Feuille de TD1 : Applications

Exercice 1 :

Dessinez les graphes des applications suivantes:

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{3}x$
(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2x + 3$
(3) $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x+2} + 1$
(4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |2x - 3|$
(5) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$
(6) $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x + 2)^2 + 3$
(7) $f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + 2y + 3$
(8) $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + 2y$
(9) $f_9 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -x + y + 4$
(10) $f_{10} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -x + y$

Exercice 2 :

L'équation d'état d'une mole d'un gaz parfait est $pv = Rt$ où $R > 0$ est une constante.

Est ce que l'espace des états peut être décrit comme le graphe d'une application t de (p, v)? d'une application v de (p, t)?

Exercice 3 :

Dessiner les graphes des applications suivantes, puis décider si elles sont inversibles.

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$\forall x \in]-\infty; -1], \quad f(x) = 2x + 3,$
$\forall x \in]-1; \infty], \quad f(x) = -x + 5.$
(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$\forall x \in]-\infty; -1], \quad f(x) = 2x + 3,$
$\forall x \in]-1; \infty], \quad f(x) = x + 2.$

Exercice 4 :

On considére les deux fonctions réelles d'une variable réelle $g(x) = \sin(x)$ et $f(x) = x^2$. Calculer $g \circ f(\sqrt{\pi})$.

Exercice 5 :

Exprimer les fonctions réelles d'une variable réelle suivantes comme une composition de deux ou trois fonctions élémentaires.

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x^2)$
(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
(3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^{x^3}$
(4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{\cos(x^4)}$.

Exercice 6 :

Lesquelles des applications suivantes peut-on composer entre elles? dans quel sens?

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$
(2) $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$
(3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$
(4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x+2y$
(5) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (xy, x, x+y)$

Exercice 7 :

Soit $f_1 : \mathbb{R} \to [-1;1], \quad x \mapsto sin(x)$

(1) Tracer le graphe de l'application f_1, c'est-à-dire la courbe d'équation $y = sin(x)$.
(2) Peut-on écrire x comme fonction de y?
(3) Trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ le plus grand possible tel que la restriction de f_1 à I admette une application réciproque g.
(4) Tracer le graphe de l'application g.
(5) Reprendre les questions avec l'application $f_2 : \mathbb{R} \to [-1;1], \quad x \mapsto cos(x)$.

Exercice 8 :

Trouver pour les applications suivantes le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elles ne sont pas définies.

(1) $f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2-y}$,
(2) $f_2 : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2-y}$,
(3) $f_3 : (x,y) \mapsto \ln(x+\ln(y))$,
(4) $f_4 : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2-y^2}$,
(5) $f_5 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{y\sin(x)}$