Contrôle des connaissances session 2

Exercice 1. Approximation de l'exponentielle
On interpole la fonction exponentielle sur $[-1,1]$ en $n+1$ points $x_0, ..., x_n$ de $[-1,1]$.

1. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation en x fonction de x, n et de $x_0, ..., x_n$.
2. On choisit $x_0, ..., x_n$ en les racines du polynôme de Tchebyshev $T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$. Déterminer n_0 pour assurer une erreur absolue inférieure à `1e-10` sur $[-1,1]$. On ne demande pas le plus petite valeur de n_0 qui convient. Même question pour avoir une erreur relative inférieure à `1e-10`.
3. Dt́erminer n en fonction du n_0 de la question précédente pour avoir un même majorant de l'erreur avec des points $x_0, ..., x_n$ équidistribués sur $[-1,1]$.
4. Quelle valeur de n faut-il choisir pour obtenir la même précision en approchant l'exponentielle par son développement de Taylor à l'ordre n en $x=0$?

1. La dérivée $n+1$-ième de l'exponentielle est elle-même, elle est majorée par e sur $[-1,1]$ donc :
$$|e^x - P_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$
2. Comme $T_{n+1}(x) = 2^n \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$, on a
$$|e^x - P_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!2^n}$$
qui est plus petit que `1e-10` à partir de $n = 10$. En erreur relative, il faut diviser par e^x, donc il suffit de majorer $e^2/(n+1)!/2^n$, $n = 11$ convient.

3. On note h le pas entre deux x_j successifs ($h = 1/5$ pour $n = 10$). On majore $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ par $h^{n+1}\frac{1}{2}n!$ car on est à distance au plus $h/2$ du plus proche, puis h du deuxième plus proche, puis $2h$ du suivant, etc. Avec le n de la question précédente l'erreur d'interpolation est majorée par $h^{n+1}\frac{1}{2(n+1)}$, ici
$$e^2/5^{11}/2/11 = \texttt{6.9e-9}$$
majoration un peu moins bonne que la précédente mais nécessitant moins de calculs à la machine.
4. Il existe θ entre 0 et x tel que :
$$f(x) = \mathrm{Taylor}_n(x) + e^{\theta}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Le produit des $x - x_k$ est remplacé par x^{n+1}, il suffira donc que $e/(n+1)!$ soit plus petit que `1e-10`, ce qui se produit dès $n = 13$.

Exercice 2. Approximation au sens des moindres carrés
On cherche un polynôme du second degré $P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ approchant le mieux possible au sens des moindres carrés l'exponentielle aux points d'abscisses $t_1 = -1$, $t_2 = -1/2$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1/2$ et $t_5 = 1$.

1. On pose $x = (\gamma, \beta, \alpha)$ et b le vecteur de composantes $(e^{t_1}, ..., e^{t_5})$ le problème revient alors à minimiser $\|Ax - b\|_2$. Déterminer la matrice A en fonction des t_i.
2. Comment peut on résoudre ce problème en utilisant des outils d'algèbre linéaire ?

1. `A:=tran(tran(vandermonde([-1,-1/2,0,1/2,1]))[0..2])`
2. On résoud le système normal associé $A^T A = A^T b$. On obtient un résultat plus précis avec la décomposition QR de A. On trouve `[0.994415410173,1.14859907711,0.547734459671]`.

Exercice 3. Transformée de Fourier rapide

Pour tout entier N, on appelle *transformée de Fourier discrète* l'application de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ qui envoie le N-uplet $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ sur le N-uplet $(X_0, \ldots, X_{N-1})$ défini par

$$\forall j \in \{0, \ldots, N-1\},\ X_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi}{N} jk}.$$

De façon équivalente, on a

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $\omega = \omega_N = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$. On notera $M_N = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1 \leq j,k \leq N}$ la matrice ci-dessus.

1. Combien d'opérations (additions et multiplications de nombres complexes) faut-il réaliser pour calculer une transformée de Fourier discrète avec les formules ci-dessus ?
2. Montrer que $M_N^* M_N = N\, I_N$ où M_N^* est la transposée de la conjuguée de M_N. En déduire la norme et le conditionnement de M_N pour la norme subordonnée à la norme hermitienne de $\mathbb{C}^N$ (on rapelle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et pour tout $v \in \mathbb{C}^N$, $\|Av\| = \sqrt{\langle v | A^* A v \rangle}$).
3. On suppose que le N-uplet $x = (x_0, \ldots, x_{N-1})$ est connue avec une imprécision Δx. On note ΔX l'imprécision sur sa transformée $X = (X_0, \ldots, X_{N-1})$. Montrer que (pour la norme hermitienne) $\|\Delta X\| = \sqrt{N} \|\Delta x\|$ et $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$.

