

Exercice 8. [CC du 05/05/2010] Déterminer le rayon de convergence R puis la somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

le rayon de cv est facile à trouver $R=1$

faites le calcul vous m'avez pour vérifier !

Pour la somme $\int_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ non ?

$$\text{et } \sum t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$$

puis il faut justifier qu'on a le droit d'échanger
l'ordre ie $\sum \int_0^x = \int_0^x \sum$

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$; (b) $\sum_{n \geq 0} n(n+1)x^n$; (c) $\sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2}x^n$; (d) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n$.

Rappel $P \neq 0$ un polynôme alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{P(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$

avec ça vous pouvez trouver R pour a) b) c) facilement!

cherchez d/ la réponse = $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d^2}{dx^2} x^n &= n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \frac{x^n}{n(n-1)} = x^{n-2} \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \sum_{n \geq 2} x^{n-2} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } x \frac{d^2}{dx^2} x^{n+1} = (n+1)n x^{n-1} x$$

$$\frac{x}{1-x} = \sum x^{n+1} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \frac{x}{1-x} = \sum n(n+1) x^n$$

$$\stackrel{''}{=} 2(1-x)^{-3} \rightarrow \text{faire dérivée(s)}$$

du coup vous devez trouver

| | | | |
|--------|---------------------|-------|---------|
| series | $\frac{2}{(1-x)^3}$ | point | $x = 0$ |
|--------|---------------------|-------|---------|

Series expansion at $x = 0$:

$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + 30x^4 + 42x^5 + O(x^6)$$

a_1 a_2 a_3

(Taylor series)

(converges when $|x| < 1$)

| n | $a_n = n(n+1)$ |
|-----|----------------|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 6 |
| 3 | 12 |
| | 20 |

c) à faire ce weekend voici un exemple plus "simple"

$$\sum \frac{n}{n+1} x^n = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} x f(x) = \sum n x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x-1+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)}$$

j'ai fait ce calcul "à la louche" j'ai oublié des const d'intégration

mais le résultat est presque bon, $f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-x} + \ln(1-x) \right)$

On peut vérifier

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

$$= \sum x^n - \sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^{n+1}$$

d) $n^2 + n - 1 = n(n+1) - 1 \Rightarrow \frac{n(n+1) - 1}{n!} =$

| | |
|------------------------------------|-----------|
| $\frac{n(n+1)}{n!} - \frac{1}{n!}$ | $\exp(x)$ |
| -1 | $n=0$ |
| 1 | $n=1$ |
| 1/2 | $n=2$ |

je calcul des valeurs
car je vais vérifier avec WOLFRAM

$$x e^x = \sum \frac{x^{n+1}}{n!} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} x e^x = \sum \frac{n(n+1)}{n!} x^{n-1}$$

$(x+2) e^x$ $\xrightarrow{\text{faire dérivée(s)}}$

Exercice 11. On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) - f(-x) = \frac{2x}{1-x^2}. \quad (E)$$

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.
2. A quelle(s) condition(s) la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est-elle solution de (E)?
3. Expliciter toutes les fonctions impaires développables en série entière qui sont solutions de (E).

$$1/ \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum (x^2)^n \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} = \sum x^{2n+1} = \sum a_n x^n$$

où $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ 1 & n \text{ impair} \end{cases}$

2/ On a déjà calculer $f(x) - f(-x)$ (exo 5)

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= \sum a_n x^n - \sum a_n (-x)^n \\ &= \sum a_n (1 - (-1)^n) x^n \\ &= \sum_{n \text{ impair}} 2 a_n x^n \end{aligned}$$

$$\sum a_n x^n \text{ soln} \Rightarrow a_n = 1 \quad n \text{ impair}$$

3) si f pair alors $f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow ??$

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions développables en série entière solutions de l'équation

$$y'(x) + 2xy(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } y(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

$$\text{donc } y \text{ soln} \Rightarrow (n+1) a_{n+1} + 2 a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}$$

$$\text{On a aussi } \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = A \exp(-\frac{1}{2} x^2) \quad \text{où } A = e^C$$