Bilan de connaissances

Exercice 1. Questions de cours.

(1) Définir la notion de convergence pour un schéma d'approximation explicite à un pas d'une équation différentielle d'ordre un avec condition de Cauchy.

(2) Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$. Énoncer et démontrer deux conditions nécessaires d'optimalité pour que f admette un minimum en $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Quadrature de Gauss.
Soit n un entier non nul. On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré plus petit que n, le produit scalaire

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$$

pour tout P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique 1, $X, \ldots,$ X^n, on obtient une base orthonormée P_0, $P_1, \ldots,$ P_n de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire ci-dessus. Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

(1) Calculer P_0 et P_1.

(2) Démontrer que P_n est de degré n.

(3) Justifier que $\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 0$ et en déduire que P_n a au moins une racine sur $[-1, 1]$.

(4) On souhaite montrer que P_n possède n racines simples sur $[-1, 1]$. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas et on note $t_1, \ldots, t_p$ avec $p < n$ les racines de P_n de multiplicités impaires sur $[-1, 1]$. On pose $Q = (t - t_1) \ldots (t - t_p)$ et $H = P_n Q$.

   a) Montrer que $\int_{-1}^{1} H(t)\, dt = 0$.

   b) Conclure.

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et
$a = x_0 < \cdots < x_N = b$ une subdivision pour un entier $N \geq 2$.

5. Justifier que pour $k = 0, \ldots, N-1$
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$
où $g(t) = f\left(x_k + (t+1)\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)$.

On est ainsi ramené à une intégrale sur $[-1,1]$.
Soit $-1 = t_0 < \cdots < t_N = 1$ une subdivision de $[-1,1]$. On note $L_N(g)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à g en les $(t_k)_{0\le k\le N}$ et $(l_k(X))_{0\le k\le N}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_N[X]$. Ainsi pour tout $k, l = 0, \ldots, N$ on a $l_k(t_l) = 1$ si $l = k$ et 0 sinon. On a de plus $L_N(g)(X) = \sum_{k=0}^{N} g(t_k) l_k(X)$. On définit alors l'approximation
$$J(g) = \sum_{k=0}^{N} g(t_k)\alpha_k$$
où $\alpha_k = \int_{-1}^{1} l_k(t)\,dt$ pour $k = 0, \ldots, N$.

6. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$. On dit que *la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n.*
7. Quelle méthode retrouve-t-on pour $N = 1$?

Dans la suite on prend pour points d'interpolation $(t_k)_{0\le k\le N}$ les $N+1$ zéros distincts du polynôme de Legendre P_{N+1}.

8. Soit $P \in \mathbb{R}_{2N+1}[X]$, on considère la division euclidienne de P par P_{N+1} de quotient Q et de reste R. Montrer que $J(QP_{N+1}) = \int_{-1}^{1} P_{N+1}(t)Q(t)\,dt$.
9. Conclure que cette méthode de quadrature est d'ordre au moins $2N+1$.
10. Démontrer que les poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ de cette méthode sont tous strictement positifs et calculer leur somme.

Exercice 3. Méthode des différences finies pour une équation différentielle d'ordre 2.
Soit α un réel strictement positif donné. On définit pour $n \geq 2$ la matrice tridiagonale $A_{n,\alpha}$ de taille $n \times n$ par :

$$A_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & -\alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $A_{n,\alpha}$ pour une valeur propre λ, et soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

a) Montrer que si $i_0 = 1$ ou $i_0 = n$, alors $|1 - \lambda| \leq \alpha$ (*indication : écrire la ligne i_0 de l'équation vectorielle $A_{n,\alpha}X = \lambda X$*).

b) Montrer que si $1 < i_0 < n$, alors $|1 - \lambda| \leq 2\alpha$.

c) En déduire que si $\alpha < \frac{1}{2}$, la matrice $A_{n,\alpha}$ est symétrique définie positive.

(2) Soit u une fonction de classe C^4 sur $[0, 1]$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2} = u''(x).$$

b) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer de plus que pour tout $x \in]0, 1[$, et tout $h > 0$ tel que $]x - h, x + h[\subset]0, 1[$,

$$\left| u''(x) - \frac{u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)}{h^2} \right| \leq \frac{Mh^2}{12},$$

où $M = \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|$.

Dans la suite de l'exercice, on se donne $\omega > 0$, a_0 et a_1 deux réels, et g une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. On cherche à résoudre de manière numérique l'équation différentielle suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} u''(x) - \omega^2 u(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in [0, 1] \\ u(0) = a_0 \\ u(1) = a_1 \end{cases}$$

On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ intervalles de longeur $h = 1/(n+1)$. On pose $x_k = k/(n+1)$, et on veut alors approcher par la méthode des différences finies les valeurs $u(x_k)$, pour u solution de l'équation, par des valeurs discrètes u_k pour k allant de 0 à $n+1$.

(3) À l'aide de l'estimateur de la dérivée seconde suggéré par la question 2a), déterminer quel système d'équations doit être vérifié par les u_k pour approcher l'équation différentielle (1). Quelles valeurs doit on prendre pour u_0 et u_{n+1} ?

(4) On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que le système d'équations de la question précédente peut s'écrire de manière matricielle sous la forme $A_{n,\alpha}U = B$, pour une valeur de α et un vecteur B que l'on précisera en fonction de ω, h, a_0, a_1 et des valeurs de g aux points x_k.

(5) Justifier que le système $A_{n,\alpha}U = B$ admet une unique solution.

(6) Si l'on veut résoudre ce système de manière numérique, quelle décomposition propre aux matrices symétriques définies positives peut-on utiliser ?

Quelle est la complexité de cette décomposition ? On ne demande ici pas de démonstration.

(7) Application numérique : on choisit $\omega = 3$, $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, et la fonction g définie par $g(x) = \frac{3}{x+1}$.

Que valent dans ce cas α et B ? Calculer alors les valeurs u_1 et u_2 approchant la solution u aux points $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.