$$
\begin{array}{rcl}
f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
f : (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2)^2 + 2(y^2 - x^2)
\end{array}
$$

est une fonction de classe C^2 car elle est polynomiale.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{grad} f & = & (4x(x^2+y^2) - 4x, 4y(x^2+y^2) + 4y) \\
 & = & 4(x(x^2+y^2) - x, y(x^2+y^2) + y)
\end{array}
$$

Les points critiques sont les solutions de

$$
\begin{array}{rcl}
x(x^2+y^2) - x & = & 0 \\
y(x^2+y^2) + y & = & 0
\end{array}
$$

- Si $x = 0$, on a $y(y^2+1) = 0$, donc $y = 0$ car $y^2 + 1 \geq 1 > 0$.
- Si $y = 0$, on a $x(x^2-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \pm 1$.

Il en résulte que les trois points critiques sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

L'hessien de f est

$$
H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4 \end{pmatrix}
$$

- En $(0,0)$, on a $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det H = -16 < 0$, donc $(0,0)$ est un point selle.
- En $(\pm 1, 0)$, on a $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\det H = 32 > 0$ et $\mathrm{tr}\, H = 12 > 0$, donc $(1,0)$ est un minimum local.