Exercice 1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$, $(h_n)_{n\geq 1}$ et $(k_n)_{n\geq 1}$ suivantes définies sur les intervalles I spécifiés. Trouver des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = xne^{-xn} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad h_n(x) = (\sin x)^n \text{ sur } \mathbb{R};$$

la fonction $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, définie pour tout $n \geq 1$ par $k_n(x) = 0$ si $x \leq -1/n$, $k_n(x) = 1$ si $x \geq 1/n$, avec k_n affine sur l'intervalle $[-1/n, 1/n]$.

$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{x}{x+n} \leqslant \frac{x}{n} \Rightarrow f_n(x) \to 0 \quad \forall x$

càd CVS

mais $\sup |f_n(x)| \geqslant f_n(n) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow$ pas CVU

$g_n(x) = (xn)\, e^{-xn} \to 0 \quad \forall x \geqslant 0$ car exp importe sur poly

$\sup |g_n| \geqslant g_n(1/n) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ pas CVU

le domaine de CVS pour $\sin^n x$

$= \{ x,\ \sin^n x \geqslant 0 \} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

$\sin^n x \to \begin{cases} 1 & \text{si } \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\sin^n x$ cont sur dom CVS mais limite ne l'est pas

$\Rightarrow$ pas CVU

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions c_n et s_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Quels sont les domaines de convergence simple des suites de fonctions $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(s_n)_{n\geq 0}$? (indication : on pourra penser à utiliser les formules $\cos(a+b) = \cdots$ et $\sin(a-b) = \cdots$)

$a_n \to L \Rightarrow a_{n+1} \to L$

$a_{2n} \to L$

On a l'identité trig

$\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$

$c_{n+1} = \cos x \, c_n - \sin x \, s_n \Rightarrow s_n = \dfrac{\cos x \, c_n - c_{n+1}}{\sin x}$ $\quad x \neq 0$

Si $c_n \to L$ alors $c_{n+1} \to L$

$\Rightarrow \quad s_n \to \dfrac{(\cos x - 1)L}{\sin x} = L'$

d même si s_n CV alors c_n CV

On a aussi

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow L = 2L^2 - 1$

$\Rightarrow 2L^2 - L - 1 = 0$

$\Rightarrow L = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

donc $L \in \{1, -\frac{1}{2}\}$

$\sin 2nx = 2 \sin nx \cos nx \to 2L' L$ $\Rightarrow L' = 2L' L$

$\to L'$

$\Rightarrow L'(1-2L) = 0$

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

1. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ des dérivées. Que peut-on constater ?

1/ $\|f_n\| = \sup_x |f_n(x)| = \frac{1}{n} \sup_x |\sin(nx)| \leq 1/n \to 0$

$\Rightarrow$ CVU sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ CVS

facile à voir $f_n(x) \to 0 \ \forall x$

$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq 1/n \to 0$

2/ $f_n'(x) = \cos(nx)$

on vient d voir $\cos nx$ CV $\Leftrightarrow$ $x = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

domaine de CVS $= \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow f_n' \not\to f'$ où $f = \lim f_n$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1/ $f_n(t) \to \sqrt{t^2} = |t|$ CVS

$0 \leq f_n(t) - |t| = \sqrt{t^2 + 1/n} - \sqrt{t^2} = \dfrac{t^2 + 1/n - t^2}{\sqrt{t^2+1/n} + \sqrt{t^2}} \leq \dfrac{1/n}{1/\sqrt{n}} = 1/\sqrt{n} \to 0$

donc par le thm des gendarmes $\|f_n(t) - |t|\| \to 0 \Rightarrow$ CVU

2/ $f_n'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1/n}} \xrightarrow[\text{CVS}]{} g(t) = \begin{cases} t/|t| & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

$f_n'(t)$ cont $\forall n \geq 1$ mais $g(t)$ ne l'est pas $\Rightarrow$ pas CVU