Exercice 1 : Formes continues et norme sup.

1) Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que pour tout $\rho \in X$,

$$f \,:\, u \in X \longmapsto \int_0^1 \rho(t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire continue. Montrer que ce n'est plus vrai pour $\rho(t) = 1/\sqrt{t}$.

2) Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts partout dense dans $[0,1]$. On considère la forme linéaire

$$f \,:\, u \in X \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2)^{-n} u(q_n)\ .$$

Montrer qu'elle est bien définie et continue sur X. Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est jamais atteinte sur la boule unité de X.

ρ cont sur $[0,1]$ = cpt $\Rightarrow$ $|\rho|$ borné et bornes atteint

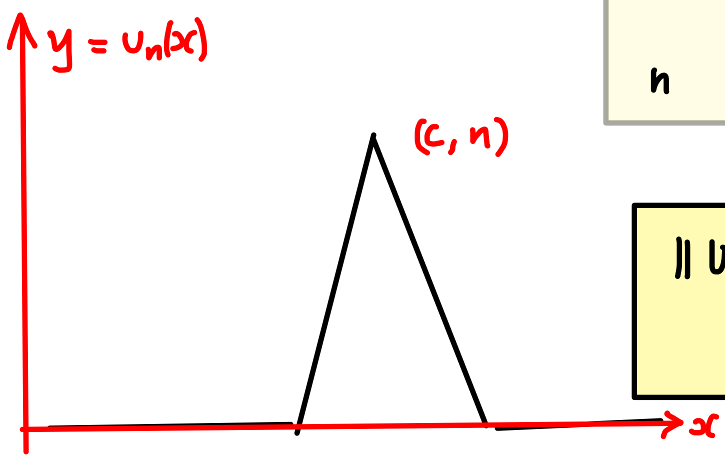
$\Rightarrow \exists\ c \in [0,1]$ tq

Pour simplifier on suppose $\rho(c) = |\rho(c)| = \sup |\rho(y)| = \|\rho\|_\infty$

$$\left| \int_0^1 \rho(t)\,u(t)\,dt \right| \underset{\text{inégalité triang}}{\leq} \int_0^1 |\rho(t)\,u(t)|\,dt = \|\rho u\|_1 \underset{\text{Holder}}{\leq} \|\rho\|_\infty \|u\|_1$$

Donc f est cont et $\|f\| \leq \|\rho_\infty\|$ On a = considère $u_n \in C^0([0,1])$

affine par morceau
- 0 $\quad t \notin\ ]c-1/n,\ c+1/n[$
- n $\quad t = c$



$\|u_n\|_1$ = aire triangle $= 1/2 \times 2/n \times n = 1$

$|\rho|$ cont $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n$ tq $|\rho(t)| \geq \|\rho\|_n - \varepsilon \quad \forall\ t \in\ ]c-1/n,\ c+1/n[$

Donc

$$\int_0^1 \rho(t)\,u_n(t)\,dt = \int_{c-1/n}^{c+1/n} \rho(t)\,u_n(t)\,dt \geq (\|\rho\|_\infty - \varepsilon)\,\|u_n\|_1$$

la suite U_n DV dans L^∞ car $\|U_n\|_\infty = 1$

DV dans L^1 pas de CAUCHY

$U_n \leqslant n \leqslant 2n \leqslant U_{4n}$ sur $[c - 1/8n, c + 1/8n]$

$|U_{4n} - U_n| \geqslant n \Rightarrow \|U_{4n} - U_n\| \geqslant n \times 1/4n = 1/4$

