Nombres de Markov

Définition : on appelle "nombre de Markov" un entier apparaissant dans un triplet de Markov $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$.

Quelques propriétés : · si (x,y,z) triplet de Markov

* Alors (x,y,z) sont premiers entre eux deux à deux

↳ preuve : si $d = \text{pgcd}(x,y)$ $\quad x = dx_1$, $y = dy_1$

alors $d^2(x_1^2+y_1^2) - 3d^2x_1y_1z = z^2$

donc $d^2 \mid z^2 \Rightarrow d \mid z$

or avec une décomposition en produit de nombre premiers on voit immédiatement l'absurdité (si $p^\alpha \mid x,y,z$ et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas l'un deux alors $p^{2\alpha} \mid x^2+y^2+z^2$ et $p^{2\alpha+1} \nmid x^2+y^2+z^2$ et $p^{3\alpha} \mid 3xyz$ donc $\alpha = 0$)

* Il existe uniquement deux triplets (à permutation près) qui comportent deux nombres identiques : si (x,y,z) nombres de Markov tels que $x=y$

Alors par ce qui précède $x=y=1$. (car premiers entre eux.

et $z^2 - 3z + 2 = 0$ a pour solution $\begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

on appelle ses deux triplets des triplets singuliers (et les autres sont dits non singuliers)

* Si (x,y,z) triplet de Markov alors on a

$z^2 + x^2+y^2 - (3xy)z = 0$ une autre solution pour $z' = 3xy - z$

Alors $z' \in \mathbb{N}$ et (x,y,z') est un triplet de Markov.
(car $\underbrace{z'^2 + x^2+y^2}_{\geq 0} = \underbrace{(3xy)}_{\geq 0} z'$)

* Puisqu'un triplet peut s'écrire à permutation près on appelle la forme norme d'un triplet (x,y,z) si $x \leq y \leq z$ (inégalité stricte pour les triplets non singuliers)

Soit donc (x,y,z) triplet normal non singulier

on peut créer trois autres triplets

(1) $\cdot\ (3yz - x\ ,\ y, z)$

(2) $\cdot\ (x, 3xz - y\ ,\ z)$

(3) $\cdot\ (x, y, 3xy - z)$

Toutefois on souhaiterais obtenir la forme normale : puisque qu'on a $0 < x < y < z$

alors on a pour (1) et (2) $3yz - x > 3z - z > z > y$ et $3xz - y > z > x$

D'où la forme normale de (1) et (2) est

(1) $(y, z, 3yz - x)$

(2) $(x, z, 3xz - y)$

Pour (3) on considère $f : t \longrightarrow t^2 - 3xyt + x^2 + y^2$
Dont les racines sont z et $3xy - z$.

or $f(y) = y^2 - 3xy^2 + x^2 + y^2 = x^2 + y^2(2 - 3x)$

or $x^2 < y^2$ et $2 - 3x < 0$ d'où $f(y) < 0$

ainsi on a y entre les deux racines de f, ie

$3xy - z < y < z$

(En fait on ne veut pas vraiment la forme normale mais surtout l'élément le plus grand du triplet qui est alors ici y).

⚠ Théorème : A l'aide de ses opérations sur les triplets, on peut se ramener aux triplets singuliers.

La on vient de voir que si (x,y,z) est un triplet singulier alors une opération permet de faire décroître le maximum du triplet strictement et on arrive nécessairement à un triplet singulier par récurrence.

On passe maintenant à une visualisation graphique des nombres de Markov.

