Corrigé de l'examen du 19 décembre 2023 (durée : 2h)

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (2-3i)z - 5 - i = 0$
(INDICATION : $\sqrt{8^2+15^2} = 17$)

Nous avons affaire à une équation polynomiale de degré 2. On va la résoudre en calculant son discriminant Δ, dont on cherchera ensuite une racine δ ($\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$). Les deux solutions de l'équation seront alors finalement $z_1 = \frac{-(2-3i)-\delta}{2}$ et $z_2 = \frac{-(2-3i)+\delta}{2}$.

On a ici : $\Delta = (2-3i)^2 - 4(-5-i) = 4 - 12i - 9 + 20 + 4i = 15 - 8i$. Notons maintenant $\delta = \alpha + i\beta$. L'égalité $\delta^2 = \Delta$ implique $\alpha^2 - \beta^2 = 15$ (égalité des parties réelles) et $2\alpha\beta = -8 < 0$ (égalité des parties imaginaires). De plus, on a égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17$. On a donc le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 15 & (1) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 17 & (2) \\ \alpha\beta < 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant $(1)+(2)$, puis $(2)-(1)$, on en déduit $\alpha^2 = 16$ et $\beta^2 = 1$, soit $\alpha = \pm 4$ et $\beta = \pm 1$. D'après (3), α et β sont de signes opposés. D'où $\delta = 4 - i$ (ou son opposé).
Les 2 racines du polynôme sont donc :

$$z_1 = \frac{-2+3i+4-i}{2} = 1+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-2+3i-4+i}{2} = -3+2i$$

2. Calculer $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^k$

Il s'agit de la somme des 12 premiers termes d'une suite géométrique de raison $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$.
On a donc $S = \dfrac{1-z^{12}}{1-z}$. Or $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = e^{i\pi/6}$. D'où $z^{12} = e^{12i\pi/6} = e^{2i\pi} = 1$. D'où $\underline{S = 0}$.

Exercice 2 *Sommes et produits*

1. En utilisant les symboles $\sum$ et/ou $\prod$, ré-écrire sous une forme plus compacte les expressions suivantes :

$$E_1 = \frac{5^3}{3} + \frac{6^3}{4} + \frac{7^3}{5} + \cdots + \frac{13^3}{11}$$

$$E_2 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 24}{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times 47}$$

$$E_3 = \frac{1}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \cdots + \frac{a^{49}}{50}$$

Il y a bien sûr plusieurs écritures possibles pour chaque expression. En voici quelques-unes :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sum_{k=3}^{11} \frac{(k+2)^3}{k} = \sum_{k=4}^{12} \frac{(k+1)^3}{k-1} = \sum_{k=5}^{13} \frac{k^3}{k-2} \\
E_2 &= \prod_{k=3}^{24} \frac{k}{2k-1} = \prod_{k=2}^{23} \frac{k+1}{2k+1} \\
E_3 &= \sum_{k=1}^{50} \frac{a^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{49} \frac{a^k}{k+1}
\end{aligned}$$

2. On définit la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\,(k+2)}$

2.1. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{k\,(k+2)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+2}$

On va identifier les 2 expressions, en remettant les termes de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k+2} = \frac{a\,(k+2)}{k\,(k+2)} - \frac{b\,k}{k\,(k+2)} = \frac{(a-b)\,k + 2a}{k\,(k+2)}$$

Par identification, cette fraction sera égale à $\frac{2}{k\,(k+2)}$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-b &=& 0 \\ 2a &=& 2 \end{array} \right. \quad \text{, soit} \quad a = b = 1$$

2.2. En déduire la valeur de S.

On a vu que $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\,(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$. D'où en développant :

$$\begin{aligned}
S &= \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}_{k=3} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}_{k=4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}}_{k=n-2} + \underbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}}_{k=n-1} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}}_{k=n} \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{-1+1}{3}}_{=0} + \underbrace{\frac{-1+1}{4}}_{=0} + \cdots + \underbrace{\frac{-1+1}{n}}_{=0} + \frac{-1}{n+1} + \frac{-1}{n+2} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \qquad \left(= \frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)} \right)
\end{aligned}$$

Exercice 3 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$ et les quatre points : $A(2, 1, -1)$ $B(-1, 2, 4)$ $C(0, -2, 3)$ $D(1, 1, -2)$.

Pour chacune des 6 affirmations suivantes, indiquer en justifiant votre réponse si elle est vraie ou fausse. TOUTE RÉPONSE NON JUSTIFIÉE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE.

(a) Les points A, B et C définissent un plan.

A, B et C définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas confondus (auquel cas ils définiraient juste un point), ni alignés (auquel cas ils définiraient une droite). A l'évidence, ils ne sont pas confondus. Il reste donc à voir s'ils sont alignés ou non. Pour cela, on peut par exemple regarder si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnels.
Or $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 5)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 4)$. Ils ne sont pas multiples l'un de l'autre : A, B et C ne sont donc pas alignés. L'affirmation (a) est vraie.

