler entre ces domaines, comme c'est notamment le cas lorsque l'on étudie les domaines simplement connexes de \mathbb{C} , et notamment grâce aux domaines \mathbb{D} et \mathbb{H} .

Exactement comme dans le cas des anneaux ou plus généralement des domaines doublément connexes, les domaines de connectivité k sont conformes si et seulement si leurs modules sont égaux. La différence est que si un seul nombre réel suffit à identifier un domaine doublement connexe, il en faut plusieurs pour les domaines de connectivité supérieure.

Théorème 2.4.3 *Soit Ω un domaine de connectivité $k \geq 3$. L'ensemble des classes de domaines de connectivité k est de cardinal $n = 3k - 6$.*

Preuve

Nous allons démontrer le résultat en deux temps. La condition suffisante étant plus facile à obtenir, elle sera notre première étape. La seconde étape nécessitera quelques résultats préliminaires. Il n'est pas trop difficile de voir qu'il suffit de connaître $n = 3k - 6$ informations sur un anneau à fentes circulaires. En effet, pour définir complètement un tel domaine, il faut et il suffit de connaître le module de l'anneau non fendu, ainsi que :

- la position des fentes par rapport au bord,
- la position des fentes les unes par rapport aux autres,
- la taille des fentes.

Une simple démonstration par récurrence montre que ces informations définissent complètement un tel domaine, à une rotation près.

Dans le cas $k = 3$, il est facile de voir que ces informations définissent effectivement uniquement, un anneau fendu de manière circulaire, à une rotation près. Soit $k > 2$, et supposons que $n = 3k - 6$. Dans ce cas, pour avoir un anneau de connectivité $k + 1$, il suffit d'ajouter une fente à un domaine de connectivité k . La nouvelle fente doit être déterminée par rapport à sa taille, et sa position par rapport aux autres. Pour cela on peut supposer que notre anneau est centré en 0. Cet anneau est fendu et soient K_1, \dots, K_{k-1} ses « fentes ». Les fentes sont toutes de la forme $K_j = \{r_j e^{i\theta_j} \mid \theta_j \in [\alpha_j, \beta_j]\}$. Ainsi, puisqu'il suffit de $n = 3k - 6$ informations pour déterminer complètement un tel anneau, si on ajoute une fente K_k , il suffit d'ajouter les informations r_k , α_k et β_k pour positionner exactement notre dernière fente. Finalement il suffit de $n = 3k - 6 + 3 =$

$3(k+1) - 6$ informations et le résultat est prouvé.

Il faut maintenant montrer que $3k - 6$ informations sont nécessaires pour démontrer le théorème. Pour cela, nous aurons besoin de définir le module d'une famille de courbes.

Définition 2.4.4 Soit B un borélien de \mathbb{C} . Une *famille de courbes* Γ dans B est un ensemble d'arcs ouverts, fermés ou semi-ouverts ou de courbe de B . Une fonction ρ de B est dite *admissible* pour Γ si elle est boréienne positive et si

$$\int_C \rho(z)|dz| \geq 1 \quad \text{pour tout } C \in \Gamma.$$

On impose donc aux courbes de Γ d'être de longueur au moins 1 par rapport à la métrique ρ et notons également que l'on demande pas à ce que la longueur soit finie.

Définition 2.4.5 On appelle *module* de la famille Γ et on note $\text{mod}\Gamma$ la quantité

$$\text{mod } \Gamma = \inf_{\rho} \int_B \int_B \rho(z)^2 dx dy$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions ρ admissibles pour Γ .

Exemple[Pom, p.197] :

Soit $B = A(r, R)$ et soient Γ la famille des courbes de B qui relient les cercles intérieurs et extérieurs et Γ' la famille de courbe qui séparent ces deux cercles. Alors

$$\text{mod}\Gamma = 2\pi / \log\left(\frac{R}{r}\right), \quad \text{mod}\Gamma' = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{R}{r}\right)$$

On voit encore apparaître ici le rapport R/r , caractéristique des anneaux.

L'un des intérêts principaux de cette notion est que l'invariance conforme du module, c'est à dire que la quantité est conservée par application bi-holomorphe. C'est l'objet du prochain théorème.

Théorème 2.4.6 Soit Γ une famille de courbe dans un domaine G . Si f est une application bi-holomorphe entre G et $f(G)$, alors

$$\text{mod } f(\Gamma) = \text{mod } \Gamma.$$

Preuve

Soit ρ^* admissible pour $f(\Gamma)$. Définissons $\rho(z) = \rho^*(f(z))|f'(z)|$ pour $z \in G$. Ainsi, pour $C \in \Gamma$ on a

$$\int_C \rho(z)|dz| = \int_C \rho^*(f(z))|f'(z)||dz| = \int_{f(C)} \rho^*(w)|dw| \geq 1$$

et ρ est donc admissible pour Γ . Puisque f est conforme, on a également

$$\int_G \int_G \rho(z)^2 dx dy = \int_G \int_G \rho^*(f(z))^2 |f'(z)|^2 dx dy = \int_{f(G)} \int_{f(G)} \rho^*(w)^2 du dv$$

et donc $\text{mod } f(\Gamma) = \text{mod } \Gamma$. En échangeant les rôles de f et de f^{-1} , on trouve l'inégalité opposée et on obtient le résultat souhaité.

Deuxième partie de la preuve du théorème 2.4.3

On veut montrer qu'il faut $3k - 6$ informations pour définir complètement un domaine de connectivité $k \geq 3$, à une transformation conforme près. On sait aussi qu'il suffit de montrer le résultat pour les anneaux à fentes circulaires.

Soit X un anneau à fentes circulaires de connectivité $k = 3$. Soit Γ_1 la famille de courbes dans X qui relie les cercles intérieurs et extérieurs. Soit Γ_2 la famille des courbes qui relie la fente au cercle intérieur et soit Γ_3 la famille des courbes qui relie la fente au cercle extérieur. On sait que chaque $m_i = \text{mod}\Gamma_i$, $i = 1, 2, 3$ est un invariant conforme. Ainsi, il faut au moins $3 = 3 * 3 - 6$ informations pour caractériser X .

Soit X un anneau à fentes circulaires de connectivité $4 \leq k + 1$. Puisque X est de connectivité $k+1$, ∂X possède $k+1$ composantes connexes, $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}$. Par souci de lisibilité, on suppose que C_1 est le cercle extérieur et C_2 le cercle intérieur de l'anneau. Définissons $\Gamma_{i,j}$ comme étant la famille de courbes qui relie C_i et C_j et $m_{i,j} = \text{mod}\Gamma_{i,j}$. L'ensemble $Y = X \setminus C_{k+1}$ est de connectivité k et il faut donc $3k - 6$ informations pour caractériser Y à transformation conforme près. En ajoutant la fente C_{k+1} à Y pour obtenir X , on peut créer trois nouvelles familles de courbes, que sont $\Gamma_{1,k+1}, \Gamma_{k,k+1}$ et Γ , où Γ est la famille des courbes reliant les deux extrémités de C_{k+1} . En quelque sorte, ces familles de courbes vont nous permettre de « mesurer » la distance de C_{k+1} au bord et par rapport aux autres fentes, ainsi que la taille de la fente. D'après le théorème

2.16, ces quantités sont des invariants conformes et nous venons donc de trouver trois nouvelles informations nécessaires à la détermination de X à transformation conforme près, ce qui démontre le résultat.

Chapitre 3

Théorie du potentiel et capacité hyperbolique

3.1 Théorie du potentiel

La théorie du potentiel étudie essentiellement les fonctions harmoniques et sous-harmoniques sur le plan euclidien (ou d'une manière générale, sur un espace euclidien). Dans [Tsu1], Tsuji généralise la théorie en se limitant non plus au plan, mais aux surfaces de Riemann remarquables, comme la sphère, le plan, ou le disque. Pour la suite, on supposera connus certains résultats classique de théorie du potentiel dans le plan complexe (Se référer à [Ran] ou [Tsu1] pour connaître les résultats essentiels). On va tout de même rappeler certaines définitions nécessaires pour la suite.

Soit M l'une des trois surfaces de Riemann citées, et soit E un sous-ensemble fermé de M . On définit $P(E)$ comme l'ensemble des mesures¹ de probabilité sur M , à support dans E . Soit $\mu \in P(E)$, on définit le potentiel logarithmique de μ (ou pour la suite, le

¹Ici les mesures que l'on considère sont des mesures de Borel. Sauf mention contraire, on ne ne travaillera qu'avec des mesures de Borel.

potentiel de μ) comme étant la fonction

$$P_\mu(z) = - \int_E \log(d(z, w)) d\mu(w)$$

Dans le cas du plan euclidien (surface parabolique), d est simplement la distance euclidienne dans \mathbb{C} .

Dans le cas de la sphère (surface elliptique) on définit naturellement $d(z, w)$ comme étant la distance sphérique :

$$d(z, w) = \begin{cases} \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} & \text{si } w \neq \infty \text{ et } z \neq \infty. \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } w = \infty \text{ et } z \neq \infty. \\ 0 & \text{si } z = w = \infty. \end{cases}$$

Dans le cas du disque (surface hyperbolique), d somplement la pseudo-distance hyperbolique définie par

$$d(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|.$$

On définit à présent l'énergie $I(\mu)$ de μ comme étant la somme des potentiels

$$I(\mu) = \int_E P_\mu(z) d\mu(z) = - \int_E \int_E \log(d(z, w)) d\mu(w) d\mu(z).$$

Pour plus de commodité on notera pour la suite d la distance euclidienne, d_- la pseudo-distance hyperbolique et d_+ la distance sphérique.

Si on fixe un ensemble E , on s'intéresse à la mesure qui minimise l'énergie sur E . Posons alors $V = \inf_{\mu \in P(E)} I(\mu)$. Il n'est pas exclu que $V = \infty$, auquel cas on dit que E est un ensemble *polaire*.

Une mesure qui atteint l'infimum V n'existe pas nécessairement, cependant si E est un ensemble compact, il existe une mesure ν appelée alors *mesure d'équilibre de E* , telle que $I(\nu) = V$ et elle est même unique si E est non polaire.

Définition 3.1.1 Soit M l'une des surfaces parmi la sphère, le plan, ou le disque unité ouvert.

Pour tout sous-ensemble E de M , on définit la capacité $\text{Cap}(E)$ de E par

$$\text{Cap}(E) = \sup_{\mu \in P(E)} e^{-I(\mu)} = e^{-\inf_{\mu \in P(E)} I(\mu)}.$$

On s'entend évidemment sur le fait que dans le cas hyperbolique (resp. elliptique), l'énergie est l'énergie hyperbolique (resp. elliptique) et on note alors Cap_- la capacité (resp. Cap_+). Si aucun signe n'est mentionné, alors il est question de capacité parabolique.

Remarque

Un ensemble de capacité nulle est dit polaire. On montrera qu'un ensemble est polaire si et seulement s'il est hyperboliquement polaire (si et seulement s'il est elliptiquement polaire). Autrement dit, la polarité ne dépend pas de la surface de Riemann sur laquelle on travaille, mais est, en quelque sorte, une propriété intrinsèque. Les ensembles polaires jouent en théorie du potentiel essentiellement le même rôle que les ensembles de mesure nulle en théorie de la mesure. Il faut donc voir les ensembles polaires comme des ensembles très petits, voire dégénérés. Le résultat suivant vient conforter cette idée.

Théorème 3.1.2 [Ran, p.56] *Tout Borélien polaire est de mesure de Lebesgue nulle.*

Définition 3.1.3 Soient M l'une des trois variétés citées ci-dessus et B un borélien de M . Une propriété est vraie *quasi-partout sur B* si elle est vraie sur $B \setminus E$, où E est de capacité nulle.

Théorème 3.1.4 (Théorème fondamental (Frostman)) *Soit K un sous ensemble compact et non polaire de l'une des trois surfaces de Riemann M citées ci-dessus. Soit ν la mesure d'équilibre sur K . Alors*

1. $p_\nu \leq I(\nu)$ sur M ,
2. $p_\nu = I(\nu)$ sur $K \setminus E$, où E est un sous-ensemble F_σ polaire de ∂K .

Démonstration

Par souci de lisibilité, la fonction u désignera le potentiel P_ν . On ne travaillera qu'avec

le potentiel parabolique, mais la démonstration s'adapte très bien aux deux autres cas. Commençons par prouver que $u(z) \geq V = I(\nu)$ quasi-partout sur K .

Pour cela, considérons l'ensemble $A = \{z \in E, u(z) < V\}$ et supposons $\text{Cap}(A) > 0$. Considérons également la famille (A_n) des ensembles de la forme

$$A_n = \{z \in E, u(z) \leq V - 1/n\}.$$

Il est clair que (A_n) est une suite croissante convergente vers A , en ce sens que

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. On sait que u est une fonction semi-continue inférieurement et donc on a clairement que A_n est fermé quel que soit n . Puisque la suite (A_n) est croissante et que la limite A est de capacité non nulle, il existe nécessairement un certain rang n pour lequel $\text{Cap}(A_n) > 0$. Autrement dit, pour un $\epsilon > 0$ convenablement choisi, on a que $u(z) < V - 2\epsilon$ sur un certain sous ensemble fermé K_1 de K tel que $\text{Cap}(K_1) > 0$.

