Exercice 1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, $(h_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$ suivantes définies sur les intervalles I spécifiés. Trouver des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = xne^{-xn} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = (\sin x)^n \text{ sur } \mathbb{R};$$

la fonction $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, définie pour tout $n \geq 1$ par $k_n(x) = 0$ si $x \leq -1/n$, $k_n(x) = 1$ si $x \geq 1/n$, avec k_n affine sur l'intervalle $[-1/n, 1/n]$.

$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{x}{x+n} \leqslant \frac{x}{n} \Rightarrow f_n(x) \to 0 \quad \forall x$

c.à.d CVS

mais $\sup |f_n(x)| \geqslant f_n(n) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow$ pas CVU

$g_n(x) = (xn)\, e^{-xn} \to 0 \quad \forall x \geqslant 0$ car exp importe sur poly

$\sup |g_n| \geqslant g_n(1/n) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ pas CVU

le domaine de CVS pour $\sin^n x$

$= \{x,\ \sin^n x \geqslant 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

$\sin^n x \to 1$ si $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{N}$

$\phantom{\sin^n x \to{}} 0$ sinon

$\sin^n x$ cont sur dom CVS mais limite ne l'est pas

$\Rightarrow$ pas CVU

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions c_n et s_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Quels sont les domaines de convergence simple des suites de fonctions $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 0}$? (indication : on pourra penser à utiliser les formules $\cos(a+b) = \cdots$ et $\sin(a-b) = \cdots$)

$a_n \to L \Rightarrow a_{n+1} \to L$

$a_{2n} \to L$

On a l'identité trig

$\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$

$C_{n+1} = \cos x \, C_n - \sin x \, S_n \Rightarrow S_n = \dfrac{\cos x \, C_n - C_{n+1}}{\sin x} \quad x \neq 0$

Si $C_n \to L$ alors $C_{n+1} \to L$

$\Rightarrow \quad S_n \to \dfrac{(\cos x - 1)}{\sin x} L = L'$

d même si S_n CV alors C_n CV

On a aussi

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow L = 2L^2 - 1$

$\Rightarrow 2L^2 - L - 1 = 0$

$\Rightarrow L = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

donc $L \in \{1, -\frac{1}{2}\}$

$\sin 2nx = 2 \sin nx \cos nx \to 2L' L \Rightarrow L' = 2L' L$

$\to L'$

$\Rightarrow L'(1-2L) = 0$

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ des dérivées. Que peut-on constater ?

1/ $\|f_n\| = \sup_x |f_n(x)| = \frac{1}{n} \sup_x |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow$ CVU sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ CVS

facile à voir $f_n(x) \to 0 \ \forall x$

$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq \frac{1}{n} \to 0$

2/ $f_n'(x) = \cos(nx)$

on vient d voir $\cos nx$ CV $\Leftrightarrow$ $x = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

domaine de CVS $= \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow f_n' \not\to f'$ où $f = \lim f_n$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1/ $f_n(t) \to \sqrt{t^2} = |t|$ CVS

$0 \leq f_n(t) - |t| = \sqrt{t^2 + 1/n} - \sqrt{t^2} = \dfrac{t^2 + 1/n - t^2}{\sqrt{t^2+1/n} + \sqrt{t^2}} \leq \dfrac{1/n}{1/\sqrt{n}} = 1/\sqrt{n} \to 0$

donc par le thm des gendarmes $\|f_n(t) - |t|\| \to 0 \Rightarrow$ CVU

2/ $f_n'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1/n}} \xrightarrow[\text{CVS}]{} g(t) = \begin{cases} t/|t| & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

$f_n'(t)$ cont $\forall n \geq 1$ mais $g(t)$ ne l'est pas $\Rightarrow$ pas CVU

Exercice 6. Lemme de Pólya

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $[a,b]$ convergeant vers l.

Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $f(l)$.

Peut-on supprimer l'hypothèse de convergence uniforme ?

On veut $|f_n(x_n) - f(\ell)| \to 0$, $n \to \infty$

On a par l'inégalité triangulaire

$$0 \leq |f_n(x_n) \underbrace{- f(x_n) + f(x_n)}_{=0} - f(\ell)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)|$$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\| \to 0 \quad \text{car } f_n \xrightarrow[\text{CVU}]{} f$$

$$|f(x_n) - f(\ell)| \to 0 \quad \text{car } x_n \to \ell \text{ et } f \text{ cont en } \ell$$

D'après le thm des gendarmes $|f_n(x_n) - f(\ell)| \to 0$

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

Etudier la convergence simple de cette suite.

