Milan Berger-Guesneau et William Sarem

Notes pour la neuvième séance du groupe de lecture

1 La formule de Poisson en toute généralité

Théorème 1. *Soit G un groupe abélien localement compact (par exemple, un groupe abélien qui est aussi une variété). Alors il existe une mesure définie sur G, invariante par translation. Elle est unique à une constante multiplicative près. On dit que c'est une mesure de Haar.*

Remarque.

— C'est une généralisation du théorème d'existence de la mesure de Lebesgue. D'ailleurs, ça se démontre à peu près de la même façon. La seule différence, c'est que dans R on a un ensemble "étalon" à savoir l'intervalle $[0, 1]$ par rapport auquel on mesure les autres boréliens (dans la définition de la mesure extérieure).

Ici, on va se donner un compact A d'intérieur non vide, et pour toute partie B, et pour U un voisinage ouvert de 0 (qu'on pense petit), on définit une approximation de la mesure de B par :

$$\frac{[B : U]}{[A : U]}$$

où $[X : U]$ est le nombre minimal de translatés de U nécessaires pour recouvrir X.

On va alors définir la mesure extérieure $\mu^*(B)$ comme la limite supérieure "quand U tend vers 0" de cette approximation.

On définit aussi une mesure intérieure, puis on montre qu'elles coïncident sur les boréliens etc.

— Si G n'est pas abélien, il existe une mesure, unique à constante près, invariante par translation à gauche (resp. à droite), mais *a priori* pas par les deux en même temps.

Si G est compact, la mesure invariante à gauche est aussi invariante à droite, autrement dit il existe une mesure invariante par translations à gauche et à droite ("unimodulaire").

On peut alors faire de l'analyse harmonique sur G, pour cela on définit le dual de Pontryagin :

$$\widehat{G} = \{\chi : G \longrightarrow \mathbb{U} \text{ morphismes de groupes continus}\}$$

C'est un groupe abélien. On peut mettre sur $\widehat{G}$ une structure topologique qui en fait un groupe localement compact.
Par exemple :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{Z}} &= \{e_a : n \mapsto a^n \mid a \in \mathbb{U}\} \simeq \mathbb{U} \\
\widehat{\mathbb{R}} &= \{\chi_y : x \mapsto e^{2i\pi xy} \mid y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R} \\
\widehat{\mathbb{R}^d} &= \{\chi_Y : X \mapsto e^{2i\pi\langle X,Y\rangle} \mid Y \in \mathbb{R}^d\} \simeq \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

On a aussi $\widehat{\mathbb{U}} \simeq \mathbb{Z}$ (à peine plus dur). En fait, on a un résultat de dualité de Pontryagin, qui dit que $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ (isomorphisme d'espaces continus).
Soit $f \in L^1(G)$ (pour une mesure de Haar fixée). On définit l'application $\widehat{f} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\chi(x)dx$$

Et on a une formule d'inversion : si $\widehat{f} \in L^{\widehat{G}}$ alors il existe une mesure de Haar sur $\widehat{G}$ (autrement dit : une bonne constante) telle que, presque partout, on a :

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\overline{\chi(x)}d\chi$$

Remarque : ça peut s'interpréter comme un résultat d'orthonormalité des caractères !

Soit H un sous-groupe fermé de G. Alors H est localement compact donc admet une mesure de Haar.
Attention : ce n'est pas la restriction à H de la mesure de Haar de G. Par exemple, si H est un réseau de $\mathbb{R}^d$ alors sa mesure de Haar est la mesure de comptage. Un autre exemple : la mesure de Haar sur un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^d$ est la mesure de Lebesgue de dimension $\dim(V)$.
De plus G/H est localement compact donc admet une mesure de Haar. C'est la mesure de Haar de G restreinte à un domaine fondamental de l'action de H. Par exemple pour $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: c'est la mesure de Lebesgue sur le cercle.

Ainsi, on a trois théories de Fourier : sur G, H et G/H.

