Exercice 1 : Echauffement dans $\mathbb{R}^2$

On se place dans $X = \mathbb{R}^2$.

1) Donner deux ensembles convexes fermés disjoints qui ne peuvent être séparés au sens strict.

2) Montrer qu'un convexe compact et un convexe fermé disjoints peuvent toujours être séparés au sens strict.

1/ En admettant 2/ A, B non cpts

On prends $B = H^- = \{(x,y),\ y \leq 0\}$ demi plan $\Rightarrow$ cvxe fermé

$A = \{(x,y),\ x \geq 0,\ y \geq 1/x\}$ fermé

$f(x) = 1/x$, $f'' = 2/x^3 > 0 \quad \forall x > 0$

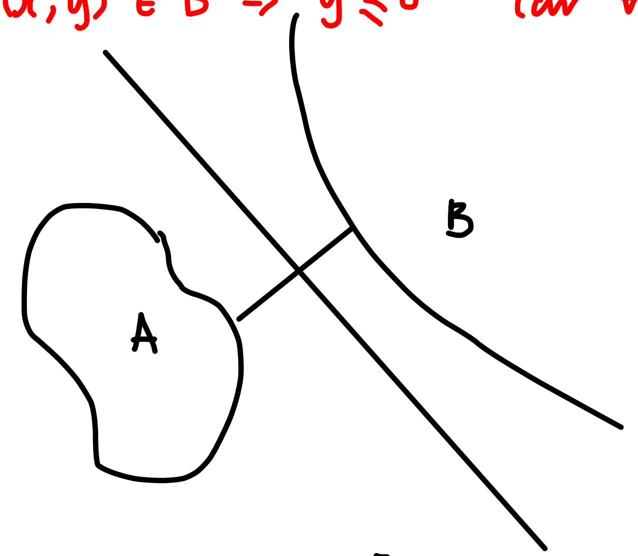
$\Rightarrow \{(x,y),\ x > 0,\ y \geq f(x)\}$ cvx

$H = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ sépare A, B

car $(x,y) \in A \Rightarrow y > 0$
$(x,y) \in B \Rightarrow y \leq 0$

mais pas au sens strict
car $\forall \varepsilon > 0 \quad (1/\varepsilon, \varepsilon) \in A$

2/



$\inf\{\|x-y\|,\ x \in A,\ y \in B\} > 0$

Sinon $\exists\ x_1, y_1$ tq $\|x_1 - y_1\| \to 0$

A cpt $\exists\, x \in A$, $x_1 \to x$ quitte à extraire

$\|x_1 - y_1\| \to 0$
$\|x_1 - x\| \to 0$

$\Rightarrow \|y_1 - x\| \leq \|y_1 - x_1\| + \|x_1 - x\|$

$\Rightarrow y_1 \to x \Rightarrow x \in A \cap B$ car B fermé

Donc $\inf \|x-y\| = \delta > 0$

et $\exists \hat{x} \in A$ tq $\inf\{\|\hat{x} - y\|, y \in B\} = \inf \|x-y\|$

$\exists\ y_i \in B$ $\quad \|\hat{x} - y_i\| \to \delta$

$\exists N$ tq $\quad \|\hat{x} - y_i\| \leqslant 2\delta$

$\Rightarrow y_i \in$ boule fermē d centre $\hat{x}$ d rayon 2δ $= cpt$

quitte à extraire ss suite $y_i \to \hat{y}$

donc on a un segment $\hat{x}, \hat{y}$ on prends H bisecteur

On suppose $\| \| = \| \|_2$ pour faire simple

$$\phi \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto v\,(x-y) + \frac{(x+y)}{2}(x-y)$$

$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$, $\phi(x) = \|x\|^2 - x\,y - \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2)$

$$= \tfrac{1}{2}\|x\|^2 - (x\,y) + \tfrac{1}{2}\|y\|^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2$$

$\phi(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in A$

$\phi(y) \leqslant 0 \qquad \forall y \in B$

On supp $\exists\ w \in A$ $\quad \phi(w) \leqslant 0$

$$\|y - x + t(w-x)\|^2 = \|y-x\|^2 + 2t(y-x)(w-x) + t^2\|w-x\|^2$$

$$= \|y-x\|^2 - 2t\,\phi(x) + 2t\,\phi(w) + o(t)$$

$$\leqslant \delta^2 - t\,\|y-x\|^2 + o(t)$$