Fiche d'exercices n°3 : géométrie et algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. Résoudre les systèmes d'équations :

$$a)\quad \begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-4y=2 \end{cases}$$

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, tracer les droites d'équation :

$a)$ $y=3x-1$ $\quad b)$ $y=-2x+3$ $\quad c)$ $x=2y+1$

$d)$ $-3x+2y-1=0$ $\quad e)$ $y+2=0$ $\quad f)$ $2x-1=0$

$g)$ $(x,y)=(2t+1,3t-1), t\in\mathbb{R}$ $\quad h)$ $(x,y)=(-s+2,2s-1), s\in\mathbb{R}$

Exercice 3. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les 2 points A et B :

$a)$ $A(2,1)$ $B(0,1)$ $\quad b)$ $A(-3,1)$ $B(0,1)$ $\quad c)$ $A(-1,3)$ $B(2,-1)$ $\quad d)$ $A(-2,1)$ $B(-2,4)$

Exercice 4.
a) Quel est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x,0,0)$ lorsque x prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$?
b) Quel est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que $x=1$?
c) Quel est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que $x=1$ et $z=0$?

Exercice 5.
a) Si une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ est orthogonale à un plan, est-elle orthogonale à toutes les droites de ce plan ?
b) Si une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ est parallèle à un plan, est-elle parallèle à toutes les droites de ce plan ?
c) Soit un plan sécant avec deux plans parallèles. Que peut-on dire de leurs droites d'intersection ? Quelle est l'intersection des trois plans ?

Exercices de base

Exercice 6. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, ainsi que leur produit scalaire.

$a)$ $\overrightarrow{u}=(1,5),\ \overrightarrow{v}=(3,1)$ $\quad b)$ $\overrightarrow{u}=(\cos\alpha,-\sin\alpha),\ \overrightarrow{v}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$

$c)$ $\overrightarrow{u}=(2,3),\ \overrightarrow{v}=(-3,2)$ $\quad d)$ $\overrightarrow{u}=(1,0,2),\ \overrightarrow{v}=(-4,7,2)$

$e)$ $\overrightarrow{u}=(-2,0,1),\ \overrightarrow{v}=(0,3,8)$ $\quad f)$ $\overrightarrow{u}=(1,2,-1,2),\ \overrightarrow{v}=(3,1,1,-3)$

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$a)$ $\overrightarrow{u}=(t-1,2t-3),\ \overrightarrow{v}=(3,-1)$ $\quad b)$ $\overrightarrow{u}=(3t,2+t,-t),\ \overrightarrow{v}=(1,1,2)$

$c)$ $\overrightarrow{u}=(t-1,2t,2),\ \overrightarrow{v}=(1,2,-1)$ $\quad d)$ $\overrightarrow{u}=(t^2+1,2t,t^2-1),\ \overrightarrow{v}=(t^2,-t,1)$

Exercice 8. Calculer la distance entre les points A et B.

$a)$ $A=(3,4),\ B=(2,1)$ $\quad b)$ $A=(1,6),\ B=(4,2)$ $\quad c)$ $A=(3,1,2),\ B=(1,-1,1)$

Exercice 9. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

$a)$ $\overrightarrow{u}=(1-t,2+t),\ \overrightarrow{v}=(3,4)$ $\quad b)$ $\overrightarrow{u}=(5t,6),\ \overrightarrow{v}=(6t,7)$ $\quad c)$ $\overrightarrow{u}=(2,1),\ \overrightarrow{v}=(3-t,2-t)$

Exercice 10. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad e)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix}$$

Exercice 11. Les 3 vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont-ils coplanaires ?

a) $\overrightarrow{u} = (1,2,3),\ \overrightarrow{v} = (-1,3,4),\ \overrightarrow{w} = (1,0,2)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1,-1,1),\ \overrightarrow{v} = (2,2,1),\ \overrightarrow{w} = (0,-4,1)$

