Fiche d'exercices n°2 : sommes et produits

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

$i)\ \dfrac{5^3\,2^4\,10^{-1}}{20^3}$ $\quad ii)\ \dfrac{10^9\,6^3}{25^4\ 3\ 2^{11}}$ $\quad iii)\ \dfrac{1}{10^{56}}-\dfrac{1}{10^{57}}$ $\quad iv)\ 5^{108}\,2^{106}\,\dfrac{11}{10^{107}}$ $\quad v)\ \dfrac{(3^4)^2\ 4}{2^{-3}\ (6^2)^3}$

Exercice 2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$ les valeurs suivantes :

$$\ln(20)\quad ;\quad \ln\left(\sqrt{\frac{2}{125}}\right)\quad ;\quad \ln(0.001)\quad ;\quad \ln\left(\frac{\sqrt[3]{25}}{8\sqrt{2}}\right)\quad ;\quad \ln(500e)$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Exprimer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ les valeurs suivantes :

$$\ln\frac{a^2\sqrt{a}}{b^3}-\ln\frac{b^2}{a}\quad ;\quad 2\ln ab^2-3\ln a^2b+\ln\left(\frac{a}{b}\right)^3\quad ;\quad \ln\sqrt{a^3b^3}-\ln\sqrt[3]{a^2b^2}$$

Exercice 4. A l'aide du tableau ci-dessous, montrer que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1	2	$\dots$	$\dots$	$n-1$	n
n	$n-1$	$\dots$	$\dots$	2	1

Exercice 5.

1. Développer les expressions $(1+a+a^2)(1-a)$ et $(1+a+a^2+a^3)(1-a)$.
2. Développer l'expression $(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)(1-a)$.
3. En déduire la valeur de la somme $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n$.
4. En déduire la valeur de la somme $3^3+3^4+\cdots+3^{10}$.

Exercice 6. Développer les expressions suivantes :

$i)\ (a-b)^2 \quad ii)\ (x+y)(x-y) \quad iii)\ (u+3)^2 \quad iv)\ (x+y)^3 \quad v)\ (a-b)^3$

Exercice 7.

1. Rappeler les valeurs de 3!, 4!, 5! ...
2. Simplifier les expressions suivantes : $\dfrac{10!}{7!}\ ;\ \dfrac{7!}{9!}\ ;\ \dfrac{(n+2)!}{n!}\ ;\ \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$

Exercices de base sur les sommes et produits

Exercice 8. Calculer les sommes et les produits suivants.

$$a)\ \sum_{k=1}^{3}(k^2-1) \quad b)\ \sum_{k=1}^{3}(2k-1) \quad c)\ \sum_{j=2}^{4} j^2 \quad d)\ \sum_{p=0}^{2}(2p+1) \quad e)\ \sum_{n=0}^{2} 2^n$$

$$f)\ \prod_{k=1}^{4}(2k-1) \quad g)\ \sum_{j=-2}^{2} j \quad h)\ \prod_{p=2}^{4} p \quad i)\ \sum_{k=1}^{3} 5 \quad j)\ \prod_{n=3}^{5} 2$$

Exercice 9. Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles $\sum$ et $\prod$.

a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ *b)* $4+5+6+7+8+9$

c) $0+1+2+3+4+5$ *d)* $3+3+3+3+3+3$

e) $2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7$ *f)* $1\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{3}\times \frac{1}{4}\times \frac{1}{5}$

g) $7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7$ *h)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

i) $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$ *j)* $3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

k) $1+3+5+7+9+11+13+15$ *l)* $2+4+6+8+10+\cdots+98+100$

Exercice 10. Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

$$a)\ a_1+\sum_{k=2}^{n} a_k \quad b)\ a_0+\sum_{k=1}^{n+2} a_k \quad c)\ \sum_{k=0}^{3} a_k+\sum_{j=4}^{n} a_j \quad d)\ \sum_{p=n+1}^{2n} a_p+\sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$e)\ \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} \quad f)\ \frac{\prod_{k=1}^{10} 2^k}{\prod_{p=1}^{3} 2^p} \quad g)\ \frac{\prod_{j=1}^{10} 3^j}{\prod_{m=7}^{10} 3^m} \quad h)\ \frac{1}{3}\prod_{k=3}^{7} k$$

$$i)\ \sum_{p=1}^{n} 2^p-\sum_{k=1}^{4} 2^k \quad j)\ \sum_{k=1}^{n+4} k^3-\sum_{j=1}^{n-1} j^3 \quad k)\ \frac{1}{10}\prod_{k=1}^{10} k \quad l)\ \left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)\left(\prod_{p=0}^{n}(2p+1)\right)$$

