Exercice 1. Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$?
Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Les intégrales pour calculer les coeffs b_n sont penibles mais on peut trouver les facilement

méthode 1

On va commencer par $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (a+b)^4$$

= developer avec binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

méthode 2

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^4\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)^2$$

developer $\Rightarrow$??

et utiliser

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi[$. Tracer le graphe de f, donner sa série de Fourier et étudier la convergence de celle-ci. En déduire la valeur des sommes des séries

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2}\right), \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\right), \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^4}\right), \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}\right).$$

f est paire $\Rightarrow$ $\forall n \quad b_n = 0$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

si f cont en t

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt)$$

on doit trouver pour notre f $= \pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$

pour $f(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$
$= x$ sur $]0, \pi[$

Calculer $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt$ utiliser IPP

Mq $\pi - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2k+1)^2} = 0$ et en déduire la valeur de $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

Mq $\sum \frac{1}{k^2} = \sum \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$

Pour $\sum \frac{1}{(2k+1)^4}$ utiliser PARSEVAL