Groupe de lecture

"Pouvez-vous entendre la forme d'un réseau?"

Introduction :

. Le problème que l'on va étudier est issu de la physique : à partir du son émis par un tambour, peut-on reconstituer la forme du tambour ? "Le son" réfère ici aux fréquences propres du tambour. Ces fréquences sont obtenues comme valeurs propres du Laplacien avec des conditions de Dirichlet nulles aux bords (équation vérifiée par la hauteur de la membrane)

. On peut se poser cette question dans un cas plus général, par exemple pour les variétés Riemanniennes

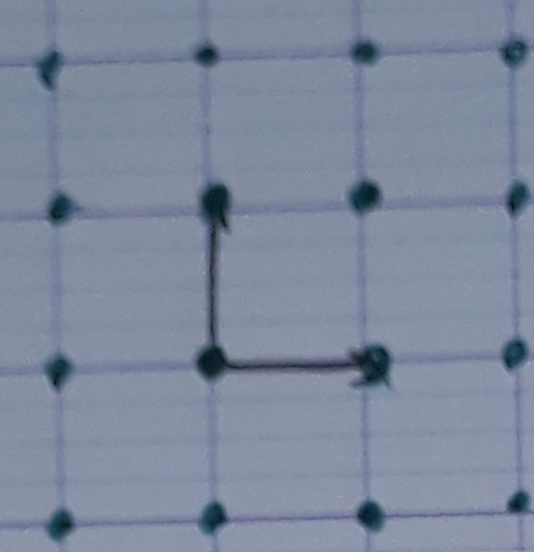
. Ce problème a initialement été soulevé en 1966 par Mark Kac. John Milnor a peu après donné un contre exemple en dimension 16.

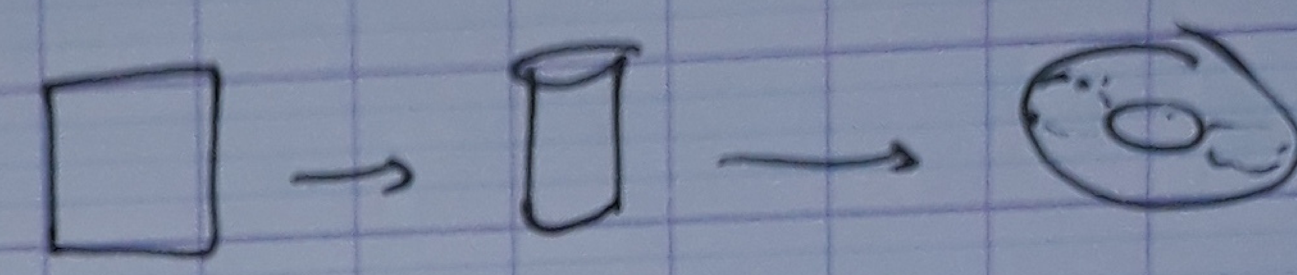
Le rapport avec les réseaux :

Un réseau R dans $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs de base. En quotientant $\mathbb{R}^n$ par le réseau R, on obtient une variété Riemannienne.

pour $n=2$ et le réseau $\mathbb{Z}^2$:

On obtient un tore





Dans ce cas, le spectre du quotient ne dépend que du nombre de vecteurs de chaque longueur, c'est-à-dire de sa fonction thêta :

$$\Theta_R(q) = \sum_\ell a_\ell q^\ell$$

où $a_\ell = \left|\{ v \in R \,/\, \|v\|^2 = \ell \}\right|$

On va maintenant s'intéresser à deux cas particuliers en dimension 6 et 2.

Le cas de la dimension 6

On s'intéresse à des <u>codes</u>, c'est-à-dire des ensembles de suites de longueur 6 constituées d'entiers modulo 2.

On appelle <u>poids</u> le nombre de 1 dans un <u>mot</u>, ie dans une suite.

Soient $C_1 = \{000000, 110000, 001100, 000011, 001111, 110011, 111100, 111111\}$ et $C_2 = \{000000, 101000, 001010, 100010, 010111, 110101, 011101, 111111\}$

C_1	C_2	
000000	000000	i
110000	101000	ii
001100	001010	iii
000011	100010	iv
001111	010111	v
110011	110101	vi
111100	011101	vii
111111	111111	viii

- Remarquons que ces ~~c~~codes sont munis d'une structure de groupes, en tant que sous-groupes de $(\mathbb{F}_2^6, +, 000000)$

- Les codes ont la même distribution de poids : un élément de poids 0, trois éléments de poids 2, trois éléments de poids 4, un élément de poids 6.

