UGA L2
2023-24

CC1 MAT305
You can write in english.

Exercice 1

Calculer les derivées partielles f_x, f_y et f_{xy}, f_{yx} pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = x^3y^2 + 5y^2 - x + 7$
2. $f(x,y) = \cos(xy^2) + \sin x$
3. $f(x,y) = e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$
4. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+1}$

1. Si $f(x,y) = x^3y^2+5y^2-x+7$ alors $f_x = 3x^2y-1$, $f_y = 2x^3y+10y$ et $f_{xy} = 6xy$ et $f_{yx} = 6xy$.
2. Si $f(x,y) = \cos(xy^2)+\sin x$ alors $f_x = -y^2\sin(xy^2)+\cos x$, $f_y = -2xy\sin(xy^2)$, $f_{xy} = -2y\sin(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2)$ et $f_{yx} = -2y\sin(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2)$.
3. Si $f(x,y) = e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$ alors $f_x = 2xe^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}+\frac{xe^{x^2+y^3}}{\sqrt{x^2+1}}$, f$_y$ =3y$^2e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$, $f_{xy} = 2ye^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}+3xy^2e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$ et $f_{yx} = 2ye^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}+3xy^2e^{x^2+y^3}\sqrt{x^2+1}$.
4. Si $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+1}$ alors
$$f_x = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(y^2+1)}{(x^2+1)^2}$$
,
$$f_y = \frac{-2y}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions f suivantes calculer $f_{xx} + f_{yy}$:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$
2. $f(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$
3. $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$

---

1. Si $f(x, y) = x^2 - y^2$ alors $f_{xx} + f_{yy} = 2 - 2 = 0$.
2. Si $f(x, y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$ alors
$$f_{xx} + f_{yy} = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) + e^y \cos(x) - e^x \sin(y) = 0.$$
3. $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ alors $f_{xx} + f_{yy} = 0$ car $f_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$ donc
$$f_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } f_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Exercice 3

On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

1. Déterminer les ensembles de niveaux de f et donner une interpretation geométrique.
2. Monter que $f \circ \gamma$ est constante où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ et préciser la valeur du constant.
3. Calculer le gradient de f et $\dot{\gamma}$ le vecteur vitesse de γ.
4. Calculer le produit scalaire $(\text{grad} f).\dot{\gamma}$ et representer le résultat graphiquement.