Fonctions de croissance et séries de groupe de croissance

I - Définitions :

Soit Γ groupe généré par $S = (x_1 ——— x_n)$
On redéfinit la fonction ℓ_S

$$\ell_S : \begin{cases} \Gamma \longrightarrow \mathbb{N} \\ \gamma \longmapsto \min(k \,/\, \exists\, a_1, ———, a_k \in S \cup S^{-1} \\ \qquad\qquad \gamma = a_1 * ——— * a_k) \end{cases}$$

On pose alors

$$\beta(\Gamma, S; k) = \operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \,/\, \ell_S(\gamma) \leq k\}$$

$$\sigma(\Gamma, S; k) = \operatorname{card}\{\gamma \in \Gamma \,/\, \ell_S(\gamma) = k\}$$
$$= \beta(\Gamma, S; k) - \beta(\Gamma, S; k-1)$$

et

$$B(\Gamma, S; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta(\Gamma, S; k) z^k$$

$$\Sigma(\Gamma, S; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma(\Gamma, S; k) z^k$$
$$= (1 - z) B(\Gamma, S; k)$$

Attention : le choix de S est important
pour $\Gamma = (\mathbb{Z}, +)$

- si $S = \{1\}$ $\quad \ell_S(1) = 1 \quad$ (car $1 = 1$)
- si $S = \{2, 3\}$ $\quad \ell_S(1) = 2 \quad$ (car $1 = 3 - 2$)

II - Propriétés

1) Propriétés immédiates:

Si $\Gamma = \langle S \rangle$ avec $S = (x_1 \text{ —— } x_n)$

On a:

1) $\ell_S(\gamma^{-1}) = \ell_S(\gamma)$

$\ell_S(\gamma_1 \gamma_2) \leq \ell_S(\gamma_1) + \ell_S(\gamma_2)$

2) $\beta(\Gamma, S; k_1 + k_2) \leq \beta(k_1)\beta(k_2)$

Demonstration:

On pose $A = \{\gamma \,/\, \ell_S(\gamma) \leq k_1 + k_2\}$

$A_1 = \{\gamma \,/\, \ell_S(\gamma) \leq k_1\}$

$A_2 = \{\gamma \,/\, \ell_S(\gamma) \leq k_2$

$\varphi : \begin{cases} A_1 \times A_2 \longrightarrow A \\ (\gamma_1, \gamma_2) \longmapsto \gamma_1 \gamma_2 \end{cases}$ surjection

donc $\beta(k_1)\beta(k_2) \geq \beta(k_1 + k_2)$

3) $\sigma(k) \leq 2n(2n-1)^{k-1}$

Demonstration:

par recurrence sur k

. $k = 1$ mot de longueur 1

$\gamma \in \{x_1 \text{ —— } x_n, x_1^{-1}, \text{ —— } x_n^{-1}\}$

au plus $2n$ possibilites

. γ mot de longueur $k \geq 2$

$\gamma = a_1 \text{ ——— } a_{k-2}\, x_i\, a$

$a \in S \cup S^{-1} \setminus \{x_i^{-1}\}$ ($2n-1$ possibilites)

donc $\sigma(k) \leq \sigma(k-1)(2n-1)$

2) Fonction de croissance d'un produit et d'un produit libre

Proposition :

