

Exo 1

Quels sont les ss espaces de

$\mathbb{R}$  - 0  $\{0\}$  est très un ss espace!

- $\mathbb{R}$  l'espace  $\mathbb{H}$  entier aussi

$S_1 \in \mathbb{C} \mathbb{R}^n$  est ss espace vectoriel

$$\dim E = 33$$

$\dim E = 1 \Rightarrow$  droite qui passe par 0

2  $\Rightarrow$  plan \_\_\_\_\_

$\geq 3 \Rightarrow$  hyperplan

Dans  $\mathbb{R}^3$  un plan = l'ensemble de vecteurs perpendiculaire à un vecteur  $\vec{v} \neq 0$  donnée

l'intersection de 2 plans = droite

## Rappels

Soit  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire

alors  $f^{-1}(\{0\}) = \{v, f(v) = 0\}$  est ss e v

Déf  $\ker f = f^{-1}(\{0\})$  est le noyau de  $f$

i)  $0 \in f^{-1}(\{0\})$  car  $f(0) = 0$

ii) soient  $x, y \in E$  avec  $f(x) = f(y) = 0$

Alors  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  car  $f$  linéaire  
 $= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow x+y \in f^{-1}(\{0\})$

iii) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$

$x \in f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow f(x) = 0$

Alors  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$   
 $= \lambda \cdot 0$  car  $f$  linéaire  
 $= 0$

Soient  $F_1, F_2 \subset E$  ss esp linéaire

alors  $F_1 \cap F_2$  est aussi

i)  $0 \in F_1, 0 \in F_2 \Rightarrow 0 \in F_1 \cap F_2$

ii)  $x, y \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow x, y \in F_1 \Rightarrow x+y \in F_1$   
 $x, y \in F_2 \Rightarrow x+y \in F_2$

$\Rightarrow x+y \in F_1 \cap F_2$

iii)  $\lambda \in \mathbb{R}$

$x \in F_1 \cap F_2$

similaire à vérifier

Exo 2

1)  $f(x, y, z) \mapsto x + y - 7z$  app linéaire

$$E_1 = f^{-1}(\{0\}) \Rightarrow \text{ss esp vectoriel}$$

2)  $E_2$  n'est pas

$$(0, 0, 0) \notin E_2 \quad 4 \times 0 + 5 \times 0 - 0 = 0 \neq 1$$

3)  $E_3$  n'est pas

vérifier que  $(0, 0, 0) \notin E_3$

$$4) E_4 = E_1 \cap F$$

$$E_1 = \{x + y - 7z = 0\}$$

$$F = \{x - y = 0\} = g^{-1}(\{0\})$$

$$\text{où } g(x, y, z) = x - z$$

est une application lin

5)  $E_5$  non

vérifier que  $(1, -1, 0) \in E_5$  et ??

$$(1, 1, 0) \in E_5$$

$$\text{Exo 3} \quad V = \{ \text{polynômes de degré} \leq d \} \\ = \{ \sum_0^n a_i X^i, a_i \in \mathbb{R} \}$$

Ex polynômes de degré  $\leq 1$

$$P(X) = aX + b \quad Q(X) = cX + d \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{II) } (P+Q)(X) = (a+c)X + (b+d) \Rightarrow \text{deg} \leq 1 \\ = 0 \text{ si } a+c=0$$

$$\text{III) } (\lambda P)(X) = (\lambda a)X + (\lambda b) \Rightarrow \text{deg} \leq 1 \\ = 0 \text{ si } \lambda a = 0$$

$$\text{I) } 0_V = \sum_0^d 0 X^i$$

$$\text{II) } \text{Soient } P(X) = \sum_0^d a_i X^i \\ Q(X) = \sum_0^d b_i X^i$$

mq  $(P+Q)(X)$  est de degré  $\leq d$

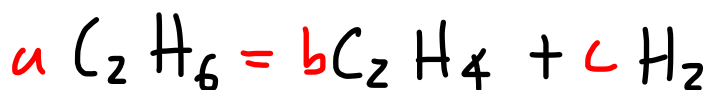
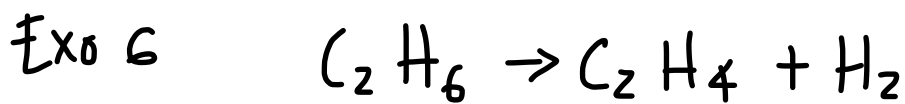
III) Mq si  $\lambda \in \mathbb{R}$   $\lambda P(X)$  est de degré  $\leq d$

## Exo 4

- 1/ Montrer que  $P \mapsto P(z)$  est app linéaire
- 2/ Montrer que  $P \mapsto P'(z)$  est app linéaire
- 3/ Montrer que  $2 \in \mathbb{F}_3$  et faire le produit  $x-2 \in \mathbb{F}_3$
- 4/ Montrer que si  $f, g \in E \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire alors  $f+g$  est linéaire aussi

Prendre  $f, g$  dans 1/, 2/ ci dessus

- 5/  $\mathbb{F}_5$  n'est pas linéaire justifier



Faisons une table

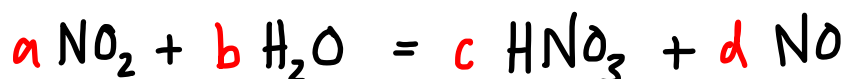
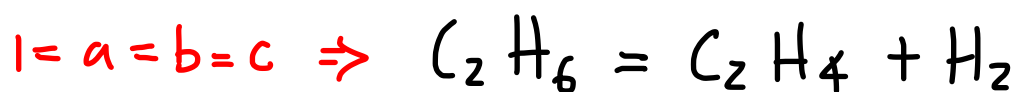
	$a$ $C_2H_6$	$b$ $C_2H_4$	$c$ $H_2$
C	2	2	0
H	6	4	2

système  
linéaire

$2a = 2b$

$6a = 4b + 2c$

$\Rightarrow a = b$        $6a = 4a + 2c \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$   
substitution  $a = b$



	$NO_2$	$H_2O$	$HNO_3$	$NO$
N	1	0	1	1
O	2	1	3	1
H	0	2	1	0

système  
linéaire

$a = c + d$

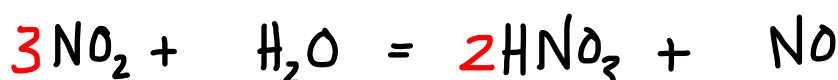
$2a + b = 3c + d$

$2b = c$

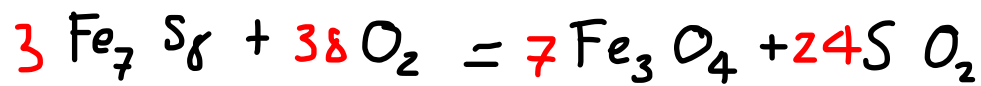
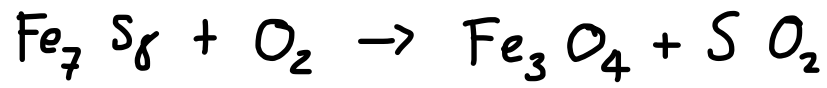
$a = 2b + d$

$2a + b = 6b + d \Rightarrow 2a = 5b + d$

$\Rightarrow a = 3b \quad d = b$   
 $c = 2b$



Exo 6 cont



Trouver le système linéaire et vérifier