Soient μ la mesure d'équilibre de K et K^* son support. On a par définition que $\int_{K^*} u d\mu = V$ et donc qu'il existe un certain point $a_0 \in K^*$ pour lequel $u(a_0) > V - \epsilon$. Par définition de K_1 , il est clair que $a_0 \notin K_1$ et par semi-continuité de u , on a de plus que l'inégalité $u(z) > V - \epsilon$ tient encore pour un voisinage ouvert $U(a_0)$ de a_0 . On peut même choisir $U(a_0)$ suffisamment petit pour que la distance entre $U(a_0)$ et K_1 soit non nulle. Par définition du support S d'une mesure μ , pour tout ouvert $U \subset \mathbb{D}$ on a que $\mu(S \cap U) > 0$ dès que $S \cap U \neq \emptyset$. Ici, on a que $\nu(U(a_0)) = m > 0$ puisque $a_0 \in U(a_0) \cap K^* \subset K^*$. Puisque $\text{Cap}(K_1) > 0$, on peut affirmer qu'il existe une mesure positive σ sur K_1 telle que

$$I(\sigma) = - \int_{K_1} \int_{K_1} \log |a - b| d\sigma(a) d\sigma(b) < \infty$$

et telle que $\sigma(K_1) = m > 0$. Considérons alors la mesure signée σ_1 sur K définie par $\sigma_1 = \sigma$ sur K_1 , $\sigma_1 = -\nu$ sur $U(a_0)$ et $\sigma_1 = 0$ partout ailleurs.

Clairement, on a que $\sigma_1(K_1) = m$, que $\sigma_1(U(a_0)) = -m$ et que $\sigma_1(K) = 0$. Il est également évident que σ est d'énergie finie. De plus, pour tout $0 < \eta < 1$, on a que $\nu + \eta\sigma_1$ est une mesure positive et de probabilité sur K .

Finalement, en reprenant tout ce que l'on vient de faire, on remarque que

$$I(\nu + \eta\sigma_1) - I(\nu) = 2\eta \int_K u d\sigma_1 + \eta^2 I(\sigma_1) = 2\eta \left(\int_{K_1} u d\sigma - \int_{U(a_0)} u d\nu \right) + \eta^2 I(\sigma_1).$$

Et en utilisant nos hypothèses, nous avons que

$$2\eta \left(\int_{K_1} u d\sigma - \int_{U(a_0)} u d\nu \right) + \eta^2 I(\sigma_1) < 2\eta(m(V - 2\epsilon) - m(V - \epsilon)) + \eta^2 I(\sigma_1)$$

Le membre de droite étant égal à $-\eta(2m\epsilon - \eta I(\sigma_1))$ et η étant un nombre arbitrairement petit, on peut le choisir de sorte que $I(\nu + \eta\sigma_1) - I(\nu) < 0$, ce qui contredit le fait que ν soit la mesure minimisant l'énergie. Ainsi on a bien $P_\nu \geq I(\nu)$ quasi-partout sur K .

Prouvons à présent l'inégalité opposée sur K^* . Supposons qu'il existe un point $a_0 \in K^*$ pour lequel $u(a_0) > V = I(\nu)$. Toujours pour des raisons de semi continuité, on a qu'il existe un voisinage $U(a_0)$ de a_0 sur lequel $u(z) > z + \epsilon$ pour un certain $\epsilon > 0$. Toujours pour les mêmes raisons que dans la preuve précédente, on a que $\nu(U(a_0)) > 0$ et puisqu'un ensemble polaire est toujours de mesure nulle, on a que

$$V = \int_{U(a_0)} u d\nu + \int_{K^* \setminus U(a_0)} u d\nu > (V + \epsilon)\nu(U(a_0)) + V(1 - \nu(U(a_0))) = V + \epsilon\nu(U(a_0)) > V$$

ce qui est clairement une contradiction et donc $u \leq V$ sur K^* . De plus, par le principe du maximum, $u \leq V$ sur tout le plan complexe. Ainsi $u = V$ presque partout sur K et puisque u est semi-continue inférieurement, l'ensemble des points z tels que $u(z) < V$ est F_σ et le théorème est démontré. \square

3.1.1 Les domaines doublement connexes et le théorème de représentation

On a vu au théorème 2.6.1 que deux anneaux étaient conformes si et seulement si leurs modules étaient égaux. On a également vu à la section 2.1 qu'un domaine propre de \mathbb{C} possédant un trou pouvait toujours être envoyé sur un anneau (à vrai dire on ne l'a pas formulé ainsi, mais c'est somme toute trivial). Finalement, on peut définir le module d'un ensemble doublement connexe comme étant le module de n'importe quel anneau auquel il est conforme. Le problème est que l'on ne connaît pas a priori le module d'un ensemble, excepté les cas triviaux. Il existe cependant un résultat très intéressant qui nous permet de trouver le module d'un domaine et il existe même une formule explicite.

Théorème 3.1.5 [Ran, p.133] Soit E un continu du plan complexe. Soit Ω la composante non bornée de son complémentaire.

Le théorème de Riemann permet d'affirmer qu'il existe une fonction f qui envoie conformément Ω sur l'extérieur d'un disque de rayon R , où f est normalisé par les conditions

$$f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$$

Dans ce cas, on a $R = \text{Cap}(E)$.

La quantité R est appelée *rayon conforme extérieur de Ω* .

Ce théorème est intéressant en ce sens qu'il nous donne des informations sur les domaines qui sont des « plans à un trou ». En fait, on peut montrer entre autre, que tous les plans à un trou sont conformes. Pour cela il est clair qu'il suffit de montrer qu'ils sont tous conformes au disque épointé en 0.

Remarquons que si K est un compact, alors $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ est un domaine doublement connexe de \mathbb{C} . Le théorème précédent affirme que $\Omega \cup \{\infty\}$ est conforme à l'extérieur d'un disque de rayon $R = \text{Cap}(K)$ via une certaine application f , telle que $f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$. Moyennant une translation (qui est une application conforme), on peut supposer que le centre du cercle est 0. Composons à présent à gauche par l'inversion h_0 , définie par $h_0(z) = \frac{1}{z}$. Alors $h_0 \circ f$ envoie conformément $\Omega \cup \{\infty\}$ sur l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon $R' = \frac{1}{C(K)}$. On a $(h_0 \circ f)(\infty) = h_0(\infty) = 0$ et notamment $h_0 \circ f$ envoie conformément Ω sur le $B(0, R') \setminus \{0\}$. Remarquons que l'on ne s'est pas réellement servi du théorème précédent, et que l'on avait déjà tous les outils en main pour donner cette démonstration

En fait, on a montré le résultat suivant.

Corollaire 3.1.6 Soit K un ensemble compact de \mathbb{C} , et soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$. Alors le module de Ω est ∞ .

Le théorème suivant est le pendant du théorème précédent dans le cas des domaines stricts de \mathbb{C} à un trou.

Théorème 3.1.7 Soit E un continu non réduit à un point et inclus dans le disque unité ouvert \mathbb{D} .

Soit Ω le domaine doublement connexe délimité par \mathbb{T} et par E .

On sait depuis la section précédente que Ω est conforme à un anneau $A(r, 1)$. En fait, on a même

$$r = \text{Cap}_-(E)$$

Ce théorème est, tel qu'annoncé, un équivalent du théorème précédent dans une situation différente.

Si on prend du recul par rapport à ce que l'on vient de faire, on se rend compte que l'on a un analogue au théorème de représentation de Riemann pour les domaines doublement connexes. La démonstration demande un peu de travail et la section suivante vise justement à déblayer le terrain pour y arriver.

Corollaire 3.1.8 (Théorème de représentation des domaines à un trou)

Soit Ω' un domaine simplement connexe de \mathbb{C} , K un continu de Ω' tel que $\Omega = \Omega' \setminus K$ soit doublement connexe.

Alors soit

- $\Omega \cup K = \mathbb{C}$ et $\text{card}(K) > 1$, auquel cas Ω est conforme au disque unité pointé. De plus Ω est conforme à l'extérieur d'un disque fermé de rayon $\text{Cap}(K)$ via une application de la forme $f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \dots$.
- $\Omega \cup K = \mathbb{C}$ et $\text{card}(K) = 1$ auquel cas, Ω est conforme uniquement à des plans épointés.
- $\Omega \cup K \subsetneq \mathbb{C}$. Dans ce cas, $\Omega \cup K$ est conforme au disque unité via une certaine application f . Si on note $E = f(K)$, alors on a également que Ω est conforme à un anneau de module $1/\text{Cap}_-(E)$.

Il ne restera qu'à prouver l'assertion du milieu, mais elle est somme toute triviale.

En effet, supposons qu'il existe entre $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ et un disque pointé, une certaine application bi-holomorphe f . Alors sans perte de généralité le disque peut être pointé

en 0. Notamment, f est bornée sur tout voisinage de ζ . Le théorème de prolongement des fonctions holomorphes de Riemann, nous permet d'affirmer que f se prolonge donc en ζ de façon holomorphe. Puisque $\Omega^* = \Omega \cup \{\zeta\}$ est simplement connexe, il doit en être de même de $f(\Omega^*)$ et donc $f(\zeta) = 0$. On a alors prolongé f en une application entière bornée et non constante, ce qui est évidemment impossible.

3.1.2 Laplacien généralisé

L'ensemble $C_c^\infty(D)$ des fonctions ϕ infiniment dérivables à support compact sur D est un espace vectoriel sur \mathbb{C} dont les éléments ϕ sont appelés les fonctions tests. On dit qu'une suite de fonctions tests (ϕ_n) converge vers une fonction test ϕ s'il existe un certain ensemble compact $K \subset D$ tel que $\text{supp}(\phi_n) \subset K$ et si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(\phi_n^{(j)})$ converge uniformément vers $\phi^{(j)}$. Muni de cette notion de convergence, l'espace des fonctions tests est un espace vectoriel topologique et possède un espace dual, noté $\Omega'(D)$, que l'on appelle l'espace des distributions sur D .

Le théorème de représentation de Riesz affirme dans une version faible, que pour toute forme $\mathcal{L} \in \Omega'(D)$, il existe une unique mesure de Radon μ telle que l'on ait la représentation suivante

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_D \phi \, d\mu$$

et ce pour toute fonction test ϕ .

On aimera utiliser cette remarque pour définir des opérateurs sur des classes de fonctions pour lesquelles c'était a priori impossible. Par exemple, une application u suffisamment régulière, vérifie le théorème de Green suivant

$$\int_D \phi \Delta u \, dx dy = \int_D u \Delta \phi \, dx dy$$

pour toute fonction test ϕ . En vertu du théorème de représentation de Riesz, on peut faire le chemin inverse, pour définir le laplacien d'une application sous-harmonique $u \not\equiv -\infty$ sur D comme étant l'unique mesure de Radon qui fasse que l'équation précédente est vraie, et ce pour toute fonction test ϕ .

On peut se convaincre du fait que la définition a bien du sens, car si u est une application sous-harmonique, on sait d'après [Ran, p.39], qu'elle est localement intégrable ou identiquement égale à $-\infty$.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.1.9 [Ran, p.74] *Soit μ une mesure de Borel finie sur \mathbb{C} et à support compact. Soit P_μ est le potentiel associé à μ . Alors*

$$\Delta P_\mu = -2\pi\mu.$$

Corollaire 3.1.10 *Soit μ une mesure de Borel finie sur \mathbb{D} et à support compact E . Soit P_μ^- le potentiel hyperbolique associé à μ . Alors*

$$\Delta P_\mu^- = -2\pi\mu.$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que

$$P_\mu^-(z) = \int_E \log \left| \frac{1-z\bar{w}}{z-w} \right| d\mu(w) = \int_E \log \left| \frac{1}{z-w} \right| d\mu(w) + \int_E \log |1-z\bar{w}| d\mu(w)$$

Le terme $P_2(z) = \int_E \log |1-z\bar{w}| d\mu(w)$ est harmonique, car le logarithme d'une application holomorphe sans zéro sur \mathbb{D} est harmonique. Ainsi l'intégrande est harmonique à chaque w fixé, mesurable sur $\mathbb{D} \times E$ et de supremum clairement localement borné supérieurement, ce qui permet de conclure, d'après [Ran, p.38] quant à l'harmonicité de P_2 .

Le terme $\int_E \log \left| \frac{1}{z-w} \right| d\mu(w)$ n'étant rien d'autre que le potentiel logarithmique classique, le résultat est alors prouvé en prenant le laplacien des deux cotés de l'équation. \square

L'idée en arrière du laplacien généralisé est de faire des calculs avec des fonctions très peu régulières (pour être plus exact, avec des distributions, que l'on peut voir comme des fonctions). On peut évidemment définir d'autres opérateurs que le laplacien, toujours avec cette même idée en tête. Par exemple, pour une distribution T donnée, on définit sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_j}$ par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

C'est exactement le même genre d'idée que pour le laplacien généralisé, mais dans un cas légèrement plus général. Ces généralisations de dérivée et de laplacien nous sont uniquement utiles dans la démonstration du théorème 3.1.7, c'est la raison pour laquelle il est inutile d'entrer dans trop de détails et de se perdre dans cette théorie.

Il nous reste à énoncer un principe du maximum, utile pour la démonstration du théorème 3.1.7.

Théorème 3.1.11 (Principe du maximum généralisé) [Ran, p. 70] Soit D un domaine de \mathbb{C} et u une fonction sur-harmonique, bornée inférieurement sur D .

