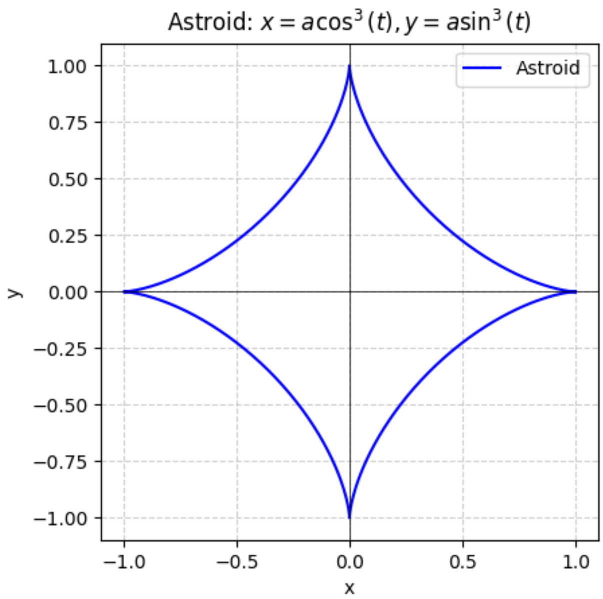
CC3 - 2025 **Durée : 90m**

Calcul intégral, introduction aux probabilités

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé. Les exercices sont indépendants mais chaque exercice a sa propre cohérence. La qualité de la rédaction sera grandement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : Courbes paramétrées.

Une astroïde est une courbe plane, qui peut se définir de plusieurs façons. En particulier, il est possible de l'obtenir en faisant rouler un cercle de rayon $r = \frac{1}{4}$ à l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Pour cette raison, l'astroïde est une hypocycloïde de cercle à quatre points de rebroussement.



L'equation paramétrique de l'astroïde est donnée par :

$$x = a\cos^3(t), y = a\sin^3(t)$$

où $a > 0$ est une constante et $t \in [0, 2\pi]$.

1. Déterminer le vecteur vitesse de la courbe paramétrée.

2. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe.

Exercice 2 : Intégrales doubles.

Évaluer les intégrales doubles suivantes :

1. $$\iint_A \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

   où

   - A est la région comprise entre les cercles de rayon 1 et 2, dans le premier quadrant, c'est-à-dire :
   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$
   - A est le disque de centre l'origine et de rayon 1, c'est-à-dire :
   $$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\, x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

2. $$\iint_R \frac{x+y}{x-y}\,dx\,dy,$$

   où R est la région bornée délimitée par les droites $x-y=1$, $x-y=2$, $x+y=3$, et $x+y=5$.

   Utiliser un changement de variables adapté pour simplifier et calculer l'intégrale.

Exercice 3 : Probabilités conditionnelles.

Dans une entreprise de fabrication de stylos, trois machines M1, M2 et M3 produisent respectivement 20%, 50% et 30% du total des stylos. Chaque machine produit un certain pourcentage de stylos à encre bleue : M1 en produit 10%, M2 en produit 6% et M3 en produit 4%.

On choisit un stylo au hasard dans la production totale, et il s'avère qu'il contient de l'encre bleue.

1. Quelle est la probabilité que ce stylo ait été produit par la machine M1 ? Par M2 ? Par M3 ?

2. Sachant qu'un stylo contient de l'encre bleue, quelle est la probabilité qu'il ait été produit par une machine qui fabrique moins de 7% de stylos bleus ?

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Choisir entre l'exercice 4a ou 4b.

Exercice 4a

Un sac contient 3 jetons rouges, 2 jetons bleus, et 1 jeton vert. On tire au hasard, **sans remise**, deux jetons successivement.

On définit la variable aléatoire X par :

- $X = 0$ si les deux jetons sont de **même couleur**,
- $X = 1$ s'ils sont de **couleurs différentes**.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
3. Calculer la variance $\mathrm{Var}(X)$.
4. Si on répète l'expérience 100 fois, quelle est l'espérance du nombre de fois où l'on obtient $X = 1$?

ENGLISH VERSION

A bag contains 3 red tokens, 2 blue tokens, and 1 green token. Two tokens are drawn at random, without replacement, one after the other.

We define a random variable X as follows:

- $X = 0$ if the two tokens are of the same color,
- $X = 1$ if the two tokens are of different colors.

Questions:

- . Determine the probability distribution of X.
- . Compute the expected value $\mathbb{E}(X)$.
- . Compute the variance $\mathrm{Var}(X)$.
- . If the experiment is repeated 100 times, what is the expected number of times we get $X = 1$?

—

Exercice 4b

Un centre d'appels reçoit un nombre aléatoire d'appels par jour. Le nombre total d'appels X reçus au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque appel est traité par un agent compétent avec une probabilité p, indépendamment des autres appels.

On note Z le nombre d'appels traités avec succès.

—

1. Pour tous $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}(Z = k \mid X = n)$.
2. Montrer que Z suit une loi de Poisson, et donner son paramètre.
3. Calculer l'espérance de Z, sans invoquer de résultat de cours.

ENGLISH VERSION

A call center receives a random number of calls per day. The total number of calls X received in one day follows a Poisson distribution with parameter λ. Each call is successfully handled by a competent agent with probability p, independently of the other calls.

Let Z be the number of successfully handled calls.

1. For all $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, determine $\mathbb{P}(Z = k \mid X = n)$. (*Hint: think of a well-known distribution.*)

2. Show that Z follows a Poisson distribution, and give its parameter.

3. Compute the expected value of Z, without using any result from the course.