Exo 4

1/ Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\det AB = \det A \det B$

A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

B inversible $\Leftrightarrow$ $\det B \neq 0$

A, B inversible $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ $\Rightarrow$ $\det AB = \det A \det B \neq 0$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ car $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$$= B^{-1} I_n B$$
$$= B^{-1} B$$
$$= I_n$$

de même $AB(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

2/ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

on a que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \Rightarrow I_n = {}^tI_n = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})\,{}^tA$

$\Rightarrow ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Exo 5/

1/ $\det M = 8$

$= -(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\,2 + (2\sqrt{3})^2$

$= -2(3-1) + 4\times 3 = 12-4$

2/ $M^3 = 8 I_n$ à verifier

3/ $M^3 = 8I_n \Rightarrow M\,M^2 = 8I_n$

$\Rightarrow M\left(\frac{1}{8}M^2\right) = I_n$

$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{8}M^2$

Exo 7

$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ pas inversible $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ perp aux colonnes

$\Rightarrow \operatorname{Im} A \subset \{x+y-z=0\}$

> Si une matrice est triangulaire
> alors det = produit des coeffs sur la diagonale
>
> Ex $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$ $\det \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} = 1$

Pivot de Gauss pour trouver son inverse

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - L_4$
$L_2 \to L_2 - L_4$
$L_3 \to L_3 - 3L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

vous devez remplir les cases vides

$L_1 \to L_1 - L_3$
$L_2 \to L_2 - 2L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

$L_1 \to L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 24$ son inverse $= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & -1/12 \\ 0 & 1/3 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$