1. Si ∂D est polaire, alors u est constante.
2. Si ∂D est non polaire et $\liminf_{z \rightarrow \zeta} u(z) \geq 0$ pour quasi tout $\zeta \in \partial D$, alors $u \geq 0$ partout sur D .

Démonstration du théorème 3.1.7

Soit Ω un domaine doublement connexe du disque hyperbolique. On a alors pour un certain compact $K \subset \mathbb{D}$, $\Omega = \mathbb{D} \setminus K$. Soient $A(r_0, 1)$ un anneau et $w = f(z)$ une application bi-holomorphe, de Ω vers $A(r_0, 1)$. Soient r et ρ deux nombres réels tels que $r_0 < r < \rho < 1$, et soient respectivement C_r et C_ρ les pré-images des cercles $|w| = r$ et $|w| = \rho$ dans $A(r_0, 1)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que C_ρ est incluse dans le domaine Ω_r délimité par les courbes $|z| = 1$ et C_r . Soient $D_r = \overline{B(0, r)}$, et μ sa mesure d'équilibre. Si u est le potentiel hyperbolique associé à μ , on a alors

$$u(z) = \int_{D_r} \log \left| \frac{1 - z\bar{w}}{z - w} \right| d\mu(w)$$

et $u = V$ quasi-partout sur D_r , où $V = -\log(\text{Cap}_-(D_r))$. On remarque également que $u(z)$ converge vers 0, lorsque $|z|$ converge vers 1.

Par définition de f , on remarque que $|w| = |f(z)| \rightarrow 1$ lorsque $|z| \rightarrow 1$ et donc $-\log |f(z)| \rightarrow 0$. Finalement, $-\log |f(z)| \rightarrow -\log(r)$, lorsque z s'approche de C_r . On peut donc appliquer le principe du maximum généralisé à $u - \frac{V}{\log(r)} \log |f|$ pour

remarquer que cette application est nulle quasi-partout sur Ω_r et donc que

$$u(z) = \frac{V}{\log(r)} \log |f(z)| \text{ quasi-partout sur } \Omega_r.$$

Puisque $C_\rho \subset \Omega_r$, en faisant le changement de variable $f(z) = w$ et en passant en coordonnées polaires, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{V}{2\pi \log(r)} \int_{|w|=\rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \log |w| d\theta = \frac{V}{\log(r)}$$

Remarquons finalement que le premier terme $\frac{1}{2\pi} \int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds$ est encore égal à $\frac{1}{2\pi} \int_{D_r} \Delta u$, en vertu du théorème de Green. Le corollaire 3.1.10 permet alors d'affirmer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -2\pi \mu(D_R) = -2\pi$$

et que $-1 = V/\log(r)$, et finalement, $\log(\text{Cap}_-(D_r)) = \log(r)$. En remarquant que ce raisonnement est valable pour tout $r > r_0$ et que la famille (D_r) de compacts, converge de façon décroissante vers K lorsque $r \rightarrow r_0$, on obtient que

$$r = \text{Cap}_-(D_r) \rightarrow \text{Cap}_-(K) = r_0$$

qui est le résultat souhaité. \square

Ce théorème est non seulement intéressant dans son énoncé, mais également dans sa démonstration, relativement simple a posteriori. En effet, Tsuji construit l'application conforme entre un sous-domaine doublement connexe du disque hyerbolique et une couronne canonique. Si la démonstration est constructive, elle repose malgré tout sur le théorème d'existence d'une mesure d'équilibre ν sur E , que l'on ne connaît pas a priori. A noter que dans son article [Tsu2], Tsuji ne fait jamais mention de laplacien généralisé ni de distributions et la justification d'une équation sur laquelle repose le résultat est passée sous silence. Le reste de la démonstration ci-dessus est cependant identique. Le théorème de Tsuji peut et doit être considéré comme le théorème fondamental du mémoire. Il s'apparente dans la version donnée en corollaire, au théorème de représentation de Riemann, ce qui, rappelons-le, était notre premier but. Si la question théorique est bien traitée, il se pose maintenant la question des calculs numériques. En

effet, étant donné un compact K du disque hyperbolique, comment calculer sa capacité hyperbolique ? La prochaine section donne très brièvement quelques éléments de réponses.

3.2 Calcul de capacité hyperbolique

Comme nous venons de le voir, la capacité joue un rôle important en analyse complexe et notamment la capacité hyperbolique, qui permet de déterminer le module d'un domaine doublement connexe. L'idée essentielle de ce chapitre est de brièvement donner quelques techniques de calcul, que l'on peut essayer de mettre en oeuvre pour notre algorithme de calcul d'applications conformes. Le but de cette section n'est pas de recenser toutes les techniques de calcul possibles, mais plutôt de donner une idée de ce que devrait faire notre futur algorithme de calcul. Nous avons déjà vu que l'énergie hyperbolique d'un ensemble E relativement à la mesure μ était définie par

$$I_-(\mu) = - \int_E \int_E \log \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| d\mu(w) d\mu(z).$$

La première chose qui vient naturellement à l'esprit est de comparer la capacité hyperbolique à la capacité parabolique, que l'on connaît mieux. Pour cela, la notion de diamètre transfini nous viendra en aide.

Définition 3.2.1 Soit E un sous ensemble du disque hyperbolique. On appelle le n -ième diamètre hyperbolique de E la quantité suivante

$$\delta_n = \delta_n(E) = \sup_{(w_k)_{k=1..n} \in E} \prod_{i < j} d_-(w_i, w_j)^{2/(n(n-1))}.$$

Remarques

Dans le cas $n = 2$ on retrouve tout simplement le diamètre classique pour la distance hyperbolique.

On remarque que le supremum est toujours atteint dans le cas où E est un ensemble compact.²

On peut se donner une idée physique du diamètre transfini, en imaginant que le n -ième diamètre δ_n de E , représente la dispersion moyenne maximale, de n charges disposées sur E . Le diamètre transfini de E représente alors en quelque sorte, la propension de E à contenir des charges.

On pourrait définir de la même manière, le diamètre parabolique (resp. elliptique) en changeant la distance pour la distance parabolique (resp. elliptique).

Théorème 3.2.2 *Soit K un sous ensemble compact du disque hyperbolique. La suite (δ_n) est alors décroissante et convergente vers $\text{Cap}_-(K)$.*

Ce théorème est intéressant et c'est lui que l'on utilisera en pratique pour donner un estimé (relativement grossier) de la capacité hyperbolique. Remarquons également qu'il est encore vrai dans les cas hyperbolique et elliptique.

Proposition 3.2.3 *Soient $0 < \delta < 1$ et E un sous ensemble compact de $B(0, \delta)$. Alors l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\frac{\text{Cap}(E)}{1 + \delta^2} \leq \text{Cap}_-(E) \leq \frac{\text{Cap}(E)}{1 - \delta^2}.$$

Corollaire 3.2.4 *Les ensembles hyperboliquement polaires sont exactement les ensembles polaires.*

Démonstration

La démonstration repose essentiellement sur le fait que si $z, w \in E$, alors

$$1 - \delta^2 \leq |1 - zw| \leq 1 + \delta^2.$$

Ainsi, on trouve que

$$\frac{1}{1 + \delta^2} \prod_{i < j} |w_i - w_j|^{2/(n(n-1))} \leq \prod_{i < j} \frac{|w_i - w_j|^{2/(n(n-1))}}{|1 - w_i \bar{w}_j|^{2/(n(n-1))}} \leq \frac{1}{1 - \delta^2} \prod_{i < j} |w_i - w_j|^{2/(n(n-1))}.$$

²Un n -uplet pour lequel le supremum est atteint est appelé un n -uplet de Fekete pour E .

En passant aux sup et en utilisant le théorème 3.2.2, on a le résultat souhaité. \square

Cette inégalité permet de donner un premier estimé de la capacité hyperbolique, mais n'est pas très intéressante en pratique, car l'estimé est assez grossier. Essayons donc de développer d'autres façons d'estimer la capacité d'un ensemble.

Le théorème suivant est un théorème qui permet de nous donner un estimé de la capacité.

Théorème 3.2.5 *Soit T une application holdérienne sur K pour la métrique hyperbolique, c'est à dire qu'il existe des constantes positives A et α telles que pour tout $z, w \in K$ on a*

$$|T(z) - T(w)| \leq A \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|^{\alpha}.$$

Alors $\text{Cap}_-(T(K)) \leq A \text{Cap}_-(K)^{\alpha}$.

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile. Il suffit de remarquer que si ν est une mesure d'équilibre sur $T(K)$, alors il existe une mesure de Borel de probabilité μ telle que $\nu = \mu T^{-1}$.

On trouve

$$-I(\nu) = \int_K \int_K \log |T(z) - T(w)| d\mu(z) d\mu(w) \leq \int_K \int_K \log A \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|^{\alpha} d\mu(z) d\mu(w).$$

Le dernier terme étant égal à $\log(A) - \alpha I(\mu)$, l'égalité est démontrée en passant aux exponentielles. \square

Pour terminer cette courte section sur le calcul et les estimés de capacité hyperbolique, notons que le théorème de Tsuji permet lui aussi de donner quelques informations intéressantes.

Théorème 3.2.6 *Soient K_1 et K_2 deux continus du disque hyperbolique. Si f est une application conforme de $\mathbb{D} \setminus K_1$ sur $\mathbb{D} \setminus K_2$, alors $\text{Cap}_-(K_1) = \text{Cap}_-(K_2)$.*

Nous n'avons clairement pas démontré de résultat très puissant en ce qui concerne le calcul de capacité hyperbolique. Ce n'était cependant pas notre but, qui était rappelons-le, de donner des méthodes générales différentes pour arriver à nos fins. L'algorithme de calcul d'application conforme doit effectuer des calculs de capacité, c'est pourquoi il était nécessaire de faire mention de ces méthodes dans cette section. Cependant, nous n'avons pas pour ambition de faire des calculs très fins et c'est la raison pour laquelle cette section nous suffit amplement.

Chapitre 4

Surfaces de Riemann

4.1 Introduction aux surfaces de Riemann

4.1.1 Motivation et surfaces de Riemann associées à une fonction algébrique

Dans sa thèse de doctorat, Riemann a résolu certains problèmes de définition de fonctions analytiques que l'on se posait en analyse complexe, notamment en ce qui concerne les définitions de fonctions multivaluées. Le logarithme ou les fonctions algébriques sont des exemples de telles fonctions. Une fonction f est dite *algébrique*, s'il existe un polynôme non nul $P(w, z)$, tel que pour tout z du domaine de f , on ait

$$P(f(z), z) = 0.$$

Le cas le plus simple qui pose un problème est celui du polynôme $P(w, z) = w^2 - z$. Si pour un complexe non nul $z_0 = \rho_0 \exp(i\theta_0)$, on a une solution $f(z_0)$, alors il est clair que $f(z_0) = \sqrt{\rho_0} \exp(i\theta_0/2)$ et $f(z_0) = \sqrt{\rho_0} \exp(i\theta_0/2 + i\pi)$ conviennent et surtout, que ce sont des complexes distincts. Il n'y a aucune raison de discriminer l'un des

cas, si bien que f doit prendre simultanément deux valeurs distinctes au point z_0 . Ceci pose évidemment un problème, car on aimeraient pouvoir bien définir f sur tout le plan complexe. On remarque que pour tout point z , $f(z)$ détermine en fait deux points opposés, si bien que localement, si on se situe suffisamment loin de $z = 0$, $P(w, z)$ possède une seule racine $f(z)$. L'idée est alors la suivante.

Soit γ une courbe de Jordan ayant 1 comme point initial et final, paramétrée par $I = [0, 1]$. Par exemple, considérons le cercle unité défini par $z_t = \gamma(t) = \exp(2i\pi t)$. Pour $t = 0$, on a $z_0 = 1$. $f(z_0) = \pm 1$. Choisissons arbitrairement le cas $f(z_0) = 1$. Notre but est de déterminer une application f , ayant la propriété d'être holomorphe. Notamment, pour $t+\epsilon$ suffisamment proche de t , $f(z_{t+\epsilon})$ n'a pas le choix d'être suffisamment proche de $f(z_t)$ et ainsi le problème de l'unicité de la détermination de $f(z_{t+\epsilon})$ ne se pose plus. On continue ce raisonnement de proche en proche et finalement, pour tout t variant dans I , $f(z_t)$ est uniquement déterminé par la donnée de $f(z_0)$. Lorsque $t = 1$, on obtient alors que $f(z_1) = -1$. Ainsi, lorsque z « tourne » une fois autour de 0, $f(z)$ ne décrit qu'un demi tour. En réitérant le procédé précédent, $f(z)$ décrit un tour complet à chaque fois que z en décrit deux. Au bout du compte, dès que $f(z_0)$ est fixé, toutes les valeurs de f sont fixées et on peut montrer que f est bien une application analytique. Pour palier à ce problème de détermination de $f(z_0)$, on peut effectuer mentalement la construction suivante.

