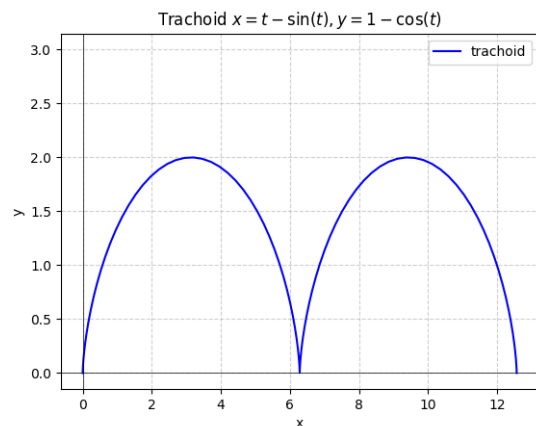


Calculer la longueur de l'arc de la courbes paramétrées suivante :

1. Une trochoïde est une courbe obtenue en traçant le mouvement décrit par un point lié à un disque roulant sans glisser sur une droite.

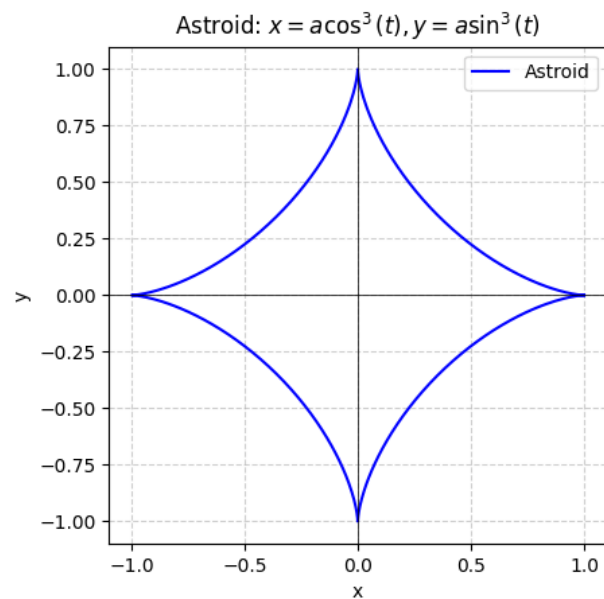


L'équation paramétrique d'une trochoïde est donnée par :

$$x = r\theta - d \sin(\theta), y = r - d \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$$

où r est le rayon du cercle, d est la distance entre le point et le centre du cercle, et θ est l'angle de rotation du cercle.

2. Une astroïde est une courbe plane, qui peut se définir de plusieurs façons. En particulier, il est possible de l'obtenir en faisant rouler un cercle de rayon $r = \frac{1}{4}$ à l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Pour cette raison, l'astroïde est une hypocycloïde de cercle à quatre points de rebroussement.

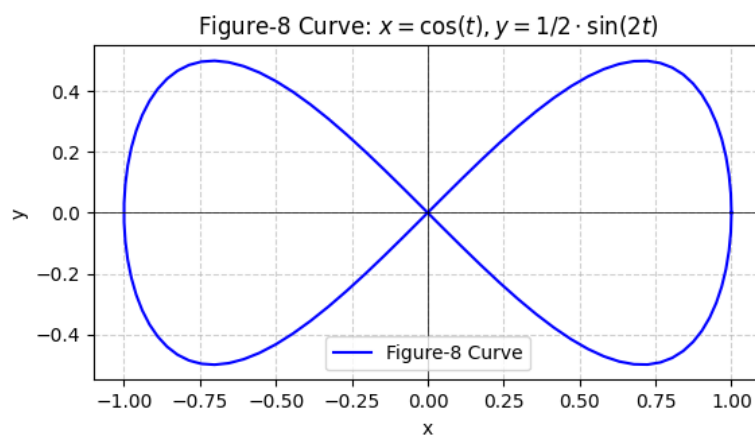


L'équation paramétrique de l'astroïde est donnée par :

$$x = a \cos^3(t), y = a \sin^3(t)$$

où $a > 0$ est une constante et $t \in [0, 2\pi]$. Calculer la longueur de l'arc de cette courbe.

3. Une lemniscate est une courbe plane ayant la forme d'un 8. Elle possède deux axes de symétrie perpendiculaires. Ceux-ci se coupent en un point double de la courbe, également son centre de symétrie.



Calculer la longueur de l'arc de la courbe paramétrée suivante sur l'intervalle $[0, 2\pi]$:

$$x = \cos(t), y = \frac{1}{2} \sin(2t)$$

Si on remplace $\frac{1}{2}$ par a , on obtient une lemniscate, peut-on calculer la longueur de l'arc de cette courbe paramétrée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$?

4. Hypocycloïde (Cercle roulant à l'intérieur d'un autre cercle)

Equation paramétrique:

$$x = (R - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{R - r}{r} \theta \right)$$

$$y = (R - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{R - r}{r} \theta \right), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

où R est le rayon du cercle fixe, r est le rayon du cercle roulant, et θ est l'angle de rotation du cercle roulant.

Calculer la longueur de l'arc de la courbe paramétrée pour $R = 1$ et $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

—

