Fiche d'exercices n°5 : primitives et intégrales

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int (x^4 - 3x + 1)\, dx$ b) $\displaystyle\int (t+1)^2\, dt$ c) $\displaystyle\int (x-1)^3\, dx$ d) $\displaystyle\int \sqrt{s+2}\, ds$

e) $\displaystyle\int (x+1)^{1/3}\, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$ g) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$ h) $\displaystyle\int \sin(2t)\, dt$

i) $\displaystyle\int \sin(1-x)\, dx$ j) $\displaystyle\int \sin(3u-2)\, du$ k) $\displaystyle\int \cos(5x+1)\, dx$ l) $\displaystyle\int e^{2s}\, ds$

Exercice 2. En utilisant le formulaire des primitives usuelles, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x + 1)\, dx \qquad I_2 = \int_0^1 (1+t)^2\, dt \qquad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} \cos 2u\, du$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t\, e^x\, dt \qquad I_2 = \int_0^1 t\, e^x\, dx \qquad I_3 = \int_0^1 e^{tx}\, dx \qquad I_4 = \int_0^1 e^x\, dt$$

Exercice 4.

a. Soit $u(x)$ une fonction dérivable. Quelles sont les primitives de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$?

b. En déduire les primitives de la fonction $\tan x$.

Exercices de base

Exercice 5. Soient F et u deux fonctions données. On rappelle que $(F(u(x)))' = F'(u(x))\ u'(x)$, et donc que $\displaystyle\int F'(u(x))\ u'(x)\, dx = F(u(x)) + C$. En utilisant ce résultat, calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int y'(x)y(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int u'(x)u(x)^4\, dx$ c) $\displaystyle\int u'(x)u(x)^n\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{y'(s)}{y(s)^2}\, ds$ f) $\displaystyle\int \frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}}\, dx$ g) $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)^7}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{v'(t)}{1+v(t)^2}\, dt$

i) $\displaystyle\int y'(t)e^{y(t)}\, dt$ j) $\displaystyle\int u'(x)\sin u(x)\, dx$ k) $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}}\, dx$ l) $\displaystyle\int y'(x)(1+\tan^2 y(x))\, dx$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+4x^2}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+27x^2}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\displaystyle\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$ f) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx$ g) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+3}\, dx$ h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$ j) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+2}\, dx$ k) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ l) $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\, dx$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx \qquad I_2 = \int_0^1 e^u \cos(e^u) du \qquad I_3 = \int_0^{\pi/4} \tan^3 x \, dx$$

$$I_4 = \int_1^2 (3t-1)^{-2/3} \, dt \qquad I_5 = \int_1^2 \frac{u+1}{\sqrt{u^2+2u}} du \qquad I_6 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx \qquad I_7 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \, dx$$

Exercice 8. Calculer les primitives ci-dessous. Dans chaque cas, on cherchera un changement de variable transformant le polynôme du second degré en un polynôme du type $1+X^2$ ou $1-X^2$ ou X^2-1 :

$$a) \int \frac{dt}{t^2+4} \qquad b) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} \qquad c) \int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}} \qquad d) \int \frac{dt}{t^2+2t+5}$$

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

a) $\displaystyle\int xe^x \, dx$ b) $\displaystyle\int t \sin t \, dt$ c) $\displaystyle\int \ln x \, dx$ d) $\displaystyle\int \ln(2s+3) \, ds$

e) $\displaystyle\int x \cos x \, dx$ f) $\displaystyle\int \ln(1+u^2) \, du$ g) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$ h) $\displaystyle\int \ln^2 s \, ds$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ j) $\displaystyle\int u \ln u \, du$ k) $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$

Exercice 10.

a. Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$. En déduire les primitives de $\dfrac{1}{x(x-1)}$.

b. De façon plus générale, soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré admettant deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{\alpha}{x-r_1} + \dfrac{\beta}{x-r_2}$

Exercice 11. De façon similaire à l'exercice précédent, calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)}$ b) $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+2)(t+3)}$ c) $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2-1}$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ f) $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+4y+4}$ g) $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-2u+1}$ h) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+9} \, dx$

Exercice 12. Identifier a priori la (ou les) méthode(s) qui semble(nt) adéquate(s) pour calculer chacune des primitives suivantes, puis les calculer effectivement :

a) $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+5}$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t} \, dt$ c) $\displaystyle\int x \ln x \, dx$ d) $\displaystyle\int \tan^3 s \, ds$

e) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{3y}{\sqrt{y^2-5}} \, dy$ g) $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\sinh^5 x} \, dx$ h) $\displaystyle\int (u^2+u+1) \, e^u \, du$

i) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^3} \, dx$ j) $\displaystyle\int ye^{y^2} \, dy$ k) $\displaystyle\int t \arctan t \, dt$ l) $\displaystyle\int e^u \sin(e^u) \, du$

m) $\displaystyle\int x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx$ n) $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2-4}$ o) $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2+2s+5}$ p) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Exercice 13. On note $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$. On va dans cet exercice calculer ces intégrales de plusieurs façons différentes.