Montrer de plusieurs façons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout ensemble du type $I_a =]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ où $a > 0$.

$$\frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \sim \frac{2^n x}{n 2^n x} = \frac{1}{nx} \to 0 \quad x \neq 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0 \ \forall x \neq 0$$

$$f_n(0) = 0$$

$\Rightarrow$ $f_n \to$ fonction cste $= 0$

CVS

$$\|f_n\| = \sup |f_n(x)| \geq |f_n(\tfrac{1}{2^n})| = \frac{1}{1+n/2^n} \geq \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow \text{pas CVU}$$

$|x| \geq a > 0$

$$\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\right| \leq \frac{2^n |x|}{n 2^n x^2} = \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sup_{I_a} |f_n(x)| \leq \frac{1}{na} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

donc on a CVU sur $I_a = \{x,\ |x| \geq a\}$

Exercice 8. Trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

(i) pour tout entier n, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge (i.e. est finie) ;
(ii) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f ;
(iii) l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge (i.e. est finie) ;
(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ ne tende pas vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ quand n tend vers $+\infty$.

On a trouvé f_n qui verifient
$\int_{-\infty}^{\infty} f_n = 1$

$f(0) = \|f_n\| = \sup |f_n(t)| \to 0$ càd $f_n \to 0$

$f_n \geq 0 \Rightarrow \|f_n\| = \sup f_n$

On peut choisir $f \geq 0$, paire, bornée
avec $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$

puis $f_n(t) = \frac{1}{n} f(t/n)$

On a $\|f_n\| = \frac{1}{n} \|f\| \to 0, n \to \infty$

et $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} f(t/n)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/n)\, dt/n$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds$ changement de var $s = t/n$
$\Rightarrow ds = dt/n$

Exercice 9. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sin(x^n(1-x))$.

1) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Qu'en déduit-on pour la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$?

4) Est-ce que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ?

5) Est-ce que cette suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$?

$f_n(x) = \sin g_n(x)$ où $g_n(x) = x^n(1-x)$

Rappel $\sin x \leqslant x$ $\forall x \geqslant 0$ Exo utiliser TAF pour montrer s

1/ Sin est cont donc si $g_n(x) \to g(x)$

alors $f_n(x) \to \sin g(x)$

$g_n(0) = g_n(1) = 0$ et on va mq $g_n \xrightarrow[\text{CVS}]{} 0$

Si $0 < x < 1$ $0 \leqslant g_n(x) = x^n(1-x) < x^n \to 0$ $n \to +\infty$

donc $g_n(x) \to 0$ et on a déja traiter les cas exceptionels

2/ $0 \leqslant \sin g_n(x) \leqslant g_n(x) \Rightarrow \|f_n\| \leqslant \|g_n\|$

et il convient de mq $\|g_n\| \to 0$

g_n dérivable et on cherche ses pts crits

$g'_n(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x) \Rightarrow$ 2 pts crit

$x = 0$ min

$x = n/n+1$ max

on a $\|g_n\| = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{<1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$

$\Rightarrow$ CVU

3/ Thm du cours $f_n \xrightarrow[CVU]{} f$ sur $[a,b]$

alors $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

On a CVU sur $[0,1] \Rightarrow$ intégrales CV

4/ on va commencer par

$g_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x) \to h(x) = \begin{cases} 0 & \text{car } x^{n-1} \to 0,\ 0 \leq x < 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$

Maintenant

$$f_n'(x) = \frac{d}{dx} \sin g_n(x) = \underbrace{g_n'(x)}_{\to h(x)} \times \underbrace{\cos g_n(x)}_{\to \cos 0 = 1} \xrightarrow[CVS]{} h(x)$$

Exercice 10.

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \arctan(x/n)$.

1) Montrer que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

2) Sur quels domaines la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément ?

Rappel $\quad \frac{d}{dt} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{d}{dt} f_n = \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}$

1/

$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+0^2} = 1 \Rightarrow \|f_n'\| = \sup_t |f_n'(t)| = \frac{1}{n} \sup_t \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{n} \to 0$

donc $f_n' \xrightarrow[CVU]{} 0$

En revanche $\quad f_n \xrightarrow[CVS]{} 0 \quad$ mais $\quad \|f_n\| = 1$

On a $\quad f_n(x) = \arctan \frac{x}{n} = \arctan u_n \quad$ où $v_n = \frac{x}{n} \to 0, n \to \infty$

arctan est cont en $0 \Rightarrow f_n(x) = \arctan u_n \to \arctan 0 = 0$

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1 \Rightarrow \sup f_n \geq 1 \Rightarrow \|f_n\| \geq 1 \not\to 0, n \to \infty \Rightarrow$ pas CVU

Sinon $\quad \|f_n\| = \sup_t |f_n(t)| \geq |f_n(n)| = \arctan 1 = \pi/4 \not\to 0 \Rightarrow$ pas CVU

2/ $\quad$ Si $x \geq 0$

$\arctan x \leq x \Leftrightarrow x - \arctan x \geq 0$

arctan im paire $\quad |\arctan x| \leq |x|$

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n} \Rightarrow \sup_{|x|<a} |f_n(x)| \leq \frac{a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$ CVU sur $\{|x|<a\} = [-a, a]$

On peut obtenir l'inegalité avec TAF

$g(x) = x - \arctan x \qquad g(0) = 0$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0 \quad \overset{TAF}{\Rightarrow} \quad g(x) \geq 0$