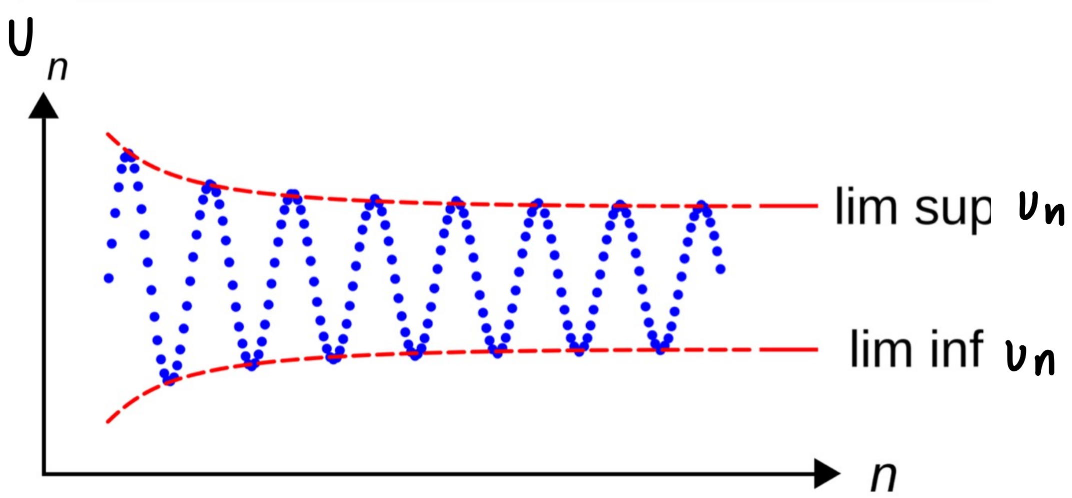
Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique bornée.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \{u_k, k \geqslant n\}$, et $s_n = \sup X_n$.

1. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite $\limsup u_n$.
3. Définir par analogie la limite inférieure $\liminf u_n$.
4. Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell$.
5. Montrer que si $\liminf u_n = \limsup u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers leur valeur commune.
6. Déterminer $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos(2\pi n/3))_{n\in\mathbb{N}}$.



Ex $\quad u_n = (-1)^n \quad \limsup u_n = 1 \quad$ mais

$\liminf u_n = -1 \quad u_n$ DV grossièrement

Rappel (u_n) bornée ssi $\exists\ m < M$ tq

$m < u_n < M \quad \forall n$

La notion de limite est très liée aux notions de borne supérieure (plus petit des majorants) et borne inférieure (plus grand des minorants). Etant donnée une suite (u_n), nous appellerons borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités

$$\sup\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \inf\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Théorème 2

1. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
4. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration : Rappelons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie. Si l'ensemble $\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, il admet une borne supérieure finie : notons-la l. Puisque l est le plus petit des majorants, pour tout $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc il existe n_0 tel que $l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant l$. Mais si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l\,,$$

donc (u_n) converge vers l.

1/ Si $A \subset B$ alors $\sup A \leq \sup B$

$\forall a \in A$, $a \in B \Rightarrow a \leq \sup B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

car $\sup A$ plus petite majorante

On a $X_{n+1} \subset X_n \Rightarrow s_{n+1} = \sup X_{n+1} \leq s_n = \sup X_n$

$\Rightarrow (s_n)_n$ décroissant

2/ Par hyp $(v_k)_k$ est borné $\Rightarrow \exists\, m < M$

$m < v_k < M \quad \forall k$

$\Rightarrow X_0$ minoré

$\Rightarrow X_1$ minoré $\forall 1$

$\forall x \in X_1 \quad x > m \Rightarrow s_1 = \sup X_1 > m$

Resumé s_1 decroissante, minorée $\Rightarrow$ CV

3/ $S_n = \inf X_n$

Si $A \subset B$ alors $\inf A \geq \inf B$

$X_{n+1} \subset X_n \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$

$\forall S_n \quad S_n = \inf X_n \leq \sup X_n \leq \sup X_0 < \infty$

Resumé S_n croissante, majorée $\Rightarrow$ CV

4/ Si $u_n \to \ell$ alors $\forall \varepsilon, \exists N$ tq

$\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in X_n, \forall n \geq N$

$\ell - \varepsilon$ minorante de $X_n \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq \inf X_n$

$\ell + \varepsilon$ majorante de $X_n \Rightarrow \ell + \varepsilon \geq \sup X_n$

Donc $\left.\begin{array}{l} \ell - \varepsilon \leq \inf X_n \leq \sup X_n \leq \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon \leq S_n \leq s_n \leq \ell + \varepsilon \end{array}\right\} \forall n > N \Rightarrow \begin{array}{l} S_n \to \ell \\ s_n \to \ell \end{array}$

5/ $\forall n$ on a l'encadrement, car $v_n \in X_n$

$$S_n = \inf X_n \leqslant v_n \leqslant \sup X_n = s_n$$

Si $S_n \to \ell$ et $s_n \to \ell$ alors $v_n \to \ell$

Théorēm des gendarmes

- On peut aussi appliquer le théorème avec $A = \mathbb{N}$ ou $\{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$ et $a = +\infty$: si *u*, *v* et *w* sont trois suites réelles, telles que pour tout *n* > *N*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} v_n = L,$$

avec L réel ou infini.

6/ $\cos 2\pi n/3$

$n=0$	1
$n=1$	$-1/2$
$n=2$	$-1/2$
$n=3$	1

En effet $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$v_{n+3} = \cos \frac{2\pi(n+3)}{3}$$

$$= \cos \frac{2\pi n}{3} + 2\pi$$

$$= \cos \frac{2\pi n}{3}$$

$$= v_n$$

Facile à voir $X_n = \{1, -1/2\}$ $\forall n$

$\Rightarrow$ $\sup X_n = 1$ $\forall n$

$\inf X_n = -1/2$

$\Rightarrow$ $\lim \sup X_n = 1$

$\lim \inf X_n = -1/2$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose $L = \limsup u_n$.

1. Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a. Déterminer $\limsup(a_n + u_n)$ en fonction de a et de L.
2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est seulement bornée, a-t-on $\limsup(a_n + u_n) = \limsup a_n + \limsup u_n$?
3. Déterminer $\limsup e^{u_n}$ en fonction de L.

Indications

1/ $\limsup a_n = a$

2/ Considere $a_n = (-1)^n$ et $u_n = -a_n$

3) $\exists$ ss suite de u_n, $v_{n_1} \to L$
et exp continue, croissante