- Il n'existe pas d'isomorphisme préservant le poids entre C_1 et C_2

Supposons qu'il ~~y~~ en existe un, notons le ϕ

alors $\phi(110000 + 001100 + 000011) = \phi(111111)$

$$\begin{aligned}
&\phi(110000 + 001100 + 000011) \\
&= \phi(110000) + \phi(001100) + \phi(000011) \\
&= 101000 + 001010 + 100010 \\
&= 000000
\end{aligned}$$

absurde

On cherche alors à créer des réseaux à partir de ces deux codes.
On note pour a entier, $\bar{a}$ sa réduction modulo 2.
On pose alors pour $i \in \{1,2\}$;

$$L_i = \{ a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbb{Z}^6, \; \bar{a} = (\bar{a_1}, \bar{a_2}, \bar{a_3}, \bar{a_4}, \bar{a_5}, \bar{a_6}) \in C_i \}$$

Si $a, b \in L_i$, $\bar{a}, \bar{b} \in C_i$
donc $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \in C_i$
et $a + b \in L_i$.
Donc L_i est bien un réseau.

Remarquons tout d'abord que L_1 est un réseau particulier. Il est généré par ses vecteurs les plus petits, c'est à dire :
$v_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$
$v_2 = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$
$v_3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$
$v_4 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$
$v_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$
$v_6 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)$
et leurs opposés.
En effet si $(a_i)_{i \in [\![1,6]\!]} \in L_1$, $(\bar{a_i}) \in C_1$
donc $\bar{a_1} = \bar{a_2}$ par exemple
On note alors $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ et $b_2 = a_1 - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$
De même on construit b_3, b_4, b_5 et b_6
et on a $\sum_{i=1}^{6} b_i v_i = a$.

Ce qui est remarquable ici est que les v_i sont deux à deux orthogonaux : L_1 est donc une copie du réseau cubique en 6 dimensions.

De manière analogue, on obtient dans L_2 les plus petits vecteurs suivants :

$w_1 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$

$w_2 = (1, 0, -1, 0, 0, 0)$

$w_3 = (0, 0, 1, 0, 1, 0)$

$w_4 = (0, 0, 1, 0, -1, 0)$

$w_5 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$

$w_6 = (1, 0, 0, 0, -1, 0)$

S'il existait une isométrie φ entre L_1 et L_2, tout vecteur de norme 2 seraient envoyés sur d'autres vecteurs de norme 2 : les v_i seraient envoyés sur les w_i. Or φ étant isométrique, elle préserverait l'orthogonalité. Mais $(w_2, w_3) = -1 \neq 0$: w_2 et w_3 ne sont pas orthogonaux. Donc par l'absurde L_1 et L_2 ne sont pas isométriques, ils ne représentent pas le "même tambour".

On pose $f : C_1 \to C_2$

$(0,0,0,0,0,0) \to (0,0,0,0,0,0)$

$(1,1,0,0,0,0) \to (1,0,1,0,0,0)$

$(0,0,1,1,0,0) \to (0,0,1,0,1,0)$

$(0,0,0,0,1,1) \to (1,0,0,0,1,0)$

$(1,1,1,1,0,0) \to (0,1,1,1,0,1)$

$(1,1,0,0,1,1) \to (1,1,0,1,0,1)$

$(0,0,1,1,1,1) \to (0,1,0,1,1,1)$

$(1,1,1,1,1,1) \to (1,1,1,1,1,1)$

f s'obtient de la manière suivante :

- soit toutes les coordonnées sont de même parité et on pose $f(a) = a$
- soit, par déf de C_1, il existe deux coordonnées consécutives de même parité qui sont les seules de cette parité, on échange alors la seconde avec celle qui la suit dans l'ordre cyclique.

On peut définir de la même manière $\tilde{f}$ une fonction entre L_1 et L_2.

En effet si $a \in L_1$ $\bar{a} \in C_1$ et $f(\bar{a}) \in C_2$.

