Exercice 5 : Inclusion de X dans X^{**}

On considère l'application $\phi : X \to X^{**}$ donnée par

$$\langle \phi(x), f \rangle = f(x).$$

Montrer que cette application préserve la norme. Montrer que ce n'est pas toujours une bijection. (Utilisez le dernier résultat de la feuille 1).

$$\langle \phi(x), f \rangle = f(x)$$

$$X \to X''$$

$$\| \phi(x) \| = \sup_{\|f\| \leq 1} \underbrace{\| f(x) \| \leq |||f||| \, \|x\|}_{\text{déf } |||\ |||} \underbrace{=}_{HB} \|x\|$$

$$|||f||| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

$$\boxed{\exists f_x \in X' \text{ tq } f_x(x) = \|x\| \text{ et } \|f_x\| \leq 1}$$

$\langle x \rangle = \{ t \frac{x}{\|x\|}, t \in \mathbb{R} \} \subset X$ est SEV fermé

$g \quad \langle x \rangle \to \mathbb{R}$, $t \frac{x}{\|x\|} \mapsto t$ est forme linéaire et $g(x) = \|x\|$

d'après Hahn Banach $\exists f_x \in X'$ prolongeant g et tq $|||f_x||| \leq |||g|||_{\langle x \rangle} = 1$

$$\|\phi(x)\| \geq \|f_x(x)\| = \|g(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|\phi(x)\| = \|x\|$$

Pour la 2ième partie voir la correction de l'exo 9 sur la 1ère feuille

en gros $\ell^1 \hookrightarrow (\ell^\infty)^*$ mais c'est pas une surjection

car si $F = \{ u = (u_n) \in \ell^\infty, u_n \text{ CV} \}$ $\quad f \quad F \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \lim_{n \to \infty} u_n$

se prolonge avec HB mais le prolongement n'est pas dans l'image