Donnons nous deux feuilles de papier infinies P_1 et P_2 , que l'on peut voir comme deux copies exactes du plan complexe \mathbb{C} . Soit P_i^\pm les demi-plans supérieurs et inférieurs des feuilles P_i . Coupons chacune de ces feuilles suivant la demi droite \mathbb{R}^- (ou plus généralement suivant une courbe simple joignant 0 et ∞ , auquel cas il faudrait changer légèrement les définitions de P_i^\pm). Collons à présent suivant cette coupure, le bord de P_1^+ à celui de P_2^- et le bord de P_1^- à celui de P_2^+ . Chaque point de \mathbb{C} peut être associé à un point de cette nouvelle surface, de sorte que l'on peut interpréter la nouvelle surface comme le recollement de chacun des voisinages sur lesquels la fonction f est uniquement déterminée. Ainsi, f est bien définie sur cet objet, que l'on appelle *surface de Riemann associée à la fonction f* .

On peut montrer que dans ce cas, la surface obtenue est homéomorphe à une sphère.

Dans le cas général, on n'obtient pas nécessairement une sphère, comme par exemple dans le cas du polynôme $P(w, z) = w^3 - z$, où la surface associée à la solution obtenue s'apparenterait plutôt à une sphère munie d'une « poignée ».

D'une manière générale, ce qui va nous intéresser pour la suite, ne sera pas la fonction multivaluée que l'on détermine, mais plutôt la surface associée.

4.1.2 Surfaces de Riemann abstraites

Une surface de Riemann est un concept relié à la notion de fonction multivaluée. Pour une fonction donnée, on a une certaine surface associée. Toutes ces surfaces ont beaucoup de propriétés topologiques en commun, de sorte que l'on voudrait définir de façon plus abstraite, une surface de Riemann comme étant une surface ayant les mêmes propriétés. Un tel objet n'aura plus besoin d'être associé à une fonction pour avoir une raison d'exister. L'idée en arrière est de pouvoir généraliser les concepts usuels de l'analyse complexe à toute surface de Riemann. Notamment, on verra que \mathbb{C} est une surface de Riemann, ce qui signifie entre autre que l'analyse complexe « standard » est vraiment un cas particulier de l'analyse sur les surfaces de Riemann.

Définition 4.1.1 Soit X une variété réelle de dimension 2. Une carte complexe sur X est la donnée d'un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ où U est un ouvert de X et V un ouvert de \mathbb{C} .

On dit que deux cartes ϕ_i , $i = 1, 2$ sont holomorphiquement compatibles si

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(V_1 \cap V_2) \text{ est bi-holomorphe.}$$

Un atlas complexe sur X est un ensemble Σ de cartes (ϕ_i, U_i) définies de sorte que (U_i) soit un recouvrement de X .

Deux atlas Σ_1 et Σ_2 sont analytiquement équivalents si toute carte de Σ_1 est compatible avec toute carte de Σ_2 .

Il est relativement évident que l'équivalence analytique de deux atlas est une relation d'équivalence sur les atlas. Si on appelle *structure complexe* de la variété X , une classe d'équivalence d'atlas sur X , alors une structure complexe sur X peut être donnée par n'importe quel atlas. On peut montrer que pour chaque structure complexe, on peut trouver un atlas maximal Σ^* en ce sens que si on se donne un autre atlas Σ , alors Σ^* contient toutes les cartes complexes sur X qui sont compatibles (holomorphiquement) avec toutes les cartes de Σ . En des termes plus prosaïques, Σ^* contient toutes les cartes complexes possibles et imaginables, qui sont compatibles avec les autres atlas.

Définition 4.1.2 Une surface de Riemann est une paire (X, Σ) où X est une variété réelle et connexe de dimension 2 et Σ un représentant d'une structure complexe sur X . (ou si la structure n'est pas claire, on donne parfois la classe elle-même plutôt que l'un de ses représentants)

Cette définition nous permet d'ajouter ou de retirer à loisir des cartes pour Σ , dès que les cartes que l'on ajoute sont bien dans l'atlas maximal. A présent, lorsqu'il sera question de surface de Riemann et sauf mention contraire, une carte désignera toujours une carte complexe de l'atlas maximal de la surface de Riemann en question.

Exemples

Le plan complexe est une surface de Riemann. Il suffit de prendre pour cela la carte donnée par l'identité sur \mathbb{C} .

Tout domaine D du plan complexe est une surface de Riemann. Il suffit de prendre pour carte l'inclusion $i : D \hookrightarrow \mathbb{C}$.

La sphère de Riemann S^2 (que l'on peut voir comme le plan projectif complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) est également une surface de Riemann. Posons $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et soient $U_1 = S^2 \setminus \{\infty\}$ et $U_2 = S^2 \setminus \{0\}$.

Soient $\phi_1 = id_{U_1}$ et ϕ_2 définie par $\phi(\infty) = 0$ et $\phi(z) = \frac{1}{z}$ sinon.

Sur U_2 on met la topologie suivante : Si $\infty \notin V$, V est ouvert si et seulement si V est ouvert relativement à \mathbb{C} . Sinon, si V est de complémentaire compact dans \mathbb{C} , on dit

également que $V \cup \{\infty\}$ est ouvert.

Ainsi, il est clair que $U_1 \cup U_2 = S^2$ et que S^2 est connexe comme union de deux ouverts connexes d'intersection non vide. Il est également clair que la topologie construite, confère à S^2 la propriété d'être un espace séparé. Finalement, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est clairement bi-holomorphe sur $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$, et donc S^2 est bien une surface de Riemann.

Comme annoncé, l'idée est de faire de l'analyse complexe sur ces structures. Il faut donc se donner des outils similaires à ceux que l'on connaît déjà sur \mathbb{C} . Notamment il faut définir ce qu'est l'holomorphie sur une surface de Riemann, ou même entre deux surfaces de Riemann.

Définition 4.1.3 Soient X une surface de Riemann et $Y \subset X$ un ouvert. Une fonction $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe, si pour chaque carte $\psi : U \rightarrow V$ de X , l'application $f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap Y) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

Remarques

Il est facile de voir que cette définition ne dépend pas du représentant de la classe de structure conforme définie sur X . Ainsi, pour montrer qu'une fonction est holomorphe sur X , il suffit de montrer qu'elle l'est pour un atlas.

Toute carte $\psi : U \rightarrow V$ de X est une application complexe holomorphe. En général, on appelle système de coordonnées locales, les couples (U, ψ) . On écrit également parfois (U, z) plutôt que (U, ψ) .

Définissons à présent les applications holomorphes entre surfaces de Riemann quelconques.

Définition 4.1.4 Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application f est une application holomorphe entre X et Y si elle est continue et si pour chaque paire de cartes $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ et $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, l'application $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ est holomorphe de V_1 vers V_2 .

Remarques

Cette définition a du sens car $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ est définie sur un ouvert de \mathbb{C} . De plus, lorsque l'on parle de continuité entre X et Y , il ne faut pas oublier que X et Y sont des espaces topologiques et que la continuité d'une fonction y est donc bien définie.

On dit évidemment que f est bi-holomorphe si elle est bijective holomorphe et d'inverse holomorphe. Si entre X et Y il existe une certaine application biholomorphe, on dit que X et Y sont isomorphes.

La définition de l'holomorphie entre X et Y coincide avec la définition de l'holomorphie dans le cas où $Y = \mathbb{C}$.

Les fonctions holomorphes sur les surfaces de Riemann se comportent sensiblement de la même façon que les applications holomorphes sur les domaines de \mathbb{C} . Par exemple, le théorème de l'application ouverte y est encore valable. En fait, les théorèmes qui ne font appel qu'à des propriétés locales des fonctions sont en général, conservés sur les surfaces de Riemann et c'est la raison pour laquelle nous ne rentrerons pas dans les détails et nous nous concentrerons sur des aspects, qui, pour nos besoins, paraissent plus essentiels.

4.2 Homotopie et groupe fondamental

Cette section présente les définitions de base de la topologie algébrique, notamment les définitions relatives à l'homotopie et au groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs. Ce mémoire étant relatif aux domaines multiplement connexes, il aurait été dommage de ne pas aborder les questions relatives au groupe fondamental d'un domaine. De son côté, l'homotopie apparaît naturellement dans la définition du groupe fondamental, mais également dans les théorèmes relatifs au relèvement de courbes et d'applications. Ce sont essentiellement les idées amenant à la construction de cette section.

Une courbe, un chemin ou un lacet sur un espace topologique X désigneront toute ap-

plication continue u de $[0, 1]$ dans X . On désignera respectivement par point initial et point final les points $u(0)$ et $u(1)$.

Sauf mention contraire I désignera le compact $[0, 1]$.

Définition 4.2.1 Soient X un espace topologique quelconque et $a, b \in X$. Deux courbes u et v de a vers b sont dites homotopes sur X s'il existe une application continue $H : I^2 \rightarrow X$ telle que

- $H(t, 0) = u(t) \quad \forall t \in I,$
- $H(t, 1) = v(t) \quad \forall t \in I,$
- $H(0, s) = a$ et $H(1, s) = b \quad \forall s \in I.$

De façon plus visuelle, deux courbes sont homotopes si on passe continûment de l'une à l'autre, tout en fixant les extrémités.

Exemple

Soit Ω un domaine convexe de \mathbb{R}^n et soient a et b deux points de Ω . Alors toutes les courbes entre a et b sont homotopes. En effet, il suffit de considérer H définie sur I^2 par

$$H(t, s) = v(t)s + (1 - s)u(t)$$

À t fixé, $H_t(s)$ est le segment reliant les points $u(t)$ et $v(t)$ et par convexité, celui ci est toujours intérieur au domaine. Il suffit pour conclure de vérifier que H est effectivement continue et respecte les propriétés énoncées, ce qui se fait sans aucune difficulté.

Théorème 4.2.2 Soient X un espace topologique et a et b deux points de X . La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes de a vers b . Pour la suite, on la notera \sim .

Lemme 4.2.3 Soient X un espace topologique et u une courbe sur X .

Soit de plus ϕ une application continue de I dans I ayant 0 et 1 pour points fixes.

Alors u et $u \circ \phi$ sont homotopes.

Les démonstrations sont quasi-immédiates et il est très facile de se convaincre de ces résultats. Notamment la deuxième assertion stipule que la façon de parcourir la courbe ne change pas la classe d'homotopie de celle ci. En des termes plus géométriques, l'homotopie d'une courbe ne dépend que de l'allure géométrique de celle ci et non de la façon dont elle a été « dessinée ».

Définition 4.2.4 Soit X un espace topologique contenant trois points a, b, c . On définit alors des opérations sur l'ensemble des courbes sur X de la manière suivante :

1. L'inverse de la courbe u est définie par

$$u^{-1}(t) = u(1-t) \quad \forall t \in I.$$

2. Soient u une courbe de a vers b et v une courbe de b vers c , alors le produit $u.v$ est défini par

$$(u.v)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ v(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Encore une fois, la description géométrique est plus parlante. Le produit des courbes u et v est défini comme étant la courbe w obtenue en juxtaposant v à la suite de u et en parcourant u et v à vitesse double. L'inverse d'une courbe est tout simplement, pour sa part, la même courbe parcourue dans le sens inverse. Il est facile de voir que la courbe inverse de u vérifie $u.u^{-1} = u(0) = a$ ¹ et que $u^{-1}u = u(1) = b$. Notamment si $a = b$, u^{-1} est l'inverse de u pour le produit de courbes, au sens algébrique.

Lemme 4.2.5 Soient X un espace topologique et $a, b, c \in X$. Soient u, v et w des courbes sur X telles que

$$u(0) = a, \quad u(1) = b = v(0), \quad v(1) = c = w(0) \quad \text{et} \quad w(1) = d$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $a.u \sim u \sim u.b$

2. $u.u^{-1} \sim a$

¹Ici, a est à prendre au sens de la courbe constante sur a .

3. $(u.v).w \sim u.(v.w)$.

Le premier énoncé n'est pas difficile et le second à déjà été remarqué plus haut. Le troisième énoncé n'est pas tellement plus difficile, et repose sur la remarque suivante.

Soit ϕ la fonction affine par morceaux définie sur I par

$$\phi(0) = 0, \phi(1/4) = 1/2, \phi(1/2) = 3/4, \phi(1) = 1.$$

Alors on a l'égalité suivante

$$(u.v).w = (u.(v.w)) \circ \phi$$

et le lemme 1.2.3 permet de conclure.

Essentiellement, ces remarques vont nous amener à construire un groupe associé à X et ainsi nous permettre d'étudier X à travers ses propriétés.

Définition 4.2.6 Un lacet u sur un espace topologique X est dite fermée si $u(0) = u(1)$

Théorème 4.2.7 (Groupe fondamental) *Soit X un espace topologique et soit $a \in X$. L'ensemble $\pi_1(X, a)$ des classes d'homotopies des courbes de X ayant a comme point initial et final, est un groupe lorsque muni des lois induites par celles décrites ci dessus. Ce groupe est appelé groupe fondamental de X au point de base a .*

La démonstration repose essentiellement sur toutes les remarques précédemment faites et notamment sur le fait que les lois sont respectées lorsque l'on passe au quotient.

La question que l'on peut se poser, est de savoir si la dépendance en le point de base est forte ou non. Dans le cas des domaines connexes par arcs, on va voir qu'il n'y a pas de dépendance. Notre but est d'utiliser toute la théorie des courbes homotopes dans le cas des surfaces de Riemann. Notamment une surface de Riemann est localement connexe par arcs², car localement conforme à \mathbb{C} . De plus, par définition, elle est également connexe et on sait qu'un espace connexe, localement connexe par arcs, est nécessairement connexe par arcs.^[Fors, p.14] Ainsi, dans les cas qui vont nous intéresser, il n'y aura

²Un espace topologique est localement connexe par arcs si tout point possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

pas de dépendance en le point de base et on pourra alors parler du groupe fondamental de X , que l'on notera $\pi_1(X)$.

