L3M, Université Grenoble Alpes
Probabilités et Statistique
2025-2026

Feuille d'exercices de TD n°2
Chaînes de Markov

Exercice n° 1.
On considère une suite de variables aléatoires i.i.d $(Y_i)_{i\geq 1}$ de loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$. Déterminer si les suites suivantes sont des chaînes de Markov. Si c'est le cas, préciser l'espace des états et la matrice de transition.

1. $(X_n)_{n\geq 1}$ où $X_n := \max\{Y_1,\dots,Y_n\}$ est le plus grand chiffre obtenu au cours des n premiers lancers.
2. $(X_n)_{n\geq 2}$ où $X_n := \max\{Y_{n-1},Y_n\}$ est le plus grand nombre obtenu parmi les deux derniers lancers.
3. $(X_n)_{n\geq 0}$ où $X_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{Y_i=6}$ est le nombre de fois où on a obtenu 6 au cours des n premiers lancers.
4. $(X_n)_{n\geq 1}$ où $X_n := \max\{k\in\{1,\dots,n\} \text{ t.q. } Y_k=6\}$ est le numéro du dernier lancer, parmi les n premiers, où on a obtenu un 6, avec la convention (exceptionnelle) que le maximum d'un ensemble vide est 0.

Exercice n° 2.
La marche aléatoire simple sur un graphe est définie comme suit : à chaque instant n, le marcheur est en un sommet du graphe. Pour choisir son emplacement à l'instant $n+1$, il choisit un sommet voisin uniformément au hasard.

1. On considère une marche aléatoire simple sur un graphe constitué simplement de deux sommets reliés entre eux par une arête.
   (a) Déterminer l'ensemble des mesures de probabilité invariantes.
   (b) Déterminer la loi de X_n. La loi de X_n converge-t-elle ?
2. On considère une marche aléatoire simple sur un triangle.
   (a) Déterminer l'ensemble des mesures de probabilité invariantes.
   (b) Déterminer la loi de X_n. La loi de X_n converge-t-elle ?

Exercice n° 3. D'après Sesamaths Terminale spécialité Mathématiques 2020, page 209
Dans un lycée, la salle de reprographie contient deux photocopieuses. On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule photocopieuse en une nuit. On fait les hypothèses de modélisation suivante : dans la journée, chaque photocopieuse qui est en marche au début de la journée tombe en panne avec une probabilité $1/3$, indépendamment de l'autre et des historiques de pannes des deux photocopieuses. Lorsque deux photocopieuses sont en panne, le réparateur répare l'une d'elle au hasard (uniforme). On note X_n le nombre de photocopieuses encore en panne au matin du n-ième jour.

1. En introduisant I_n, la v.a à valeurs dans $\{0,1\}^2$ représentant les états des deux photocopieuses au matin du n-ième jour, démontrer que I_n est une chaîne de Markov, écrire ses probabilités de transition en dessinant le graphe de la chaîne.
2. Montrer que (X_n) est également une chaîne de Markov, puis

(a) écrire sa matrice de transition et dessiner le graphe de la chaîne.
(b) déterminer la (ou les) mesure(s) de probabilité invariante(s) de cette chaîne.
(c) La loi de X_n converge-t-elle et si oui, vers quelle limite ?

Exercice n° 4. Mesure réversible et chaîne de vie et de mort

1. Si P est un noyau de transition sur un ensemble fini ou dénombrable E et μ une distribution sur E, on dit que μ est réversible [1] par rapport à P ssi pour tous les états i et j dans E, $\mu(i)P(i,j) = \mu(j)P(j,i)$. Montrer que dans ce cas, μ est une distribution invariante pour P.
2. Soient p_i, q_i et r_i, $i \geq 0$, des nombres dans $[0,1]$ tels que $p_i + q_i + r_i = 1$. On considère une chaîne de Markov sur $\{0, \dots, N\}$ définie par le noyau de transition P telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ P(i, i+1) := p_i, \quad P(i, i-1) := q_i, \quad P(i,i) := r_i$$

avec l'hypothèse $p_N = q_0 = 0$. On suppose que $p_i > 0$ si $i \in \{0, \dots, N-1\}$ et $q_i > 0$ si $i \in \{1, \dots, N-1\}$.
   (a) Décrire les classes de communication de la chaîne.
   (b) Montrer que P admet une unique distribution invariante μ, qui est réversible.

Exercice n° 5.
Soient $p \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on suppose que tous les conditionnements sont de probabilité non nulle.