Proposition 1. *On a*

$$\widehat{G/H} \simeq H^\perp$$

où

$$H^\perp := \{\chi \in \widehat{G} \mid \forall h \in H, \chi(h) = 1\}$$

Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
On définit $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+n)$
Alors g est $\mathbb{Z}-$invariante (1-périodique) donc induit $\tilde{g} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$
$\tilde{g}$ admet une série de Fourier $\widehat{\tilde{g}} : \mathbb{Z}^\perp = \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\widehat{\tilde{g}}(n) = c_n(\tilde{g}) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \tilde{g}(x)e^{-2i\pi xy}dx$
Soit $D = [0, 1[$.

$$\begin{aligned} c_n(\tilde{g}) &= \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)e^{-2i\pi nx}\, dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\, dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(y)e^{-2i\pi ny}e^{2i\pi nk}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2i\pi ny}dy = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

D'après la formule d'inversion, on a :

$$\tilde{g}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\tilde{g})\overline{e^{-2i\pi k\xi}}$$

En $\xi = 0$, on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

Soit $f \in L^1(G)$ très gentille.
On définit $g(x) = \int_H f(xh)dh$
Alors g est $H-$invariante donc induit $\tilde{g} : G/H \longrightarrow \mathbb{C}$
$\tilde{g}$ admet une TF $\widehat{\tilde{g}} : H^\perp \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\widehat{\tilde{g}}(\chi) = \int_{G/H} \tilde{g}(x)\chi(x)dx$
Soit D un domaine fondamental pour G/H.

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{g}}(\chi) &= \int_D \int_H f(xh)dh\chi(x)dx \\ &= \int_H \int_D f(xh)\chi(x)dxdh \\ &= \int_H \int_{D+h} f(y)\chi(y)\chi(h)^{-1}dxdh \\ &= \int_G f(x)\chi(x)dx = \widehat{f}(\chi) \end{aligned}$$

D'après la formule d'inversion, on a :

$$\tilde{g}(\xi) = \int_{H^\perp} \widehat{\tilde{g}}(\chi)\overline{\chi(\xi)}d\chi$$

En $\xi = H \in G/H$, on obtient :

$$\int_H f(h)dh = \int_{H^\perp} \widehat{f}(\chi)d\chi$$

Remarque. L'idée c'est qu'une formule "triviale" (ici $\widehat{f}(e_G) = \int_G f(x)dx$ ou plus précisément $f(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)d\chi$) peut donner des résultats intéressants si on l'évalue sur un groupe ou un quotient de G (ici un quotient) et qu'on reconstruit ensuite la fonction dans G tout entier.

On a vu que

$$\widehat{\mathbb{R}^d} = \{\chi_Y : X \mapsto e^{2i\pi\langle X,Y\rangle} \mid Y \in \mathbb{R}^d\} \simeq \mathbb{R}^d$$

Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}\Lambda^\perp &= \{Y \in \mathbb{R}^d \mid \forall X \in \Lambda, e^{2i\pi\langle X,Y\rangle} = 1\}\\ &= \{Y \in \mathbb{R}^d \mid \forall X \in \Lambda, \langle X, Y\rangle \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

La formule d'inversion dans $\mathbb{R}^d/\Lambda$ fait intervenir la mesure de Haar sur $\widehat{\mathbb{R}^d/\Lambda} = \Lambda^\perp$ avec un coefficient $1/\mathrm{Covol}(\Lambda)$.
On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\Lambda)} \sum_{\lambda\in\Lambda^\perp} \widehat{f}(\lambda)$$

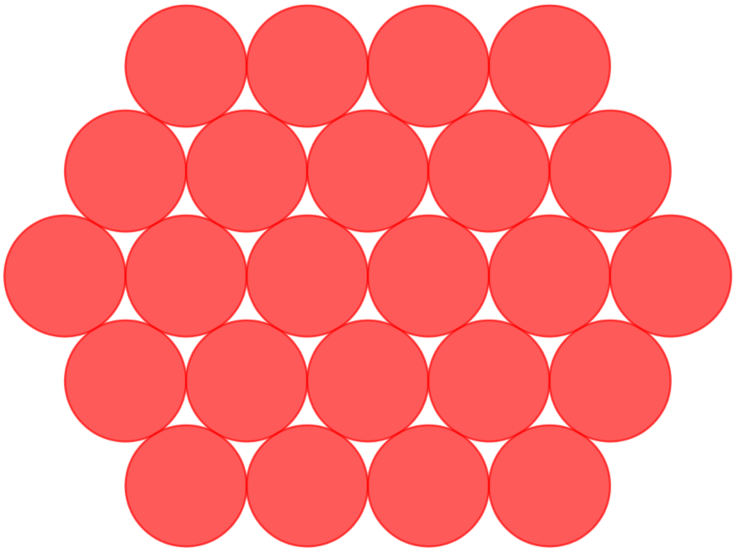
2 Empilements de sphères optimaux

Définition 1. *Un empilement de sphères dans $\mathbb{R}^d$ est un ensemble de boules fermées de $\mathbb{R}^d$ de même rayon d'intérieurs disjoints.*

