Exo 1

Quels sont les ss espaces du

$\mathbb{R}$ - 0 $\{0\}$ est tjrs un ss espace !

- $\mathbb{R}$ l'espace tt entier aussi

Si $E \subset \mathbb{R}^2$ est ss espace vectoriel

$\dim E = ??$

Rappels

Soit $f \; E \to \mathbb{R}$ une application linéaire
alors $f^{-1}(\{0\}) = \{v, f(v) = 0\}$ est ss e v

i) $0 \in f^{-1}(\{0\})$ car $f(0) = 0$

ii) soient $x, y \in E$ avec $f(x) = f(y) = 0$

Alors $f(x+y) = f(x) + f(y)$ car f linéaire

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x + y \in f^{-1}(\{0\})$

iii) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f(x) = 0$

Alors $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$= \lambda 0$ f linéaire

$= 0$

Soient $F_1, F_2 \subset E$ ss esp linéaire
alors $F_1 \cap F_2$ est aussi

i) $0 \in F_1 \quad 0 \in F_2 \Rightarrow 0 \in F_1 \cap F_2$

ii) $x, y \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x, y \in F_1 \Rightarrow x + y \in F_1$

$x, y \in F_2 \quad x + y \in F_2$

$\Rightarrow x + y \in F_1 \cap F_2$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$
$x \in F_1 \cap F_2$ similaire à verifier

Exo 2

1) f $(x,y,z) \mapsto x+y-7z$ app linéaire

$E_1 = f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow$ ss esp vectoriel

2) E_2 n'est pas

$(0,0,0) \in E_2$ $4 \times 0 + 5 \times 0 - 0 = 0 \neq 1$

3) E_3 n'est pas

verifier que $(0,0,0) \notin E_3$

4) $E_4 = E_1 \cap F$

$E_1 = \{x+y-7z = 0\}$

$F = \{x-y = 0\} = g^{-1}(\{0\})$

$g(x,y,z) = x-z$

5) E_5 non

verifier que $(1,-1,0) \in E_5$ et ??

$(1,1,0) \in E_5$

Exo 3 $V = \{\text{polynômes degré} \leqslant d\}$

$= \{\sum_0^n a_i X^i,\ a_i \in \mathbb{R}\}$

i) $0_V = \sum_0^d 0 X^i$

ii) Soient $P(X) = \sum_0^d a_i X^i$

$Q(X) = \sum_0^d b_i X^i$

mq $(P+Q)(X)$ est de degré $\leqslant d$

iii) Mq si $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda P(X)$ est de degré $\leqslant d$

Exo 4

1/ Montrer que $P \mapsto P(2)$ est app linéaire

2/ Montrer que $P \mapsto P'(2)$ est app linéaire

3/ Montrer que $2 \in F_3$ et faire le produit
$x - 2 \in F_3$

4) Montrer que si f, g $E \to \mathbb{R}$ linéaire
alors $f+g$ est linéaire aussi

Prendre f, g dans 1/, 2/ ci dessus

5/ F_5 n'est pas linéaire justifier