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

$$S = (S_1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S_2)$$

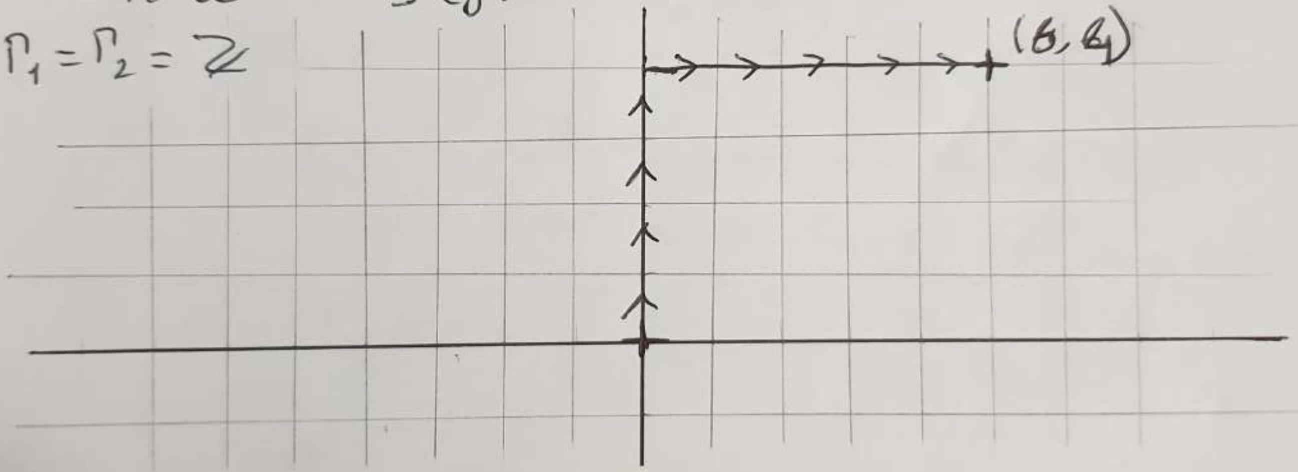
$$\Sigma_\Gamma = \Sigma_{\Gamma_1} \Sigma_{\Gamma_2}$$

Demonstration :

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$

On a $\quad \ell_S(\gamma) = \ell_S(\gamma_1) + \ell_S(\gamma_2)$

$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathbb{Z}$



donc $\quad \{\gamma \,/\, \ell_S(\gamma) = k\} = \coprod_{i+j=k} \{\gamma_1 \,/\, \ell_S(\gamma_1) = i\} \times \{\gamma_2 \,/\, \ell_S(\gamma_2) = j\}$

donc $\quad \sigma(k) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_1(i)\sigma_2(k-i)$

donc $\quad \Sigma_\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma(k) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} \sigma_1(i)\sigma_2(k-i)\, z^k$

$$= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \sigma_1(i) z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \sigma_2(j) z^j\right)$$

donc $\quad \Sigma_\Gamma = \Sigma_{\Gamma_1} \Sigma_{\Gamma_2}$

Proposition :

$\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$

$S = S_1 \amalg S_2$

alors

$$\frac{1}{\Sigma_\Gamma(z)} - 1 = \frac{1}{\Sigma_1(z)} - 1 + \frac{1}{\Sigma_2(z)} - 1$$

Demonstration :

Soit $\gamma \in \Gamma$

Il existe $n \in \mathbb{N}$, $a_1 \text{———} a_{n+1} \in \Gamma_1^{n+1}$

$b_0 \text{———} b_n \in \Gamma_2^{n+1}$

tq $\quad a_1 \neq 1, \text{———} a_n \neq 1$

$b_1 \neq 1, \text{———} b_n \neq 1$

et $\quad \gamma = b_0 a_1 b_1 a_2 \text{———} a_n b_n a_{n+1}$

(on peut avoir $b_0 = 1$ et $a_{n+1} = 1$)

$$\ell_S(\gamma) = \ell_{S_2}(b_0) + \sum_{i=1}^{n} \ell_{S_1}(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \ell_{S_2}(b_i) + \ell_{S_1}(a_{n+1})$$