Or au vu de la définition de f et $\tilde{f}$, on a : $\overline{\tilde{f}(a)} = f(\bar{a})$ donc $\tilde{f}(a) \in L_2$.

- f est bijective donc on peut définir f^{-1}.

Comme f, f^{-1} échangera au plus deux coordonnées d'un code, on définit aisément $\tilde{f}^{-1}$ à partir de f^{-1} et de $\overline{\tilde{f}^{-1}(a)} = f^{-1}(\bar{a})$ pour $a \in \mathbb{Z}^6$ (sic).

On a donc $\tilde{f}$ bijective

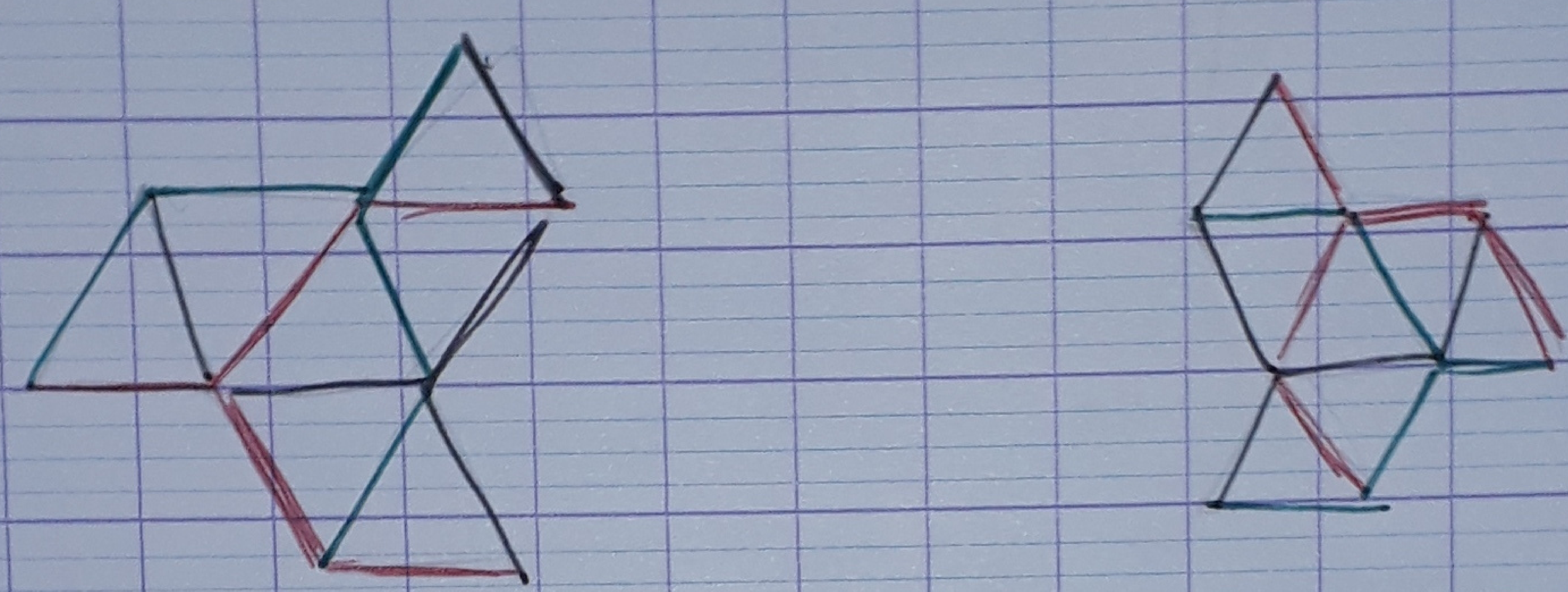
- Enfin, $\tilde{f}$ ne fait qu'échanger au plus deux coordonnées donc elle conserve les distances.

On en conclut que $\tilde{f}$ induit une bijection entre les vecteurs de longueur n de L_1 (pour $n \in \mathbb{N}$) et ceux de L_2. Donc L_1 et L_2 ont le même nombre de vecteurs de longueur n. Ainsi leur fonction Θ est la même. $\mathbb{R}^6/L_1$ et $\mathbb{R}^6/L_2$ vont donc "émettre le même son" ! $\square$

(ils seront isospectraux).

