

# Topologie du point de vue différentiable

## Classification des variétés de dimension 1

L. Bissay      T. Feijoo

3 février 2026

### Résumé

Lors de cette présentation, nous proposons de présenter deux manières différentes de prouver un théorème sur les variétés de dimension 1 qui permet de les classifier (une venant de J. Milnor, l'autre de V. Guillemin et A. Pollack). Enfin, nous discuterons du cas (plus difficile) des dimensions supérieures.

## Table des matières

I   Preuve de J. Milnor	2
II   Preuve de V. Guillemin et A. Pollack	6
III Cas de la dimension supérieure	7
III.a Cas (résolus) des variétés de dimensions 2 et 3 . . . . .	7
III.a.1 En dimension 2 – on "agite" les mains . . . . .	7
III.a.2 En dimension 3 – Géométrisation et théorème de Perelman	8
III.b Et en dimension plus grande que 4 ? . . . . .	8

# I. Preuve de J. Milnor

Dans cette partie, nous nous proposons de prouver la version suivante du théorème de classification :

**Théorème (Classification des variétés de dimension 1 – V.1)** — Toute variété lisse connexe de dimension 1 est difféomorphe au cercle  $\mathbf{S}^1$  ou à un intervalle de  $\mathbf{R}$  (et donc à  $[0, 1]$ ,  $[0, 1[$  ou  $]0, 1]$ ).

Pour la preuve de ce théorème, nous fixons  $M$  une variété lisse et connexe de dimension 1 et nous allons utiliser la notion de *paramétrisation à vitesse 1* dont voici la définition :

**Définition** — Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Une application  $f : I \rightarrow M$  est une *paramétrisation à vitesse 1* lorsque

1.  $f(I)$  est ouvert dans  $M$  ;
2.  $f$  est un difféomorphisme sur son image ;
3. pour tout  $t \in I$ ,  $\|f'(t)\| = 1$ .

**Remarque** — Toute paramétrisation  $f : I' \rightarrow M$  peut être transformée en une paramétrisation à vitesse 1 par le changement de variable :

$$\begin{aligned} u : I' &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto \underbrace{\int_0^t \|f'(s)\|}_{>0} \, ds \quad \text{donc } u \text{ inversible} \\ I &:= u(I') \\ g &:= f \circ u^{-1} : I \rightarrow M. \end{aligned}$$

On vérifie alors que pour tout  $s \in I$ , on a bien

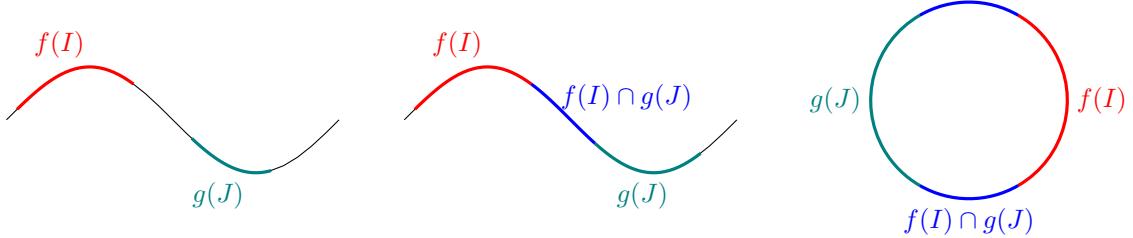
$$\begin{aligned} g'(s) &= (u^{-1})'(s) f'(u^{-1}(s)) = \frac{1}{u'(u^{-1}(s))} f'(u^{-1}(s)) \\ &= \frac{f'(u^{-1}(s))}{\|f'(u^{-1}(s))\|} \end{aligned}$$

de norme 1.

**Lemme** — Soient  $f : I \rightarrow M$  et  $g : J \rightarrow M$  deux paramétrisations à vitesse 1. Alors  $f(I) \cap g(J)$  a au plus deux composantes connexes et alors

- s'il y a une composante connexe, alors on peut étendre  $f$  à une paramétrisation à vitesse 1 de  $f(I) \cup g(J)$  ;
- s'il y a deux composantes connexes, alors  $M$  est difféomorphe à  $\mathbf{S}^1$ .

