Exercice 1. Domaine de Gershgorin
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $1 \leq i \leq n$, D_i la boule fermée dans $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Le domaine de Gershgorin, qu'on notera $\mathcal{G}(A)$ est la réunion des disques D_i pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathcal{G}(A)$.

Exercice 2. Stabilité
Si A est une matrice symétrique, et si $\|(A-\lambda)u\| \leq \varepsilon\|u\|$, montrer que la distance de λ au spectre de A est inférieure à ε (on pourra utiliser une base orthonormale de vecteurs propres de A).

Exercice 3. (Méthode de la puissance)
Soit $A = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et en utilisant l'exercice sur le domaine de Gersggorin que ses valeurs propres appartiennent à $[97, 102]$.
2. Déterminer par la méthode de la puissance une approximation de la plus grande valeur propre de A.

   Pour ceci, on écrira une fonction qui donnera une valeur approchée de la plus grande valeur propre, une valeur approchée d'un vecteur propre associé et le nombre d'itérations utilisées pour ce calcul. La fonction aura comme argument une matrice carrée, un nombre d'iterations maximales (pour un test d'arrêt) et epsilon mesurant une erreur maximale.
3. Expliquer pourquoi en appliquant la méthode de la puissance à $A - 97I_3$, on accélere la convergence.
4. Que se passe t-il si on applique la méthode de la puissance à $A - \gamma I_3$ si γ est la valeur trouvée à la question 2) ?

Exercice 4. (élimination)
Soit A une matrice réelle de taille n. On suppose que les valeurs propres de A notées $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont deux à deux distinctes et vérifient :
$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$
On note u_i un vecteur propre associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.

1. Montrer que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de ${}^tA$. On note v_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que si $i \neq j$, $\langle u_i, v_j \rangle = 0$. (On pourra calculer $\langle Au_i, v_j \rangle$ de deux manières).
   Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle u_i, v_i \rangle \neq 0$.
3. Soit $B = A - \lambda_n \frac{u_n \, {}^tv_n}{\langle u_n, v_n \rangle}$. Montrer que les valeurs propres de B sont $\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$.
4. Donner une méthode utilisant la méthode de la puissance appliquée plusieurs fois pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de A et de ses vecteurs propres.

   L'appliquer à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 5. (valeurs propres conjuguées)
Si A est une matrice réelle, sa plus grande valeur propre en module n'est pas forcément réelle, A peut avoir un couple de valeurs propres complexes conjuguées de module maximal. On peut appliquer la méthode de la puissance à un shift de A dans le complexe, par exemple $A - iI$, on peut aussi rester dans le réel en cherchant une relation de récurrence approchée $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n$ (où $u_{n+1} = Au_n$ et u_0 aléatoire). Programmer les deux méthodes et comparer l'efficacité avec une matrice aléatoire réelle de taille 4 (non symétrique).

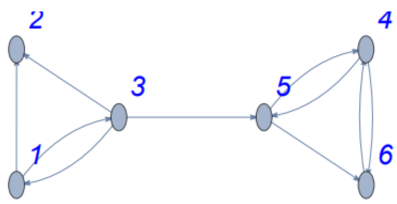
Exercice 6. (itérations inverses)
Lorsqu'on a effectué quelques itérations de la méthode de la puissance, on a une première approximation λ de la valeur propre de module maximal. Il peut alors être intéressant d'effectuer la méthode de la puissance sur la matrice $(A - \lambda I)^{-1}$. Programmer cette méthode et discuter les avantages (vitesse de convergence) et inconvénients (précision du calcul de l'inverse). Testez sur l'une des matrices de la feuille.

Exercice 7. Utiliser la méthode de la puissance pour déterminer la norme triple d'une matrice subordonnée à la norme euclidienne.

Exercice 8. PageRank Soit P une matrice transposée d'une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice carrée de taille N dont les coefficients vérifient

$$a_{ij} \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1$$

la somme des coefficients d'une colonne donnée vaut 1.
L'algorithme PageRank de Google construit une telle matrice à partir du graphe connectant les pages web entre elles en posant $a_{ij} = \frac{1}{n_j}$ si la page j pointe vers la page i et 0 sinon, avec n_j le nombre de liens émis par la page j (chaque lien représente en quelque sorte un vote, dont le poids est pondéré par le nombre de liens).
On considère le reseau :



dont la matrice d'adjacence (de connectivité) A est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence C est C^2.
2. Trouver les valeurs propres de C avec **numpy**
3. Pourquoi 0 est valeur propre ?
4. Calculer la matrice $\tilde{C}$ (voir le cours). La matrice est stochastique ?

L'idée de Brin et Page pour permettre la découverte d'une distribution stable par multiplication itérée de la matrice stochastique est d'introduire la métaphore du "surfeur aléatoire" (random surfer). Cette métaphore permet en fait de rendre la matrice ergodique. Le surfeur suit la structure des liens du web, sauf que de temps en temps il décide d'entrer une URL dans la barre de navigation afin de sauter vers une page quelconque non nécessairement connectée à la page courante. On appelle cette opération la téléportation. La téléportation est aléatoire : chaque page est équiprobable en tant que destination d'une opération de téléportation. On fait une combinaison convexe de C et de la matrice qui représente l'opération de téléportation.

1. Rendre $\tilde{C}$ stochastique comme expliquer dans le cours:

$$\alpha E + (1-\alpha)\frac{1}{n}e.e^T$$

.

2. Utiliser la méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre.

3. Trouver le vecteur propre associé. Donner une interpretation du vecteur propre.

Exercice 9. Méthode QR pour le calcul de valeurs propres

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Dans cet exercice, on va utiliser la décomposition QR pour déterminer toutes les valeurs propres de A. Pour cela, on définit une suite de matrices de la manière suivante :

$A_1 = A$, puis pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{cases} (Q_k, R_k) = \text{décomposition QR de } A_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases}$$

- Montrer que les matrices A_k construites au cours des itérations sont toutes semblables à A. Elles ont donc les mêmes valeurs propres que A.
- On suppose que les valeurs propres de A sont toutes de modules différents ($|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n|$). Soit $P \in \mathrm{GL}_n()$ telle que $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := \Lambda$. On suppose que P^{-1} admet une factorisation LU. Montrer qu'alors

$$\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i, \quad \forall\, i, \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} (A_k)_{ij} = 0, \quad \forall\, 1 \leq j < i \leq n.$$

- Implémenter cette méthode et vérifier numériquement que la vitesse de convergence dépend de $\max_i \; |\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}|$.
- Trouver des valeurs approchées des valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Observer la forme des matrices intermédiaires.