

Exo 4

1/ Montrer que $P \mapsto P(z)$ est app linéaire

$$S, P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$$

$$P(z) = 16a + 8b + 4c + 2d + e$$

alors la matrice de $P \mapsto P(z)$ est

$$(16 \ 8 \ 4 \ 2 \ 1) \text{ par rapport à la base } X^4, X^3, X^2, X^1, X^0 \text{ de } \mathbb{R}_4[X]$$

$\dim F_1 \leq \dim \mathbb{R}_4[X] = 5$, $P(X) = 1$, $P(X) \notin F_1 \Rightarrow \dim \leq 4$
 $(X-2), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1$ est une base

Il suffit de mq c'est une famille libre

On suppose $\exists a, b, c, d$ tq

$$f(X) = a(X-2) + b(X-2)^2 + c(X-2)^3 + d(X-2)^4 = 0$$

$$f'(X) = a + 2b(X-2) + 3c(X-2)^2 + 4d(X-2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow f'(2) = a = 0$$

$$\text{De même } f''(2) = 2b = 0, f'''(2) = 6c = 0 \Rightarrow d = 0$$

On a que $a = b = c = d = 0 \Rightarrow$ famille libre

Complément $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$

$$P(X) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!} (X-2) + \frac{P''(2)}{2!} (X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!} (X-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!} (X-2)^4$$

C'est le développement limité de P en 2

Facile à vérifier

Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$P(X) = a + b(X-2) + c(X-2)^2 + d(X-2)^3 + e(X-2)^4$$

On calcule les dérivées

$$P(2) = a \quad P^{(3)}(2) = 3! d$$

$$P'(2) = b \quad P^{(4)}(2) = 4! e$$

$$P''(2) = 2! c$$

2/ Montrer que $P \mapsto P'(z)$ est app linéaire

$$S_1 \quad P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$$

$$P'(z) = 32a + 12b + 4c + d$$

alors la matrice de $P \mapsto P'(z)$ est

$$(32 \ 12 \ 4 \ 1 \ 0) \quad \text{par rapport à la base} \\ X^4, X^3, X^2, X^1, X^0 \text{ de } \mathbb{R}_4[X]$$

$$\dim F_2 \leq \dim F_1 = 4, \quad P(X) = X-2, \quad P(X) \notin F_2 \Rightarrow \dim \leq 3 \\ (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1 \text{ est une base}$$

Il suffit de mq c'est une famille libre

$$(X-2), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1 \text{ est libre}$$

Il sous ensemble d'une famille libre est libre

3/ Montrer que $2 \in F_3$ et faire la somme
 $X-2 \in F_3$

$$S_1 \quad f(X) = 2 \Rightarrow f'(X) = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f \in F_3$$

$$S_1 \quad g(X) = X-2 \Rightarrow g(z) = 2-2 \Rightarrow g \in F_3$$

$$\text{mais } (f+g)(X) = X \notin F_3$$

4) Montrer que si $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire
alors $f+g$ est linéaire aussi

Prendre f, g dans 1/, 2/ ci dessus

Montrer que

$(x^2 - 8), (x-2)^2, (x-2)^3, (x-2)^4$ est une base

5/ F_5 n'est pas linéaire justifier

1/ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de \mathbb{R}^2

il suffit de ma c'est une famille libre

c-a-d $x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x=y=0$

sys lin

$$2x + y = 0 \quad (1)$$

$$(2) - (1) \quad x = 0$$

$$3x + y = 0 \quad (2)$$

remplacer $\Rightarrow y=0$

résoudre le sys pour trouver les coordonnées

$$(1) \quad 2x + y = 1$$

$$(2) \quad 3x + y = 1$$

$$\Rightarrow (2) - (1) \quad x = 0 \Rightarrow y = 1$$

donc coordonnées = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ trop de vecteurs pour être famille libre

3/ 3 vecteurs dans \mathbb{R}^3

il suffit de ma c'est une famille libre

sys lin associé

$$x + y = 0$$

$$\Rightarrow y = -x$$

$$x + z = 0$$

$$\Rightarrow z = -x \Rightarrow z = y$$

$$y + z = 0$$

$$\Rightarrow z = -y$$

$$\text{donc } z = 0$$

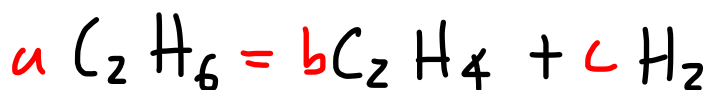
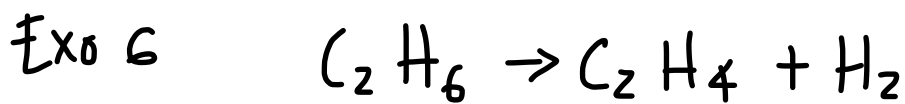
$$\Rightarrow y = x = 0$$

$$x + y = 1$$

$$x + z = 1$$

$$\Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$y + z = 1$$



Faisons une table

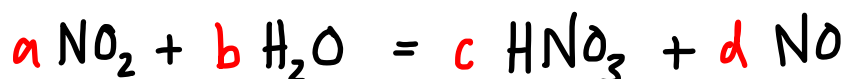
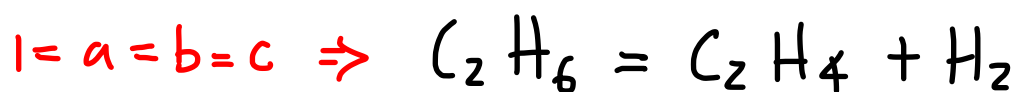
	a C_2H_6	b C_2H_4	c H_2
C	2	2	0
H	6	4	2

système
linéaire

$2a = 2b$

$6a = 4b + 2c$

$\Rightarrow a = b$ $6a = 4a + 2c \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$
substitution $a = b$



	NO_2	H_2O	HNO_3	NO
N	1	0	1	1
O	2	1	3	1
H	0	2	1	0

système
linéaire

$a = c + d$

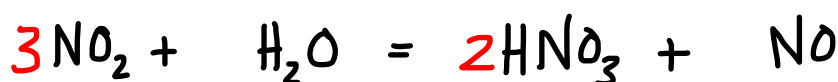
$2a + b = 3c + d$

$2b = c$

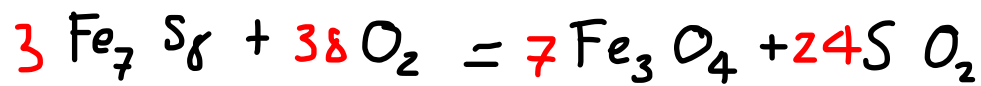
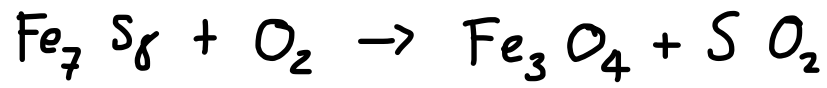
$a = 2b + d$

$2a + b = 6b + d \Rightarrow 2a = 5b + d$

$\Rightarrow a = 3b \quad d = b$
 $c = 2b$



Exo 6 cont



Trouver le système linéaire et vérifier