Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions c_n et s_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Quels sont les domaines de convergence simple des suites de fonctions $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 0}$? (indication : on pourra penser à utiliser les formules $\cos(a+b) = \cdots$ et $\sin(a-b) = \cdots$)

$a_n \to L \Rightarrow a_{n+1} \to L$

$a_{2n} \to L$

On a l'identité trig

$\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$

$c_{n+1} = \cos x \, c_n - \sin x \, s_n \Rightarrow s_n = \dfrac{\cos x \, c_n - c_{n+1}}{\sin x}$ $x \neq 0$

Si $c_n \to L$ alors $c_{n+1} \to L$

$\Rightarrow$ $s_n \to \dfrac{(\cos x - 1)}{\sin x} L = L'$

d même si s_n CV alors c_n CV

On a aussi

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow L = 2L^2 - 1$

$\Rightarrow 2L^2 - L - 1 = 0$

$\Rightarrow L = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

donc $L \in \{1, -\frac{1}{2}\}$

$\sin 2nx = 2 \sin nx \cos nx \to 2L' L$ $\Rightarrow L' = 2L' L$

$\to L'$ $\Rightarrow L'(1-2L) = 0$