M1–Analyse Fonctionnelle
2020-2021

TD n°3 : Théorèmes de séparations, Hahn-Banach.

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On appelle *hyperplan affine* un ensemble H de la forme

$$H = H_{f,\alpha} = \{x \in X \ , \ f(x) = \alpha\} \quad \text{avec } f \text{ forme linéaire non nulle et } \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

On rappelle qu'un hyperplan affine est fermé si et seulement si la forme linéaire f est continue.

On dit que deux sous-ensembles A et B de X sont *séparés au sens large par l'hyperplan* $H_{f,a}$ si et seulement si

$$\forall a \in A \ , \ \forall b \in B \ , \quad f(a) \leq \alpha \leq f(b) \qquad \text{(ou inversement).}$$

On dit que deux sous-ensembles A et B de X sont *séparés au sens strict par l'hyperplan* $H_{f,a}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall a \in A \ , \ \forall b \in B \ , \quad f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b) \qquad \text{(ou inversement).}$$

Exercice 1 : Echauffement dans $\mathbb{R}^2$
On se place dans $X = \mathbb{R}^2$.
1) Donner deux ensembles convexes fermés disjoints qui ne peuvent être séparés au sens strict.
2) Montrer qu'un convexe compact et un convexe fermé disjoints peuvent toujours être séparés au sens strict.

Exercice 2 : Jauge d'un convexe
On se place dans un espace vectoriel E que, initialement on ne suppose pas normé.

1. Soit C un sous-ensemble de E tel que
   - C est convexe
   - C est symétrique, c'est à dire que pour tout $x \in C$ on a que $-x \in C$.
   - pour tout droite $D \subset E$ passant par 0 l'ensemble $D \cap C$ est une intervalle fermée et bornée de D qui contient un voisinage de 0.

   Montrer qu'il existe une unique norme N_C sur E pour laquelle C est la boule unité fermée.

2. (**) Montrer que si la norme N_C est lisse alors pour tout x tel que $N_C(x) = 1$ l'ensemble
$$\{v \in E | D_v(x) \cap C^\circ = \emptyset\}$$
est un hyperplan fermé de E que l'on note $T_x(C)$. Ici, $D_v(x)$ est la droite de E passant par x en direction v.
3. Montrer que la norme N_C est strictement convexe si et seulement si pour chaque $x, y \in E$ tels que $||x|| = ||y|| = 1$ le segment
$$]x, y[\subset C^\circ.$$
4. (**) Montrer par des exemples sur $\mathbb{R}^2$ qu'il existe des normes lisses non strictement convexes et qu'il existe des normes strictement convexes non lisses.

Exercice 3 : Application à la densité d'un s.e.v.
Soit E un sous-espace vectoriel de X. Montrer que E est dense si et seulement si, pour tout f forme linéaire continue, $f \equiv 0$ sur E implique $f \equiv 0$ sur X.

Exercice 4 : Contre-exemples de séparation

Supposons X de dimension infinie et soit H un sous-espace vectoriel strict dense dans X. Soit $x_0 \notin H$, montrer que $\{x_0\}$ et H sont des convexes qui ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

Exercice 5 : Inclusion de X dans X^{**}
On considère l'application $\phi : X \to X^{**}$ donnée par
$$\langle \phi(x), f \rangle = f(x).$$
Montrer que cette application préserve la norme. Montrer que ce n'est pas toujours une bijection. (Utilisez le dernier résultat de la feuille 1).

Exercice 6 : Unicité des extensions préservant la norme.
1. Soit H un espace de Hilbert et V un sous-espace fermé de H muni d'une forme linéaire continue f_V de norme 1. Montrer que l'extension de f_V en une forme linéaire f_H continue de norme 1 sur H est unique.
2. Montrer que la conclusion de 1) reste valable si on remplace la condition "H est un espace de Hilbert" par "H est un espace uniformément convexe et lisse".

Exercice 7 : Non-unicité de l'extension.
Donner un exemple dans $l^1(\mathbb{N})$ d'un sous-espace V muni d'une forme linéaire f_V qui admet une infinité d'extensions f sur $l^1(\mathbb{N})$ telles que $|||f_V||| = |||f|||$.

Exercice 8 : Un contre-exemple de séparation de deux convexes fermés
On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle. On considère les convexes fermés

$$A = \left\{ (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \ , \ u_n \geq \frac{1}{n^2} \right\} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R}.\left(\frac{1}{n^3}\right) \ .$$

Soit f une forme linéaire continue telle que $f(b) \leq f(a)$ pour tout $b \in B$ et $a \in A$.

1. Que pouvez vous dire sur $f|_B$?
2. Montrer que pour tout (u_n) telle que

$$\exists N \text{ tel que } u_n \geq \frac{1}{n^2} \forall n > N$$

   on a $f(u_n) > 0$.
3. Déduire que $f = 0$.

Exercice 9 : Convexes et demi-espaces fermés
Soit C un convexe fermé dun espace de Banach E. On appelle demi-espace fermé de E tout ensemble de la forme

$$D = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

où $f \in E^*$ et $\alpha \in E$. Montrer que C est l'intersection de tous les demi-espaces fermes qui le contiennent.