

Exercice 1. Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$?
Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Les intégrales pour calculer les coeffs b_n sont pénibles
mais on peut trouver les facilement

méthode 1

On va commencer par $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (a + b)^4$$

= développer avec binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

méthode 2

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^4 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)^2$$

développer et utiliser $\Rightarrow ??$

$$\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi[$. Tracer le graphe de f , donner sa série de Fourier et étudier la convergence de celle-ci. En déduire la valeur des sommes des séries

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} \right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \right), \quad \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^4} \right), \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} \right).$$

$\forall n \quad b_n = 0$
 f est paire $\Rightarrow a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$

si f cont en t on doit trouver pour notre f
 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(kt)$

pour $f(x) = |x|$ sur $] -\pi, \pi[$
 $= x$ sur $] 0, \pi[$

Calculer $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt$ utiliser i.p.p

Ma $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$ et en déduire la valeur de $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

Ma $\sum \frac{1}{k^2} = \sum \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

Pour $\sum \frac{1}{(2k+1)^4}$ utiliser PARSEVAL

Exercice 3. Développer la fonction $f : x \mapsto |\sin x|$ en série de Fourier et en déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Vous devez expliciter $f_0 = \frac{a_0}{2} + \sum a_n$ pour trouver la valeur de 1ère série

$x \mapsto |\sin(x)|$ est paire $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned} \sin(n+1)t &= \sin t \cos nt + \cos t \sin nt \\ \sin(n-1)t &= \sin t \cos nt - \cos t \sin nt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \sin t \cos nt = \sin(n+1)t - \sin(n-1)t$$

on peut déterminer a_n facilement avec cette formule
attention à la parité de l'entier n

Pour l'autre série appliquer PARSEVAL

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt$$

Rappel

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 1 - 2\sin^2 t \end{aligned} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$