Exercice 1. Soit P une matrice transposée d'une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice carrée de taille N dont les coefficients vérifient

$$a_{ij} \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1$$

la somme des coefficients d'une colonne donnée vaut 1.
L'algorithme PageRank de Google construit une telle matrice à partir du graphe connectant les pages web entre elles en posant $a_{ij} = \frac{1}{n_j}$ si la page j pointe vers la page i et 0 sinon, avec n_j le nombre de liens émis par la page j (chaque lien représente en quelque sorte un vote, dont le poids est pondéré par le nombre de liens). Par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

correspondrait à un web jouet de 5 pages où la page 1 pointe vers les pages 3 et 5, la page 2 vers la page 3, la page 3 vers 1, 2, 4, 5, la page 4 vers les pages 3 et 5 et la page 5 vers elle-même.
On s'intéresse à l'équation :

$$r = (1-\alpha)Pr + \alpha\frac{1}{N}(1, ..., 1), \quad \alpha \in]0,1[$$

Dans PageRank $\alpha = 0.15$ et r_j donne le rang de classement de la page j

1. Déterminer la norme de P comme application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ subordonnée à la norme L^1 dans $\mathbb{R}^N$
$$|||P|||_1 = \max_{\{r/\|r\|_1=1\}}\|Pr\|_1, \quad \|r\|_1 = \sum_{j=1}^{N}|r_j|$$
2. En déduire que la méthode du point fixe permet de résoudre le problème.

Exercice 2. Domaine de Gershgorin
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $1 \leq i \leq n$, D_i la boule fermée dans $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.
Le domaine de Gershgorin, qu'on notera $\mathcal{G}(A)$ est la réunion des disques D_i pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathcal{G}(A)$.

Exercice 3. (Méthode de la puissance) Soit $A = \begin{pmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 1 & 100 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et en utilisant l'exercice précédent que ses valeurs propres appartiennent à $[97, 102]$.
2. Déterminer par la méthode de la puissance une approximation de la plus grande valeur propre de A.

   Pour ceci, on écrira une fonction qui donnera une valeur approchée de la plus grande valeur propre, une valeur approchée d'un vecteur propre associé et le nombre d'itérations utilisées pour ce calcul. La fonction aura comme argument une matrice carrée, un nombre d'iterations maximales (pour un test d'arrêt) et epsilon mesurant une erreur maximale.
3. Expliquer pourquoi en appliquant la méthode de la puissance à $A - 97I_3$, on accélere la convergence.
4. Que se passe t-il si on applique la méthode de la puissance à $A - \gamma I_3$ si γ est la valeur trouvée à la question 2) ?

Exercice 4. (élimination)
Soit A une matrice réelle de taille n. On suppose que les valeurs propres de A notées $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont deux à deux distinctes et vérifient :

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n|$$

On note u_i un vecteur propre associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.

1. Montrer que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sont les valeurs propres de ${}^tA$. On note v_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i, pour $1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que si $i \neq j$, $\langle u_i, v_j \rangle = 0$. (On pourra calculer $\langle Au_i, v_j \rangle$ de deux manières).
   Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle u_i, v_i \rangle \neq 0$.
3. Soit $B = A - \lambda_n \frac{u_n \, {}^tv_n}{\langle u_n, v_n \rangle}$. Montrer que les valeurs propres de B sont $\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$.
4. Donner une méthode utilisant la méthode de la puissance appliquée plusieurs fois pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de A et de ses vecteurs propres.

   L'appliquer à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 5. (valeurs propres conjuguées)
Si A est une matrice réelle, sa plus grande valeur propre en module n'est pas forcément réelle, A peut avoir un couple de valeurs propres complexes conjuguées de module maximal. On peut appliquer la méthode de la puissance à un shift de A dans le complexe, par exemple $A - iI$, on peut aussi rester dans le réel en cherchant une relation de récurrence approchée $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n$ (où $u_{n+1} = Au_n$ et u_0 aléatoire). Programmer les deux méthodes et comparer l'efficacité avec une matrice aléatoire réelle de taille 4 (non symétrique).

Exercice 6. (itérations inverses)
Lorsqu'on a effectué quelques itérations de la méthode de la puissance, on a une première approximation λ de la valeur propre de module maximal. Il peut alors être intéressant d'effectuer la méthode de la puissance sur la matrice $(A - \lambda I)^{-1}$. Programmer cette méthode et discuter les avantages (vitesse de convergence) et inconvénients (précision du calcul de l'inverse). Testez sur l'une des matrices de la feuille.

Exercice 7. Utiliser la méthode de la puissance pour déterminer la norme triple d'une matrice subordonnée à la norme euclidienne.

Exercice 8. Utiliser la méthode QR pour trouver des valeurs approchées des valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observer la forme des matrices intermédiaires. Pour une matrice générale, on utilise la forme de Hessenberg avant de faire la méthode QR.