Pour une interprétation graphique :



**FIGURE 1** – Les 3 différentes possibilités

**Preuve** — Supposons  $f(I) \cap g(J) \neq \emptyset$ . Posons alors

$$\begin{aligned}\tilde{I} &:= \{s \in I \mid f(s) \in g(J)\} \\ \tilde{J} &:= \{t \in J \mid g(t) \in f(I)\}\end{aligned}$$

ouverts dans  $I$  et  $J$  respectivement. On considère alors le difféomorphisme  $h = g^{-1} \circ f : \tilde{I} \rightarrow \tilde{J}$ . On a alors pour tout  $t \in \tilde{J}$ , comme  $f$  et  $g$  sont des paramétrisations à vitesse 1,

$$|h'(t)| = |d(g^{-1})_{f(t)}(f'(t))| = \frac{\|f'(t)\|}{\|g'(g^{-1}(f(t)))\|} = 1.$$

Puis intéressons-nous à  $\Gamma \subseteq \tilde{I} \times \tilde{J} \subseteq I \times J$  défini par

$$\Gamma := \{(s, t) \in \tilde{I} \times \tilde{J} \mid f(s) = g(t)\} = \{(s, h(s)) \mid s \in \tilde{I}\}$$

le graphe de  $h$ . Puis, en posant

$$\begin{aligned}\Phi : I \times J &\longrightarrow M \\ (s, t) &\longmapsto f(s) - g(t)\end{aligned}$$

qui est continue, on a  $\Gamma = \Phi^{-1}(\{0\})$  et donc  $\Gamma$  est un fermé de  $I \times J$ . Puis comme  $h$  est de vitesse 1,  $\Gamma$  est donc formé de segments disjoints de pente  $\pm 1$ .

Puis  $h$  étant un difféomorphisme, et  $\tilde{I}$  et  $\tilde{J}$  étant des ouverts de  $I$  et  $J$ , on en déduit que ces segments vont "jusqu'au bord de  $I \times J$ ".

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe  $(s, t) \in \Gamma$  avec  $h'(s) = 1$  et  $\delta_1 > 0$  tels que  $(s + \delta_1, t + \delta_1) \in (I \times J) \setminus \Gamma$ . maximality?

On pose

$$\delta_0 := \inf \{\delta \geq 0 \mid (s + \delta, t + \delta) \notin \Gamma\} \leq \delta_1$$

et par fermeture de  $\Gamma$  dans  $I \times J$ ,  $(s_0, t_0) := (s + \delta_0, t + \delta_0) \in \partial((I \times J) \setminus \Gamma)$ , i.e  $(s_0, t_0) \in \Gamma$ , et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad (s_0 + \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \notin \Gamma.$$

Or  $\tilde{I} \times \tilde{J}$  étant un ouvert de  $I \times J$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$[s, s_0 + \varepsilon] \times [t, t_0 + \varepsilon] \subset \tilde{I} \times \tilde{J}.$$

Comme  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $h'(s) = 1$ , on a

$$h'_{|[s, s_0 + \varepsilon[} \equiv 1$$

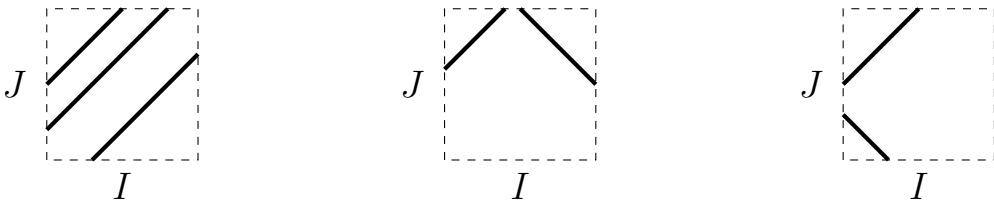
et pour tout  $u \in [s, s_0 + \varepsilon[$ ,

$$h(u) = h(s_0) + u - s_0 = t_0 + u - s_0.$$

En évaluant en  $u = s_0 + \frac{\varepsilon}{2}$ , on obtient alors

$$h\left(s_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = t_0 + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc  $(s_0 + \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \in \Gamma$ , ce qui est absurde. Le cas  $h'(s) = -1$  se traitant de manière symétrique, on a donc bien obtenu que les segments vont "jusqu'au bord".