1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov. Combien y a-t-il de classes de communication, quelles sont leurs natures et leurs périodes ?
2. Que valent $\mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 1)$, $\mathbb{P}(X_3 = 1 \,|\, X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2 \,|\, X_0 = 2)$?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_6 = 3 \text{ et } X_5 = 2 \,|\, X_0 = 1 \text{ et } X_4 = 2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 2 \,|\, X_2 = 2 \text{ et } X_0 = 3)$.
5. Dans cette question, on suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer $\mathbb{E}\left[f(X_2)\right]$ pour $f(1) = f(3) = -9$ et $f(2) = 18$.

Exercice n° 6.
On considère une chaîne de Markov dont l'espace des états est $\{1, \dots, 6\}$ et la matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

On note $C = \{4,5,6\}$.

1. On pourrait aussi bien dire que P est réversible par rapport à μ, ou que le couple (P, μ) est réversible.

1. Dessiner la matrice de transition sous forme de graphe (orienté, avec les probabilités de transition sur les arêtes).
2. Décomposer l'espace d'états en classes de communication.
3. En décomposant l'univers en fonction du premier pas de la chaîne et en utilisant la propriété de Markov faible, calculer la probabilité d'absorption par 1 et par C en partant de $x = 2$ et de $x = 3$.
4. Calculer le temps moyen d'absorption partant de 2 et de 3.
5. Montrer que la chaîne restreinte à C admet une unique loi invariante (μ_4, μ_5, μ_6).
6. Déterminer l'ensemble des lois invariantes pour la chaîne.

Exercice n° 7.
On reprend la chaîne de l'exercice 5.

1. Déterminer les distributions invariantes pour la chaîne.
2. La loi de X_n converge-t-elle lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, vers quoi ?
3. On suppose que la chaîne part de $X_0 = 1$. Combien de pas en moyenne fera la chaîne avant de revenir en 1 ?

Exercice n° 8. Modèle génétique de Wright-Fisher
On étudie l'évolution au cours du temps d'une population de taille constante N constituée d'individus de deux types, A et B. Les types des individus de la $(n+1)$-ième génération sont obtenus par un tirage binomial dans la population de la génération précédente : s'il y a i individus de type A dans cette génération, le nombre d'individus de type A dans la $(n+1)$-ième génération suit la loi binomiale de paramètres N et i/N.

Pour modéliser cette évolution, on introduit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états l'intervalle d'entiers $E = \{0, 1, \ldots, N\}$, l'état X_n du système à l'instant n étant le nombre d'individus de type A dans la n-ième génération. L'état initial X_0 est le nombre x d'individus de type A de la génération initiale, et la matrice de transition P est la matrice $(N+1) \times (N+1)$ de coefficients :

$$p(i,j) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j} \qquad 0 \leq i, j \leq N\,.$$

1. Déterminer les classes de communication, leur nature et leur période.
2. Montrer que $\mathbb{E}[X_{t+1} | (X_0, \ldots, X_t) = (x_0, \ldots, x_t)] = x_t$, et en déduire que $t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ est constante.
3. Déterminer $\mathbb{P}_x(X_\infty = 0)$ et $\mathbb{P}_x(X_\infty = N)$ pour tout $x \in E$, où $\mathbb{P}_x$ désigne la probabilité pour la chaîne de Markov d'état initial x.

Exercice n° 9. Modèle de Hardy-Weinberg
On s'intéresse à l'évolution des fréquences alléliques d'un gène pouvant s'exprimer sous la forme de deux allèles A et a dans une population diploïde [2]. On suppose pour simplifier que la population est de taille fixée, N, quelle que soit la génération. On notera, pour $n \geq 0$, $N_n(AA)$ le nombre d'individus AA dans la population à la n-ème génération, $N_n(Aa)$ celle des individus [3] Aa et $N_n(aa)$ celle des individus aa. A l'étape $n+1$, on répète N fois de manière indépendante l'opération suivante :

2. Diploïde : qui possède un jeu double de chromosomes semblables.
3. Le génotype n'est pas ordonné dans ce comptage : on ne distingue pas Aa et aA.

— deux individus sont pris au hasard dans la population de l'étape n,

— une reproduction sexuée a lieu : un individu naît à l'étape $n+1$, disposant de deux chromosomes, chacun étant une copie d'un des deux chromosomes de ses parents, pris au hasard.