Le cas de la dimension 2

On va ici montrer qu'il existe deux régions polygonales du plan <u>non congruentes</u> - c'est-à-dire ne pouvant être obtenues l'une à partir de l'autre par des rotations et translations - possédant le même spectre pour le laplacien.

(a)  (b)

On représente des triangles équilatéraux par confort, mais il faut imaginer des triangles scalènes.

On va à présent démontrer un principe de réflexion qui nous sera utile.

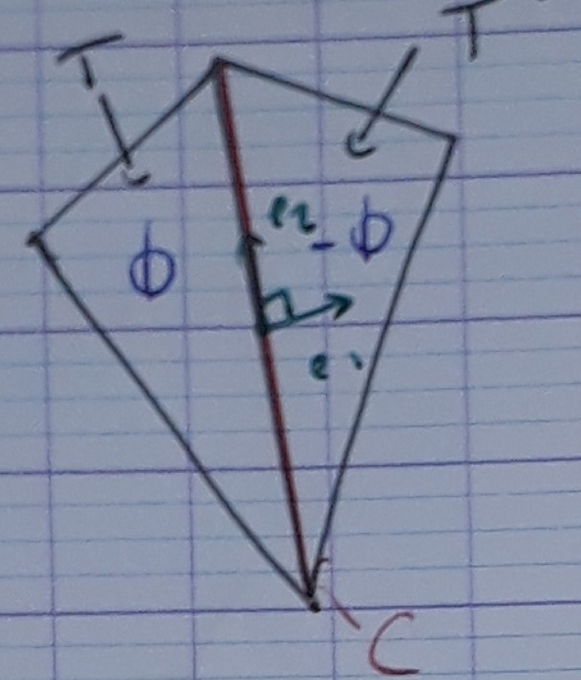
<u>Lemme</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit T un triangle (ouvert) et C un côté du triangle.
Soit $\phi \in \mathcal{C}^2(T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{T})$ vérifiant $\begin{cases} \Delta \phi = \lambda \phi & \text{sur } T \\ \phi = 0 & \text{sur } C \end{cases}$

Alors on peut prolonger ϕ au symétrique de T par rapport à C par :

$$\varphi : \begin{array}{|l} T \cup T' \cup C \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad v \longmapsto \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v \in T \\ -\phi(\bar{v}) & \text{si } v \in T' \\ 0 & \text{si } v \in C \end{cases} \end{array}$$

en notant $\bar{v}$ le symétrique de v par rapport à C



et alors $\underline{\Delta\varphi = \lambda\varphi}$ sur $T \cup T' \cup C$

<u>démonstration</u> :

- si $v \in T$, on a $\boxed{\Delta\varphi(v) = \Delta\phi(v) = \lambda\phi(v) = \lambda\varphi(v)}$