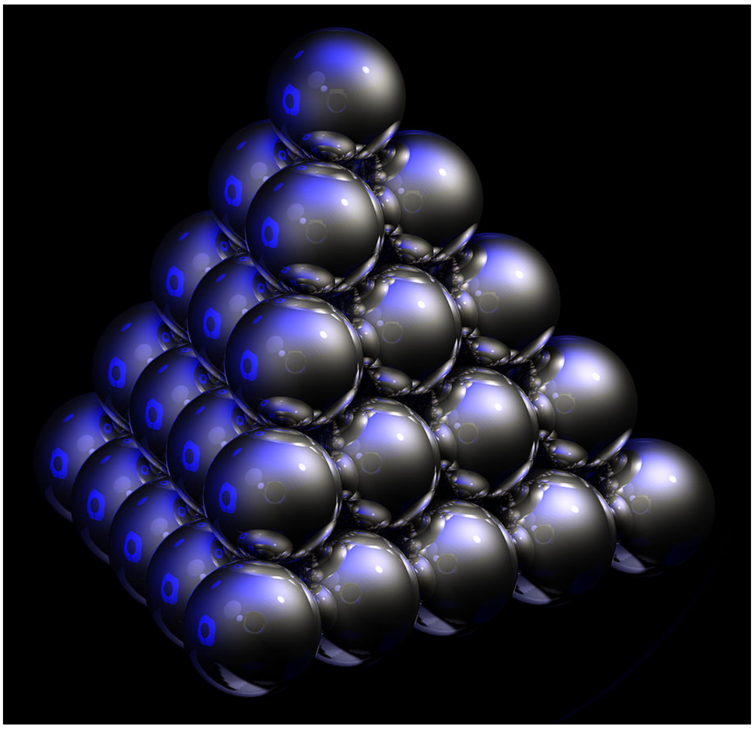
Définition 2. *On définit la densité d'un empilement de sphères E par*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\lambda_d(E \cap B(0,R))}{\lambda_d(B(0,R))} \in [0,1]$$

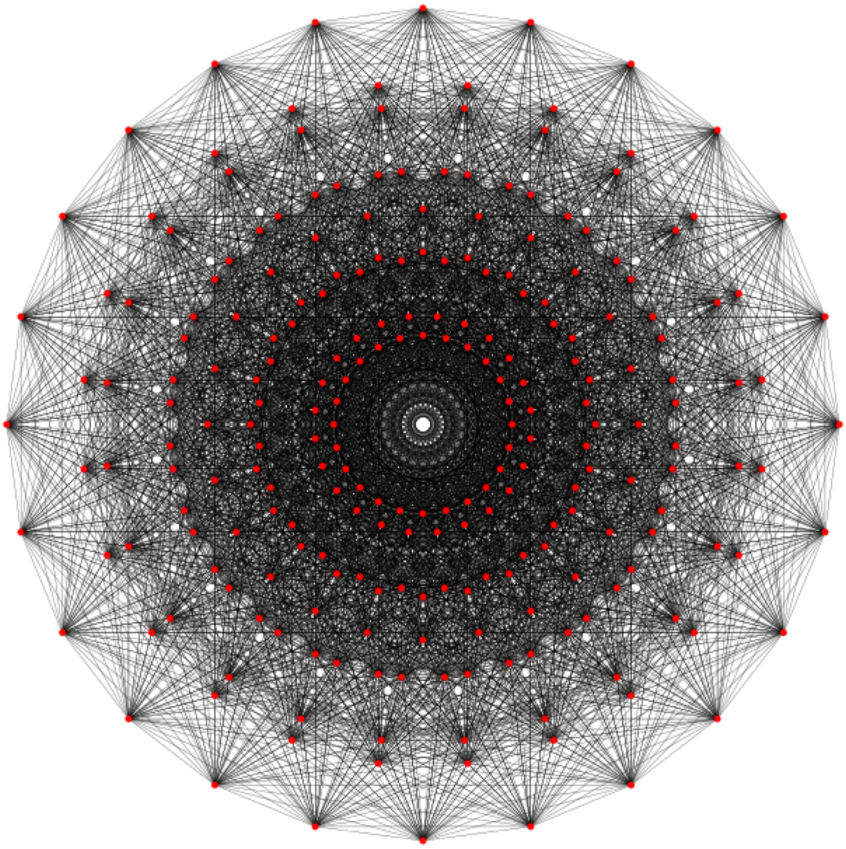
On cherche à déterminer la densité maximale des empilements de sphères dans $\mathbb{R}^d$. Cette densité maximale n'est connue que dans les cas $d = 2, 3, 8, 24$.