En notant

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_n(k) z^k \quad \text{avec}$$

$$\sigma_n(k) = \text{card}\,\{\gamma \text{ tq } \ell_S(\gamma) = k \text{ et } \gamma \text{ divisible en } n \text{ parties}\}$$

on a

$$\alpha_n(z) = \Sigma_2(z)\left((\Sigma_1(z) - 1)(\Sigma_2(z) - 1)\right)^n \Sigma_1(z)$$

donc en sommant sur tous les n

$$\Sigma_\Gamma(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n(z) = \frac{\Sigma_1(z)\Sigma_2(z)}{1 - (\Sigma_1(z) - 1)(\Sigma_2(z) - 1)}$$

formule équivalente à

$$\frac{1}{\Sigma_\Gamma(z)} - 1 = \frac{1}{\Sigma_1(z)} - 1 + \frac{1}{\Sigma_2(z)} - 1$$

III - Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$

Pour $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $S = \{1\}$

on a pour tout $k \geq 1$ $\quad \sigma(k) = 2 \quad (\{k, -k\})$

donc

$$\Sigma(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2 z^k + 1$$

$$= \frac{2z}{1-z} + 1$$

$$\Sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Or pour $S = \{2, 3\}$

$$\Sigma(z) = \frac{1 + 3z + 4z^2 - 2z^3}{1-z}$$

On a également un résultat intéressant :
Pour $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ avec n générateurs
en notant K l'enveloppe convexe des générateurs et de leurs inverses

$$\frac{\beta(k)}{k^n} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{vol}(K)$$

Cela se vérifie avec :

- $n = 1$, $S = \{1\}$, $K = [\![-1, 1]\!]$
  $\beta(k) = 2k$ $\quad \mathrm{vol}(K) = 2$
  on a bien $\frac{\beta(k)}{k} = 2 \longrightarrow 2$

- $n = 2$, $S = \{(0,1), (1,0)\}$ $\quad \mathrm{vol}(K) = 2$
  $\beta(k) = 2k(k+1)$
  $$\frac{\beta(k)}{k^2} = 2 + \frac{2}{k} \longrightarrow 2$$

2) Groupe modulaire

On note $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \{1, a\}$ $\quad a^2 = 1$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} := \{1, b, b^2\}$ $\quad b^3 = 1$

$$\Gamma = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

. avec $S = \{a, b\}$

on applique la propriété

$$\frac{1}{\Sigma(z)} = \frac{1}{\Sigma_1(z)} + \frac{1}{\Sigma_2(z)} - 1$$

or $\Sigma_1(z) = 1 + z$

$\Sigma_2(z) = 1 + 2z$

donc
$$\Sigma(z) = \frac{1 + 3z + 2z^2}{1 - 2z^2}$$

. avec $S' = \{a, t\}$

avec $t = ab$

Tous les éléments de Γ peuvent alors s'écrire comme des mots sur l'alphabet $\{a, t, t^{-1}\}$ sans sous-mot de la forme a^2, tat ou $t^{-1}at^{-1}$

En effet
$$a^2 = 1$$
$$tat = at^{-1}a$$
$$t^{-1}at^{-1} = ata$$

On note $\sigma'_a(\ell) :=$ nombre de mots de longueur ℓ se terminant par a

$\sigma'_t(\ell) :=$ ____________________

____________________ par t ou t^{-1}

On a $\sigma'_a(\ell+1) = \sigma'_t(\ell)$

en effet si

$\gamma = \underbrace{\qquad\qquad}_{\gamma_1} a$ alors γ_1 ne peut pas se terminer par a car a^2 n'est pas autorisé

On a $\sigma'_t(\ell+1) = \sigma'_a(\ell) + \sigma'_t(\ell)$

en effet si

$\gamma = \_\_\_\_\_\_ t a u$ avec $u=t$ ou $u=t^{-1}$

alors $u=t^{-1}$

<u>une possibilité</u>

de même si
$\gamma = \_\_\_\_\_\_ t^{-1} a u \quad (u=t)$
$\gamma = \_\_\_\_\_\_ t u \quad (u=t)$
$\gamma = \_\_\_\_\_\_ t^{-1} u \quad (u=t^{-1})$