On peut modifier pour mq $\nexists$ ss suite de CAUCHY

mais $\phi_n \; g \mapsto \int_0^1 U_n(t) g(t)\, dt$ est suite d'operateurs

tq $\phi_n(g) \to g(c)$ si g cont

la limite est evaluation de la fn g en c

$|\phi g| = |g(c)| \leqslant \|g\|_\infty$

mais $\sup \dfrac{|g(c)|}{\|g\|_1} = +\infty$

Rq on ne peut appliquer Hahn Banach

car $C^0[0,1]$ n'est pas fermē, pire c'est dense $\subset L^1[0,1]$

Pour $1/\sqrt{x} \in L^1$ mais pas borné $\Rightarrow \notin L^\infty$

considere $U_n \in C^0([0,1])$ affine par morceau

0 $t \notin [0, 1/n]$

2n $t = 0$

$\|U_n\|_1 =$ aire triangle

$= 1/2 \times 1/n \times 2n = 1$

$1/\sqrt{x} \to +\infty$ $x \to 0 \Rightarrow \forall M > 0 \; \exists n$ tq $1/\sqrt{t} > M \;\; \forall t \in [0, 1/n]$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} U_n(t)\, dt = \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{t}} U_n(t)\, dt \geqslant M \int_0^1 U_n(t)\, dt = M \|U_n\|_1$

2/ $\quad u \in C^0[0,1] \Rightarrow \|u\|_\infty = M < \infty$

$$\Rightarrow \left|\sum (-2)^{-n} u(q_n)\right| \leq \sum 2^{-n} \|u\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \|u\|_\infty = 2\|u\|_\infty$$

Conclusion la forme lin est bien définie et bornée $\Leftrightarrow$ continue

de plus sa norme $\|f\| \leq 2$

On a besoin de $u_k \in C^0$, $\|u_k\|_\infty = 1$

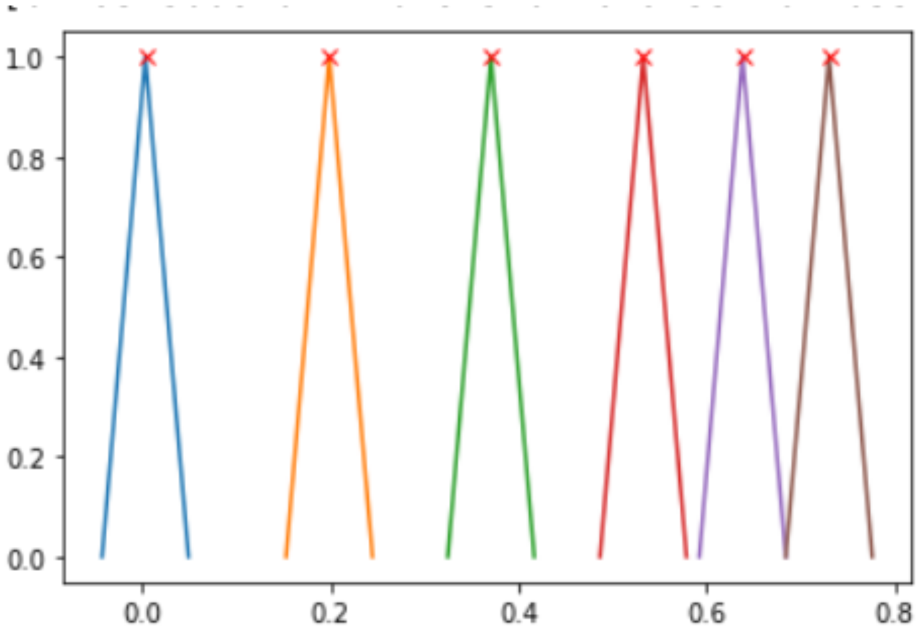
$u_k(q_i) = (-1)^i \qquad 0 \leq i \leq k$

$$\boxed{\begin{aligned} f(u_k) &\geq \sum_0^k 2^{-i} - \sum_{i \geq k+1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_0^k 2^{-i} - \left(\tfrac{3}{2}k+1\right) \\ &= \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2^k}\right) \to 2 \end{aligned}}$$

