Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on note $c_k(f)$ la coefficient de Fourier de f définie par

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ikt)f(t)dt.$$

La n-ième somme partielle de Fourier de f est définie par

$$S_n(f) : x \to \sum_{|k|\leq n} c_k(f)\exp(ikx).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

où $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

2. Montrer que les formes linéaires définies par $L_n(f) = S_n(f)(0)$ sont continues.
3. Montrer que $||L_n|| \to \infty$. (Indication : on commencera par trouver une borne inférieure pour $\int_{k\pi/(2n+1)}^{(k+1)\pi/(2n+1} |D_n(t)|dt$).
4. Déduire qu'il existe une fonction $f \in E$ dont la séries de Fourier ne converge pas en 0.

1/ De l'algèbre essentellement

$$\sum_{|x|\leqslant k} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_0^{2n+1} e^{ikx}$$

$$= e^{-inx}\,\frac{e^{i(2n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+1)x}-e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}$$

2/ on va majorer $\|L_n\| \leqslant 2\pi\ \|D_n\|_\infty$ car

$$|S_n f(0)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt\right| \leqslant \|f\|_\infty \|D_n\|_1$$
$$= \|f\|_\infty \int_0^{2\pi} |D_n|\,dt$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \times \|D_n\|_\infty \times \int_0^{2\pi} dt$$

$$D_n(0) = \sum_{|k|\leqslant n} e^{ik0} = 2n+1$$

3/ $$2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin x/2}\right|dx = \int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\right|dx$$

$$\geqslant \sum_{k_0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(s)|}{s}\,ds$$

$$\geqslant \int_{k=0}^{2n}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(s)|}{(k+1)\pi}\,ds$$

somme de riemann majore l'integrale

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)} \geqslant \frac{2}{\pi}\log(2n+1)$$

Regarder dans le BRÉZIS

4/ Banach Steinhauss

$\mathcal{F}$ = famille d'operateurs cont $T\ X \to Y$
X banach
Y e v normé

Si $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\|_Y < \infty \quad \forall\, x \in X$

alors $\exists\ c>0 \quad \|T\|_Y < c \quad \forall T \in \mathcal{F}$

Soit $\mathcal{F} = \{ L_n\ X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \}$

$$\frac{2}{\pi} \log 2n+1 \leq \|L_n\| \leq 2n+1$$

F ne verifie pas la conclusion donc
F, X ne verifie pas une hypothese

On voit (par élimination) que

$\sup_{T\in F} \|Tx\|_Y < \infty \quad \forall x \in X$ est faux

$\Rightarrow \exists\, x \in X$ tq $\sup_{T\in F} \|Tx\|_Y = \infty$

d'où le résultat