Théorème 4.2.8 *Soient X un espace topologique et a et b deux points de X reliés par un arc w . Alors $\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(X, b)$*

Démonstration

À toute courbe u ayant a pour point final et initial, on peut associer la courbe $\phi(u) = v$ définie par $\phi(u) = v = w.u.w^{-1}$. On a déjà remarqué que le produit était bien défini sur les classes d'homotopie et donc ϕ induit un morphisme de $\pi_1(X, a)$ dans $\pi_1(X, b)$.

Il est également clair que ϕ est bijective. Pour cela il suffit de remarquer que toute courbe v ayant b pour point initial et final est atteinte par ϕ par la courbe u définie par $u = w^{-1}.v.w$. Ceci achève la démonstration et $\pi_1(X, a)$ et $\pi_1(X, b)$ sont bien des groupes isomorphes. \square

Corollaire 4.2.9 *Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors le groupe fondamental de X ne dépend pas du point de base que l'on choisit.*

Comme indiqué plus haut, c'est cette forme que nous allons utiliser un peu plus loin. Notamment, nous allons utiliser la définition suivante, qui, grâce aux résultats précédents, a bien du sens.

Définition 4.2.10 Soit X un espace topologique connexe par arcs. On dit que X est simplement connexe si $\pi_1(X) = \{0\}$.

Note :

On écrira souvent dans ce cas que $\pi_1(X) = 0$ et on dira éventuellement que le groupe est nul.

Définition 4.2.11 Soient X un espace topologique et u, v deux courbes fermées sur X . On dit que les deux courbes u et v sont librement homotopes s'il existe une application

continue A telle que

1. $A(t, 0) = u(t) \forall t \in I$
2. $A(t, 1) = v(t) \forall t \in I$
3. $A(0, s) = A(1, s) \forall s \in I.$

La relation d'homotopie libre est une relation plus forte que la relation d'homotopie. Elle signifie en quelque sorte que l'on passe de u à v au moyen d'une transformation continue et en conservant le caractère fermé des courbes (troisième propriété). Il est facile de voir qu'un domaine connexe par arcs est simplement connexe dès lors que toute courbe fermée est librement homotope au lacet constant. Par exemple, le caractère multiplement connexe d'un support à vélos et d'une roue, ainsi que le caractère librement homotope des déformations d'un cadenas lorsqu'il est fermé, empêchent le vol de ma bicyclette. C'est exactement l'idée physique en arrière de toute la théorie des courbes librement homotopes. Une courbe est librement homotope si rien n'est un obstacle à sa déformation continue en un point. Cette définition de la simple connexité équivaut sur \mathbb{C} à celle que l'on s'est fixée au début du mémoire. Il faut cependant faire attention au fait que cette dernière est en général fausse lorsque l'on sort du cadre de \mathbb{C} .

Exemple

Soit $X = S^1 \times \overline{\mathbb{D}}$ le tore plein. On peut voir, et ce n'est pas très difficile, que la relation suivante a toujours lieu dès que A et B sont connexes par arcs

$$\pi_1(A \times B) \simeq \pi_1(A) \times \pi_1(B).$$

En particulier, on a que $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(\overline{\mathbb{D}})$. Puisque $\mathbb{C} \setminus S^1$ est un ouvert de \mathbb{C} et puisqu'il est clairement non connexe par arcs, il ne peut être connexe. On en déduit donc que S^1 n'est pas simplement connexe. Ainsi le tore plein est multiplement connexe. D'un autre côté, $\mathbb{R}^3 \setminus X$ est connexe par arcs et donc connexe. (C'est entre autre la raison qui me permet d'accrocher un cadenas à ma roue de bicyclette.)

J'ai voulu donner cet exemple pour insister sur le fait que les deux notions ne sont en générales pas équivalentes. Notamment, lorsque l'on travaille sur les surfaces de

Riemann quelconques, il faut absolument oublier la définition des premiers chapitres. En pratique, pour nos besoins, ce ne sera cependant pas trop gênant.

4.3 Revêtements et relèvements

Définition 4.3.1 Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $p : Y \rightarrow X$ une application continue. Pour tout $x \in X$ l'ensemble $p^{-1}(x)$ est appelé *fibre de p au dessus de x*.

Si $q : Z \rightarrow X$ est continue, on dit que $f : Y \rightarrow Z$ préserve les fibres si $p = q \circ f$.

Définition 4.3.2 Soient X, Y, Z trois surfaces de Riemann et $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante. Un point $y \in Y$ est dit de ramification de p si pour tout voisinage V de y , on a que $p|_V$ est non injective.

On dit que p est non ramifiée si aucun tel point n'existe.

Un point de ramification est tout simplement un point autour duquel p n'est pas localement injective. La raison essentielle de considérer ces cas comme dégénérés ne sera pas vraiment abordée dans ce mémoire puisque nous allons uniquement travailler sur des applications non ramifiées. Une raison cependant, serait de prendre l'exemple de la fonction carrée, qui en 0 admet un point de ramification. Le point 0 agit comme un point de recollement des différentes déterminations de la fonction racine carrée. Les points de ramifications jouent un peu ce rôle de point de recollement des déterminations d'une fonction multiforme. C'est pour éviter de se soucier de ce qu'il pourrait arriver en ces points que l'on veut les éliminer. Il sera un peu plus clair également plus loin, notamment aux théorèmes 4.3.1 et 4.3.5, que les revêtements non ramifiés sont ceux qui permettent de garder certaines propriétés locales.

Définition 4.3.3 Soient X, Y et Z trois espaces topologiques quelconques et $p : Y \rightarrow X$ et $f : Z \rightarrow X$ deux applications continues. On appelle *relèvement de f*, toute application

continue $g : Z \rightarrow Y$ qui fasse commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ g \nearrow & \downarrow p & \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Exemple

Pour x et y réels, définissons l'ensemble $\text{Ban}(x, y)$ comme étant $\text{Ban}(x, y) = \{x < \text{Re}(z) < y\}$. Considérons le cas où X est l'anneau $A(r, 1)$ et Y la bande $\text{Ban}(\log(r), 0)$. Il est relativement évident que $X = \exp(Y)$. Considérons à présent l'application $\gamma : Z = \mathbb{R} \rightarrow X$ définie par $\gamma : t \mapsto \sqrt{r} \exp(it)$. Il est clair que γ est continue. De plus, toute application $\gamma^* : \mathbb{R} \rightarrow Y$ de la forme $\gamma^*(t) = \frac{\log(r)}{2}t$ est un relèvement de γ dès que t varie sur un intervalle d'amplitude supérieure à 2π . En effet, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ban}(\log(r), 0) & \\ \gamma^* \nearrow & \downarrow \exp & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow[\gamma]{} & A(r, 1) \end{array}$$

Théorème 4.3.4 Soient X et Y deux espaces séparés et $p : Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Supposons que Z soit un espace topologique connexe et que $f : Z \rightarrow X$ soit une application continue. Soient g_1 et g_2 deux relèvements de f . Alors, $g_1(z) \neq g_2(z)$ pour tout $z \in Z$, ou $g_1 \equiv g_2$.

Démonstration

La démonstration repose essentiellement sur la connexité de Z et le fait que Z ne puisse contenir d'ensemble à la fois ouvert et fermé, autres que \emptyset et Z lui-même.

En effet, soit $T = \{z \in Z, g_1(z) = g_2(z)\}$. Par continuité de g_1 et de g_2 , l'ensemble T est clairement fermé. Montrons que T est également ouvert. Soit $z \in T$ et soit $y = g_1(z) = g_2(z)$. Puisque p est un homéomorphisme local, p envoie un certain voisinage V de y sur un certain voisinage U de $p(y)$. Puisque g_1 et g_2 sont continues, on peut trouver un voisinage W de z , tels que $g_1(W) \subset V$ et $g_2(W) \subset V$. Soit $\phi : U \rightarrow V$ l'inverse

local de p restreint à V . On a alors sur W et avec un abus de notation, les équations $g_1 = \phi \circ f$ et $g_2 = \phi \circ f$. Notamment, on a que $g_1 = g_2$ sur W tout entier. Ainsi, le voisinage W de z est inclus dans T et T est ouvert. Par connexité de Z , nécessairement que $T = Z$ ou $T = \emptyset$ ce qui conclut la démonstration. \square

L'existence d'un relèvement pose la question de sa régularité. Quelles informations sur une application f peut-on récupérer sur son relèvement ? Le théorème suivant donne un élément de réponse très intéressant.

Théorème 4.3.5 *Soient X, Y, Z trois surfaces de Riemann et $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non ramifiée. Soit $f : Z \rightarrow X$ une application holomorphe quelconque. Alors tout relèvement $g : Z \rightarrow Y$ est holomorphe.*

Démonstration

Soit c un point de Z et soient $b = g(c)$ et $a = p(b) = f(c)$ par commutativité du diagramme. Puisque p est non ramifié, on peut trouver un voisinage ouvert V de b et un voisinage ouvert U de a tel que $p|_V : V \rightarrow U$ soit biholomorphe. Soit alors ϕ sa réciproque. Par continuité de g on peut trouver un voisinage W de c tel que $g(W) \subset V$. Sur ce voisinage et avec un abus de notation, on a alors l'égalité $g = \phi \circ f$ et donc g y est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes. \square

Il apparaît un peu plus clairement pourquoi on veut travailler avec des applications non ramifiées. Notamment ici, la clé de la preuve se situe dans le fait que p soit non ramifiée, ce qui nous a permis d'en déduire l'existence d'une certaine application ϕ biholomorphe, pour exprimer g localement comme composée d'applications holomorphes. Il est donc évident que l'injectivité locale de p est intéressante pour conserver certaines propriétés et c'est la raison pour laquelle nous ne travaillerons qu'avec des applications non ramifiées.

Toujours dans le même esprit, on peut se demander ce qui se passe lorsque l'on relève des courbes et notamment lorsqu'elles sont homotopes. Une partie de la réponse se situe dans le théorème suivant.

Théorème 4.3.6 (Relèvement de courbes homotopes) [Fors, p.23] Soient X et Y deux espaces séparés, et $p : Y \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Soient a et b deux éléments de X et $\hat{a} \in Y$ un point au dessus de a . Supposons de plus que l'on ait une application continue $A : I^2 \rightarrow X$ telle que $A(0, s) = a$ et $A(1, s) = b$ pour tout $s \in I$. Soit $u_s(t) = A(t, s)$. Alors si toute courbe u_s peut être relevée en une courbe \hat{u}_s avec \hat{a} pour point initial, alors \hat{u}_0 et \hat{u}_1 se terminent au même point et sont homotopes.

Définition 4.3.7 Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $p : Y \rightarrow X$ est appelée revêtement de X si tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ et de sorte que p restreint à chacun des V_j soit un homéomorphisme, et que $V_j \cap V_k \neq \emptyset \Rightarrow j = k$.

Remarque Le revêtement de X est l'application p , cependant on confond souvent les éléments p , Y et (Y, p) . Autrement dit, chacun désigne habituellement le revêtement de X . Parfois, l'application p est également appelée la projection.

Exemples

Soit $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $p(z) = \exp(z)$. Alors p est un revêtement de \mathbb{C}^* .

L'idée du revêtement (Y, p) d'un espace topologique X est de voir X comme la projection de Y par p . Un peu comme si X n'était vu sous un angle qui n'est pas « le bon ». Pour justifier cette phrase, supposons que Y soit une hélicoïde, par exemple de paramétrisation $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ pour t variant dans I . Notamment, si on regarde cet ensemble du dessus (ou du dessous), on va avoir l'impression que Y est simplement un cercle. Cette vision n'est rien d'autre que l'image de Y par la projection $\pi_3 = (x, y, z) \mapsto (x, y) = (x, y, 0)$. L'esprit des revêtements est celui ci. Peut-on faire le chemin inverse ? A un espace topologique donné, peut-on le voir comme un espace plus gros, vu sous un angle différent ? Si oui, peut-on également imposer des conditions topologiques sur celui-ci ? Par exemple, dans le cas du cercle, on a un ensemble doublement connexe que l'on voit en fait comme projection sur un plan, d'un ensemble simplement connexe. Peut-on toujours avoir cette propriété ? C'est la direction que va prendre ce chapitre, notamment dans le cas particulier, non plus des hélicoïdes, mais des anneaux.