Exercice 12. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 0 & b & 7 \\ 11 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} \quad g)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad h)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$i)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad j)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad k)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad l)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 13. Calculer l'aire du triangle ABC :

a) $A = (1,0),\ B = (2,3),\ C = (4,4)$ *b)* $A = (0,1),\ B = (2,1),\ C = (-1,2)$

c) $A = (2,1),\ B = (-2,1),\ C = (1,1)$ *d)* $A = (1,1),\ B = (2,2),\ C = (0,3)$

Exercice 14. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

a) $A = (0,-1,0),\ B = (0,4,1),\ C = (1,4,2),\ D = (0,0,2)$

b) $A = (1,0,0),\ B = (0,2,3),\ C = (1,4,4),\ D = (0,-1,0)$

Exercice 15. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (0,0,-1)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (1,1,1)$

c) $\overrightarrow{u} = (2,3,1),\ \overrightarrow{v} = (1,2,1)$ *d)* $\overrightarrow{u} = (1,1,1),\ \overrightarrow{v} = (-3,2,1)$

e) $\overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (x,0,-1)$ *f)* $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0),\ \overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

g) $\overrightarrow{u} = (3,2,-1),\ \overrightarrow{v} = (2,1,z)$ *h)* $\overrightarrow{u} = (1,2,2),\ \overrightarrow{v} = (3,1,1)$

Exercice 16. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

a) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y=0\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2x+y=1\}$

b) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2x+y=1\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+2y=5\}$

c) $\mathcal{D}_1 = \{(5-t, 2t-1)\,,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+3s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathcal{D}_1 = \{(1+4t, 2+t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x+2y=11\}$

e) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y)\,,\ 2x-y=3\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(s-1, 3+2s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

f) $\mathcal{D}_1 = \{(1+\lambda, 2-\lambda)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x+4y=3\}$

g) $\mathcal{D}_1 = \{(1+t, 2-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

h) $\mathcal{D}_1 = \{(2s-1, s+2)\,,\ s \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1-2t, 3-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 17. Trouver une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

a) $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ *b)* $A = (3, 0)$, $B = (2, -1)$ *c)* $A = (1, 0)$, $B = (2, 3)$

Exercice 18. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A = (0, 1)$, $B = (4, 3)$, $E = (1, 3)$, $F = (3, 1)$.

Exercice 19. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

a) $M = (1, 2)$, $\mathcal{D} = \{(2t, 1 + t), t \in \mathbb{R}\}$

b) $M = (1, 3)$, $\mathcal{D} = \{(4 - t, 2 + 2t), t \in \mathbb{R}\}$

c) $M = (1, -3)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y + 3 = 0\}$

d) $M = (1, 5)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 2\}$

e) $M = (-1, 1)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2x + y = 3\}$

f) $M = (1, 0, 1)$, $\mathcal{D} = \{(2t, t - 1, -t + 4), t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 20. Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$:
$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 2\}$
$\mathcal{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x + y + 2 = 0\}$

Exercice 21. Trouver une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (1, 2, 4)$, $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x + y + z = 3\}$

b) $M = (-1, 0, 0)$, $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x + 2y + 3z = 7\}$

c) $M = (1, 2, 4)$, $\mathcal{P} = \{(2, 1, 0) + \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 0), \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

d) $M = (1, -2, 1)$, $\mathcal{P} = \{\alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 1), \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 22. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) $M = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 0)$ *b)* $M = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$

Exercice 23. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

a) $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$ *b)* $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, 0, -1)$

Exercice 24. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.
a) $A = (1, 0, 1)$, $\mathcal{D} = \{(1+t, 2-t, -1+t), t \in \mathbb{R}\}$ *b)* $A = (-1, 1, 0)$, $\mathcal{D} = \{(1+2t, t, 1-t), t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 25. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x + y + z = 3\}$ *b)* $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x + 2y - 2z = 1\}$

c) $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x - z = 1\}$ *d)* $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x - y + 3z = 0\}$

Exercice 26. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver une forme paramétrique de la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

a) $\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z), x + y + z = 3\}$, $\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z), x - 2y + z = 0\}$

b) $\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z), x + y - z = -1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z), x + 2y + 3z = 0\}$

c) $\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z), 2x - z = 1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z), x + y = 2\}$

Exercice 27. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (1, 1, 0)$ $\mathcal{P} = \{(x, y, z), x - y + 2z = 3\}$ *b)* $M = (2, -1, 1)$ $\mathcal{P} = \{(x, y, z), 2x + y = 1\}$

c) $M = (-1, 5, -1)$ $\mathcal{P} = \{(2 - t + s, 1 + 2t - s, 3t + 2s), t, s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 28. Réécrire la droite $\mathcal{D}$ comme intersection de deux plans (d'abord quelconques, puis orthogonaux) :

$$a) \quad \mathcal{D} = \{(1,0,2) + t(1,1,1)\,, t \in \mathbb{R}\} \qquad b) \quad \mathcal{D} = \{(1+t, 2-t, t-3)\,, t \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 29. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que : $\det\left(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{c}, \vec{a} \wedge \vec{d}\right) = 0$

Pour vous entrainer...