Pour les deux premiers triplets les transformations donnent

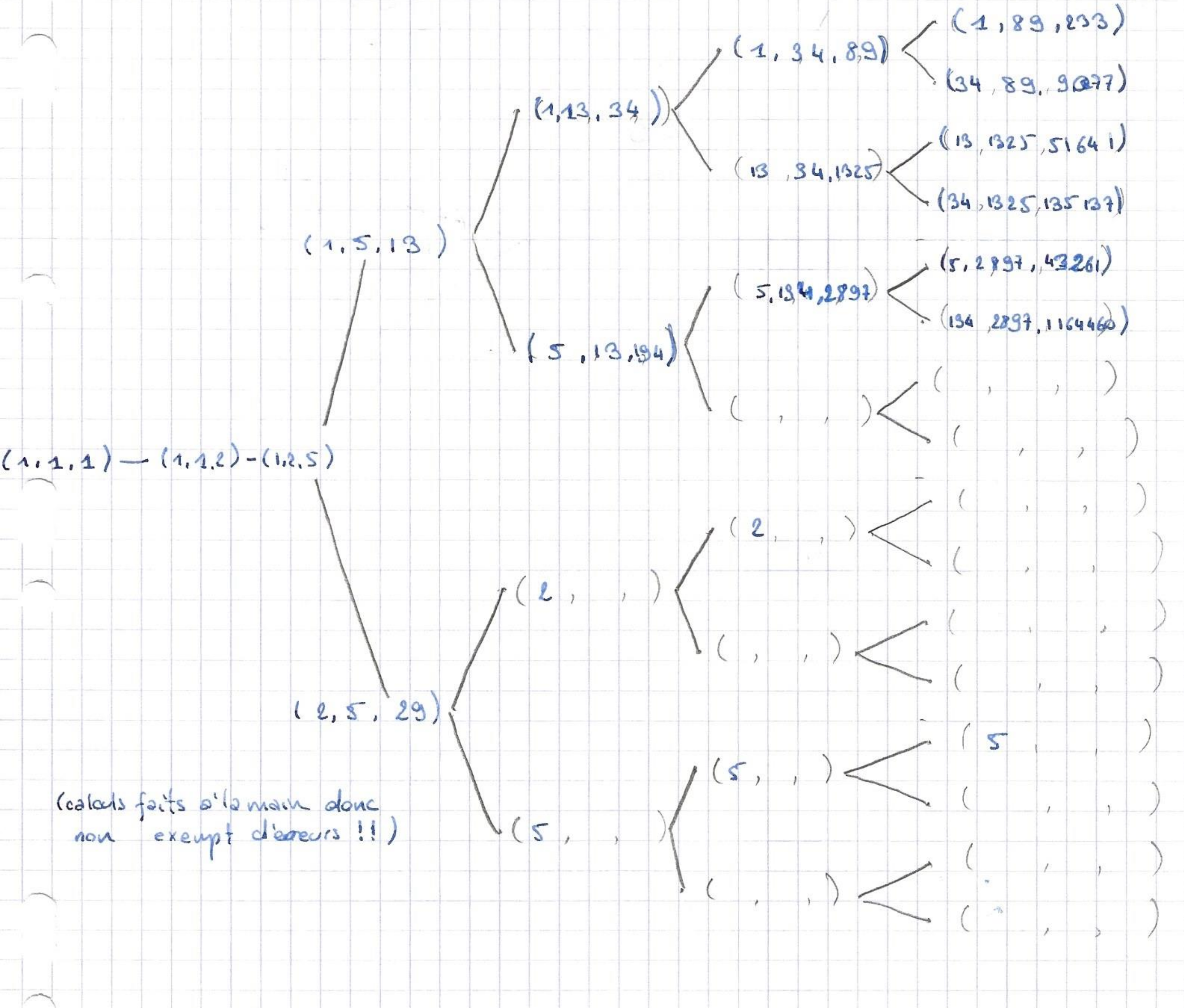
$(1, 1, 1)$ —— $(1, 1, 2)$ —— $(1, 2, 5)$

Ensuite pour un triplet non singulier (x,y,z) (forme normale)

on va le présenter de cette façon :

$$(x, 3xy - z, y) \;—\; (x,y,z) \begin{cases} (x, z, 3xz - y) \\ (y, z, 3yz - x) \end{cases}$$

Maintenant qu'on sait qu'on peut se ramener aux triplets singuliers par ces opérations on peut partir de $(1,1,1)$ et effectuer ces opérations pour obtenir tous les triplets possibles. De plus on remarque que c'est un arbre binaire (à l'exclusion des deux premiers sommets.



(calculs faits à la main donc non exempt d'erreurs !!)

on peut le visualiser sur un arbre de Markov :