Exercice 3 : Separabilité.
On rappelle qu'un espace topologique est *separable* s'il contient un ensemble dénombrable et dense.
1) Montrer qu'un espace de Banach E est separable si et seulement s'il existe une suite de sous-espaces dans E de dimension finie

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots$$

telle que $\overline{(\cup_n E_n)} = E$.
2) (*) Pour quelles valeurs de p l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$, resp. $L^p(\mathbb{R})$, est-il separable ?

1/ On suppose $\exists$ E_i comme dans l'énoncé
$\forall i$, $E_i \subset B$ est un ss espace (fermé)
Notons $d_i = \dim E_i$ alors $E_i \simeq \mathbb{R}^{n}$ comm e v
d plus E_i est banach avec la norme induite
Rq en dim fini tte les normes sont equiv
et on voit que $\mathbb{Q}^{d_i}$ dense dans $\mathbb{R}^{d_i} \equiv E_i$
donc E_i separable et on note $Q_i \subset E_i$
un ss ensemble denombrable dense dans E_i

Rappel Reunion denombrable de denombrables est denombrable

$\Rightarrow Q = \cup Q_i$ denombrable

On a $E = \cup E_i$ dense dans B
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in B$ $\exists i$ tq $f_i \in E_i$ $\|f - f_i\| < \varepsilon/2$
or Q_i dense dans $E_i \Rightarrow \exists q_i \in Q$ $\|f_i - q_i\| < \varepsilon/2$
$\Rightarrow \|f - q_i\| < \varepsilon \Rightarrow \overline{Q} = B$

On suppose $\exists$ Q denombrable $\overline{Q} = B$
Soit f $\mathbb{N} \to Q$ une surjection (existe car Q dénomb)
$E_i = \langle f(0), \dots f(i) \rangle$ alors $E_i \subset E_{i+1}$
et $\cup E_i$ est dense car $Q \subset \cup E_i$

$\forall q \in Q$ $\exists i$ tq $q = f(i) \Rightarrow q \in E_i \subset \cup E_i$

2/ ℓ^p separable $p < \infty$

$E_i = \{ f \; \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(j) = 0 \ \forall j > i \}$, $\dim E_i = i+1$

$\forall i$, $E_i \subset \ell^p = \{ f \; \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \sum |f|^p < \infty \}$

$E_i \subset E_{i+1}$ facile à voir

Soit $g \in \ell^p$ et notons $g_i \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$g_i(k) = \begin{cases} g(k) & k \leq i \\ 0 & k > i \end{cases}$$

$\Rightarrow g_i \in E$ et $\| g - g_i \|^p = \sum_{k > i} | g(k) |^p \to 0 \quad i \to \infty$

$\Rightarrow g \in \overline{\cup E_i}$ et d'après 1/ ℓ^p separable

ℓ^∞ non separable

Soit $f \; \mathbb{N} \to Q \subset \ell^\infty$ une surjection

$f(i)$ = suite et $f(i)_k$ = k-ième élt

Diagonalisation on pose $u_n = 1 - f(n)_n$

$\| u - f(i) \|_\infty = \sup_k | u_k - f(i)_k | \geq | u_i - f(i)_i | = 1$

Donc Q n'est pas dense car $(u_n) \notin \overline{Q}$

On a mq $\nexists$ d'ensemble dénombrable dense $\subset \ell^\infty$

càd ℓ^∞ pas separable

Dans ma tête j'ai réunion dénombrable de dénombrables est dénombrable

mais produit cartésien de dénombrable de dénombrables n'est pas forcement dénombrable

$L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable

~~$\ell^\infty(\mathbb{N}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ mais $\mathbb{N}$ est de mesure nulle~~

~~donc je dois "épaissir" $\mathbb{N}$~~

~~Soit $f \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ on définit~~

~~$\pi(f) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\pi(f)(x) = \begin{cases} f(i) & i \leq x \leq i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$~~

~~on a $\|\pi(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$~~

Puis (sauf erreur le même argument marche)
mais $\exists$ exemples de non sep $\subset$ sep
donc on dois reprendre

---

une suite $\in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \qquad u = (u(k)) = (u(1), u(2), \quad)$$

$$u \longmapsto \pi(u) \qquad x \mapsto v(k) \qquad k \leq x < k+1$$

une fn $\in L^\infty$

Si $u \neq v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\exists\, i$ $u(i) \neq v(i)$

$$\Rightarrow \|\pi(u) - \pi(v)\|_\infty \geq \sup_{i \leq x \leq i+1} |\pi(u)(x) - \pi(v)(x)| = 1$$

$\Rightarrow \exists$ une ∞ non dénombrable des boules de rayon $\frac{1}{2}$ 2 à 2 disjoints $\{B_{1/2}(\pi(u)), u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$

Séparabilité, c'est une version "faible" de compacité

X cpt ssi $\forall$ recouvrement contient un recouvrement fini

X sep $\Rightarrow \forall r > 0, \{B_r(x), x \in X\}$ contient un recouvrement dénombrable

On vient de mqc pas le cas de $\{B_{1/2}(f), f \in L^\infty\}$

X sep $\Rightarrow \forall r>0, \{B_r(x), x \in X\}$ contient un recouvrement dénombrable

On suppose $\overline{Q} = X$ avec Q dénombrable

soit $r>0$ Q dense $\Rightarrow$ $B_\varepsilon(q)$ $q \in Q$ recouvrement $\forall \varepsilon > 0$

en part pour $\varepsilon = \frac{1}{2}r$

Si $x \in B_{r/2}(q)$ alors $B_{r/2}(q) \subset B_r(x)$

Maintenant on a que à choisir un x pour chaque q

Autrement on peut utiliser la densité de Q pour construire une surjection $Q \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Exercice 7 : A propos des compacts

1) Montrer que pour tout p la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$, resp. $L^p(\mathbb{R})$, n'est pas compacte.

2) Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout $(b_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, l'ensemble

$$K = \{(u_n) \in \ell^p(\mathbb{N}) \mid |u_n| \leq |b_n|\}$$

est un compact de $\ell^p(\mathbb{N})$. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

$\mathbb{R}$ n'est pas compact car la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de ss suite de CAUCHY

Comme dans l'exo 3 chercher une suite $f_n \in \ell^p$, $\|f_n - f_m\| = 1$, $n \neq m$

Faire le cas $p=2$, $b_n = 1/n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M$ tq la condition donne que $\forall (u_n) \in K$ $\sum_{n \geq M} |u_n|^2 < \varepsilon$

$\boxed{\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n \text{ seq cpt}}$

Soit $u_k \in \overline{B}_1(0)$, $A_{-1} = \{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ ↗ on va supposer card $A_1 = \infty$

on va construire A_m tq 1/ diam $(A_m) = 1/2m$

2/ $A_m \supset A_{m+1}$

Pour $m=-1$ A_{-1} bon

On prend recouvrement fini $\{B_{1/2}(x_i)\}$ de $\overline{B}_1(0)$

Rq $\exists$ i tq card $|A_{-1} \cap B_{1/2}(x_i) \cap \overline{B_1(0)}| = \infty$

$$A_0 = (A_{-1} \cap B_{1/2}(x_i) \cap \overline{B_1(0)})$$

récrire cett étape pour définir A_m

On peut définir une ss suite de Cauchy de (v_k) en a que à prendre le premier élt dans A_m pour chaque m

Adapter l'argument à $E_n \subset \ell^p$

$(a_k) \in E_n$ ssi $a_k = 0 \ \forall k > n$