Pour accélérer les calculs, particulièrement dans le cas $N = 2^n$, l'algorithme de Cooley-Tukey utilise une stratégie de type « diviser pour régner ». On commence par calculer (récursivement) deux transformées de Fourier discrètes de taille moitié : le $N/2$-uplet $(A_0, \ldots, A_{N/2-1})$, transformée des termes d'indice pair $(x_0, x_2, \ldots, x_{N-2})$, et le $N/2$-uplet $(B_0, \ldots, B_{N/2-1})$, transformée des termes d'indice impair $(x_1, x_3, \ldots, x_{N-1})$.

4. Montrer que pout tout $j \in \{0, \ldots, N-1\}$,
$$X_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k}\, e^{-\frac{4i\pi}{N}jk} + e^{-\frac{2i\pi}{N}j} \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{2k+1}\, e^{-\frac{4i\pi}{N}jk}.$$
5. En déduire que pour tout $j \in \{0, \ldots, N/2-1\}$, $X_j = A_j + e^{-\frac{2i\pi}{N}j} B_j$ et $X_{j+N/2} = A_j - e^{-\frac{2i\pi}{N}j} B_j$ (on fera attention que A_j et B_j ne sont a priori définis que pour $0 \leq j \leq N/2-1$).
6. En déduire une méthode de calcul de la transformée de Fourier discrète utilisant seulement $O(n2^n) = O(N \log(N))$ additions et multiplications de nombres complexes.

Question bonus : Une multiplication de deux nombres complexes stockés sous forme algébrique revient à faire 4 multiplications réelles, à moins que l'un des facteurs ne soit réel ou imaginaire pur. Pour simplifier les calculs, Rader et Brenner ont proposé de remplacer $(B_0, \ldots, B_{N/2-1})$ par $(C_0, \ldots, C_{N/2-1})$, transformée de Fourier discrète de $(x_1 - x_{N-1} - Q, x_3 - x_1 - Q, \ldots, x_{N-1} - x_{N-3} - Q)$ avec $Q = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k+1}$. On obtient alors les formules suivantes, que l'on ne demande pas de justifier :
$$X_0 = A_0 + C_0, \quad X_{N/2} = A_0 - C_0, \quad \text{et pour tout } j \neq 0, N/2,$$
$$X_j = A_j + \frac{C_j}{2i \sin(\frac{2\pi}{N} j)}$$
7. Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas satisfaisante en terme de stabilité numérique.

1. Si on suppose que M_N a été calculée auparavant, il faut N multiplications et $N-1$ additions par composante de X, donc $O(N^2)$ opérations.

2.

$$(M_N)_{j,k} = \omega^{(j-1)(k-1)}, \quad (M_N^*)_{j,k} = \overline{\omega}^{(j-1)(k-1)} = \omega^{-(j-1)(k-1)}$$

donc

$$\begin{aligned}
(M_N^* M_N)_{j,l} &= \sum_{k=0}^{N-1} (M_N^*)_{j,k} (M_N)_{k,l} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-(j-1)(k-1)} \omega^{(k-1)(l-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{(l-j)(k-1)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\omega^{(l-j)}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1-\omega^{(l-j)N}}{1-\omega^{(l-j)}} \text{ (pour } j \neq l) \\
&= 0 \text{ si } j \neq l
\end{aligned}$$

Si $j = l$, on obtient N Donc $\|M_N v\|^2 = N\|v\|^2$, la norme de M_N est $\sqrt{N}$ et le conditionnement est 1.

3. C'est une conséquence immédiate de $\|M_N v\|^2 = N\|v\|^2$ et de $\Delta X = M_N \Delta x$.

4. On remplace ω par sa valeur, on décompose la somme en indices pairs et impairs et on factorise un ω dans la somme d'indices impairs.

5. Pour faire apparaitre les A_j et B_j, lorsque $j \in [0, N/2-1]$, on utilise que ω^2 est une racine primitive 2^{n-1}-ième de 1. Pour les indices j supérieurs, remarquer que $e^{-\frac{2i\pi}{N}(j+N/2)} = -e^{-\frac{2i\pi}{N}j}$ et $e^{-\frac{4i\pi}{N}(j+N/2)k} = e^{-\frac{4i\pi}{N}jk}$.

6. Si on utilise le procédé, le temps de calcul $T(n)$ pour $N = 2^n$ est égal à celui des A_N et B_N et de leur combinaison soit 2 fois

le temps de calcul pour $N = 2^{n-1}$ plus un $O(N)$

$T(n) = 2T(n{-}1){+}C2^n = 2(2T(n{-}2){+}C2^{n-1}){+}C2^n = 2^2T(n{-}2){+}2C2^n =$

$= 2^2(2T(n{-}3){+}C2^{n-2}){+}2C2^n = 2^3T(n{-}3){+}3C2^n = ... = 2^nT(0){+}nC2^n$

ce qui est bien un $O(n2^n)$