(b) La droite (AC) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

MÉTHODE 1 La droite (AC) est incluse dans $\mathcal{P}$ si et seulement si les 2 points A et C appartiennent à $\mathcal{P}$. On voit que $A(2, 1, -1)$ vérifie en effet l'équation de $\mathcal{P}$ $(2-2\times 1+(-1)+1 = 0)$, mais pas $C(0, -2, 3)$ $(0 - 2 \times (-2) + 3 + 1 \neq 0)$. Donc C n'est pas dans le plan $\mathcal{P}$.

MÉTHODE 2 Si (AC) est incluse dans $\mathcal{P}$, alors tout vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ est aussi orthogonal à $\overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ est orthogonal à $\mathcal{P}$ (d'après son équation cartésienne) et $\overrightarrow{n}.(AC) = (1, -2, 1).(-2, -3, 4) = 8 \neq 0$

L'affirmation (b) est fausse.

(c) Une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.

MÉTHODE 1 $x+8y-z-11 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABD) si et seulement si elle est vérifiée par les 3 points A, B et D.
Pour $A(2, 1, -1)$: $2 + 8 \times 1 - (-1) - 11 = 2 + 8 + 1 - 11 = 0$. A vérifie l'équation.
Pour $B(-1, 2, 4)$: $-1 + 8 \times 2 - 4 - 11 = -1 + 16 - 4 - 11 = 0$. B vérifie l'équation.
Pour $D(1, 1, -2)$: $1 + 8 \times 1 - (-2) - 11 = 1 + 8 + 2 - 11 = 0$. D vérifie l'équation.

MÉTHODE 2 On peut calculer une équation cartésienne de (ABD). Un vecteur normal à ce plan sera $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = (-3, 1, 5) \wedge (-1, 0, -1) = (-1, -8, 1)$. Une équation cartésienne de (ABD) est donc $-x - 8y + z + d = 0$, et on détermine la constante d en remplaçant par exemple par les coordonnées de A : $-2-8-1+d = 0$, soit $d = 11$. Une équation cartésienne de (ABD) est $-x - 8y + z + 11 = 0$, soit encore $x + 8y - z - 11 = 0$ en multipliant par -1.

L'affirmation (c) est vraie.

(d) Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\left\{(x, y, z) = (1 + 2\lambda, -\frac{1}{2} + 3\lambda, 1 - 4\lambda) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Il s'agit bien d'une représentation paramétrique de la droite (AC) si et seulement si les points A et C vérifient cette équation paramétrique.
Pour A, cela veut dire qu'il existe un réel λ_A tel que $(2, 1, -1) = (1+2\lambda_A, -\frac{1}{2}+3\lambda_A, 1-4\lambda_A)$.
A l'évidence, $\lambda_A = 1/2$ convient.
Pour C, cela veut dire qu'il existe un réel λ_C tel que $(0, -2, 3) = (1+2\lambda_C, -\frac{1}{2}+3\lambda_C, 1-4\lambda_C)$.

A l'évidence, $\lambda_C = -1/2$ convient.
L'affirmation (d) est vraie.

(e) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc par exemple si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Pour déterminer si c'est le cas, on calcule leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (-3, 1, 5).(1, 3, -5) = -3 + 3 - 25 \neq 0$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux. L'affirmation (e) est fausse.

(f) Le point $E\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

E est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$ si et seulement si $E \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{EC}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
Les coordonnées de E vérifient l'équation cartésienne de $E \in \mathcal{P}$ (on a bien : $-4/3 - 2(2/3) + 5/3 + 1 = 0$), donc $E \in \mathcal{P}$.
On a $\overrightarrow{EC} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ (constitué des coefficients de x, y, z dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$) est normal à $\mathcal{P}$. Or, on voit que $\overrightarrow{EC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{n}$, donc $\overrightarrow{EC}$ est bien lui-aussi normal à $\mathcal{P}$.
L'affirmation (f) est vraie.

Exercice 4 Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = 1 + (x-1)\,e^{-x}$

Indication pour le tracé : $e^{-2} \simeq 0.135$

Domaine de définition La fonction $f(x)$ est définie pour tout x réel. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine de définition

- Quand $x \to -\infty$, $(x-1) \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- Quand $x \to +\infty$, $(x-1) \to +\infty$ et $e^{-x} \to 0$. Le produit de ces 2 termes est donc une forme indéterminée du type "$0 \times \infty$". D'après la règle de croissance comparée, la valeur de la limite sera celle du terme exponentiel. Donc $(x-1)\,e^{-x} \to 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
  La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale.

Dérivée Il s'agit de la dérivée d'un produit. On a $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = (2-x)\,e^{-x}$. L'exponentielle étant toujours positive, $f'(x)$ est donc du signe de $2-x$: $f'(x) > 0$ pour $x < 2$, $f'(x) = 0$ pour $x = 2$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 2$.