donc $\sigma'_t(\ell+1) = \sigma'_a(\ell) + \sigma'_t(\ell)$

On a
$$\sigma'(\ell) = \sigma'_a(\ell) + \sigma'_t(\ell)$$
$$= \sigma'_t(\ell-1) + \sigma'_t(\ell)$$
$$\sigma'(\ell) = \sigma'(\ell-2) + \sigma'(\ell-1)$$

donc $\sigma'(\ell)$ est la suite de Fibonacci

on trouve alors
$$\Sigma'(z) = \frac{1+2z+2z^2+z^3}{1-z-z^2}$$

Etudions maintenant les différences entre ces deux fonctions Σ et Σ'

On avait trouvé

$$\Sigma(z) = \frac{1+3z+2z^2}{1-2z^2}$$

donc $$B(z) = \frac{1+3z+2z^2}{(1-2z^2)(1-z)}$$

On trouve alors $\beta(2\ell) = 7 \times 2^{\ell} - 6$

$\beta(2\ell+1) = 10 \times 2^{\ell} - 6$

donc

$$\lim_{\ell \to +\infty} \frac{\beta(2\ell)}{\beta(2\ell-1)} = \frac{7}{5} < \lim_{\ell \to +\infty} \frac{\beta(2\ell+1)}{\beta(2\ell)} = \frac{10}{7}$$

la suite $\frac{\beta(\ell+1)}{\beta(\ell)}$ n'a donc pas de limite

alors que

$$\frac{\beta'(\ell+1)}{\beta'(\ell)} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \lim_{\ell \to +\infty} \sqrt[\ell]{\beta'(\ell)}$$

ce qui est lié au fait que

$$B(z) = \frac{1+3z+2z^2}{(1-2z^2)(1-z)}$$ a 2 pôles dans le cercle de convergence

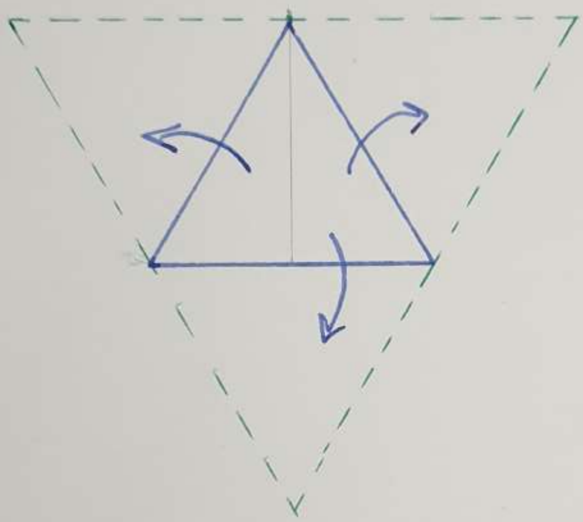
alors que $$B'(z) = \frac{1+z+2z^2+z^3}{(1-z-z^2)(1-z)}$$

n'en a qu'un

3) Un exemple de fonction sphérique de croissance non monotone

On considère un triangulaire équilatéral dans le plan euclidien.

On considère le groupe engendré par les trois reflexions d'axes les côtés du triangle.



On note Γ le sous-groupe des isométries qui conservent l'orientation,

$$\Gamma = \langle s, t \rangle \quad \text{avec} \quad s^3 = t^3 = (st)^3 = 1$$

On trouve alors

$$\Sigma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma(n) z^n$$

$$= \frac{(1+z)(1+2z+2z^2+2z^3-z^4)}{(1-z^2)^2}$$

et en particulier

$$\sigma(2\ell-1) = 8\ell-2$$
$$\sigma(2\ell) = 10\ell-2$$

donc
$$\sigma(2\ell) > \frac{\sigma(2\ell-1)+\sigma(2\ell+1)}{2}$$
$$\sigma(2\ell+1) < \sigma(2\ell)$$