On note $p_n^N := N_n(AA)/N$, $q_n^N := N_n(Aa)/N$ et $r_n^N := N_n(aa)/N$ les proportions d'individus pour chaque génotype.

1. On note $N_n := (N_n(AA), N_n(Aa), N_n(aa))$, N_{n+1}. Montrer que conditionnellement à $\{N_n/n = (p, p, r)\}$, N_{n+1} suit une loi multinomiale de paramètres N et $((p+\frac{q}{2})^2, 2(p+\frac{q}{2})(r+\frac{q}{2}), (r+\frac{q}{2})^2)$.
2. On fait tendre N tend vers l'infini et on suppose que (p_0^N, q_0^N, r_0^N) converge vers (p_0, q_0, r_0). Montrer que pour tout n fixé, (p_n^N, q_n^N, r_n^N) converge en loi vers un triplet déterministe (p_n, q_n, r_n) et que pour tout $n \geq 0$,
$$p_{n+1} = (p_n + \frac{q_n}{2})^2,\ q_n n + 1 = 2(p_n + \frac{q_n}{2})(r_n + \frac{q_n}{2}),\ r_{n+1} = (r_n + \frac{q_n}{2})^2)\ .$$
3. Montrer que la suite $(p_n, q_n, r_n)_{n\geq 0}$ est constante[4] à partir du rang $n = 1$.

Exercice n° 10. Urne d'Ehrenfest

On considère une enceinte contenant N particules. L'enceinte est coupée en deux moitiés A et B séparées par une membrane perméable aux particules. On suppose qu'entre chaque instant $t \in \mathbb{N}$ et $t+1$, une particule est choisie au hasard (uniforme) et change de moitié. On définit des variables aléatoires $I_i(t)$ par $I_i(t) = 1$ si à l'instant t, la particule i est dans la partie A et $I_i(t) = 0$ si elle est dans la partie B.

1. Montrer, en interprétant naturellement l'énoncé, que le processus $(I_1(t), \ldots, I_N(t))$, $t \geq 0$, est une chaîne de Markov et décrire sa matrice de transition.
2. On note $X_N(t)$ le nombre de particules dans la partie A. Montrer que $(X_N(t))_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov et décrire sa matrice de transition, que l'on appellera P.
3. Dessiner le graphe de cette chaîne pour $N = 3$.
4. Montrer qu'une certaine loi binomiale (dont on précisera les paramètres) est une loi invariante pour la matrice P.
5. Calculer l'espérance du temps de retour en 0, partant de 0. Interpréter.

Exercice n° 11. Jeu de Penney

Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d de loi $\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$ où a et b sont deux symboles distincts. On se donne un mot $s = (s_i)_{1\leq i\leq l}$ et on veut étudier le temps d'apparition T_s de s dans la suite ε :
$$T_s = \min\{n \geq l \text{ t.q. } \forall i = 1, \ldots, l,\ \varepsilon_{n-l+i} = s_i\}\ .$$
On définit pour cela une suite de variables aléatoires (X_n) qui compte la taille du plus long préfixe “en cours de lecture” : on pose $X_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,
$$X_n = \max\{k \in \{0, \ldots, l\},\ \text{t.q. } \forall i = 1, \ldots, k,\ \varepsilon_{n-k+i} = s_i\}\ .$$
Si on note R_i le temps d'atteinte de i par X_n, alors $T_s = R_l$.

4. Cette répartition s'appelle l'*équilibre de Hardy-Weinberg*, et est au programme de l'enseignement scientifique commun en Terminale.

1. Montrez que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\{0, \dots, l\}$.
2. On suppose que $s = aa$.
   (a) Déterminez la matrice de transition de (X_n) et représentez-la par un graphe orienté avec des poids sur les arêtes.
   (b) Déterminer $\mathbb{E}_0(R_2)$ et $\mathbb{E}_1(R_2)$.
   (c) Donner une formule simple pour la fonction génératrice de T_{aa}.
3. On suppose désormais que $s = ab$.
   (a) Déterminez la matrice de transition de (X_n) et représentez-la par un graphe orienté avec des poids sur les arêtes.
   (b) En considérant le premier temps d'atteinte de 1 par la chaîne, et en utilisant la propriété de Markov forte, montrer que T_{ab} est égal à la somme de deux variables aléatoires indépendantes, chacune étant de loi $\mathcal{G}(1/2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}_0(R_2)$ et $\mathbb{E}_1(R_2)$. Commenter.