Définition 4.3.8 Soit $p : Y \rightarrow X$ une application continue. On dit que p a la propriété du relèvement si, pour toute courbe $u : I \rightarrow X$ et pour tous points $y_0 \in Y$ tel que $p(y_0) = u(0)$, il existe un relèvement $\hat{u} : I \rightarrow Y$ de u tel que $\hat{u}(0) = y_0$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.3.9 [Fors, p.25] *Tout revêtement $p : Y \rightarrow X$ d'espaces topologiques X et Y possède la propriété du relèvement.*

Théorème 4.3.10 [Fors, p.26] *Soient X et Y deux espaces séparés et supposons que Y soit connexe par arcs. Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement de X . Alors pour tout point $x_0, x_1 \in X$, les ensembles $p^{-1}(x_0)$ et $p^{-1}(x_1)$ ont la même cardinalité. Notamment si Y est non vide, on a que p est surjective.*

Remarque

La cardinalité d'un ensemble $p^{-1}(x)$ est appelée le nombre de feuillets du revêtement p . On peut voir notre espace topologique X comme une assiette et son revêtement Y comme une pile d'assiettes situées au dessus d'elle. Le revêtement p est tout simplement l'application qui à un point de la pile associe le point de l'assiette au dessus duquel il se trouve. Le nombre de feuillets sera tout simplement le nombre d'assiettes de la pile.³

Démonstration du théorème 4.3.8

Soit u une courbe de X reliant x_0 à x_1 . Si $y \in p^{-1}(x_0)$ est un point quelconque, alors il existe exactement un relèvement \hat{u} de u tel que $\hat{u}(0) = y$ d'après le théorème 4.3.1. Posons alors $\phi(y) = \hat{u}(1)$. Par le théorème du relèvement, cette application est bien définie et le théorème d'unicité affirme qu'elle même est bijective, ce qui permet de conclure. \square

³C'est Poincaré qui utilisa cette analogie pour la première fois.

Toute la théorie construite jusqu'à présent suppose l'existence de revêtements. En pratique, il est intéressant de savoir si un espace topologique admet ou non un revêtement. En fait, un espace topologique X admet un revêtement dans la « plupart des cas », en ce sens que la topologie que l'on doit mettre sur X est assez faible. Le théorème suivant nous donne une caractérisation des espaces topologiques qui possèdent un revêtement, mais avant de l'énoncer, il nous faut donner une petite définition.

Définition 4.3.11 On dit que X est localement simplement connexe, si tout point x possède un voisinage simplement connexe.

Exemples

Soit X_1 la « boucle d'oreille hawaïenne » définie comme l'union des cercles de rayon $1/n$ et de centre $(1/n, 0)$. Cet espace muni de la topologie induite par \mathbb{R}^2 n'est pas localement simplement connexe car tout voisinage de 0 contient des cercles qui ne sont pas homotopes au lacet constant.

Soit X_2 l'union des cercles de rayon 1 et de centre $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. L'ensemble X_2 n'est pas simplement connexe mais est localement simplement connexe.

Nous voilà alors prêts à énoncer le théorème suivant, qui sera en quelque sorte notre théorème fondamental.

Théorème 4.3.12 *Soient X, Y deux espaces séparés et $p : Y \rightarrow X$ un revêtement. Supposons de plus que Z soit simplement connexe, connexe par arcs et localement simplement connexe et que $f : Z \rightarrow X$ soit une application continue. Alors pour tout $z_0 \in Z$ et pour tout $y_0 \in Y$ tels que $f(z_0) = p(y_0)$, il existe un et un seul relèvement $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ tel que $\hat{f}(z_0) = y_0$.*

Démonstration

Définissons l'application $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ de la façon suivante. Soit $z \in Z$ et soit u une courbe de z_0 vers z . On a alors que $v = f \circ u$ est une courbe de $f(z_0)$ vers $f(z)$. On sait qu'il

existe un unique relèvement \tilde{v} de v qui possède y_0 comme point initial. On pose alors $\hat{f}(z) = \tilde{v}(1)$ ce qui a bien du sens, car c'est indépendant du choix de la courbe u que l'on s'est donnée au départ. En effet, si u_1 est une autre courbe reliant z_0 à z , alors u_1 et u sont homotopes et donc $v_1 = f \circ u_1$ est homotope à v . Notamment si \tilde{v}_1 est un relèvement de v_1 ayant y_0 comme point initial, on sait qu'il va mener au même point final que \tilde{v} et donc f est bien définie. De plus, par construction, on a que $f = p \circ \hat{f}$.

Il reste à montrer que \hat{f} est bien continue, ce qui est assez classique. Posons $z \in Z$ et $y = \hat{f}(z)$. Soit V un voisinage de y . On doit montrer qu'il existe un voisinage W de z tel que $\hat{f}(W) \subset V$. Puisque p est un homéomorphisme local, on peut supposer, éventuellement en raptissant V qu'il existe un voisinage U de $p(y) = f(z)$ tel que $p|_V$ soit un homéomorphisme de V dans U . Soit ϕ son inverse. Puisque f est continue et que Z est localement connexe par arcs, on peut trouver un voisinage de z connexe par arcs W tel que $f(W) \subset U$. Montrons alors que $\hat{f}(W) \subset V$. Soient u et v des courbes définies comme dans la construction de \hat{f} . Soit $z' \in W$ et soit u' une courbe reliant z à z' qui reste dans W (ce qui est toujours possible, puisque W est connexe par arcs). Alors la courbe $v' = f \circ u'$ est toujours dans U et son relèvement \tilde{v}' est une courbe avec y comme point initial. Ainsi, le produit $\tilde{v}.\tilde{v}'$ est un relèvement de la courbe produit $v.v' = f \circ (u.u')$ qui a y_0 comme point initial. Ainsi $\hat{f}(z') = (\tilde{v}.\tilde{v}')(1) = \tilde{v}'(1) \in V$ et le résultat est démontré. \square

Exemple

Soit X une surface de Riemann simplement connexe et soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application holomorphe qui ne s'annule jamais. On cherche à trouver une application holomorphe F de X dans \mathbb{C} telle que $\exp(F) = f$ c'est-à-dire une application holomorphe qui fasse commuter la diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ F \nearrow & \downarrow \exp & \\ X \xrightarrow[f]{\quad} & \mathbb{C}^* & \end{array}$$

Soit z_0 dans X et soit $c \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $e^c = f(z_0)$. Alors le théorème précédent affirme l'existence d'une application F de X dans \mathbb{C} qui a les propriétés voulues et telle que $F(z_0) = c$. De plus, le théorème 13.5 permet d'affirmer que F est

holomorphe. On voit également que toutes les autres applications F possibles diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.

Revêtements universels

De tous les revêtements que peut avoir un espace topologique X , en existe t'il un meilleur ? Evidemment il faut définir ce que l'on entend par en avoir un meilleur et c'est la direction que prend cette sous section. Notamment, on a vu qu'à un revêtement, on pouvait toujours associer un certain groupe, qui est le groupe fondamental. On va voir qu'il existe un lien étroit entre les propriétés du groupe fondamental d'un revêtement et celles du revêtement considéré. Notamment, le théorème 4.3.11 en sera le point culminant.

Définition 4.3.13 Soient X et Y des espaces topologiques et soit (Y, p) un revêtement de X . Le revêtement p est appelé un *revêtement universel de X* , s'il vérifie la propriété universelle suivante.

Pour tout revêtement (q, Z) de X , où Z est connexe et pour tous les points $y_0 \in Y$ et $z_0 \in Z$ tels que $p(y_0) = q(z_0)$, il existe une et une seule application continue f de Y vers Z qui préserve les fibres, telle que $f(y_0) = z_0$.

Il découle trivialement de la définition qu'il existe toujours au plus un revêtement universel, à homéomorphisme près. En effet, supposons que $q : Z \rightarrow X$ soit également un revêtement universel de X . Alors il existe une application g de Z vers Y telle que $g(z_0) = y_0$. On a alors que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications continues respectivement de Y dans lui même et de Z dans lui même et qui respectent les fibres. On a également que $f(g(z_0)) = z_0$ et $g(f(y_0)) = y_0$. Notamment, par la propriété universelle, on a automatiquement que $f \circ g = id_Y$ et que $g \circ f = id_Z$.

Il faut donc voir le revêtement universel comme le plus gros revêtement que l'on puisse construire au-dessus de X . De plus, les théorèmes qui suivent énoncent des caractéris-

tiques topologiques essentielles des revêtements universels.

Théorème 4.3.14 [Fors, p.32] *Soient X et Y deux variétés connexes et supposons de plus que Y soit simplement connexe. Alors si (Y, p) est un revêtement de X , c'est un revêtement universel.*

La démonstration découle trivialement du théorème 4.3.12.

Ce théorème nous donne une caractéristique des revêtements universels, ce sont en effet ceux qui sont simplement connexes. La remarque précédente affirme, pour sa part, l'existence d'au plus un revêtement universel (à homéomorphisme près). La question intéressante est maintenant celle de l'existence d'un tel revêtement. En fait, on va voir que lorsque la variété est « gentille », un tel revêtement existe toujours.

Théorème 4.3.15 [Fors, p.32] *Soit X une variété connexe. Alors il existe toujours une variété connexe et simplement connexe \tilde{X} et une application p telle que (\tilde{X}, p) soit un revêtement de X .*

On a donc notre théorème d'existence, lorsque la variété sur laquelle on travaille est connexe. Par définition une surface de Riemann étant une variété connexe, on pourra toujours par la suite travailler avec le revêtement universel d'une surface de Riemann, sans jamais se poser la question de son existence ou de son unicité.

La théorème précédent est la dernière pierre de la construction de la théorie qui nous permet de généraliser les algorithmes de calculs de domaines simplement connexes. Le théorème sur lequel la construction de notre algorithme repose entièrement, est le théorème d'existence suivant.

Théorème 4.3.16 [Fors, p.37] *Soit X une surface de Riemann et soit $f : X \rightarrow A(r, 1)$ une application conforme ($0 < r < 1$). Alors il existe une application biholomorphe h*

de X dans $Y = \text{Ban}(\log(r), 0)$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow f & \swarrow \exp \\ & A(r, 1) & \end{array}$$

Ce théorème est le théorème de base de notre construction car il suffit de remarquer que si on a un domaine hyperbolique doublement connexe Ω , il suffit de choisir X comme étant le revêtement universel de Ω et Y comme étant la bande $\text{Ban}(\log(r), 0)$ où r est la capacité hyperbolique du trou de Ω . Notamment le théorème affirme l'existence d'une application h entre les deux revêtements universels X et Y . L'algorithme Géodésique nous permet alors de calculer cette application h et ainsi, f s'en déduit par commutativité du diagramme.

Démonstration

L'application $\exp : Y \rightarrow A(r, 1)$ est le revêtement universel de $A(r, 1)$ par simple connexité de Y . Ainsi, par définition du revêtement universel, on sait qu'il existe un certain homéomorphisme ψ entre X et Y qui préserve les fibres et tel que $\exp = f \circ \psi$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait deux revêtements universels pour $A(r, 1)$, ce qui est impossible. Notamment par le théorème 1.3.5 on sait que ψ est holomorphe. En échangeant les rôles de \exp et de f , on a également que ψ^{-1} est holomorphe et le théorème est démontré. Ceci est licite, car si f est conforme, alors f est entre autre non ramifiée et holomorphe, ce qui nous permet effectivement d'invoquer le théorème 1.3.5.

Chapitre 5

L'algorithme de calcul

5.1 Construction de l'algorithme sur une surface de Riemann

Le théorème de Riemann permet d'établir que tous les domaines simplement connexes du plan complexe, à l'exception du plan complexe lui même, sont conformes. La preuve n'est pas constructive et il est en général difficile voir même impossible d'exhiber les applications conformes qui entrent en jeu. Cependant, de nombreux algorithmes permettent d'approximer ces applications à la précision souhaitée. Nous avons décrit en particulier deux de ces algorithmes dans le premier chapitre de ce mémoire. Nous avons également montré que tout ne se passait pas aussi bien d'un point de vue théorique dans le cas des domaines doublement connexes, mais nous avons quand même réussi à classer ces domaines dans le troisième chapitre. Le but de ce cinquième chapitre est de voir comment on peut se servir des algorithmes de calculs déjà existants pour les domaines simplement connexes, afin de les utiliser sur des domaines doublement connexes. L'idée principale est de passer par les revêtements universels des domaines doublement connexe et d'y utiliser nos anciens algorithmes. Le problème semble simple, mais n'est

pas si évident. Dans un premier temps on peut montrer que, pour une application conforme $g : X \rightarrow Y = A(r, 1)$ entre un domaine doublement connexes et son anneau canonique, il y'a toujours un relèvement conforme h entre \tilde{X} et \tilde{Y} . En effet, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \tilde{Y} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ X & \xrightarrow{g} & A(r, 1) \end{array}$$

que l'on peut ré-écrire sous la forme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \tilde{Y} \\ & f \searrow & \swarrow \exp \\ & A(r, 1) & \end{array}$$

où l'on a posé $f = g(\exp)$. Le théorème 13.16 nous permet d'affirmer l'existence d'une application bi-holomorphe h entre \tilde{X} et \tilde{Y} qui fasse commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & \tilde{Y} \\ & f \searrow & \swarrow \exp \\ & A(r, 1) & \end{array}$$

Cependant, il n'est pas évident que l'on puisse toujours calculer l'application h , même de façon numérique. En effet, notre but étant de développer un algorithme, on ne peut pas se contenter d'invoquer l'existence, il faut aussi exhiber cette application.

