Exercice 4

Pour la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, voici les étapes demandées :

1. Déterminer le domaine de définition

La fonction $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est une fonction rationnelle. Elle est définie tant que le dénominateur n'est pas nul.
Il faut donc résoudre :

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

Le domaine de définition est donc :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. Calculer la dérivée

Pour calculer la dérivée de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, nous utilisons la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{(u/v)' = u'v - uv'}{v^2}$$

où $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x + 1$.

- La dérivée de $u(x) = x - 1$ est $u'(x) = 1$,
- La dérivée de $v(x) = x + 1$ est $v'(x) = 1$.

En appliquant la formule, nous avons :

$$f'(x) = \frac{(1)(x+1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

Simplifions l'expression :

$$f'(x) = \frac{x + 1 - x + 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

3. Tableau de variations

La dérivée $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ est toujours positive pour $x \neq -1$, car le carré est toujours positif et 2 est un nombre positif. Cela signifie que la fonction est **strictement croissante** sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

Il existe une asymptote verticale en $x = -1$, car la fonction n'est pas définie en ce point et tend vers $\pm\infty$ à proximité de cette valeur.

Asymptote horizontale

Il est utile de calculer la limite de la fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

La fonction admet donc une asymptote horizontale en $y = 1$.

Tableau de variations

Le tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ND	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		asymptote verticale		$\nearrow$

Conclusion

- Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Dérivée : $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, toujours positive sauf en $x = -1$.
- La fonction est strictement croissante et présente une asymptote verticale en $x = -1$ ainsi qu'une asymptote horizontale en $y = 1$.