M1–Analyse Fonctionnelle
2020-2021

TD n^{o}1 : les espaces $\ell^p(\mathbb{N})$ et $L^p(\mathbb{R})$.

Dans tout ce qui suit, pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|^p$ est fini et on pose

$$\|u_n\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p\right)^{1/p} .$$

Pour $p = \infty$, on note $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sup |u_n|$ est fini et on pose

$$\|u_n\|_\infty = \sup |u_n| \ .$$

On note $L^p(\mathbb{R})$ l'espace de fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $|f|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1/p} .$$

Enfin, pour $p = \infty$, on note $L^p(\mathbb{R})$ l'espace de fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}$ bornées presque partout, que l'on munit de la norme

$$||f||_\infty = \inf\{t|f(x) < tp.p.\}.$$

Exercice 1 : Pourquoi ℓ^∞ ?
Soit (u_n) appartenant à $\cap_{p\geq p_0}\ell^p(\mathbb{N})$ avec $p_0 < \infty$. Montrer que $\|u_n\|_p \to \|u_n\|_\infty$ quand $p \to +\infty$. Même question pour $L^P(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Applications de l'inégalité de Hölder
1) Soit $(u_n) \in \ell^3(\mathbb{N})$, donner une condition suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $(\frac{1}{n^\alpha}u_n)$ soit dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
2) Soient $1 \leq p \leq r \leq q$ et soit f dans $Ł^p(\mathbb{R}) \cap Ł^q(\mathbb{R})$. Montrer que f est dans $L^r(\mathbb{R})$, une fois utilisant des inégalités entre $|f|^p, |f|^r$ et $|f|^q$, et une fois utilisant l'inégalité de Hölder.

Exercice 3 : Separabilité.
On rappelle qu'un espace topologique est *separable* s'il contient un ensemble dénombrable et dense.
1) Montrer qu'un espace de Banach E est separable si et seulement s'il existe une suite de sous-espaces dans E de dimension finie

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots$$

telle que $\overline{(\cup_n E_n)} = E$.
2) (*) Pour quelles valeurs de p l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$, resp. $L^p(\mathbb{R})$, est-il separable ?

Exercice 4 : Injections
Soient p et q des nombres réels tels que $1 \leq q < p \leq +\infty$. Il y a-t-il une inclusion entre $\ell^q(\mathbb{N})$ et $\ell^q(\mathbb{N})$? Entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$? Entre $L^p([0,1])$ et $L^q([0,1])$? Démonstration ou contre-exemple. Lorsqu'une telle inclusion existe, est ce qu'elle est continue ?

Exercice 5 : Stricte convexité
Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ et $L^p(\mathbb{R})$ sont strictement convexe, c'est-à-dire que pour tout x, y dans $\ell^p(\mathbb{N})$, si $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ et si $x \neq y$, alors

$$\|\theta x + (1-\theta) y\|_p < 1$$

pour tout $\theta \in]0, 1[$. Que se passe-t-il si $p = 1$ ou $p = \infty$?

Exercice 6 : Uniforme convexité de $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \geq 2$.
On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $||x|| = ||y|| = 1$ on a que

$$||\frac{x+y}{2}|| \geq 1 - \delta \Rightarrow ||x - y|| \leq \epsilon.$$

Nous allons montrer que pour $p \geq 2$ l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est uniformément convexe.
1) Montrer que tout espace de Hilbert est uniformément convexe.
2) Nous admettrons l'inégalité de Clarkson qui dit que pour tous nombres réels positifs $a \geq b \geq 0$ et tout $p \geq 2$ on a que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p + \left(\frac{a-b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}\left(a^p + b^p\right).$$

En déduire que $L^p(\mathbb{R})$ est uniformement convexe pour $p \geq 2$.
3) (**) Démontrer l'inégalité de Clarkson. On commencera par introduire des nombres $A = \frac{a+b}{2}$, $B = \frac{a-b}{2}$ et $x = \frac{B}{A}$ et montrer que l'inégalité de Clarkson est

équivalente à montrer que

$$\frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{1+x^p} \geq 2$$

pour tout $x \in [0,1]$. Ensuite, on étudiera le sens de variation de cette fonction sur $[0,1]$.

Exercice 7 : A propos des compacts
1) Montrer que pour tout p la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$, resp. $L^p(\mathbb{R})$, n'est pas compacte.
2) Montrer que pour tout $p \in [1,\infty[$ et tout $(b_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, l'ensemble

$$K = \{(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \mid |u_n| \leq |b_n|\}$$

est un compact de $\ell^p(\mathbb{N})$. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 8 : Suites vides
On appelle « suite vide » une suite (u_n) qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On note E l'espace des suites vides que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
1) Montrer que pour tout $p \in [1,\infty]$ l'espace E est un sous-espace vectoriel de $\ell^p(\mathbb{N})$ qui n'est pas fermé. L'espace E est-il complet ?
2) Pour chaque p, déterminer l'adhérence dans $\ell^p(\mathbb{N})$ de E.
3) (*) Pour chaque p tel que l'adhérence de E n'est pas égal à $\ell^p(\mathbb{N})$, construire une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})/\overline{E}$ rendant l'application quotient $\pi : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})/\overline{E}$ continue.

Exercice 9 : Espaces duals

1) Soit $\phi : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique suite $(v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ nous avons que

$$\phi((u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

2) (*) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui n'est pas de la forme $\phi((v_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ pour un certain $u_n \in \ell^1(\mathbb{N})$. (Vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice précedent.)