Exo 1 f_1 matrice associée $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Determiner ses valeurs propres avec

poly characteristique $= \begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)^2 - 2^2 = 0$

$\Leftrightarrow (t+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow t+1 = \pm 2$

$\Leftrightarrow t = -3, +1$

vecteur propre pour $t = -3$ Soln du système

$\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ -2 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

vecteur propre pour $t = +1$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

la matrice de f_1 dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

la matrice de f_3 est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

son poly charactéristique $\begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 1$

$= (t-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad t = 1$

"unique" valeur propre $\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad y = -x$

$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vecteur propre

les vecteurs propres ne forment pas une base

$\Rightarrow$ pas diagonalisable

Exo 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A n'est pas inversible $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre pour la valeur propre 2

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = matrice de A dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a $A = Q D Q^{-1}$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $Q^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = Q D^n Q^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$