

CC2 4 decembre

Durée : 1h

Documents et appareils électroniques (dont téléphones portables et calculatrices) interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ les applications :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 3z \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f, g ainsi que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications linéaires.
 2. Trouver le noyau de f et de g .
 3. Calculer la matrice de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
 4. Calculer le déterminant de chacune de ces matrices.
 5. L'application f est-elle surjective ? Justifier.
 6. L'image de g est un plan de \mathbb{R}^3 .
 - Donner une forme paramétrique de ce plan.
 - Donner une équation cartésienne de ce plan.
-

1. L'application f est linéaire car elle s'écrit sous forme matricielle :

$$f(\vec{x}) = A_f \vec{x}$$

ou A_f est la matrice de f :

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De même pour g sa matrice est :

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Si (x, y, z) est dans le noyau de f alors

$$x + y + z = 0, \tag{1}$$

$$x + 2y + 3z = 0. \tag{2}$$

Il en résulte que $y + 2z = 0$ et donc $y = -2z$. En remplaçant y par $-2z$ dans (1) on obtient $x = z$. Donc le noyau de f est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si (x, y) est dans le noyau de g alors

$$x + y = 0, \quad (3)$$

$$x + 2y = 0 \quad (4)$$

Il en résulte que $y = 0$ et donc $x = 0$. Donc le noyau de g est trivial.

3. La matrice de $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par le produit $A_f A_g$:

$$A_f A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

De même pour $g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par le produit $A_g A_f$:

$$A_g A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

4. Le déterminant de $A_f A_g$ est 6 et celui de $A_g A_f$ est 0.
5. L'application f est surjective car tout vecteur de \mathbb{R}^2 est combinaison linéaire de $(1, 1)$ et $(1, 2)$ qui sont les premières colonnes de A_f .
6. L'image de g est le plan passant par l'origine et généré par les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 3)$.
 - Une forme paramétrique de ce plan est

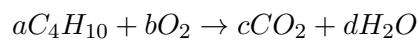
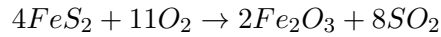
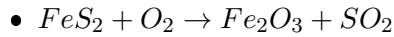
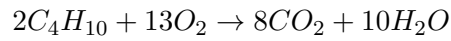
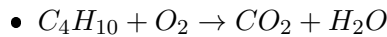
$$\left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ce plan consiste des vecteurs perpendiculaire au produit vectoriel de $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 3)$ à savoir $(1, -2, 1)$. Donc une équation cartésienne de ce plan est

$$x - 2y + z = 0.$$

Exercice 2

En interprétant la conservation des divers éléments comme une condition linéaire sur les quantités de réactif, équilibrer les réactions suivantes :



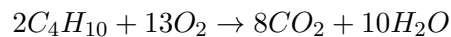
- Étape 1 : Écrire les équations de conservation

- Carbone (C) : $4a = c$
- Hydrogène (H) : $10a = 2d$
- Oxygène (O) : $2b = 2c + d$

- Étape 2 : Résoudre le système Introduisez un paramètre (par exemple, $a = 1$) pour simplifier. Alors :

- À partir de $4a = c$: $c = 4$
- À partir de $10a = 2d$: $d = 5$
- À partir de $2b = 2c + d$: $2b = 8 + 5 \Rightarrow b = 6\frac{1}{2}$

- Pour éliminer les coefficients fractionnaires, multipliez par 2 :



Exercice 3

- Calculer le déterminant de chacune de matrices.
- Déterminer le noyau de l'application linéaire associée.
- **Point bonus :** Montrer que deux matrices sont inversibles et l'une est l'inverse de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- Le déterminant de A est 1, celui de B est 0 et celui de C est 1.
- En effet A et C sont inverses l'une de l'autre car

$$AC = CA = I_3.$$

Il s'en suit que $\ker f_A = \{0\}$ et $\ker f_C = \{0\}$.

- Quant à B il n'est pas inversible car son déterminant est nul. Si (x, y, z) est dans le noyau de f_B alors

$$x + y - z = 0, \tag{5}$$

$$3x + y + 2z = 0, \tag{6}$$

$$-7x - y - 8z = 0. \tag{7}$$

En sommant (1) et (3) on obtient $-6x - 9z = 0$ et donc $x = -\frac{3}{2}z$. En remplaçant x par $-\frac{3}{2}z$ dans (1) on obtient $y = \frac{5}{2}z$. Donc le noyau de f_B est une droite passant par l'origine :

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$