M1–Analyse Fonctionnelle
2020-2021

TD n^{o}2 : formes linéaires

Exercice 1 : Formes continues et norme sup.
1) Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que pour tout $\rho \in X$,

$$f \;:\; u \in X \;\longmapsto\; \int_0^1 \rho(t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

est une forme linéaire continue. Montrer que ce n'est plus vrai pour $\rho(t) = 1/\sqrt{t}$.
2) Soit X l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points distincts partout dense dans $[0,1]$. On considère la forme linéaire

$$f \;:\; u \in X \;\longmapsto\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (-2)^{-n} u(q_n) \;.$$

Montrer qu'elle est bien définie et continue sur X. Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est jamais atteinte sur la boule unité de X.

Exercice 2 : Formes linéaires continues
On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
1) Construire une norme sur E pour laquelle l'application

$$f \to f'$$

est une application continue vers $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (munie d'une norme de votre choix). Est ce que E est un espace de Banach pour cette choix de norme ?
2) Plus généralement, soient E et F des espaces de Banach munis de normes $||.||_E$ et $||.||_F$ et soit

$$\phi : E \to F$$

une application linéaire. Construire une norme $||.||_{E,\phi}$ sur E telle que

1. ϕ devient continue lorsqu'on munit E de la norme $||.||_{E,\phi}$
2. l'application identité de $(E, ||.||_{E,\phi})$ vers $(E, ||.||_E)$ est continue.

Exercice 3 : Dualité de $L^p(\mathbb{R}^d)$

On admettra dans cette exercice que l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est uniformément convexe pour tout $1 < p < \infty$.

1) Soit $p > 1$ et soient a et b des nombres réels. Montrer que la fonction

$$F : t \to |a + tb|^p$$

est dérivable au point $t = 0$ et calculer sa dérivée.

2) (*) Montrer que pour $p > 0$ l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est lisse, et pour toute fonction non-nulle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ expliciter la forme dérivée F'_f telle que pour tout $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a que

$$\langle F'_f, g\rangle = \frac{\partial ||f + tg||}{\partial t}(0).$$

3) Montrer que cette forme dérivée est de la forme

$$F'_f : g \to \int_{\mathbb{R}^d} g(x)h(x)dx$$

pour une fonction $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ à préciser.

4) Déduire que l'application $\phi : L^q(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)^*$ donnée par

$$\phi(h) : g \to \int_{\mathbb{R}^d} h(x)g(x)dx$$

est un isomorphisme isométrique de $L^q(\mathbb{R}^d)$ vers $L^p(\mathbb{R}^d)^*$.

Exercice 4 : Projection sur un convexe fermé dans un espace uniformément convexe

1) Soit E un espace de Banach unformément convexe. Soit C un sous-ensemble fermé et convexe de E. Montrer que pour tout $v \in E$ il existe une unique $w \in C$ qui minimise la distance $d(w, v)$.

2) Montrer que si E est un espace de Hilbert alors l'application de projection P_C qui envoie $v \in E$ sur l'unique élément $w \in C$ minimisant la distance $d(v, w)$ a le propriété que pour tout $v_1, v_2 \in E$ on a que

$$||P_C(v_1) - P_C(v_2)|| \leq ||v_1 - v_2||.$$

Exercice 5 : En dimension infinie

1) Donner un exemple de forme linéaire non-continue sur l'espace des polynômes muni de la norme $\|P\| = \int_0^1 |P(x)|\, \mathrm{d}x$.

2) Montrer qu'il y a toujours des formes linéaires non bornées sur un espace vectoriel normé de dimension infinie (on se rappellera qu'il existe une base algébrique de taille infinie).

3) En déduire qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si toutes ses normes sont équivalentes.

Exercice 6 : Continuité et noyau fermé

Soit X un espace de Banach réel et soit f une forme linéaire (pas forcément continue) sur X. On supposera dans toute la suite que f n'est pas identiquement nulle.

1) Montrer que soit f est continue et $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé, soit f est discontinue et $\mathrm{Ker}(f)$ est dense.

2) Montrer qu'il existe des applications linéaires $T : E \to F$ qui sont discontinues mais qui ont un noyau fermé et non dense.