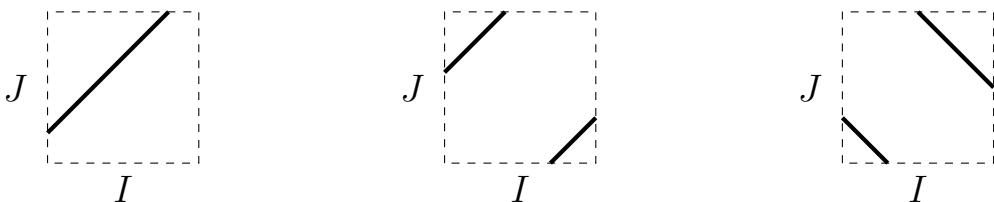


**FIGURE 2** – Quelques (fausses) possibilités pour  $\Gamma$

Cependant, comme  $\Gamma$  est le graphe d'une fonction, on ne saurait être dans le cas de la figure de gauche ou celle de droite (certains points de  $I$  auraient plusieurs images par  $h$ ). Notamment, on ne saurait avoir plusieurs segments finissant sur le même "bord vertical".

De plus,  $h$  étant bijective, on ne pourrait pas être dans le cas de la figure du milieu car alors des points de  $J$  auraient plusieurs antécédents par  $h$ . Notamment, au plus un segment peut se finir sur un "bord horizontal".

De ces deux observations, on déduit qu'il y a au plus un segment pouvant se finir sur chacun des bords et donc que  $\Gamma$  a au plus deux composantes connexes. De plus, si on a deux composantes connexes, elles ont donc nécessairement même pentes.



**FIGURE 3** – Quelques (vraies) possibilités pour  $\Gamma$

Traitons d'abord le cas où  $\Gamma$  a une seule composante connexe (cas de la figure de gauche dans la figure 3). On peut alors étendre  $h$  à une fonction affine de pente

$\pm 1$  notée  $L : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . De plus,  $f$  et  $g \circ L$  coïncident sur  $I \cap L^{-1}(J)$ , ce qui permet alors de poser

$$\begin{aligned} F : I \cup L^{-1}(J) &\longrightarrow f(I) \cup g(J) \\ s &\longmapsto \begin{cases} f(s) & \text{si } s \in I \\ g(L(s)) & \text{si } s \in L^{-1}(J) \end{cases} \end{aligned}$$

qui est alors bien une paramétrisation à vitesse 1.

Dans le cas où  $\Gamma$  a deux composantes connexes, remarquons qu'alors, par injectivité de  $h$ , on a nécessairement  $I$  et  $J$  bornés. On se restreint au cas où la pente est de 1 (le cas où la pente vaut  $-1$  se traitant de manière symétrique).

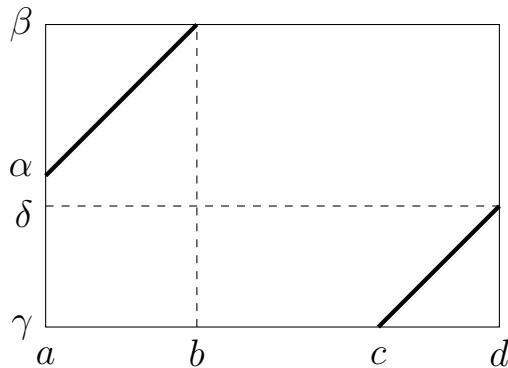


FIGURE 4 – Un exemple pour notre cas

La pente de  $+1$  impose que  $\delta - \gamma = d - c$ , et on peut alors translater  $J$  pour supposer que  $\gamma = c$  et  $\delta = d$ . Dans ce cas, on a alors

$$\inf(I \cup J) = \inf I = a < b \leq c < d \leq \alpha < \beta = \sup J = \sup(I \cup J).$$

À  $t \in I \cup J$ , on associe  $\theta_t = \frac{2\pi t}{\alpha-a}$ , et on pose

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{S}^1 &\longrightarrow M \\ (\cos \theta_t, \sin \theta_t) &\longmapsto \begin{cases} f(\theta_t) & \text{si } a < t < d \\ g(\theta_t) & \text{si } c < t < \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

qui est bien définie car  $f$  et  $g$  coïncident sur  $[c, d]$ , et est un difféomorphisme sur son image. On a donc, comme  $\mathbf{S}^1$  est compact et  $\Phi$  est continue,  $\Phi(\mathbf{S}^1)$  compact dans  $M$ . Puis on a aussi

$$\Phi(\mathbf{S}^1) = f(I) \cup g(J)$$

donc est un ouvert de  $M$ . Comme  $M$  est connexe et que  $\Phi(\mathbf{S}^1) \neq \emptyset$ , on a donc  $\Phi(\mathbf{S}^1) = M$ , d'où le résultat voulu. ■