Dans un second temps, il est bon de remarquer que \tilde{X} et \tilde{Y} sont conformes au disque unité. Le théorème 13.16 nous affirme que \tilde{X} et \tilde{Y} sont conformes et il suffit donc de montrer que \tilde{Y} est conforme au disque unité. Or, \tilde{Y} est une bande dans le plan complexe, c'est-à-dire un ensemble simplement connexe du plan, distinct du plan lui-même. Le théorème de représentation de Riemann permet alors de conclure. Ainsi il existe deux applications conformes ϕ et ψ respectivement de \tilde{X} dans \mathbb{D} et de \mathbb{D} dans \tilde{Y} telles que pour tout $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ où h est supposée conforme, on a qu'il existe une unique application de Möbius $M_{\theta,w}(z) = e^{i\theta} \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$ du disque unité telle que

$$h = \psi \circ M_{\theta,w} \circ \phi$$

Trouver le h qui convienne c'est donc trouver la transformation de Möbius qui convient, c'est à dire finalement, trouver les paramètres w et $\theta \bmod 2\pi$.

Etudions le cas où ϕ est une application conforme qui envoie un point $z_0 \in \tilde{X}$ sur $0 \in \mathbb{D}$ et telle que $\phi'(z_0) > 0$. Une telle application existe d'après le théorème de représentations de Riemann et est de la forme

$$\phi(z) = \alpha(z - z_0) + \dots$$

où $\alpha > 0$. Supposons également que \tilde{Y} soit la bande $Ban(-\pi/4, \pi/4)$. Alors une application conforme de \mathbb{D} sur \tilde{Y} est donnée par \arctan . Ainsi, dans ce cas, toute application conforme $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ est de la forme

$$\arctan(M_{\theta,w}(\phi(z)))$$

On cherche à déterminer θ et w . Ces quantités dépendent entièrement de la fonction g , conforme entre X et Y . Remarquons que $M'_{\theta,w}(z) = e^{i\theta} \frac{1-|w|^2}{(1-z\bar{w})^2}$. Notamment lorsque z est au voisinage de 0, on a que

$$M(z) = e^{i\theta}((1-|w|^2)(z - z_0) - w) + \dots$$

Si on compose à droite par $\phi(z)$, on va trouver que lorsque z est au voisinage de z_0 , $M(\phi(z)) = e^{i\theta}(\alpha(1-|w|^2)z - w) + \dots$. Finalement, on trouve que h est, au voisinage de z_0 , de la forme

$$h(z) = \arctan(-e^{i\theta}w) + \alpha e^{i\theta} \frac{1-|w|^2}{1+(e^{i\theta}w)^2}(z - z_0) + \dots$$

Pour plus de lisibilité, le changement de variable $w' = we^{-i(\theta+\pi)}$ s'impose, et on trouve alors que

$$h(z) = \arctan(w') + \alpha e^{i\theta} \frac{1-|w'|^2}{1+w'^2}(z - z_0) + \dots$$

Si on veut que h satisfasse les conclusions du théorème 13.10, on doit avoir que $g(\exp(z)) = \exp(h(z))$ et donc que

$$g(e^z) = \exp(\arctan(w'))(1 + \alpha e^{i\theta} \frac{1-|w'|^2}{1+w'^2}(z - z_0) + \dots)$$

Il suffit alors simplement d'identifier les coefficients avec les conditions que l'on veut imposer sur g et h est alors déterminée.

Evidemment, cet exemple n'est pas vain, ce qui va jouer le rôle de ϕ pour nous, sera l'application calculée par l'algorithme Zipper ou l'algorithme Géodésique. Le revêtement universel \tilde{Y} ne sera pas réellement celui que l'on va choisir. Nous choisirons plutôt le revêtement $\log(\text{Cap}_-^{2/\pi}(K))(\tilde{Y} + \pi/4)$, la raison étant que l'on veut que la projection sur la couronne canonique soit toujours l'exponentielle.

Soit Ω un domaine doublement connexe du disque hyperbolique. Ω est donc de la forme $\Omega = \mathbb{D} \setminus K$ où K est un certain ensemble connexe compact du disque unité. Supposons de plus que K soit non réduit à un point, c'est à dire que K possède une infinité de points, sinon le résultat est trivial et la théorie des revêtements est superflue. Supposons de plus que $0 \in K$. Alors il existe un certain ensemble $\tilde{\Omega}$ tel que $(\tilde{\Omega}, \exp)$ soit le revêtement universel de Ω . Notamment $\tilde{\Omega}$ est distinct du plan lui même, et est donc conforme à une certaine bande $Ban(Cap_-(K), 0)$. Il suffit alors d'utiliser l'algorithme Géodésique pour calculer une application conforme qui convienne. Les remarques ci dessus vont justement dans ce sens.

Supposons maintenant que $0 \notin K$ et soit $w \in K$. Alors la transformation de Möbius $M_{0,w}$ envoie Ω sur un domaine de la forme précédente et le problème est maintenant résolu.

Au deuxième chapitre, nous avons énoncé le théorème fondamental suivant.

Théorème 5.1.1 *Soient $A(r, 1)$ et $A(R, 1)$ deux anneaux conformes. Alors $r = R$.*

Nous proposons ici une nouvelle démonstration qui, pour sa part, utilise la théorie des revêtements universels et qui a été le fil conducteur de ce mémoire.

Lemme 5.1.2 *Soit R une fonction rationnelle complexe. Alors $R \circ \tan$ est périodique de période $\tau \in i\mathbb{R}^*$ si et seulement si R est constante.*

Démonstration

Soit R une fonction rationnelle complexe. Puisque $R \circ \tan$ est périodique, elle l'est également sur \mathbb{R} . Fixons $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors un certain complexe a tel que

$$R(\tan(x)) = R(\tan(x + n\tau)) = a$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par définition d'une fonction rationnelle, il existe deux polynômes complexes N et D telles que $R = \frac{N}{D}$. Notamment

$$R(\tan(x)) = R(\tan(x + n\tau)) = a$$

équivaut à

$$\frac{N(\tan(x))}{D(\tan(x))} = \frac{N(\tan(x + n\tau))}{D(\tan(x + n\tau))} = a.$$

Posons $P = N - aD$. Alors on a que $P(\tan(x)) = P(\tan(x + n\tau)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le principe des nids de pigeons et le théorème de d'Alembert-Gauss permettent d'affirmer qu'une racine ω de P est atteinte par $\tan(x)$ et un certain $\tan(x + n_0\tau)$. En d'autres termes, on a pour un certain n_0 (en fait une infinité), l'égalité suivante

$$\tan(x) = \tan(x + n_0\tau) = \frac{\tan(x) + \tan(n_0\tau)}{1 - \tan(x)\tan(n_0\tau)}$$

et en simplifiant, on trouve que

$$\tan(x)^2 = -1$$

ce qui est impossible lorsque x est réel. Cela termine la démonstration du lemme. \square

Démonstration 5.1.1

Soient r et R deux éléments de $(0, 1)$. Notons $A_s = A(s, 1)$ et $B_s = \tilde{A}_s$, pour $s = r, R$. La démonstration repose essentiellement sur le lemme précédent et sur le même principe que la construction de notre algorithme. Notamment s'il existe une application conforme f entre A_r et A_R , alors il existe un relèvement conforme h entre B_r et B_R . Donc h est de la forme

$$h(z) = \log(R^{2/\pi}) \left(\arctan\left(e^{i\theta} \frac{\tan(\pi(1/4 - z/(2\log(r)))) - w}{1 - \overline{w}\tan(\pi(1/4 - z/(2\log(r))))}\right) + \pi/4 \right)$$

L'application h est conforme et préserve les fibres, ainsi pour tout $z \in B_r$, on a que

$$h(z + 2i\pi) = h(z) + 2ik(z)\pi$$

où $k(z)$ est un nombre entier. Par continuité des quantités mises en jeu, k n'a pas le choix d'être indépendant de z et en dérivant on trouve alors que h' est $2i\pi$ périodique. Il suffit alors de remarquer que par définition de h , on a que h' est une application périodique de période imaginaire pure et rationnelle en tangente. Notamment ceci n'est possible que si l'application est constante et donc $h(z) = \alpha z + \beta$. En invoquant le lemme 1.21, on a que $\alpha = \log(R)/\log(r)$ et $\beta \in i\mathbb{R}$ ou $\alpha = -\log(R)/\log(r)$ et $\operatorname{Re}(\beta) = -\alpha$. Sans perte de généralité, on peut travailler avec $\alpha = \log(R)/\log(r)$ et β imaginaire pur. On a alors $h(z + 2i\pi) = h(z) + 2ik\pi$ si et seulement si $\log(R)/\log(r)$ est un entier. Le cheminement est encore valable avec h^{-1} et donc $\log(r)/\log(R)$ est également un entier, ce qui termine la démonstration. \square

5.2 Simulations

Durant l'écriture de mon mémoire, j'ai également travaillé à la confection d'un algorithme. Une version finale de celui ci n'est aujourd'hui pas disponible. Cependant, la version actuelle permet déjà de faire quelques calculs intéressants. Plus qu'un véritable algorithme de calcul, le programme ressemble à un patch écrit pour l'algorithme Zipper de Marshall, disponible sur sa page personnelle à l'adresse

<http://www.math.washington.edu/~marshall/zipper.html>

Suivent quelques-unes des images illustrant la conformité de cet algorithme. Notamment, les premières images mettent en évidence le fait que les angles droits sont conservés. Les dernières images ont plus un intérêt ludique que pratique et montrent à travers le fait qu'une phrase est transformée en la même phrase, que les angles sont bien conservés par l'application calculée. Cette idée m'est venue après de nombreuses utilisations de l'algorithme codé par Marshall.

Le squelette de l'algorithme est le suivant.

1. Dans un premier temps, l'utilisateur entre une courbe de Jordan Γ dans le disque unité \mathbb{D} . Cette courbe fera office de trou, en ce sens que le domaine doublement connexe sur lequel on travaille est $\Omega = \mathbb{D} \setminus \text{Int}(\Gamma)$. L'utilisateur doit également entrer un point p_1 dans $\text{Int}(\Gamma)$ (qui permettra à l'algorithme de faire la distinction entre l'intérieur et l'extérieur de Ω), ainsi qu'une courbe, le long de laquelle il veut évaluer l'application f_c . Le premier point de la courbe, sera le point p_2 .

2. Dans un second temps, on veut effectuer une transformation de Möbius, de sorte à envoyer p_1 en 0. On en profite pour calculer la capacité hyperbolique r de Γ , grâce au théorème 3.2.2.

3. La troisième étape consiste en le calcul du revêtement $\tilde{\Omega}$ de Ω . On choisit $\tilde{\Omega}$ de sorte que $\exp(\tilde{\Omega}) = \Omega$. Le fait d'avoir envoyé p_1 en 0 à l'étape 2, permet d'avoir $\tilde{\Omega}$ inclus dans un certain rectangle et permet de s'éviter de travailler avec le point à l'infini et les désagréments qui s'y rapportent. On définit un point \tilde{p}_2 comme un point de $\tilde{\Omega}$ au dessus de p_2

4. On demande ensuite à l'algorithme Zipper ou Géodésique de calculer l'application conforme ϕ entre $\tilde{\Omega}$ et \mathbb{D} , normalisée par les conditions $\phi(\tilde{p}_2) = 0$ et $\phi'(\tilde{p}_2) > 0$.

5. Comme on l'a montré plus tôt, il existe une certaine application conforme h , entre $\tilde{\Omega}$ et $\text{Ban}(\log(r), 0)$, telle que h soit un relèvement de f_c . On sait également que toutes les applications conformes de $\tilde{\Omega}$ vers $\text{Ban}(\log(r), 0)$, sont de la forme $h = \psi \circ M_{\theta, w} \circ \phi$, où ψ est une application conforme de \mathbb{D} vers $\text{Ban}(\log(r), 0)$, et $M_{\theta, w}(z) = e^{i\theta} \frac{z-w}{1-z\bar{w}}$. La 5^e étape consiste donc en la détermination des paramètres θ et w , pour que h soit un relèvement de f_c . Notons, que l'on peut trouver explicitement l'application ψ , comme la composition d'une arctangente et de deux applications affines.

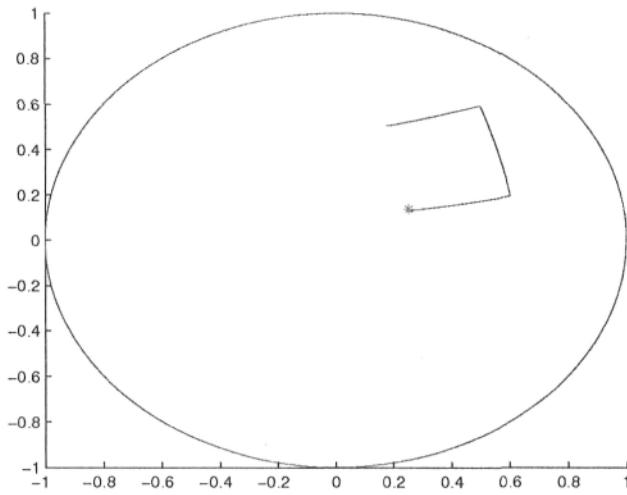


FIG. 5.1 – Le domaine de départ.

6. L'application f_c entre Ω et $A(r, 1)$ se déduit tout simplement de l'étape précédente, en utilisant le fait que $f_c(e^z) = e^{h(z)}$, et ce, quel que soit $z \in \tilde{\Omega}$. Pour connaître la valeur de $f(w)$ pour $w \in \Omega$, il suffit de remarquer que h préserve les fibres, et que $e^{h(\log|w|+i\arg(w))} = e^{h(\log|w|+i\arg(w)+2ik\pi)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, l'absence d'un logarithme continu sur Ω ne pose pas de problème dans le changement de variable $w = e^z$, pour le calcul de f .

