Exercice 10. Déterminer (éventuellement, en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ ou $z \in \mathbb{C}$) la nature de chacune des séries de terme général u_n défini par :

1) $u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ 2) $u_n = \frac{4^n}{n!}$ 3) $u_n = \frac{n^n}{3^{1+2n}}$ 4) $u_n = e^{-n^3-n}$

5) $u_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 6) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$ 7) $u_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ 8) $u_n = \frac{2^n}{(n+2)3^{n+1}}$

9) $u_n = \frac{x^2}{x^2+n}$ 10) $u_n = \frac{x^2}{x^2+n^2}$ 11) $u_n = e^{-nx}$ 12) $u_n = z^n$

rappels

série géom de raison a $\quad \sum a^n \quad$ si $|a| \geq 1$ DV grossièrement
si $|a| < 1$ CV

Série de Riemann $\quad \sum n^\alpha \quad$ si $\alpha \geq -1$ DV
si $\alpha < -1$ CV

D'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On note ℓ et L les limites inférieure et supérieure des quotients successifs :

$$0 \leq \ell := \liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq L := \limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq +\infty.$$

- Si $L < 1$, alors la série de terme général u_n converge.
- Si $\ell > 1$, alors la suite ne tend pas vers 0 (donc la série diverge grossièrement).

Si $\ell \leq 1 \leq L$, on ne peut rien conclure : c'est le cas incertain de la règle de d'Alembert.

1/ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum U_n = e - 1$ CV

2/ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{4}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum U_n = \exp 4$ CV

3/ U_n DV $\quad U_n = \frac{1}{3}\left(\frac{n}{9}\right)^n \geq \frac{1}{3} 3^n \quad n \geq 27$

4/ $0 \leq U_n \leq e^{-n}$ car $e^{-n^3} \leq 1 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow$ CV
comparaison série géom

5/ i/ $n^n \geq n^1 \quad \forall n \Rightarrow \frac{n^{n+1}}{n} \geq n$

ii/ $\log(1+1/n) = 1/n + o(1/n) \approx 1/n \quad n \to \infty$

$\Rightarrow U_n \not\to 0 \quad n \to \infty \Rightarrow \sum U_n$ DV grossièrement

6/ $U_n \approx e/n \quad n \to \infty \Rightarrow$ DV comparaison série de Riemann

Une série alternée est une série de réels $\sum u_n$ telle que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant[3], c'est-à-dire telle que tous les termes d'indice pair sont positifs et les termes d'indice impair négatifs, ou l'inverse.

Si la série vérifie en outre les deux hypothèses suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leq |u_n|$ (les termes généraux décroissent en valeur absolue) ;
- $u_n \to 0$ (le terme général tend vers 0),

alors il s'agit d'une série convergente et la somme de cette série est toujours encadrée par les sommes partielles successives.

7/ $U_n = \sin 1/n > 0$

monotone décroissante

$\to 0 \quad n \to +\infty$

donc (U_n) vérifiée les hypothèses et $\sum U_n$ CV

8) $U_n = \frac{1}{3(n+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow$ CV comparaison série géom

9/ $U_n = \frac{x^2}{x^2+n} \sim \frac{x^2}{n} \quad n \to \infty \Rightarrow$ DV comparaison série de R

$x \neq 0$

10/ $U_n = \frac{x^2}{x^2+n^2} \sim \frac{x^2}{n^2} \quad n \to \infty \Rightarrow$ CV comparaison série de R

séries géométriques

11/ 2 cas

$x \leqslant 0 \Rightarrow e^{-nx} \not\to 0 \quad n \to \infty \Rightarrow \sum U_n$ DV gross

$x > 0 \Rightarrow e^{-nx} \to 0 \quad n \to \infty$

$\sum U_n$ CV série géom $\sum U_n = \frac{1}{1-e^{-x}}$

12/ 2 cas

$|z| \geqslant 1 \Rightarrow U_n \not\to 0 \Rightarrow \sum U_n$ DV gross

$|z| < 1 \Rightarrow \sum U_n = \frac{1}{1-z}$ série geom