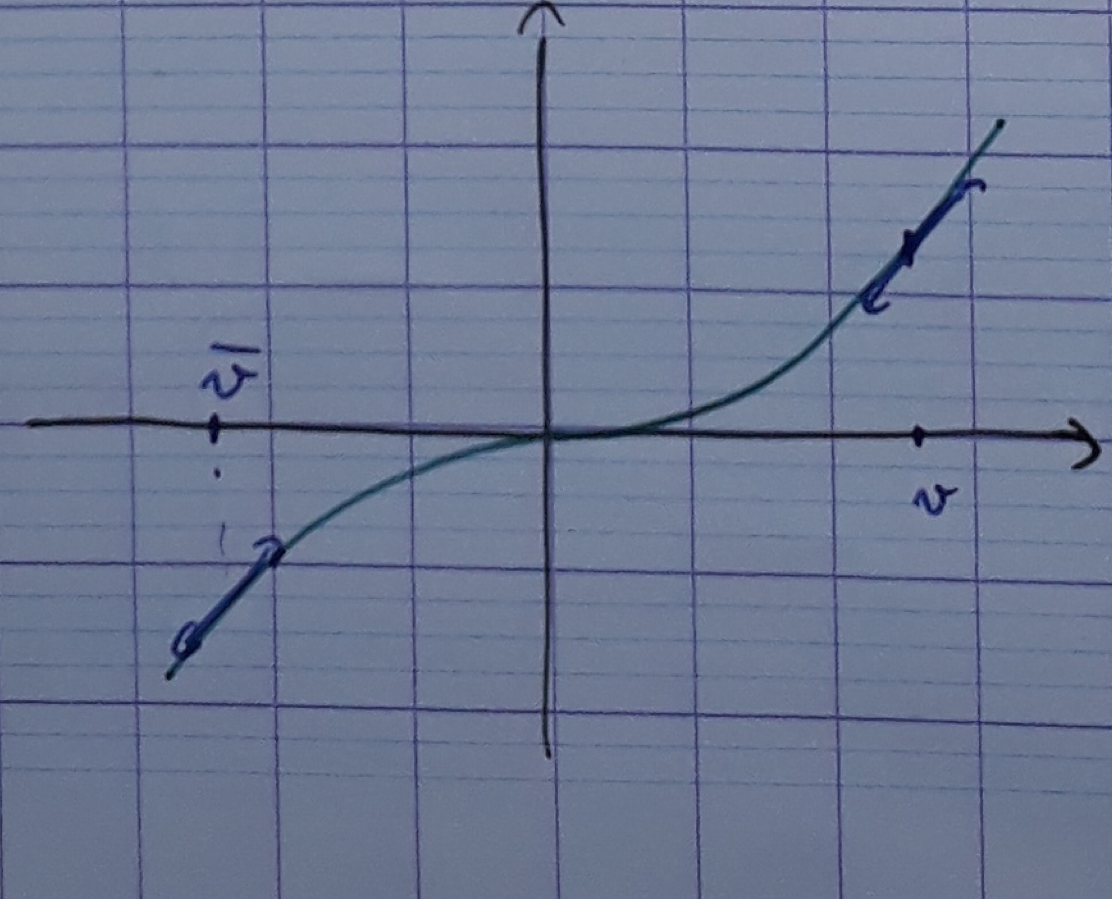
- si $v \in T'$,

$$\partial_1 \varphi(v) = -\partial_1 \phi(\bar{v})$$
$$\text{donc } \partial_1^2 \varphi(v) = -\partial_1^2 \phi(\bar{v})$$

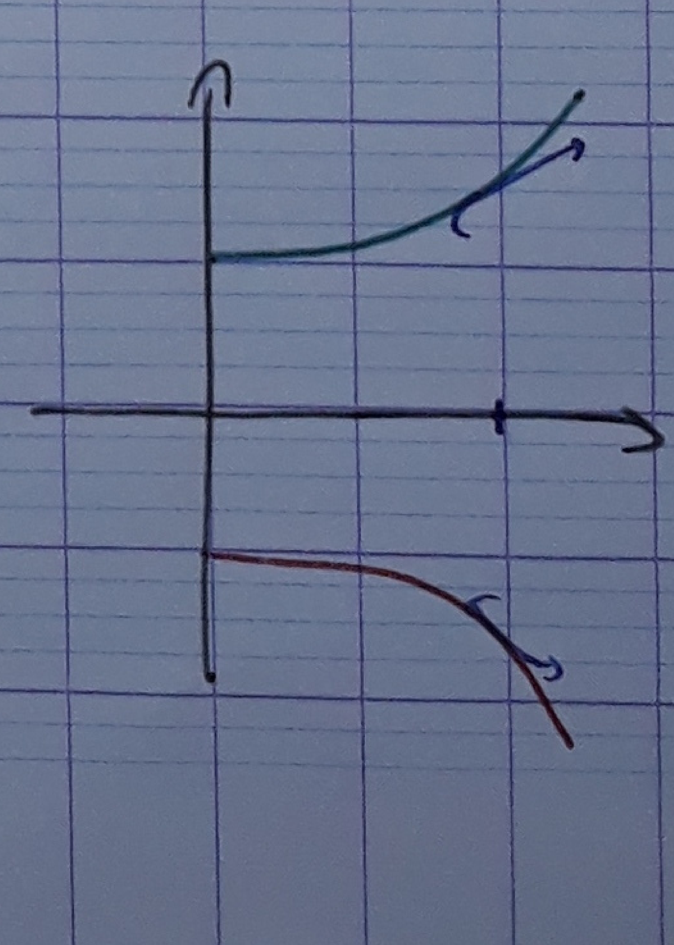
$$\partial_2 \varphi(v) = -\partial_2 \phi(\bar{v})$$
$$\text{donc } \partial_2^2 \varphi(v) = -\partial_2^2 \phi(\bar{v})$$

ainsi $\boxed{\Delta\varphi(v) = -\Delta\phi(\bar{v}) = -\lambda\phi(\bar{v}) = \lambda\varphi(v)}$

i)



ii)