La figure 5.1 représente l'image d'une ligne brisée à angles droits, dessinée dans le disque hyperbolique privé d'un certain quadrilatère, par la transformation de Möbius envoyant le point p_1 en 0 et de dérivée positive en p_1 . L'étoile est le point p_2 que l'on veut fixer sur \mathbb{R}^+ . La figure 5.2 représente l'image du domaine précédent par l'application conforme calculée par notre algorithme. On voit bien que les angles droits sont conservés par l'application conforme que l'on a calculée. L'image 5.3 montre le mot "Hello!" entré dans un cercle privé d'un triangle. On distingue sur la figure 5.4, une tache proche du bord supérieur droit du domaine. Le mot commence à devenir lisible sur la figure 5.5, après un agrandissement de la zone concernée. Maintenant on arrive à bien distinguer chacune des lettres du mot sur la figure 5.6. Cela confirme le fait que l'application conserve bien les angles. En effet, si l'application ne conservait pas les angles orientés, la phrase aurait été transformée en une ligne brisée complètement ordinaire. L'orientation des angles

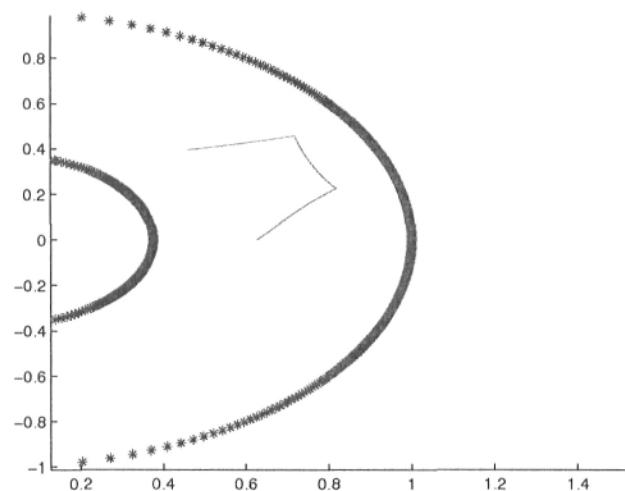


FIG. 5.2 – L'anneau canonique conforme.

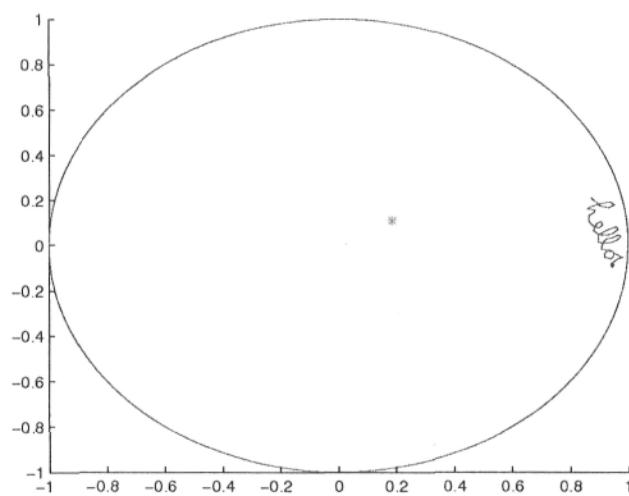


FIG. 5.3 – Möbius de Hello !.

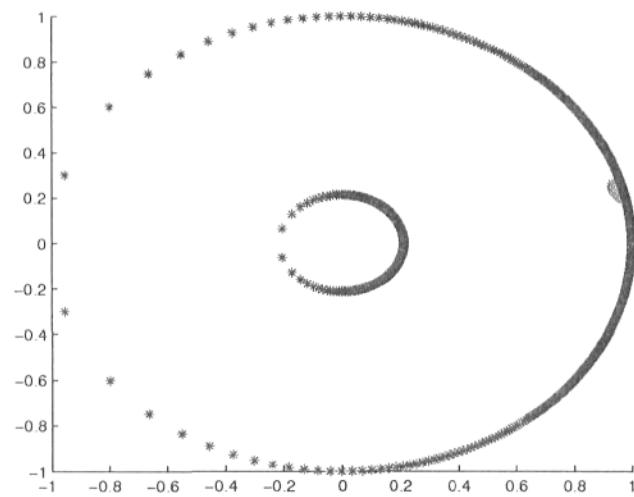


FIG. 5.4 – Zoom 0.

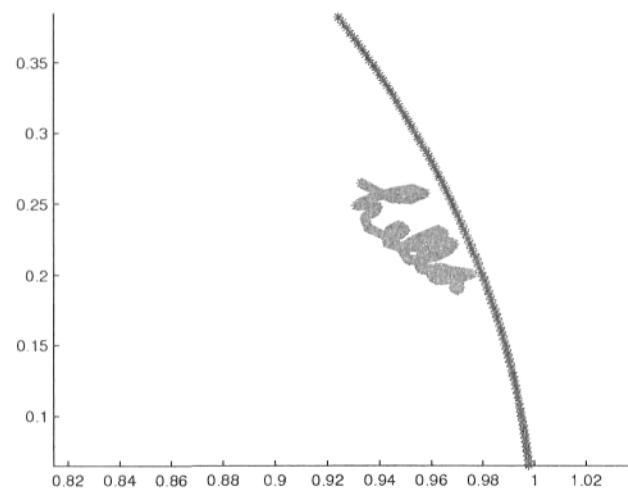


FIG. 5.5 – Zoom 1.

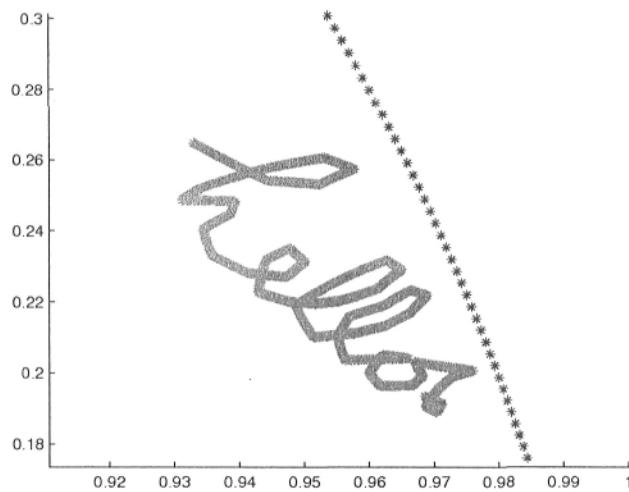


FIG. 5.6 – Zoom 2.

nous permet de lire la phrase sans utilisation de miroir. La version de l'algorithme que j'ai codée est limitée sur plusieurs points :

- Tout d'abord, le programme communique avec l'algorithme original de Marshall qui a ses propres restrictions. Notamment, l'utilisateur ne peut entrer qu'un domaine de Jordan de \mathbb{C} , ce qui est assez contraignant. De plus, il faut préciser à l'algorithme un point à l'intérieur du domaine.
- Cette restriction limite alors le fait que le trou du domaine que l'on va entrer, doit également être une courbe de Jordan. En effet, on prend le revêtement exponentiel de notre domaine pour ensuite le donner au programme Zipper. Il doit donc respecter les exigences imposées par ce dernier.
- Toujours dans le même ordre d'idée, l'algorithme de Marshall ne permet d'évaluer la fonction calculée que sur une courbe continue, ce qui impose à notre algorithme d'en faire de même.
- La toute première version de l'algorithme prenait en entrée un domaine de Jordan quelconque dans lequel on entrait un autre domaine de Jordan qui allait jouer le rôle du trou. Cette version est la plus générale et pas tellement difficile à mettre en oeuvre. Cependant, il faut lui appliquer deux fois l'algorithme Zipper, ce qui ralentit considérablement le temps d'exécution. De plus, à chaque étape, des points

d'interpolation étaient ajoutés. Les algorithmes communiquant plusieurs fois, le temps d'exécution s'en trouve alors ralenti de nouveau. De plus, cela n'ajoute rien à la précision et crée des instabilités dues au fait que certains points étaient beaucoup trop proches les uns des autres. La version actuelle demande à l'utilisateur d'entrer une courbe de Jordan dans le disque hyperbolique unité pour éviter ce genre de problèmes, ce qui fait perdre en généralité, mais augmente considérablement la vitesse d'exécution.

Evidemment si les restrictions dues à l'algorithme de Marshall sont nombreuses, les avantages le sont également. Notamment, en ce qui concerne la vitesse de calcul. J'ai codé ma propre version de l'algorithme Géodésique avec Matlab, mais le trop grand temps d'exécution et l'impossibilité de travailler avec des nombres d'ordre de grandeurs différent de plus de 10^{16} ont eu raison de mon algorithme. Avec la communication entre l'algorithme orginal, dans toutes les simulations réalisées, l'algorithme travaillait avec un nombre de points variant de 600 à 8000, pour un temps d'exécution maximal de 20 secondes, quand le temps d'exécution de l'algorithme Géodésique codé en matlab prenait plusieurs minutes pour seulement 3000 points d'interpolation.

Conclusion

Ce mémoire montre comment on peut reprendre des algorithmes existants dans le cas d'une simple connectivité, pour les faire travailler dans le cas d'une double connectivité. Si nous avons essentiellement travaillé avec deux algorithmes particuliers, il faut bien voir qu'il n'y a aucune raison de se limiter aux algorithmes présentés au premier chapitre, puisque la théorie développée est indépendante de la façon dont les applications sont calculées. En effet, l'algorithme décrit au dernier chapitre travaille avec le revêtement universel du domaine Ω étudié. Notamment, celui-ci est simplement connexe et distinct du plan complexe. Tout algorithme de calcul d'applications conforme entre deux domaines simplement connexes distincts du plan, peut alors s'appliquer. On peut alors calculer numériquement, les applications conformes entre le revêtement universel de Ω , et de son anneau conforme A . Ceci permet, comme on l'a constaté au quatrième chapitre, de calculer l'application conforme entre Ω et A .

Cependant, si ce mémoire répond entièrement au problème initial, il soulève également plusieurs questions. En effet, on a vu dans le troisième chapitre, un théorème de Tsuji, nous indiquant que module et capacité hyperbolique sont des concepts intimement liés. Notamment, qu'en est-il lorsque la connectivité est de 3 ? Il est très probable qu'il existe un lien entre la capacité hyperbolique des deux trous du domaine, et le module du domaine triplement connexe. Peut-on alors récursivement utiliser l'algorithme décrit à la fin du dernier chapitre, pour calculer ce module et/ou les applications conformes entre deux domaines triplement connexes ? Sinon, il est clair que la théorie du quatrième chapitre peut se généraliser au cas d'une connectivité quelconque, mais peut-on alors

déterminer simplement des revêtements universels intéressants pour y effectuer nos calculs ?

Dans le troisième chapitre, il est question de l'existence de mesures qui minimisent l'énergie et l'énergie hyperbolique sur les ensembles compact. Dans le cas particulier d'un compact du disque unité, est-il possible de faire un lien entre mesure d'équilibre et mesure d'équilibre hyperbolique ?

L'algorithme est également incomplet en ce sens qu'il ne permet pas de travailler avec des domaines simplement connexes quelconques. On doit comme on l'a vu, se restreindre aux domaines Ω qui sont des domaines de Jordan « privés » d'un autre domaine de Jordan. Les raisons essentielles étant que l'algorithme Zipper codé par Marshall ne sait ni travailler avec le point à l'infini, ni avec des courbes non simples. Il serait donc intéressant de voir comment améliorer l'algorithme, de sorte à pouvoir travailler avec des domaines doublement connexes quelconques.

Ces questions sont autant de pistes de recherches dont les réponses permettront certainement de mieux comprendre les domaines de \mathbb{C} .

Bibliographie

- [Ahl1] Ahlfors, Lars Valerian, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [Ahl2] Ahlfors, Lars Valerian, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, 1973.
- [And] Anderson, James, *Hyperbolic Geometry*, Springer, 3^e edition, 2005.
- [Beard] Beardon Allan F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, 1983.
- [Conway] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1975.
- [Embr–Tref] Embree, Mark, Trefethen, Lloyd N., *Green's functions for multiply connected domain via conformal mapping*, Siam Review, Volume 41, Issue 4, 2003, p.745–761.
- [Fors] Forster, Otto, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 2e édition, 1991.
- [Mar–Rohd] Marshall Donald E., Rohde Steffen, *Convergence of the Zipper algorithm for conformal mapping*,
<http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html>
- [Mar–Gar] Marshall Donald E., Garnett John B., *Harmonic measure*, Cambridge University Press, 2005.
- [Neha] Nehari Zeev, *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, 1952.
- [Pom] Pommerenke, Christian, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, 1992.
- [Ran] Ransford, Thomas J., *Pontential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995.

- [Rud] Rudin, Walter, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 3e édition, 1998.
- [Sprin] Springer, George, *Riemann Surfaces*, Chelsea Publishing Company, 1981.
- [Tsu1] Tsuji, M., *Potential theory in modern function theory*, Chelsea Pub. Co. 1975.
- [Tsu2] Tsuji, M., *Some metrical theorems on Fuchsian groups*, Jap. J. Math. 19 (1947), 483–516.