Empilement de densité optimale dans le plan



Empilement de densité optimale dans l'espace



Une projection du réseau E_8 dans le plan

On va chercher à comprendre le principe des preuves pour les dimensions 8 et 24.

Définition 3. *On dit qu'un empilement de sphères est périodique s'il est invariant par translation par tous les éléments d'un réseau L de $\mathbb{R}^d$.*

Remarque. On peut associer à tout réseau L de $\mathbb{R}^d$ un empilement périodique $\left(\overline{B}(\lambda, r)\right)_{\lambda \in L}$, où $r = (\min_{\lambda \in L \setminus \{0\}} \|\lambda\|)/2$.

Proposition 2. *Soit E un empilement L-périodique. Soit n le nombre de boules incluses (à translation près) dans le domaine fondamental de L, soit v le volume d'une de ces boules. Alors la densité de E est $nv/covol(L)$.*

Proposition 3. *La densité maximale des empilements de $\mathbb{R}^d$ est égale à celle des empilements périodiques.*

Démonstration. Soit E un empilement de densité $\delta > 0$. On va montrer que l'on peut construire un empilement périodique de densité arbitrairement proche de δ.

Soit $\varepsilon \in]0, \delta[$. Par définition, il existe une infinité d'hypercubes C_k centrés en 0 de "diamètre" (longueur d'un coté) R_k tels que $R_k \to +\infty$ et

$$\frac{\lambda_d(E \cap C_k)}{\lambda_d(C_k)} > \delta - \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit A l'ensemble des boules incluses dans C_k. On remarque que $(E \backslash A) \cap C_k$ est inclus dans C_k privé de l'hypercube centré en 0 de diamètre $R_k - 2r$. Ainsi

$$\lambda_d\left((E \backslash A) \cap C_k\right) \leqslant R_k^d - (R_k - 2r)^d$$

Donc pour k assez grand,

$$\frac{\lambda_d\left((E \backslash A) \cap C_k\right)}{\lambda_d(C_k)} \leqslant 1 - \left(1 - \frac{2r}{R_k}\right)^d \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

i.e.

$$\frac{\lambda_d(A \cap C_k)}{\lambda_d(C_k)} > \delta - \varepsilon$$

Il suffit à présent de paver $\mathbb{R}^d$ avec des translations de A pour obtenir un empilement périodique de densité strictement supérieure à $\delta - \varepsilon$. $\square$

Proposition 4. (Formule de Poisson pour les réseaux) *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, soit L un réseau de $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{\lambda \in L} f(x + \lambda) = \frac{1}{\operatorname{covol}(L)} \sum_{\mu \in L^*} e^{-2i\pi\langle x, \mu\rangle} \widehat{f}(\mu)$$

Théorème 2. *Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ réelle et $r > 0$ tel que*

i) $\|x\| \geqslant 2r$ *implique* $f(x) \leqslant 0$

ii) $\widehat{f}$ *est réelle positive*

iii) $\widehat{f}(0) > 0$

Alors tout empilement de sphères de $\mathbb{R}^d$ est de densité inférieure à

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} r^d \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$$

