

Résolution de l'équation $Z^2 = 1 + i$ via deux méthodes : forme algébrique et forme exponentielle.

1. Forme exponentielle : L'équation donnée est $Z^2 = 1 + i$.

- **Étape 1 : Conversion de $1 + i$ en forme exponentielle.**

La forme exponentielle d'un nombre complexe est donnée par :

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

où r est le module et θ est l'argument.

Pour $1 + i$, on calcule le module :

$$r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

L'argument θ est l'angle que fait le nombre complexe avec l'axe réel. Pour $1 + i$, il est dans le premier quadrant et on a :

$$\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, $1 + i$ en forme exponentielle est :

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- **Étape 2 : Résolution de $Z^2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$**

Nous cherchons Z tel que $Z^2 = r \cdot e^{i\theta}$. En prenant la racine carrée des deux côtés, on obtient :

$$Z = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}}$$

Cela donne :

$$Z = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{\pi}{8} + k\pi}$$

où $k = 0, 1$ pour les deux solutions principales.

- Pour $k = 0$:

$$Z_1 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{\pi}{8}}$$

- Pour $k = 1$:

$$Z_2 = 2^{1/4} \cdot e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

2. Forme algébrique : L'équation est toujours $Z^2 = 1 + i$. Supposons que $Z = x + iy$ (forme algébrique), où x et y sont réels.

- **Étape 1 : Développement de Z^2 .**

Nous avons :

$$Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Cela doit être égal à $1 + i$. En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient deux équations :

1. Partie réelle :

$$x^2 - y^2 = 1$$

2. Partie imaginaire :

$$2xy = 1$$

3. Module

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2}$$

• **Étape 2 : Résolution du système.**

De (1),(3), on trouve :

$$2x^2 = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2y^2 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

On a que $xy > 0$ donc x et y ont le même signe. Les solutions sont donc :

$$Z_1 = x + iy = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)}i$$

Conclusion :

ChatGPT ne sait pas tout.