Exercice 30. Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

$$a) \quad \overrightarrow{u} = (-1-t, 5+t), \ \overrightarrow{v} = (1,-1) \qquad b) \quad \overrightarrow{u} = (1-t, 1), \ \overrightarrow{v} = (3, 1-t)$$

Exercice 31. Calculer les déterminants suivants :

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} \qquad e) \begin{vmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 1+i \\ 1-i & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{vmatrix}$$

Exercice 32. Calculer les déterminants suivants :

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad d) \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} X & 1 & X \\ 1 & 1 & 2 \\ X & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad f) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \qquad g) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad h) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 33. Calculer l'aire du triangle ABC :

$$a) \quad A = (0,0), \ B = (-2,1), \ C = (3,0) \qquad b) \quad A = (t, 1+t), \ B = (1,t), \ C = (2-t, 1-t)$$

Exercice 34. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

$$a) \quad A = (1,1,0), \ B = (0,1,1), \ C = (1,0,1), \ D = (1,1,1)$$

$$b) \quad A = (1,2,3), \ B = (0,1,-1), \ C = (2,1,0), \ D = (0,1,0)$$

Exercice 35. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$a) \quad \overrightarrow{u} = (1,2,1), \ \overrightarrow{v} = (0,1,-1) \qquad b) \quad \overrightarrow{u} = (3,2,0), \ \overrightarrow{v} = (-1,2,-1)$$

Exercice 36. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$a)$ $\mathcal{D}_1 = \{(1+2s, 3-s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x - 2y + 1 = 0\}$

$b)$ $\mathcal{D}_1 = \{(s-1, s-2)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(3-t, 2-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

$c)$ $\mathcal{D}_1 = \{(x,y)\,,\ 2x + y + 1 = 0\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(1+t, 3-2t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

$d)$ $\mathcal{D}_1 = \{(t-2, t-1)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{(-1+2s, 3-s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 37. Trouver une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

$$a) \quad A = (2,3)\ ,\ B = (3,2) \qquad b) \quad A = (4,1)\ ,\ B = (2,2) \qquad c) \quad A = (-2,1)\ ,\ B = (1,3)$$

Exercice 38. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A = (2,0)\ ,\ B = (4,4),\ E = (1,1)\ ,\ F = (5,3)$.

Exercice 39. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

a) $M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,, 2x + y = 3\}$ *b)* $M = (4, 0)$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,, 3x - y = 2\}$

c) $M = (1, -2, 1)$, $\mathcal{D} = \{(t - 2, 1 - 2t, 2t + 1) \,, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 40. Trouver une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (2, 1, -3)$, $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, 2x - y + z = 1\}$

b) $M = (-1, 2, 0)$, $\mathcal{P} = \{\alpha(0, 1, 2) + \beta(-1, 1, 1) \,, \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 41. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \,, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) $M = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1)$ *b)* $M = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 0, 1)$

Exercice 42. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

a) $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 2, 1)$, $C = (1, 0, 1)$ *b)* $A = (2, -2, 0)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (0, 0, 1)$

Exercice 43. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.

a) $A = (-1, 2, 1)$, $\mathcal{D} = \{(1-t, 1+t, 1+2t) \,, t \in \mathbb{R}\}$ *b)* $A = (1, 1, 1)$, $\mathcal{D} = \{(t, 1-t, 2+t) \,, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 44. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, 2x - y + z = 1\}$ *b)* $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, x - 2y - z = 2\}$

c) $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, x - 3y - z = -2\}$ *d)* $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, x - y + 2 = 0\}$

Exercice 45. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver une forme paramétrique de la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

a) $\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \,, 2x + y - z = 3\}$, $\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \,, x + 2y + z = 0\}$

b) $\mathcal{P}_1 = \{(x, y, z) \,, -x + y - z = 1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{(x, y, z) \,, x - 2y - z = 2\}$

Exercice 46. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (2, -3, 2)$ $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, 2x - 3y + z = 1\}$ *b)* $M = (0, 2, -4)$ $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \,, x - 3z = 2\}$

c) $M = (-2, 5, -5)$ $\mathcal{P} = \{(1 + 2t + s, 3t - s, -t - s) \,, t, s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 47. Réécrire la droite $\mathcal{D}$ comme intersection de 2 plans : $\mathcal{D} = \{(1, 1, -1) + t(0, 2, 1) \,, t \in \mathbb{R}\}$

Pour aller plus loin...

