
Quick Test 1

NOM Prénom :
GitHub Copilot .

Exo 1 : forme algébrique

Mettre les expressions suivantes sous forme algébrique :

1.

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+10i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

2.

$$(2+i)^2 + \operatorname{Re}(3+4i) = (2+i)(2+i) + 3 = 4+4i+i^2+3 = 6+4i$$

3.

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} + \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} + \frac{-2i}{2} = 0$$

4.

$$\frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a+ib)(a+ib)}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a^2+2iab+i^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Exo 2 : forme exponentielle

Mettre les expressions suivantes sous forme exponentielle :

1.

$$Z = (\sqrt{3}+i)^6 = (2 \exp(i\frac{\pi}{6}))^6 = 64 \exp(i\pi)$$

2.

$$Z = \frac{1+i}{(1-i)^4} = \frac{\sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{4})}{(\sqrt{2} \exp(-i\frac{\pi}{4}))^4} = \frac{\sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{4})}{4 \exp(-i\pi)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \exp(i\frac{5\pi}{4})$$

3.

$$Z = \frac{\exp(i\frac{\pi}{6}) \times \exp(-i\frac{\pi}{3})}{\exp(i\frac{\pi}{4})} = \exp(i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})) = \exp(i(-\frac{5\pi}{12}))$$

4.

$$Z = \frac{(\exp(i\frac{\pi}{3}))^5}{(\exp(-i\frac{\pi}{2}))^7} = \frac{\exp(i\frac{5\pi}{3})}{\exp(-i\frac{7\pi}{2})} = \exp(i(\frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{2})) = \exp(i(\frac{10\pi}{6} + \frac{14\pi}{6})) = \exp(i\frac{7\pi}{6})$$

Exo 3

Résoudre les équations :

$$1. \quad X^2 - 4iX - 8 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = (-4i)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = -16 + 32 = 16$.

Donc les solutions sont :

$$X_1 = \frac{4i \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4i \pm 4}{2} = 2i \pm 2$$

$$2. \quad \text{Résoudre à la fois : } X^2 = -5 - 12i \quad \text{et} \quad X^2 = -5 + 12i$$

- Pour la première équation, on écrit $X = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$X^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = -5 - 12i$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

On a également:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on trouve $2x^2 = 8$, donc $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$ et $2y^2 = 18$, donc $y^2 = 9$ et $y = \pm 3$. Si $x = 2$, alors $2y = -12$ donc $y = -3$ et les solutions sont $\pm(2 - 3i)$.

- Pour la deuxième équation, on remarque que $-5 + 12i$ est le conjugué de $-5 - 12i$. Donc les solutions sont les conjuguées des solutions précédentes, soit $\pm(2 + 3i)$. n