Exercice 2 : Jauge d'un convexe

On se place dans un espace vectoriel E que, initialement on ne suppose pas normé.

1. Soit C un sous-ensemble de E tel que
   - C est convexe
   - C est symétrique, c'est à dire que pour tout $x \in C$ on a que $-x \in C$.
   - pour tout droite $D \subset E$ passant par 0 l'ensemble $D \cap C$ est une intervalle fermée et bornée de D qui contient un voisinage de 0.

   Montrer qu'il existe une unique norme N_C sur E pour laquelle C est la boule unité fermée.

Soit $\| \ \|$ une norme $B = \{ v, \|v\| \leq 1 \}$

alors $\|x\| = \inf \{ \lambda > 0, x \in \lambda B \}$

$\forall x \neq 0 \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in B \Rightarrow x \in \|x\| B \Rightarrow \|x\| \geq \inf \{ \quad \}$

soit $\lambda < \|x\| \quad \left\| \frac{x}{\lambda} \right\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} > 1 \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \notin B \Rightarrow \lambda < \inf \{ \quad \}$

On pose $\|v\| = \inf \{ \lambda > 0, v \in \lambda C \}$

i) $D_v = \{ tv, t \in \mathbb{R} \}$ est une droite

$D_v \cap C$ intervalle fermé $= \{ tv, t \in [-1/\|v\|, 1/\|v\|] \}$

$\Rightarrow \|v\| < \infty$ bien défini

ii) $\|0\| = 0$ et on suppose $\|v\| = 0$

$\Rightarrow D_v \cap C = \{0\} \Rightarrow v = 0$

iii) homogeneité facile

iv) inégalité Δ Soient $x, y, z \in E$ avec

$z = x + y$

$x \in \|x\| C \Rightarrow x + y \in \|x\| C + \|y\| C \subset (\|x\| + \|y\|) C$

$y \in \|y\| C$

C cvx

et $0 \in C$

2. (**) Montrer que si la norme N_C est lisse alors pour tout x tel que $N_C(x) = 1$ l'ensemble
$$\{v \in E | D_v(x) \cap C^\circ = \emptyset\}$$
est un hyperplan fermé de E que l'on note $T_x(C)$. Ici, $D_v(x)$ est la droite de E passant par x en direction v.

3. Montrer que la norme N_C est strictement convexe si et seulement si pour chaque $x, y \in E$ tels que $||x|| = ||y|| = 1$ le segment
$$]x, y[\subset C^\circ.$$

4. (**) Montrer par des exemples sur $\mathbb{R}^2$ qu'il existe des normes lisses non strictement convexes et qu'il existe des normes strictement convexes non lisses.

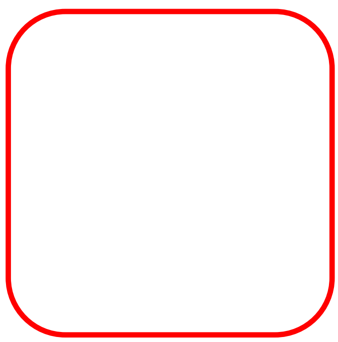
3/ Soient x, y avec $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\theta \in]0,1[$

$\| \ \|$ str cvx ssi $\|(1-\theta)x + \theta(y)\| < 1 \quad \forall \theta$

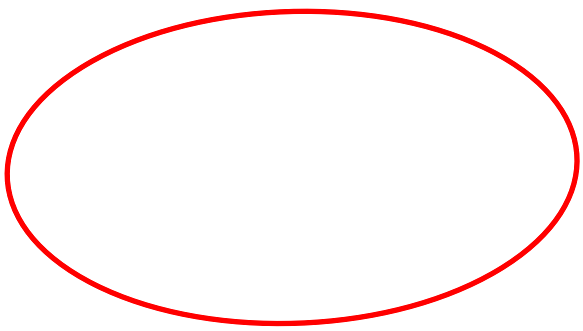
$\iff \inf\{\lambda > 0, (1-\theta)x + \theta y \in \lambda C\} < 1 \quad \forall \theta$

