Tit's alternative for $SL_2(\mathbb{R})$

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ $\quad fp(\alpha) = \{x, \ \alpha x = x\}$

- α hyperbolic $\# fp = 2$ et $fp(\alpha) \subset \mathbb{R} \cup \infty$
- α parabolic $\# fp = 1$ et $fp(\alpha) \subset \mathbb{R} \cup \infty$
- α elliptic $\# fp = 1$ et $fp(\alpha) \subset \mathbb{H}$

Sous gpe soluble (triangulaire sup)

$$\mathrm{stab}(\infty) = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} z = a/d \, z + b$$

$\alpha, \beta \in \mathrm{stab}(\infty) \Rightarrow [\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ est une translation

Facile à voir $\Gamma < \mathrm{stab}(\infty) \not\simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ car il y a des relations

$[\alpha, \beta], [\alpha, \gamma]$ commute $\forall \alpha, \beta, \gamma$

Def $x \in \mathbb{R} \cup \infty$ pt fixe global ssi $\alpha(x) = x \ \forall x \in \Gamma$

ex ∞ = pt fixe global pour $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$

(Difficile)

Lemme Si $\Gamma < SL_2(\mathbb{R})$ n'admet pas de pt fixe global alors $\exists \ \alpha, \beta \in \Gamma$ hyperbolic

$$fp(\alpha) \cap fp(\beta) = \emptyset$$

Lemme avec $\hat{m}$ hypothese $\exists \ m, n \geq 1$, $\langle \alpha^m, \beta^n \rangle$ Schottky

$\exists$ demi cercles 2 à 2 disjoints $\quad C_1, C_2 \quad \alpha^m C_1 = C_2$
$\quad C_1', C_2' \quad \beta^m C_1' = C_2'$ $\Rightarrow$ on peut jouer au ping-pong !