Exercice 1. Etudier la convergence simple, normale, et uniforme des séries de fonctions $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ de terme général défini par :

1. $u_n(x) = e^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}_+$.
2. $u_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.
3. $u_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(3^n x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \frac{1}{1+(n-x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

En analyse, la **convergence normale** est l'un des modes de convergence d'une série de fonctions. Si (f_n) est une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un même ensemble X, la série de terme général f_n converge normalement sur X s'il existe une suite de réels u_n tels que :

1. pour tout n, $|f_n|$ est majorée par u_n sur X ;
2. la série de terme général u_n converge.

$$CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$$

1/ Si $x=0$ $\quad U_n(0)=1$ et $\sum U_n(0)$ DV gross

Si $x \geq a > 0$ $\quad |U_n| \leq e^{-na}$ et $\sum e^{-na} = \frac{1}{1-e^{-a}} \Rightarrow CVN$

2/ Si $x=1$ $\quad U_n(1)=1$ et $\sum U_n(1)$ DV gross

Si $0 \leq x \leq a < 1$ $\quad |U_n| \leq a^n$ et $\sum a^n = \frac{1}{1-a} \Rightarrow CVN$

3/ $|U_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n}\right| |\sin(3^n x)| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow CVN$

4/ $\|U_n\| = \sup_x |U_n(x)| \geq U_n(n) = \frac{1}{1-0} = 1 \Rightarrow \sum \|U_n\|$ DV gross

Si $n \geq N > x$, $(n-x)^2 \geq (n-N)^2 \Rightarrow |U_{n+N}| \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\Rightarrow$ CVN sur $[0,a]$ $\forall a>0$

$\Rightarrow$ CVU sur $[0,a]$ $\forall a>0$

$\Rightarrow$ CVS sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 2. Mêmes questions pour les séries de terme général défini par :

1. $u_n(x) = n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $u_n(x) = (-1)^n n^x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $u_n(x) = e^{-n(x^2+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $u_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$.

1/ $U_n(x) = n^x$ serie de Rieman si $x \geqslant 0$ DV gross
si $0 > x \geqslant -1$ DV

si $x < 0$, $U_n \; x \mapsto n^x = \exp x \log n$, $V_n' = \log n \, U_n(x) \geqslant 0 \Rightarrow$ croissante

donc $x \leqslant a < -1 \Rightarrow U_n(x) \leqslant n^a$ et $\sum n^a < \infty$ sêrie de Riemann

$\Rightarrow$ CVN sur $]-\infty, a]$ $a < -1$

2/ $|U_n(x)| = n^x$ donc CVN sur $]-\infty, a]$, $a < -1$ comme avant

si $x = 1$, $U_n(1) = (-1)^n \, 1/n$ qui verifie les hypothêses d thm des sêries alternées

$\Rightarrow \sum U_n(1)$ CV $\Rightarrow$ domaine CVS $=]-\infty, -1]$

On peut utiliser ce thm pour mq on a CVU sur $]-\infty, -1]$

3/ $U_n = e^{-n(x^2+1)} \leqslant e^{-n}$ car $x^2+1 \geqslant 1 \Rightarrow$ CVN sur $\mathbb{R}$

4/ $\|U_n\| = \sup_x \frac{1}{n}\left|\arctan \frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \sup_y |\arctan y| = \frac{\pi}{2n}$

$\Rightarrow \sum \|U_n\| = \sum \frac{\pi}{2n}$ DV $\Rightarrow$ Pas CVN

$$S_N(x) = \sum^N U_n(x)$$

$|\arctan y| \leqslant |y| \Rightarrow \left|\sum U_n(x)\right| \leqslant \sum |U_n(x)|$ inégalité Δ

$\leqslant \sum \frac{1}{n}\frac{|x|}{n} = |x| \sum \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow S_N(x) \xrightarrow[CVS]{} S(x)$ une fonction à déterminer

$$\left|R_N(x)\right| = \left|\sum_{N+1}^{\infty} (-1)^n n^x\right| \leqslant (N+1)^x \quad \text{thm série alternée}$$

$$\leqslant (N+1)^{-1} \quad x \mapsto (N+1)^x \text{ croissante}$$

$$\to 0 \quad \Rightarrow \text{CVU sur }]-\infty, -1]$$