Définition et Propriétés de la Médiane

1 Définition Mathématique

La **médiane** d'une variable aléatoire réelle X est une valeur m qui sépare la distribution de probabilité en deux parties égales. Elle est définie par les deux conditions suivantes :

1. $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$
2. $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$

Pour une variable aléatoire continue de fonction de répartition F, la médiane est simplement la valeur m telle que :

$$F(m) = \frac{1}{2}$$

2 Lien avec les exercices

2.1 Minimisation de l'erreur absolue (Exercice 6)

Une propriété fondamentale de la médiane est qu'elle est la valeur a qui minimise la fonction d'écart absolu :

$$g(a) = \mathbb{E}|X - a|$$

Comme demandé dans l'exercice 6, pour une variable discrète uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_r\}$, cela revient à minimiser la somme des distances aux points.

2.2 Calcul pour les lois de l'exercice 5

À partir des fonctions de répartition calculées précédemment, nous pouvons déduire les médianes théoriques :

- **Loi Béta** $B(\alpha, 1)$ **:** On résout $F(m) = m^\alpha = \frac{1}{2}$, d'où :

$$m = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\alpha}$$

- **Loi de Weibull :** On résout $F(m) = 1 - e^{-\lambda m^\alpha} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $e^{-\lambda m^\alpha} = \frac{1}{2}$. En passant au logarithme :

$$-\lambda m^\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \implies m = \left(\frac{\ln(2)}{\lambda}\right)^{1/\alpha}$$

3 Comparaison avec la moyenne

Contrairement à l'espérance $\mathbb{E}[X]$, la médiane est robuste aux valeurs extrêmes (outliers). Dans l'exercice 7, bien que X soit symétrique sur $[-1, 3]$ (moyenne = médiane = 1), la transformation $Y = h(X)$ peut décaler ces deux valeurs l'une par rapport à l'autre selon la forme de h.

Énoncé

Montrer que si X est une variable aléatoire réelle, les médianes de X minimisent la fonction $a \mapsto \mathbb{E}|X - a|$. On commence par le cas d'une variable discrète uniforme sur $\{x_1, \dots, x_r\}$ avec $x_1 < \cdots < x_r$.

4 Cas discret uniforme

Soit X une variable uniforme sur $\{x_1, \dots, x_r\}$. La fonction à minimiser est :

$$g(a) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} |x_i - a|$$

Analyse de la dérivée

La fonction g est continue et dérivable par morceaux (sauf aux points x_i). Sa dérivée est :

$$g'(a) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} -\text{sgn}(x_i - a)$$

où $\text{sgn}(u) = 1$ si $u > 0$ et -1 si $u < 0$.

On peut réécrire cela en comptant le nombre de points à gauche et à droite de a :

$$g'(a) = \frac{1}{r}\left[\text{card}\{i : x_i < a\} - \text{card}\{i : x_i > a\}\right]$$

Condition d'optimalité

Le minimum est atteint lorsque la dérivée change de signe (ou s'annule) :

- Si r est impair ($r = 2k + 1$), $g'(a)$ change de signe exactement en $a = x_{k+1}$. La médiane unique est x_{k+1}.
- Si r est pair ($r = 2k$), $g'(a) = 0$ pour tout $a \in]x_k, x_{k+1}[$. Toutes les valeurs de cet intervalle (les médianes) minimisent $g(a)$.

5 Cas général (Variable à densité)

Soit f la densité de X. On veut minimiser $g(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - a| f(x)dx$. Décomposons l'intégrale :

$$g(a) = \int_{-\infty}^{a} (a - x)f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} (x - a)f(x)dx$$

En dérivant par rapport à a (en utilisant la règle de Leibniz) :

$$g'(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = P(X \leq a) - P(X > a)$$

Pour obtenir le minimum, on pose $g'(a) = 0$:

$$P(X \leq a) = P(X > a)$$

Comme $P(X \leq a) + P(X > a) = 1$, cela implique :

$$P(X \leq a) = \frac{1}{2}$$

Cette condition définit précisément la médiane de la variable X.