matrices

Exercice 1 :

Dans les cas suivants, le produit $A.\mathbf{x}$ du vecteur $\mathbf{x}$ par la matrice A est il bien défini ? Si oui le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
8. $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Nature de leur graphe ?

Exercice 3 :

1. Montrer que les deux applications F et G suivantes sont linéaires :

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x-y \\ y \end{pmatrix}$$

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer $G \circ F$.

Exercice 4 :

1. Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui sont linéaires, donner leur matrice.
   (a) $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ y \end{pmatrix}$.
   (b) $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2+1} \\ 2x-y \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (c) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix}$.
   (d) $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y \\ z \end{pmatrix}$.
2. Calculer $F_1 \circ F_3$, $F_2 \circ F_3$, $F_4 \circ F_1$

Exercice 5 :

Dans les cas suivants, le produit AB des matrices A et B est il bien défini ? Si oui le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 45 & 2 & 1 \\ 2 & 16 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x + 1$.

1. L'application f est-elle linéaire ?
2. Justifier que l'application f est inversible.
3. Exprimer f comme la composée de deux fonctions élémentaire et en déduire f^{-1}.

Exercice 7 :

On considère la symétrie orthogonale $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$ et la symétrie orthogonale $s_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x = 0$.

1. Déterminer les matrices A_1 de s_1 et A_2 de s_2.
2. Calculer les produits A_1A_2 et A_2A_1.
3. En déduire $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.

Exercice 8 :

On considère la rotation $r_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'axe Oz (orienté par le vecteur $(0,0,1)$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation $r_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'axe Ox et d'angle π .

1. Déterminer les matrices A_1 de r_1 et A_2 de r_2.
2. Calculer les produits A_1A_2 et A_2A_1.
3. Calculer l'ensemble Δ des points fixes de $r_1 \circ r_2$ et l'ensemble Δ' des points fixes de $r_2 \circ r_1$.
4. Choisir un vecteur v orthogonal à Δ et déterminer sont image par $r_1 \circ r_2$. En déduire $r_1 \circ r_2$.
5. Choisir un vecteur w orthogonal à Δ' et déterminer sont image par $r_2 \circ r_1$. En déduire $r_2 \circ r_1$.

Exercice 9 :

Calculer AB, BA, $\mathrm{tr}(AB)$, $\mathrm{tr}(BA)$ pour les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que remarquez vous ?

Exercice 10 :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 11 :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A^tA) \geq 0$.

Exercice 12 :

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.