Exercice 11. Calculer les sommes et les produits suivants :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} 5 \quad b)\ \sum_{p=1}^{n+2} 7 \quad c)\ \prod_{k=2}^{n} 6 \quad d)\ \sum_{k=0}^{n} 4 \quad e)\ \prod_{k=0}^{n+3} 5 \quad f)\ \sum_{j=n}^{2n+1} 8 \quad g)\ \prod_{k=1}^{5} i$$

Exercice 12. Simplifier les produits suivants :

$$a)\ \prod_{k=1}^{n+2} k \quad b)\ \prod_{k=3}^{n} k \quad c)\ \prod_{k=1}^{p} 3k^2 \quad d)\ \prod_{k=2}^{n}(k-1) \quad e)\ \prod_{m=1}^{n}\frac{m+1}{3}$$

$$f)\ \prod_{l=2}^{n}\frac{(l-1)(l+2)}{2} \quad g)\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1} \quad h)\ \prod_{p=2}^{n}\frac{p(p+1)}{p-1} \quad i)\ \prod_{k=1}^{n}(2k+1) \quad j)\ \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$$

Exercice 13. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{j=1}^{n}(\ln 3+3\ln j) \quad b)\ \sum_{k=2}^{n}(2\ln k+\ln(k+1)) \quad c)\ \sum_{p=2}^{n}\ln(2p^3)$$

Exercice 14. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} 3^k \qquad b)\ \sum_{p=0}^{n+2} 7^p \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} 2^k \qquad d)\ \sum_{j=2}^{n} 5^j \qquad e)\ \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2}$$

$$g)\ \sum_{k=1}^{n+1} 7^{2k+1} \qquad h)\ \sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k} \qquad i)\ \sum_{l=0}^{n} \frac{2^{l+1}}{3^{l+2}} \qquad j)\ \sum_{k=0}^{2n-1} 3^{k/2} \qquad k)\ \sum_{k=1}^{p+1} 3^k 5^{2-k} \qquad l)\ \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}}$$

Exercice 15. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} 4k \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} (2k+5) \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n+2} 3k \qquad d)\ \sum_{j=2}^{n} (j+4) \qquad e)\ \sum_{k=0}^{n} (k-2) \qquad f)\ \sum_{p=2}^{2n} \frac{p}{2}$$

Exercice 16. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a)\ \sum_{p=1}^{n} (1+2ip) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{10} (2+ik) \qquad c)\ \sum_{l=1}^{n} \frac{5l}{2+i} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{p} \frac{n+i}{1+i}$$

Exercice 17. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k}$$

$$e)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 3^{-k} \qquad g)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{n-k}} \qquad h)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n}$$

$$i)\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k 3^{n-k} \qquad j)\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k 4^{n-k}$$

Exercice 18. Simplifier les expressions suivantes :

$$a)\ \prod_{k=1}^{20} e^{ik\pi/3} \qquad b)\ \prod_{p=1}^{7} 2e^{ip\pi/8} \qquad c)\ \prod_{k=1}^{6} (1+i)^k$$

$$d)\ \sum_{l=0}^{7} \left(-2+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^l \qquad e)\ \sum_{k=0}^{7} \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k \qquad f)\ \sum_{m=0}^{12} (-1+e^{i\pi/3})^m$$

Exercice 19. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les coefficients α et β tels que $\dfrac{1}{k(k+a)} = \dfrac{\alpha}{k} + \dfrac{\beta}{k+a}$.
En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \qquad c)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

Pour vous entrainer...