1. *Méthode 1*

1.a. Simplifier l'expression de $I + J$ et calculer cette valeur.
1.b. Par intégration par parties dans I, donner une relation entre I et J.
1.c. En déduire les valeurs de I et J.

2. *Méthode 2*

2.a. Faire le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$ dans I. En déduire une relation entre I et J.
2.b. En utilisant la relation trouvée à la question 1.a., en déduire les valeurs de I et J.

3. *Méthode 3*

3.a. Rappeler les différentes expressions de $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3.b. En utilisant ces expressions, calculer directement les valeurs de I et J.

Exercice 14.

a. Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, et exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

b. En déduire les valeurs des intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

Pour vous entrainer...

Exercice 15. Calculer les primitives suivantes :

$$a)\ \int e^{2x}dx \qquad b)\ \int e^{-7x}dx \qquad c)\ \int \cos 3x\,dx \qquad d)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \qquad e)\ \int \sqrt{2x+1}\,dx$$

Exercice 16. Calculer les primitives suivantes :

$$a)\ \int xe^{x^2}dx \qquad b)\ \int x^2e^{x^3+1}dx \qquad c)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad d)\ \int \sqrt{e^x}\,dx \qquad e)\ \int \frac{dx}{x(\ln x+1)}$$

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int \frac{2x+5}{(x^2+5x+9)^m}dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{(\ln|u|)^3}{u}\,du \qquad \text{c)}\ \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^4(x)}\,dx \qquad \text{d)}\ \int x^4(x^5+3)^{1/3}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int (\tan^4 x + \tan^2 x)\,dx \qquad \text{f)}\ \int x(x^2+1)^3\,dx \qquad \text{g)}\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad \text{h)}\ \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}\,dx$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t\,e^{t^2}dt \qquad I_2 = \int_0^1 t^2\,e^t dt \qquad I_3 = \int_0^1 t\,e^t dt \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{x\,\ln x}\,dx$$

Exercice 19. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\,dx \qquad \text{c)}\ \int \sin x\cos x\,dx \qquad \text{d)}\ \int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \qquad \text{f)}\ \int f'(s)\cos f(s)\,ds \qquad \text{g)}\ \int \frac{y'(t)}{\cos^2 y(t)}\,dt$$

Exercice 20. Trouver a, b et c tels que $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$. En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$

Exercice 21. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int x^2\arctan x\,dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{\ln x}{x}\cos(1+\ln^2 x)\,dx \qquad \text{c)}\ \int \cos^3 x\,dx \qquad \text{d)}\ \int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int x\cos(3x)\,dx \qquad \text{f)}\ \int \ln(x^2+1)\,dx \qquad \text{g)}\ \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad \text{h)}\ \int (x+1)\sin(2x)\,dx$$

Pour aller plus loin...

Exercice 22. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-2e^x}{e^x+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2-x}{x^2-2x+2}\,dx$

Exercice 23. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt\,.$

Établir une relation entre I_n et I_{n+1}, et en déduire la valeur de I_n.

Exercice 24. *Intégrales de Wallis*

On pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$

a. Par le changement de variable $t = \pi/2 - x$, montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$

b. Calculer W_0, W_1 et W_2.

c. Pour $n \geq 2$, remarquer que $W_n = W_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,\cos^2 x\,dx.$ Par intégrations par parties, en déduire que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

d. En déduire l'expression de W_n (on différenciera les cas n pair et impair).

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un nombre réel. On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n\,e^t\,dt.$

a. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation liant $I_n(x)$ à $I_{n+1}(x)$.

b. Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 (t^2-3t+1)\,e^t\,dt$

Exercice 26. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable.
On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{et } I_2 = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(s)ds.$$

a. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque .

b. Faire le changement de variable $s = f(u)$ dans l'intégrale I_2.

c. Calculer I_2 en fonction de I_1.

d. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 27.

a. Rappeler les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\sin\frac{x}{2}$ et $\cos\frac{x}{2}$. En divisant ces expressions par $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$, déduire l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$.

b. Grâce au changement de variable $t = \tan x/2$, calculer les primitives : $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

Exercice 28. Faire la division euclidienne de x^3 par x^2+4, c'est-à-dire trouver les polynômes $P(x)$ et $R(x)$ tels que $x^3 = P(x)\,(x^2+4) + R(x)$, avec $R(x)$ de degré inférieur ou égal à 1. En déduire les primitives de $\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

Exercice 29. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{e^x-1}$.

Exercice 30. Essayer de calculer les primitives de $\dfrac{1}{\ln x}$.