

Examen - 19 décembre 2023 (durée : 2h)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique. Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + (2 - 3i)z - 5 - i = 0$
 (INDICATION : $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$)

2. Calculer $S = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^k$

Exercice 2 *Sommes et produits*

1. En utilisant les symboles \sum et/ou \prod , ré-écrire sous une forme plus compacte les expressions suivantes :

$$E_1 = \frac{5^3}{3} + \frac{6^3}{4} + \frac{7^3}{5} + \cdots + \frac{13^3}{11}$$

$$E_2 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 24}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times 47}$$

$$E_3 = \frac{1}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \cdots + \frac{a^{49}}{50}$$

2. On définit la somme $S = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}$

2.1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+2}$

- 2.2. En déduire la valeur de S .

Exercice 3 Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère le plan \mathcal{P} d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$ et les quatre points : $A(2, 1, -1)$ $B(-1, 2, 4)$ $C(0, -2, 3)$ $D(1, 1, -2)$.

Pour chacune des 6 affirmations suivantes, indiquer en justifiant votre réponse si elle est vraie ou fausse. TOUTE RÉPONSE NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE.

- (a) Les points A , B et C définissent un plan.
- (b) La droite (AC) est incluse dans le plan \mathcal{P} .
- (c) Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.

.../...

(d) Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{ (x, y, z) = \left(1 + 2\lambda, -\frac{1}{2} + 3\lambda, 1 - 4\lambda\right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(e) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

(f) Le point $E\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .

Exercice 4 Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = 1 + (x - 1)e^{-x}$

INDICATION POUR LE TRACÉ : $e^{-2} \simeq 0.135$

Exercice 5 Soient les fonctions $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

1. Déterminer la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = g(x)$.

2. Calculer $I = \int_1^e f(x) dx$

3. Soit $J = \int_1^e g(x) dx$. Par intégration par parties, montrer que $J = e - 2I$.

4. Quelle est la valeur de la surface grisée de la figure ci-dessous ?