Exercice 48.

1. Soient $\overrightarrow{u} = (1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$. Exprimer les conditions sur a, b, c pour que le vecteur $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Donner une forme paramétrique de cette droite. Vérifier que la valeur de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est cohérente avec les résultats précédents.
2. De façon plus générale, traiter les mêmes questions avec $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$.

Exercice 49. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit le point $M(0, 4)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$. Soit P la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

1. Faire un dessin (soigné) représentant M, $\mathcal{D}$ et P.
2. Calculer (en expliquant votre raisonnement) les coordonnées de P.
3. Soient les vecteurs $\vec{u} = (-3, 3)$ et $\vec{v} = (1, 1)$. On définit les nombres complexes correspondants $z_u = -3 + 3i$ et $z_v = 1 + i$. Calculer $z_u \, \bar{z}_v$. Interpréter géométriquement ce résultat.

4. On va maintenant généraliser la notion évoquée à la question précédente. Soient dorénavant les vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$. On définit les nombres complexes correspondants $z_u = x + iy$ et $z_v = x' + iy'$.
   (a) Calculer $z_u\,\bar{z}_v$.
   (b) Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $z_u\,\bar{z}_v$ est un nombre imaginaire pur ?
   (c) Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $z_u\,\bar{z}_v$ est un nombre réel ?
   (d) En utilisant l'écriture sous forme exponentielle $z_u = \rho\, e^{i\theta}$ et $z_v = \rho'\, e^{i\theta'}$, interpréter les résultats précédents.

Exercice 50. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a, b) \neq (0, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (c, d) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire le parallélogramme $EFGH$, où $E = (0, 0)$, $F = (a, b)$, $G = (a + c, b + d)$ et $H = (c, d)$.

1. Trouver la projection orthogonale P du point H sur la droite passant par les points E et F.
2. Calculer la distance entre P et H.
3. Calculer l'aire du parallélogramme $EFGH$.

Exercice 51. Soit $\mathcal{T}$ un triangle de sommets A, B et C dans le plan $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{A}$ son aire. En utilisant la formule usuelle $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times \textit{base} \times \textit{hauteur}$, démontrer le théorème du cours :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$$

Exercice 52. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre de sommets A, B, C et D dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et soit $\mathcal{V}$ son volume. En utilisant la formule usuelle $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \textit{surface de base} \times \textit{hauteur}$, démontrer le théorème du cours :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\right|$$

Exercice 53. On va démontrer ici l'intérêt de la forme parabolique pour les antennes, et pourquoi le récepteur est placé un peu décalé vers l'intérieur de la parabole. L'antenne parabolique, lorsqu'elle a été installée, a été orientée vers l'émetteur (par exemple un satellite) dont elle récupère les données. Cet émetteur est lointain, et on peut considérer que les trajectoires des signaux émis sont parallèles entre eux, et également parallèles à l'axe de symétrie de la parabole (si celle-ci a été bien réglée). On considère une parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2p}$ et un rayon incident d'équation $x = t$ (où t peut prendre n'importe quelle valeur). Ce rayon atteint donc la parabole au point $A\left(t, \dfrac{t^2}{2p}\right)$.

1. Faire un schéma du dispositif, avec la tangente et la normale à la parabole au point A.
2. Quelle est l'équation de la tangente en A ? En déduire les coordonnées du vecteur normal.
3. Par les lois de l'optique, le rayon réfléchi par la parabole est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale en A. Montrer que ce rayon réfléchi passe par le point $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, appelé *foyer de la parabole*.
4. Conclusion ?

Exercice 54. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1, 0, 1)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\overrightarrow{v}$ le rayon réfléchi dans le miroir d'équation $x - y + z = 1$ passe-t-il par le point $T = (3, 2, 3)$?

Exercice 55. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1, 1, 2)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$. Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $M = (2, 0, 0)$ pour lequel le rayon réfléchi dans le miroir $\mathcal{P}$ passe par le point $T = (-2, -2, 1)$.