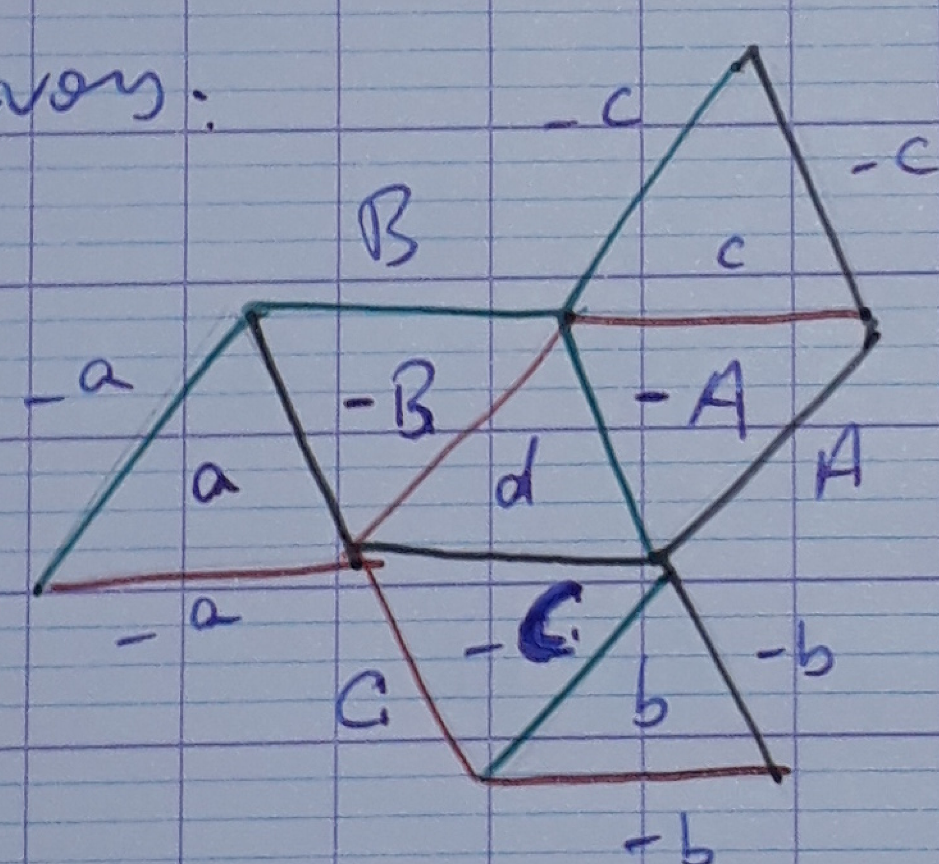
enfin, si $v \in C$,

- $\varphi(v) = 0$
- $\partial_2^2 \varphi(v) = 0$
- $\partial_1^2 \varphi(v) = 0$