**Preuve (du théorème)** — Supposons  $M \not\cong \mathbf{S}^1$ . Considérons  $x \in M$ . Comme  $M$  est une variété de dimension 1, on peut paramétriser un petit voisinage de  $x$ , qu'on peut prendre à vitesse 1 par la remarque plus haute.

Soit  $f : I \rightarrow M$  un paramétrage à vitesse 1, et notons

$$\alpha := \inf I \quad \text{et} \quad \beta := \sup I$$

(non nécessairement atteints). Comme  $f$  est 1-lipschitzienne (par l'inégalité des accroissements finis),  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} f(t)$  existe et on a deux cas :

- si cette limite est dans  $M$ , on peut alors étendre, en considérant  $g$  un paramétrage à vitesse 1 autour de cette limite et par le lemme,  $f$  à  $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow M$  où  $\sup \tilde{I} > \beta$ ;
- si cette limite n'est pas dans  $M$ , on a terminé.

On peut faire de même autour de la limite en  $\alpha^+$ . On obtient alors une paramétrisation à vitesse 1  $f : I \rightarrow M$  maximale, c'est-à-dire que si  $I \subsetneq I'$ , on ne peut pas étendre  $f$  à une paramétrisation à vitesse 1 sur  $I'$ .

► Par l'absurde, supposons  $f$  non surjective. Comme  $f(I)$  est ouvert et non vide, on a donc  $\overline{f(I)} \neq f(I)$  et on peut prendre  $y \in \overline{f(I)} \setminus f(I)$ , et à nouveau par le lemme on pourrait étendre  $f$ . Cela contredit la maximalité de  $f$ . ◀

Ainsi  $f$  est surjective, et comme c'est un difféomorphisme sur son image, on a donc bien  $M \cong I$ . ■

## II. Preuve de V. Guillemin et A. Pollack

Dans cette partie, nous donnons rapidement les définitions utiles à la preuve d'une version un peu modifiée du théorème, donnée par V. Guillemin et A. Pollack, et utilisant la notion de *fonction de Morse* :

**Théorème (Classification des variétés de dimension 1 – V.2)** — Toute variété de dimension 1 compacte et avec bord est difféomorphe au cercle  $S^1$  ou à un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

On se fixe  $M$  une variété de dimension 1 et on donne les deux définitions utiles :

**Définition (Variété avec bord)** — Posons déjà le demi-espace fermé de  $\mathbf{R}^n$

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

On définit alors le *bord* de  $H^n$  par  $\partial H^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ .

Soit  $X \subseteq \mathbf{R}^k$ . On dit que  $X$  est une variété lisse de dimension  $n$  *avec bord* lorsque pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert de  $U \cap X$  de  $x$  dans  $X$  difféomorphe à un ouvert  $V \cap H^n$  de  $H^n$ . Le *bord* de  $X$  est alors l'ensemble des  $x \in X$  qui sont les antécédents par ce difféomorphisme des points de  $\partial H^n$ .

**Définition (Fonction de Morse)** — Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  définie sur  $M$ . On dit que  $f$  est une *fonction de Morse* lorsque pour tout  $x \in M$  point critique de  $f$  (i.e  $df_x = 0$ ), la forme quadratique associée à la matrice hessienne de  $f$  en  $x$  est non-dégénérée.

and what happens next????

### III. Cas de la dimension supérieure

#### III.a Cas (résolus) des variétés de dimensions 2 et 3

En dimension 2 – on "agite" les mains

**Exemple** — Considérons la surface d'un objet tridimensionnelle très simple : un cube. On va alors découper sa surface en polygones les plus simples possibles, par exemple des triangles – on dit alors qu'on *triangule*.

