$$\left|R_N(x)\right| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} (-1)^n n^x\right| \leqslant (N+1)^x \quad \text{thm série alternée}$$

$$\leqslant (N+1)^{-1} \quad x \mapsto (N+1)^x \text{ croissante}$$

$$\to 0 \quad \Rightarrow \text{CVU sur }]-\infty, -1]$$

Exercice 3. Mêmes questions pour les séries de terme général défini par :

1. $u_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $u_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$
3. $u_n(x) = e^{-nx}\sin x$, $x \in \mathbb{R}_+$.
4. $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{aligned}\sum ne^{-nx} = \sum -\frac{d}{dx} e^{-nx} \underset{\text{attention!}}{=} -\frac{d}{dx}\sum e^{-nx} &= -\frac{d}{dx}\frac{1}{1-e^{-x}} \\ &= \frac{1}{(1-e^{-x})^2}\end{aligned}}$$

1/ $U_n(x) = ne^{-nx}$, $\|U_n\| = \sup_{x>0} |U_n(x)| = \sup_{x\geq 0} ne^{-nx} = n$

$\Rightarrow \sum \|U_n\|$ DV gross $\Rightarrow$ pas CVN

$$ne^{-nx} = \underbrace{ne^{-nx/2}}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} \times e^{-nx/2} \Rightarrow \exists N \text{ tq } \forall n \geq N$$

$$0 \leq ne^{-nx} \leq 1 \times e^{-nx/2}$$

$$\sum_{n\geq N} ne^{-nx} \leq \sum_{n\geq N} e^{-nx/2} \leq \sum_{0} e^{-nx/2} = \frac{1}{1-e^{-nx/2}}$$

$\Rightarrow$ CVU sur $[a, +\infty[$ $\forall a > 0$

2/

$u_n \geq 0$, $v_n \quad x \mapsto nx(1-nx)$

fonction quadratique

$v_n(0) = v_n(1/n) = 0$ et $v_n \geq 0$ sur $[0, 1/n]$

$v_n \leq v_n(1/2n) = n/2\,(1 - 1/2) = n/4$

Facile à voir que $\|u_n\| = v_n(1/2n) = n/4 \not\to 0 \Rightarrow$ pas CVN

de plus $u_n(1/2n) = n/4 \not\to 0 = u(0) \Rightarrow$ pas CVU
$\forall n$

Mais $\forall a > 0$ on a CVN sur $[a, 1] \Rightarrow$ CVS sur $]0, 1]$

car si $N > 1/a$ alors $\forall n \geq N$ u_n est nul sur $[a, 1]$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| = \sum_{k=1}^{N} \|u_k\| < \infty$

3/ Si $x > 0$ $\quad u(x) = \sum e^{-nx}\sin x = \sin x \sum e^{-nx} = \dfrac{\sin x}{1-e^{-x}}$

en $x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{e^{-x}} = 1$

Donc $u_n \xrightarrow[CVS]{} u$ avec u ~~cont~~ sur $[0, \infty[$

Facile à voir $|e^{-nx}\sin x| \leq |e^{-nx}| = e^{-nx} \leq e^{-na}$ sur $[a, \infty[$

$\Rightarrow$ CVN sur $[a, \infty[$

mais $\|u_n\| \geq |u_n(1/n)| = e^{-1}\sin 1/n \sim \dfrac{1}{en} \Rightarrow \sum \|u_n\|$ DV

$u_n(0) = 0 \ \forall n \Rightarrow \sum u_n(0) = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1-e^{-x}} = 1$

$\Rightarrow$ pas CVU

$$\boxed{\begin{array}{l} f_n \xrightarrow[CVU]{} f \\ x_n \to \ell \end{array} \Rightarrow f_n(x_n) \to f(\ell)}$$

4/

$$\left|\frac{\sin nx}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2x^2} \Rightarrow \sum |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\sum \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow$ CVN sur $[a, \infty[$ $\forall a > 0$

$\Rightarrow$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall n \quad u_n(0) = \sin 0 = 0$

$\Rightarrow$ CVS sur $\mathbb{R}_+$

On a CVS mais pas CVN car

$$\|u_n\| \geqslant \frac{\sin n/n}{1+n^2/n^2} = \sin 1 \not\to 0 \Rightarrow \text{pas CVN sur } \mathbb{R}_+$$

Finalement on n'a pas CVU non plus

$\forall n \quad u_n(0) = \sin 0 = 0$

mais $1 = u_n(1/n) \not\to u(0) = 0 \Rightarrow$ pas CVU sur $\mathbb{R}_+$