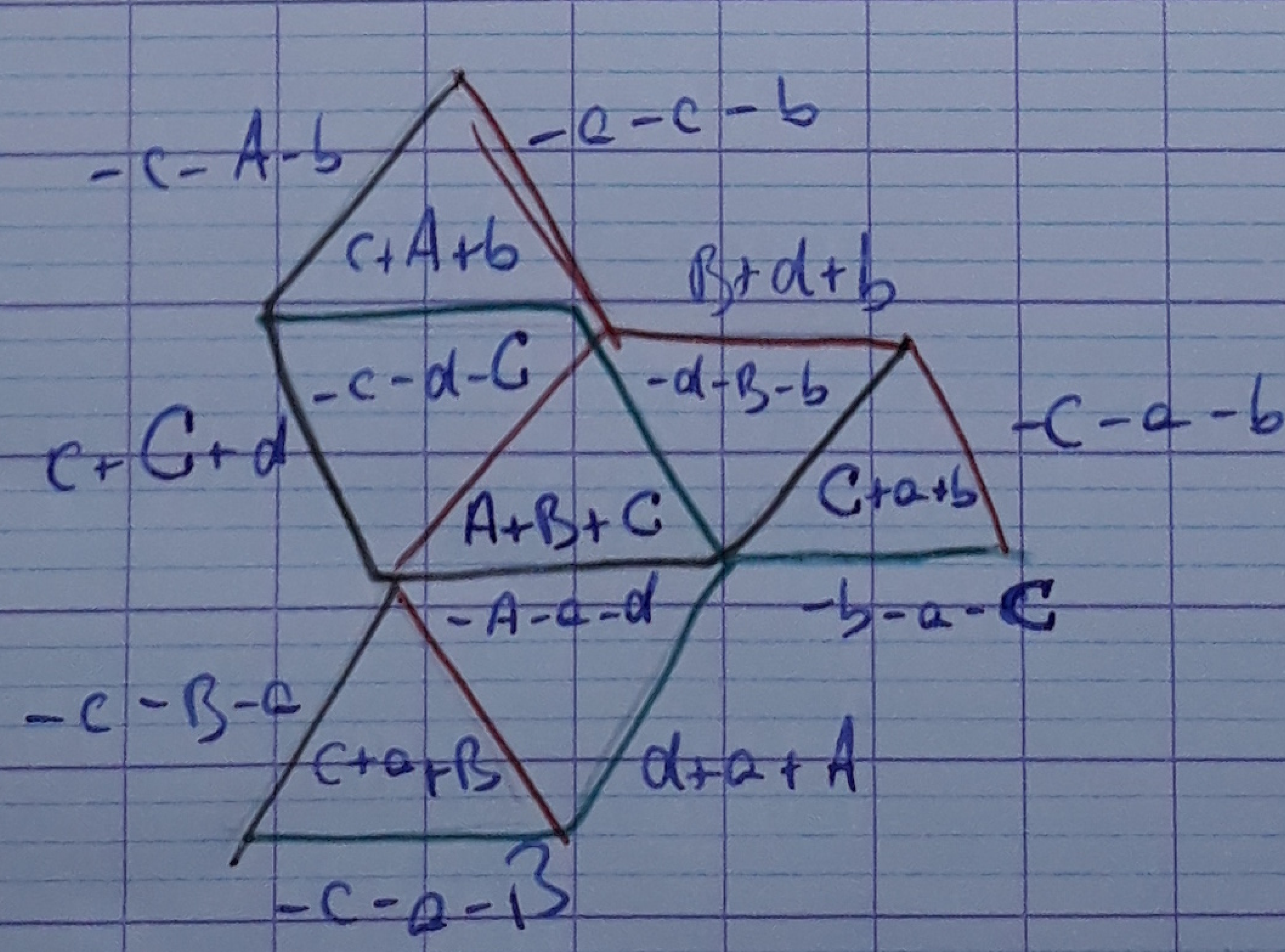
donc $\boxed{\Delta \varphi(v) = 0 = \lambda \varphi(v)}$ ▨

On part d'une fonction propre ϕ pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ sur (2)

Ecrivons :



et vérifions qu'on a une solution donnée par :



On note $-A$, $-B$, $-C$, a, b, c et d les restrictions de ϕ aux différents triangles qui composent la figure (a).

Notons que les raccordements à travers les différents segments dans la figure précédente sont $\mathcal{C}^2$, car ϕ l'est. Par le lemme, les raccordements avec a, b, $-c$, A, B et C sont de même $\mathcal{C}^2$.

Le but du second dessin est de transposer à partir des restrictions de ϕ une fonction vecteur propre pour λ sur (b). Pour montrer que celle qui est définie convient, il faut :

– vérifier que tous les raccordements sont continus et $\mathcal{C}^2$. Par exemple, dans la figure initiale, à ~~un~~ travers un segment rouge, $-A$ se prolonge en $+c$, $-B$ en $+d$ et C en $-C$. Donc $A+B+C$ se prolonge bien en $-C-c-d$.

– vérifier que la fonction s'annule au bord. Par exemple, b s'annule sur un segment rouge et c coïncide avec $-A$ donc $b+c+A$ s'annule bien sur le segment rouge.

On vérifie ainsi que l'on a donc une fonction $\tilde{\phi}$ qui est v.p. de λ sur (b).

De plus, $F : \phi \to \tilde{\phi}$ est ~~bijective~~ injective. En effet, on peut retrouver les différentes restrictions de ϕ à partir de celle de $\tilde{\phi}$.