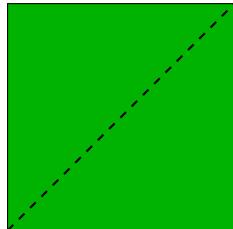


FIGURE 5 – Triangulation d'une face de notre cube

On note alors  $F$  le nombre de faces obtenus (ici  $F = 2 * 6 = 12$ ),  $A$  le nombre d'arêtes (ici  $A = 12 + 6 = 18$ ) et  $S$  le nombre de sommets (ici  $S = 8$ ). Alors on a  $F - A + S = 2$ .

Si on refaisait la même chose avec toute surface d'un polyèdre convexe (qui est homéomorphe à la sphère  $\mathbf{S}^1$ ), on obtiendrait toujours  $F - A + S = 2$ .

**Définition (Caractéristique d'Euler-Poincaré)** — En reprenant les notations de l'exemple précédent, on peut définir la *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'une variété  $M$  compacte de dimension 2, noté  $\chi(M)$ , par

$$\chi(M) = F - A + S.$$

Cette caractéristique est invariante par la forme du pavage (on aurait pu pavier avec des cubes par exemple), et invariante par homéomorphie.

**Définition (Variété orientable)** — Soit  $M$  une variété de dimension 2. On dit qu'elle est *orientable* s'il est possible de faire un choix cohérent de vecteur normale de surface pour pouvoir définir (via la règle de la main droite) une direction "dans le sens des aiguilles d'une montre".

**Exemple** — Le tore est une variété orientable. Le ruban de Möbius n'est pas orientable (on a un "problème" au niveau du recollement de notre ruban).

**Théorème** — Les variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair  $\leq 2$ .

Les variétés compactes connexes (sans bord) non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier  $\leq 1$ .

Bing and Moise : every topological 3-manifold can be triangulated

it makes no essential difference if we consider 3-manifolds as mere topological manifolds, or as piecewise-linear manifolds or smooth manifolds

## En dimension 3 – Géométrisation et théorème de Perelman

**Théorème (de géométrisation de Thurston)** — Toute variété de dimension 3 compacte et orientable peut être découpée selon des tores, de telle sorte que l'intérieur de chaque sous-variété ainsi obtenue soit géométrisable (et suivant une liste de 8 géométries possibles, telles que la géométrie sphérique, euclidienne, ou encore hyperbolique par exemple).

**Corollaire (Théorème de Perelman)** — Toute variété de dimension 3 compacte, sans bord et simplement connexe est homéomorphe à  $\mathbf{S}^3$ .

### III.b Et en dimension plus grande que 4 ?

En dimension  $\geq 5$ , il existe une classification partielle à l'aide de la théorie de la *chirurgie* introduite par J. Milnor en 1961. Cela consiste à "couper" une partie d'une variété, puis de remplacer cette partie par une partie d'une autre variété en identifiant les frontières.

De façon imagée, cela donne par exemple sur la sphère :

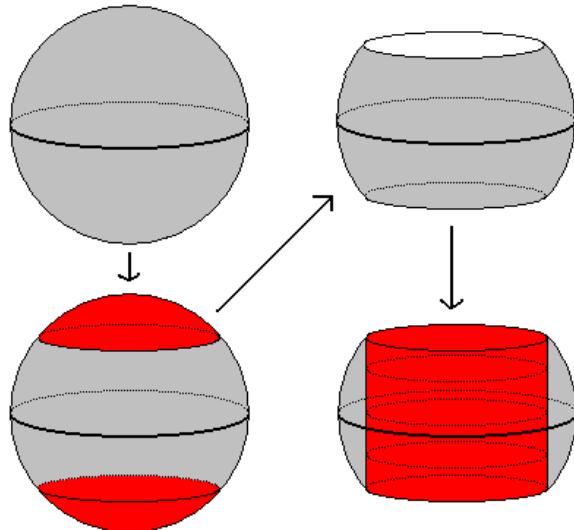


FIGURE 6 – Source : Wikipédia

En dimension 4, les variétés ne sont pas géométrisables comme dans le cas de la sous-partie précédente, et la théorie de la chirurgie fonctionne topologiquement mais pas de manière différentielle. On n'a en fait aucune manière simple de classer les variétés de dimension 4.

E<sub>8</sub> manifold was discovered by Michael Freedman in 1982. Rokhlin's theorem shows that it has no smooth structure (as does Donaldson's theorem), and in fact, combined with the work of Andrew Casson on the Casson invariant, this shows that it is not even triangulable as a simplicial complex.