Exercice 2 : Formes linéaires continues

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

1) Construire une norme sur E pour laquelle l'application

$$f \to f'$$

est une application continue vers $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (munie d'une norme de votre choix). Est ce que E est un espace de Banach pour cette choix de norme ?

Rappel thm interversion des limites

① Si $f_n \xrightarrow[\text{CVU}]{} f$, f_n cont $\forall n$ alors f cont

$\Rightarrow$ $C^0[0,1]$ fermé avec la norme CVU $\|\ \|_\infty$

② $\hat{m}$ hypothèse sur f_n alors

$g_n(t) = \int_0^t f_n(s)\,ds \to g(t) = \int_0^t f(s)\,ds$

On définit $\|f\|_S = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$\|\ \|_S$ bien définit car f, f' cont sur $[0,1] \Rightarrow$ bornées

Définition — Un **K**-espace vectoriel E est dit **normé** lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application

$$\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+$$

satisfaisant les hypothèses suivantes :

- séparation : $\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- homogénéité : $\forall (\lambda, x) \in \mathrm{K} \times E,\ \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$; (facile à vérifier)
- sous-additivité (inégalité triangulaire) : $\forall (x,y) \in E^2,\ \mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Separation $\|f\|_S = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \geqslant \|f\|_\infty$

On a $\|f\|_S = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$

Inégalité triang $\|f+g\|_S = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty$

$\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

$\leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty$

$= \|f\|_S + \|g\|_S$

Continuité $\|f'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty = \|f\|_S$

Conclusion $f \mapsto f'$ bornée, norme $\leqslant 1$

$C^1[0,1], \| \|_S \to C^1[0,1], \| \|_\infty$

Finalement OUI $C^1[0,1], \| \|_S$ est complet

$f_n' \xrightarrow[\text{CVU}]{} f_\infty \Rightarrow f_\infty$ CONT

Point ② du rappel $f_\infty = f'$ où $f = \lim_{\text{CVU}} f_n$

Plus malin ϕ $C^1 \to C^0$ est continue $\Rightarrow$ $\phi^{-1}(F)$ fermé si F fermé

$f \mapsto f'$ $\Rightarrow$ $\phi^{-1}(C^0) \subset C^0, \| \|^\infty$ fermé

et $\phi^{-1}(C^0) = C^1$, " ϕ^{-1} $f \mapsto F$ = primitive de f "

2) Plus généralement, soient E et F des espaces de Banach munis de normes $||.||_E$ et $||.||_F$ et soit

$$\phi : E \to F$$

une application linéaire. Construire une norme $||.||_{E,\phi}$ sur E telle que

1. ϕ devient continue lorsqu'on munit E de la norme $||.||_{E,\phi}$

2. l'application identité de $(E, ||.||_{E,\phi})$ vers $(E, ||.||_E)$ est continue.

1/ On pose $\|f\|_{E,\phi} = \|f\|_E + \|\phi(f)\|_F$

On a $\|\phi f\|_F \leqslant \|f\|_{E,\phi} \Rightarrow \phi$ bornée (= cont)

2/ $\|f\|_E \leqslant \|f\|_E + \|\phi(f)\|_F = \|f\|_{E,\phi}$

$\Rightarrow$ l'identité est bornée $\Rightarrow$ continue