Exercice 20. Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

a) $\displaystyle\sum_{p=1}^{3n+2} p - \sum_{k=2n}^{3n+2} k$ *b)* $\displaystyle\sum_{l=1}^{n+4} l - \sum_{k=1}^{n-1} k$ *c)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n-1} j - \sum_{k=n-1}^{2n-1} k$ *d)* $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2} 2^k}$

e) $\dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{2n+1} 3^j}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k}$ *f)* $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} a_p + \sum_{k=1}^{n} a_k$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)^2$ *h)* $\displaystyle\sum_{l=3}^{p+2}(l-2)$

Exercice 21. Calculer les sommes et les produits suivants :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3$ *b)* $\displaystyle\prod_{l=3}^{p+1} 2$ *c)* $\displaystyle\sum_{l=m}^{n} a$ *d)* $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} 2$ *e)* $\displaystyle\prod_{j=n+1}^{3n+5} 7$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=p-2}^{2p+2} 8$

Exercice 22. Simplifier les produits suivants :

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(5k)$ *b)* $\displaystyle\prod_{p=1}^{n+2}(p+3)$ *c)* $\displaystyle\prod_{j=1}^{p}\frac{2}{j+1}$ *d)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)$ *e)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k(k+1)$

f) $\displaystyle\prod_{m=1}^{n}\frac{m+2}{m}$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2-1}$ *h)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(3k^2)$ *i)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{1}{k}$ *j)* $\displaystyle\prod_{l=1}^{p+3}(l+2)$

Exercice 23. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\ln(5j^2)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2\ln k - \ln(k+1))$ *c)* $\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\left(\ln\frac{p+1}{3} + \ln\frac{2}{p}\right)$

Exercice 24. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{3k-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{p+2}\frac{1}{3^{n-2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} 2^{1+3l}3^{-2(l+1)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(-3)^k$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi k}{n}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k3^{k+2}}{7^{k+1}}$

Exercice 25. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{l=1}^{3n}(2l-1)$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{1-n}{3}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ *d)* $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n}3(j+1)$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{3n}\frac{2-k}{3}$

Exercice 26. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k-n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{2n-k}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}3^{2-k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{5^k}{2^{2k}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(3^k)^2$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^k3^{n+k}$

Exercice 27. Calculer les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{5}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-2}2^{3-k}$ *c)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{3^k 2^{n-k}}{5^k}$

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right)$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k}2^{2n-k}$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(k+2)$ *h)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{2-k}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{2n+k}5^{2n-k}$ *j)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

Pour aller plus loin...

Exercice 28. Simplifier les expressions : $\displaystyle\prod_{k=1}^{393} i$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{4n+3} i$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{8n+5}(1+i)$; $\displaystyle\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3}$

Exercice 29. Calculer les produits : $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)$; $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(2j)$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

Exercice 30. On démontre par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
A l'aide de ces formules, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+2)(3k-2)$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1)$

Exercice 31. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}2^k3^{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}2^k3^{n-k}$

Exercice 32. Calculer le module du nombre complexe : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}$

Exercice 33. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$

Exercice 34. On définit la somme $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k+1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4k+1}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

En déduire la valeur de S.

Exercice 35. Exprimer en fonction de x et n les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(xk)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(x(2k+1))$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cos(kx)$

Exercice 36. Soit $a \in]0, \pi[$ fixé.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$

Exercice 37. On considére une expérience ayant deux issues possibles, que l'on appelle *issue positive* et *issue négative*. Soit $p \in]0, 1[$ la probabilité d'avoir une issue positive. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

1. Calculer la probabilité p_k pour que la première expérience positive soit la k-ième.
2. Soit q_1 la probabilité que au moins une expérience parmi les 100 premières soit positive. Exprimer q_1 en fonction de $p_1, \ldots, p_{100}$ et donc en fonction de p.
3. Soit q_0 la probabilité que les 100 premières expériences soient toutes négatives. Exprimer q_0 en fonction de p.
4. Les événements *"Au moins une expérience parmi les* 100 *premières est positive"* et *"Les* 100 *premières expériences sont toutes négatives"* sont complémentaires. On devrait donc avoir $q_0 + q_1 = 1$. Est-ce bien ce que vous avez obtenu ?