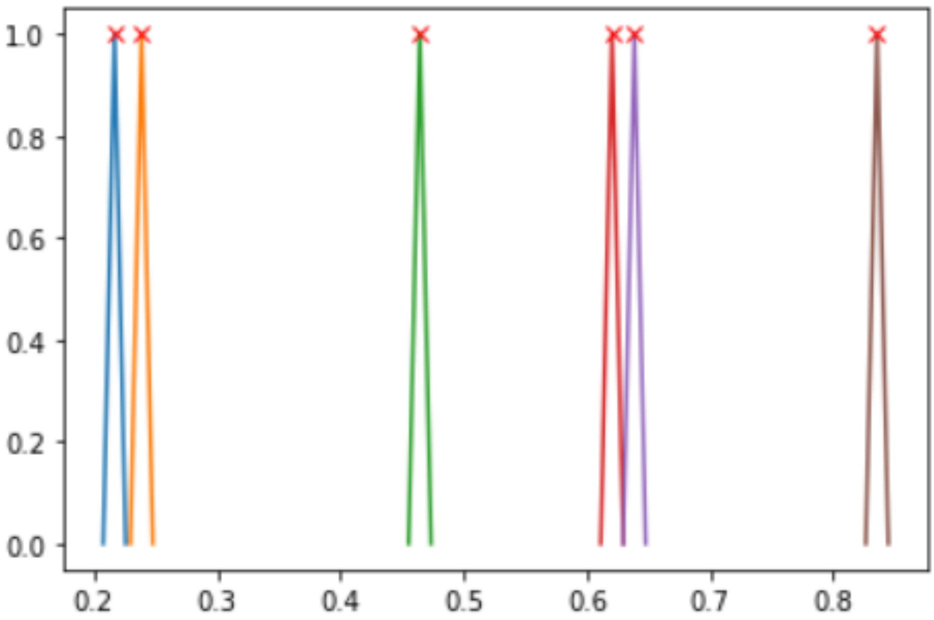
Déf $\quad \forall y, \forall \varepsilon \quad d_{y,\varepsilon} \in C^0(\mathbb{R})$ $\quad \begin{cases} \text{fonction affine} \\ 0 & x \notin]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\\ 1 & x = y \end{cases}$

On choisit $\varepsilon = \min\{|x-y|, x, y \in \{q_0, q_1, q_k\}\} > 0$

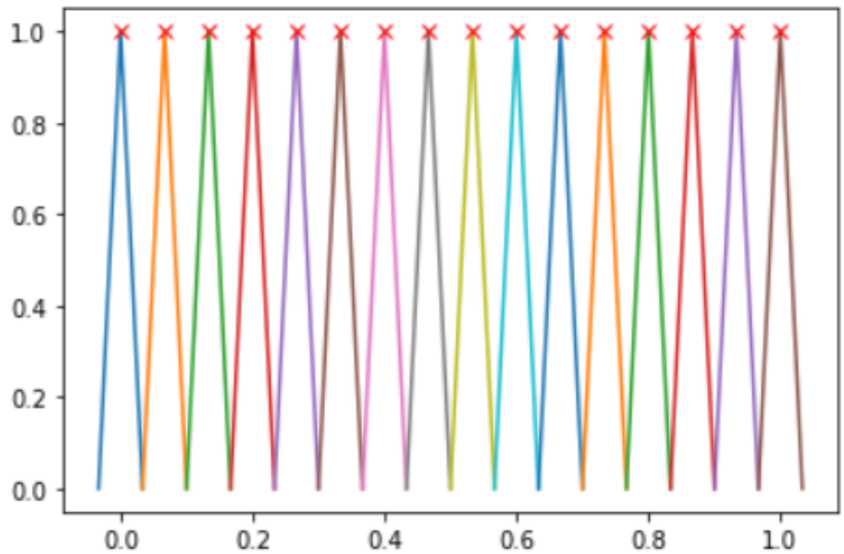
$$U_k = \sum_0^k d_{q_i,\varepsilon}$$



graphe de U_5



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0