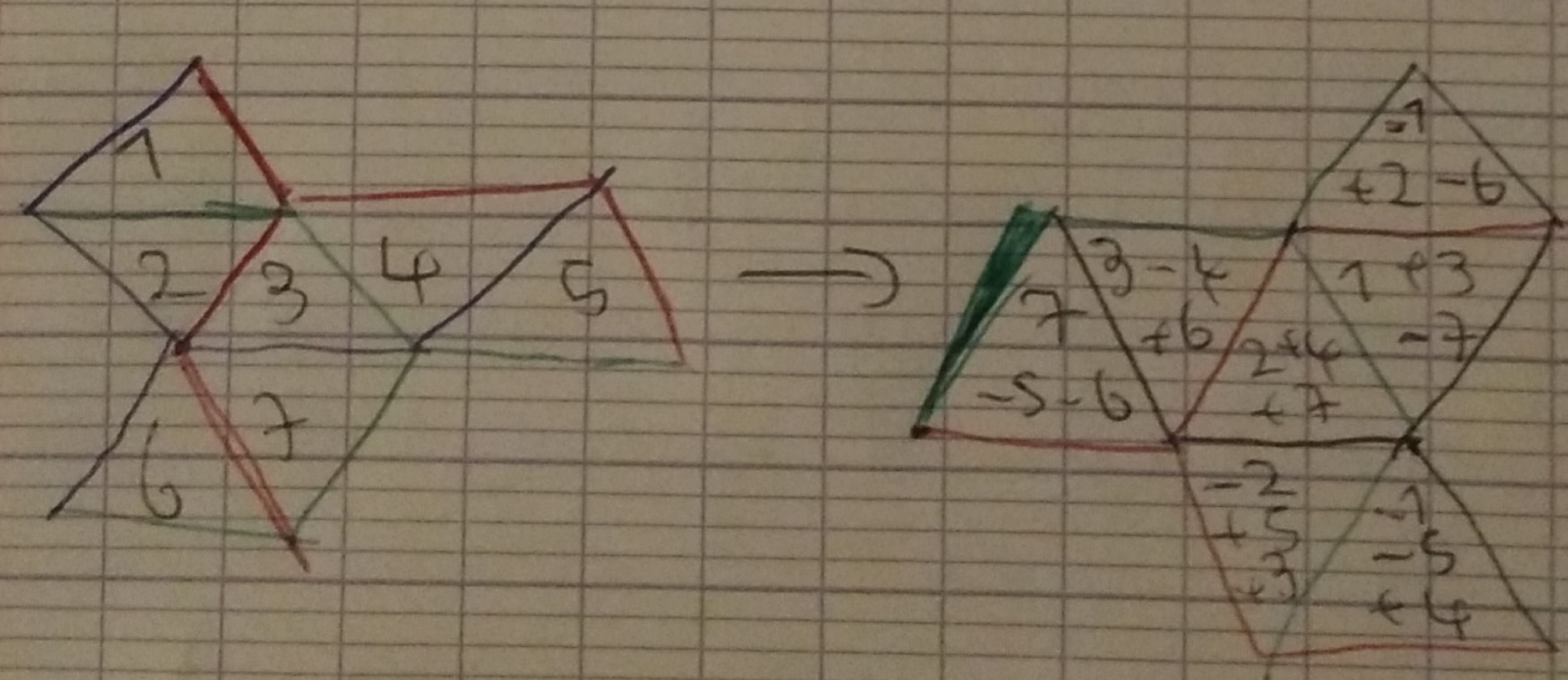
Par exemple

$$A = \frac{1}{6}\Big(2(A+B+C) + 2(A+b+c) - 2(-A-a-d) + (-c-d-C) + (-d-B-b) - (C+a+b) - (c+a+B)\Big)$$

De même, on retrouve B et C, à partir de A, B et C on retrouve a, b et c puis d. Ainsi, on peut retrouver ϕ à partir de $\tilde{\Phi}$ et F est injective.

Par symétrie, on peut trouver $G : E_{(b)}(\lambda) \to E_{(a)}(\lambda)$ qui, par des arguments similaires, établit une injection de l'espace propre associé à λ de (b) dans celui de (a), et les deux espaces seront donc de même dimension.

Par exemple, on peut utiliser les figures suivantes.



On a établi que les deux tambours ont le même spectre : ils produisent le même son.