$\iff (1-\theta)x + \theta y \in C \quad \forall \theta$

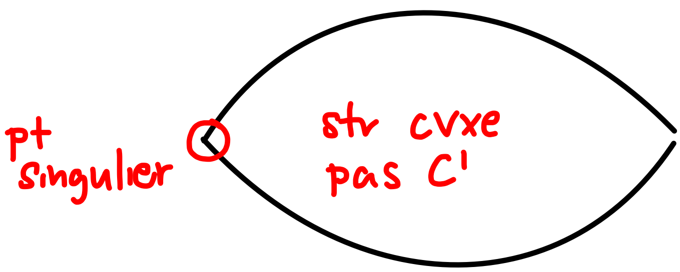
4/ lisse $\iff \partial C$ est une courbe de classe C'



C' mais pas str cvxe



C', str cvxe, hilbertien



2/

$$T_x = \{ v \in E,\ D_v(x) \cap C^\circ = \emptyset \}$$

On veut mq $T_x - x = \ker \phi$ = un ss esp fermé

N_C lisse $\Rightarrow$ "dérivable" c-à-d $\forall x\ \exists\ \phi_x \in X^*$

$$N_C(y) - N_C(x) = \phi_x(y-x) + o(N_C(y-x))$$

Facile à voir que $\forall\, y \in C^\circ,\ N_C(y) < 1 \Rightarrow \exists\, y \in C^\circ$ tq $\phi_x(y-x) < 0$

$\overset{C^\circ \text{ connexe}}{\Rightarrow}\ \forall y \in C^\circ\ \phi_x(y-x) < 0$

$\Rightarrow \ker\phi + x \subset T_x$

Soit $v \in T_x \Rightarrow N_C(x \pm t v) \geq N_C(x),\ \forall\ t > 0$

$\Rightarrow \phi_x(tv) + o(t) \geq 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \phi_x(tv) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow v \in \ker \phi_x$

Exercice 3 : Application à la densité d'un s.e.v.
Soit E un sous-espace vectoriel de X. Montrer que E est dense si et seulement si, pour tout f forme linéaire continue, $f \equiv 0$ sur E implique $f \equiv 0$ sur X.

Soit $E \subset X$ dense, $f \in X^*$, $f|_E = 0$

si $x \in X$ $\exists$ $x_n \in E$ $\lim x_n = x$

$$\Rightarrow f(x) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$$

Soit $E \subset X$ pas dense, quitte à remplacer E par $\bar{E}$, on suppose fermé

Par hypothèse $\exists$ $v \notin E$, $E + \langle v \rangle$ est fermé

$$f \quad E + \langle v \rangle \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in E \\ 1 & x = v \end{cases}$$

se prolonge en forme lin et $\|f\| \leq 1$

D'après Hahn Banach $\exists$ $\hat{f} \in X^*$ qui prolonge f et $\|\hat{f}\| \leq 1$

Exercice 4 : Contre-exemples de séparation

Supposons X de dimension infinie et soit H un sous-espace vectoriel strict dense dans X. Soit $x_0 \notin H$, montrer que $\{x_0\}$ et H sont des convexes qui ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

Par l'absurde - soit P un hyperplan qui sépare x_0, H

On choisit $y \in P$, $P-y$ est sev fermé $= \{v-y, v \in P\}$

$x_0 \notin P$, $P-y \subsetneq (P-y)+\langle x_0 \rangle =$ sev fermé

HB $\Rightarrow$ $\exists f \in X^*$ $P-y \subset \ker f$, $f(x_0)=1$, $\|f\| \leq 1 \Rightarrow f$ cont

$\forall v \in P$ $f(v-y) = f(v) - f(y) = 0 \Rightarrow f(v) = f(y)$ $\forall v \in P$

P sépare H, x_0 $\Rightarrow$ $f(y) \neq x_0$

mais H dense $\Rightarrow$ $z_k \in H$, $z_k \to x_0$ $\Rightarrow$ $f(z_k) \to f(x_0) = 1$