Tableau de variations On rassemble les informations précédentes dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	2	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	1

$f(0) = 1 - 1\,e^0 = 0$

$f'(0) = 2e^0 = 2$

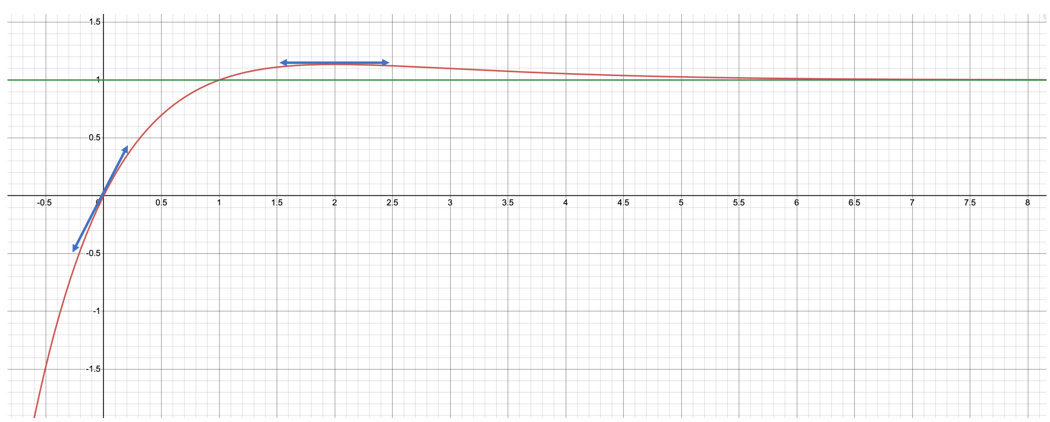
$f(2) = 1 + e^{-2} \simeq 1.135$

Etude de la branche infinie ($x \to -\infty$) On a vu que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, on va donc chercher si cette branche infinie comporte une asymptote oblique. Pour cela, on recherche $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

On a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1 + (x-1)\,e^{-x}}{x} = \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{\to 1}\underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique, $f(x)$ tend vers $-\infty$ plus rapidement que n'importe quelle droite.

Tracé de la courbe



Exercice 5 Soient les fonctions $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.

1. Déterminer la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff \ln x = (\ln x)^2 \\ &\iff \ln x - (\ln x)^2 = 0 \\ &\iff (\ln x)\,(1 - \ln x) = 0 \\ &\iff \ln x = 0 \ \text{ ou } \ \ln x = 1 \\ &\iff x = 1 \ \text{ ou } x = e \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = g(x)$ a donc deux solutions $x = 1$ et $x = e$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

Si l'on ne connait pas par coeur les primitives de la fonction logarithme népérien, on peut procéder par intégration par parties, en utilisant la formule $\int uv' = [uv] - \int u'v$. Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = x$. On a donc :

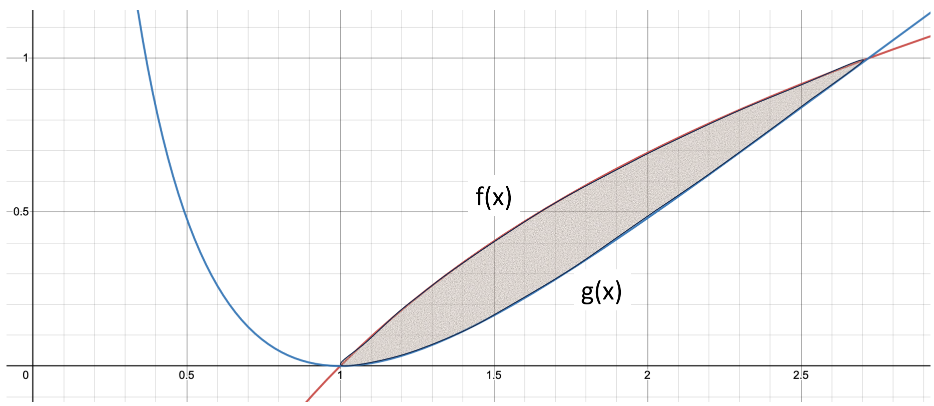
$$\begin{aligned} I = \int_1^e \ln x\, dx &= [x\,\ln x]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx = [x\,\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx \\ &= [x\,\ln x - x]_1^e = e\,\underbrace{\ln e}_{=1} - e - (1\,\underbrace{\ln 1}_{=0} - 1) = 1 \end{aligned}$$

3. Soit $\quad J = \displaystyle\int_1^e g(x)\,dx$. Par intégration par parties, montrer que $J = e - 2I$.

Posons cette fois $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = 2/x\,\ln x$ et $v(x) = x$. On a donc :

$$J = \int_1^e (\ln x)^2\,dx = \left[x\,(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{x}\,x\,\ln x\,dx = \underbrace{\left[x\,(\ln x)^2\right]_1^e}_{=e} - \int_1^e 2\,\ln x\,dx = e - 2I$$

4. Quelle est la valeur de la surface grisée de la figure ci-dessous ?



La surface grisée $\mathcal{S}$ correspond à l'écart entre les courbes représentatives de f et de g, entre leurs 2 points de croisement $x = 1$ et $x = e$ (cf question 1), c'est-à-dire :

$$\mathcal{S} = \int_1^e (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^e f(x)\,dx - \int_1^e g(x)\,dx = I - J = I - (e - 2I) = 3I - e = 3 - e$$