Démonstration. D'après ce qu'on a vu précédemment, on peut supposer que E est L-périodique. On peut aussi imposer que le rayon de boules de E est r. Soit A l'ensemble des centres des boules de E modulo L. La densité de E est

$$\frac{\# A\, \lambda_d\left(B(0, r)\right)}{\operatorname{covol(L)}}$$

Soient $a, b \in A$. La formule de Poisson donne

$$\sum_{\lambda \in L} f(a-b+\lambda) = \frac{1}{\mathrm{covol}(L)} \sum_{\mu \in L^*} e^{-2i\pi\langle a-b,\mu\rangle} \widehat{f}(\mu)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b \in A} \sum_{\lambda \in L} f(a-b+\lambda) &= \frac{1}{\mathrm{covol}(L)} \sum_{\mu \in L^*} \left(\sum_{a \in A} e^{-2i\pi\langle a,\mu\rangle} \right) \left(\sum_{b \in A} e^{2i\pi\langle b,\mu\rangle} \right) \widehat{f}(\mu) \\
&= \frac{1}{\mathrm{covol}(L)} \sum_{\mu \in L^*} \left| \sum_{a \in A} e^{2i\pi\langle a,\mu\rangle} \right|^2 \widehat{f}(\mu) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Les centres a et b sont dans le domaine fondamental de L, donc

$$a - b \in \left\{ \sum_{k=1}^{d} \alpha_k u_k \,\middle|\, \alpha_k \in]-1,1[\right\}$$

où $(u_1, \ldots, u_d)$ est une $\mathbb{Z}$-base de L. Cela implique que si $a-b+\lambda = 0$, alors $a = b$ et $\lambda = 0$. A l'inverse si $a-b+\lambda \neq 0$, alors $\|a-b+\lambda\| = \|(a+\lambda)-b\| \geqslant 2r$. L'hypothèse $i)$ implique donc

$$\#A\, f(0) \geqslant \sum_{a,b \in A} \sum_{\lambda \in L} f(a-b+\lambda)$$

D'autre part, tous les termes de la première somme du terme de droite de $(*)$ sont positifs par l'hypothèse $ii)$. Ainsi

$$\frac{1}{\mathrm{covol}(L)} \sum_{\mu \in L^*} \left| \sum_{a \in A} e^{2i\pi\langle a,\mu\rangle} \right|^2 \widehat{f}(\mu) \geqslant \frac{(\#A)^2 \widehat{f}(0)}{\mathrm{covol}(L)}$$

Il en découle

$$\frac{\#A}{\mathrm{covol}(L)} \leqslant \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$$

puis que la densité de E est inférieure à

$$\lambda_d(B(0,r)) \frac{f(0)}{\widehat{f}(0)}$$

ce qu'on voulait démontrer. $\square$

On en déduit facilement le

Corollaire 4. *Soit L un réseau de $\mathbb{R}^d$, soit $E = \left(\overline{B}(\lambda, r)\right)_{\lambda \in L}$ l'empilement associé à ce réseau ($r = (\min_{\lambda \in L \setminus \{0\}} \|\lambda\|)/2$). Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ réelle telle que* *i) pour tout* $\lambda \in L\backslash\{0\}$, $f(\lambda) \leqslant 0$

ii) pour tout $\mu \in L^*\backslash\{0\}$, $\widehat{f}(\mu) \geqslant 0$

iii) $\widehat{f}(0) > 0$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) E *est de densité maximale (égale à* $\lambda_d(B(0,r))f(0)/\widehat{f}(0)$*)*

b) $\widehat{f}(0) = \mathrm{covol}(L)f(0)$

c) pour tout $\lambda \in L\backslash\{0\}$, *pour tout* $\mu \in L^*\backslash\{0\}, f(\lambda) = \widehat{f}(\mu) = 0$

Si on impose de plus que le réseau L *est unimodulaire pair, alors les assertions* b) *et* c) *se réécrivent*

b') $\widehat{f}(0) = f(0)$

c') pour tout $\lambda \in L\backslash\{0\}$, $f(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) = 0$

Il reste donc à montrer qu'une telle fonction existe... Maryna Viazovska en a exhibé une en 2016 (pour la dimension 8), montrant ainsi que l'empilement associé au réseau E_8 est de densité optimale. Quelques mois plus tard, elle parvint (avec quelques mathématiciens) à adapter sa construction en dimension 24 pour montrer que l'empilement associé au réseau de Leech est de densité optimale.