Exercice 9. Si A est une matrice symétrique, et si $\|(A - \lambda)u\| \leq \varepsilon \|u\|$, montrer que la distance de λ au spectre de A est inférieure à ε (on pourra utiliser une base orthonormale de vecteurs propres de A).

Exercice 10. On considère l'équation différentielle

$$-u'' + \alpha u = f, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

1. Discuter en fonction de α le nombre de solutions pour $f = 0$. Comparer les conditions aux bords avec le cas des conditions initiales $u(0) = 0, u'(0) = 0$.
2. On pose $\alpha > 0$. Déterminer a et l de la formulation "faible" de cette équation $a(u, v) = l(v)$ pour tout v de classe C^1 par morceaux nulle aux bords.
3. Montrer que a est symétrique définie positive.

4. Vérifier que la solution de $a(u,v)=l(v)$ est un extrêmum de $J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-l(u)$ (formulation variationnelle de l'équation différentielle).

5. Soit $N \geq 2$, $h=1/N$ et $x_k=kh=k/N$ pour $k=0,..N$.
   Pour $1 \leq k \leq N-1$, on note $\phi_k(x)=\max(0,1-|(x-x_k)/h|)$ la fonction atteignant son maximum 1 en x_k et de pente $\pm 1/h$ entre $[x_{k-1},x_{k+1}]$.
   On va chercher le minimum de J sur l'espace vectoriel E de dimension finie engendré par les fonctions ϕ_k (c'est la projection orthogonale par rapport au produit scalaire induit par a de la solution sur E, pourquoi ?) Déterminer $a_{j,k}=a(\phi_j,\phi_k)$, $l_k=l(\phi_k)$.

6. Montrer que le minimum u de J sur E vérifie $a(u,v)=l(v)$ pour tout $v \in E$. En déduire une matrice A telle que $A(u(x_j))_{j=1..N-1}=(l_j)_{j=1..N-1}$.

7. Déterminer $u(x_j)$ puis u.

8. Tracer sur une même figure u et la solution exacte pour $f(t)=1$ et pour $f(t)=t(1-t)$ pour $N=3$ et $N=10$.

9. Pour N grand, quel est le cout de l'étape matricielle de la résolution par le pivot de Gauss ? Comparer avec la méthode de Jacobi.

10. Que faut-il modifier lorsque α dépend de x ? Comment se compare cette méthode avec la méthode des différences finies de la feuille 1 ?

Exercice 11. Soit P un polynôme unitaire de degré $d>0$ à coefficients réels (ou complexes)

$$P=x^d+p_{d-1}x^{d-1}+...+p_1x+p_0$$

On suppose que P admet une seule racine de module maximal, que l'on notera z. On souhaite trouver une approximation de z par une méthode combinant la méthode de la puissance et de Newton. Par exemple pour fixer les idées et tester :

$$P=x^7-11x^4+5x-55, \quad d=7$$

1. On construit une matrice compagnon M de P (commande `M:=tran(companion(P))` de Xcas) définie par :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & ... & -p_{d-2} & -p_{d-1} \end{pmatrix}$$

   on admettra que le polynôme caractéristique de M est P. Expliquer pourquoi la méthode de la puissance appliquée à M permet de déterminer la racine z de P.

2. En utilisant la structure particulière de la matrice M, expliquer comment on peut calculer efficacement $v_{n+1}=Mv_n$ à partir de la liste l des coefficients de P par ordre croissant (`l:=revlist(symb2poly(P,x))`) en $O(d)$ opérations.

3. Étant donné un petit réel $\varepsilon>0$, quel test d'arrêt vous parait le plus judicieux pour stopper le calcul des v_n ? Pourra-t-on certifier que l'estimation de la valeur propre obtenue sera proche à ε près de z ?

4. Programmer l'algorithme en passant en paramètre la liste `l` et le petit réel `eps` (on pourra utiliser `v[1..d-1]` qui extrait les éléments de `v` d'indice `1` à `d-1` inclus, `dotprod(l,v)` effectue le produit scalaire de `l` et `v` en tronquant le vecteur le plus long lorsqu'ils ne sont pas de taille égale, et les instructions `append` et `normalize`)

5. Dans les questions suivantes, sauf la dernière, on travaille sur l'exemple. Donner une estimation z_4 de z pour l'exemple pour ε=`1e-4` et z_8 pour ε=`1e-8`. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour obtenir cette estimation ? Pouvait-on s'y attendre ?

6. Afin d'accélérer le calcul, on se propose d'utiliser la suite itérative u_n de la méthode de Newton en partant de $u_0 = z_4$. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle précision peut-on espérer en effectuant 2 itérations ?

7. Calculer u_2. Proposer un raisonnement pour majorer l'erreur $|u_2 - z|$ et calculer ce majorant.

8. Si on souhaite généraliser la méthode ci-dessus à un polynôme unitaire quelconque (sans faire l'hypothèse de l'existence d'une unique racine de module maximal), quels sont les obstacles prévisibles ? Comment peut-on les contourner ?