Exercice 1 : (Intégrale)
Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

1. Donner la solution exacte de cette équation.
2. Trouver des formules explicites donnant les solutions approchées de $y(t_0 + T)$ en la résolvant par la méthode d'Euler, la méthode du point milieu (i.e. la méthode de Runge) et la méthode de Runge-Kuta RK4 avec un pas constant.

Exercice 2 : (Euler explicite et point milieu)
Écrire deux fonctions (Xcas ou Python) prenant en argument une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, des réels $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ et un entier N et retournant la valeur approchée de la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ au temps $t = t_0 + T$ par :

1. la méthode d'Euler
2. la méthode du point milieu

avec un pas constant $h = T/N$.
Tester ces fonctions pour $f(t, y) = 1$, $f(t, y) = t$ et $f(t, y) = t^2$; expliquez quand c'est le cas pourquoi les résultats ne varient pas avec N. Testez ensuite pour $f(t, y) = y$, $f(t, y) = ty$ et $f(t, y) = y + \cos(t)$, pour y_0 prenant les valeurs -1, 0 et 1.

Exercice 3 : (Erreurs d'arrondi)
Soit le problème de Cauchy

$$y'(t) = y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

1. Rappeler la solution exacte de l'équation puis donner la solution approchée y_N de $y(1)$ par la méthode du point milieu avec un pas constant $h = 1/N$. Montrer que $y_N \to y(1)$ quand $N \to \infty$.
2. Donner une majoration de l'erreur locale de la forme $|e_n| \leq Ch^3$ où C est une constante indépendante de n que l'on déterminera, en déduire une majoration de l'erreur globale.
3. On suppose qu'à chaque pas il y a une erreur d'arrondi ϵ_n, de sorte que la solution approchée est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w_{n+1} & = & w_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, w_n + \frac{h}{2} f(t_n, w_n)\right) + \epsilon_n \\ w_0 & = & 1 \end{array} \right. , \quad f(t, y) = y$$

Montrer la majoration suivante de l'erreur globale

$$E = \max_{0\leq n<N} |y(t_n) - w_n| \ \leq\ M\left(\frac{C}{N^2} + N\epsilon\right) \tag{1}$$

avec $M \leq e^{1,5}$ et $\epsilon = \max_{0\leq n<N} |\epsilon_n|$. En prenant $\epsilon =$`1e-15`, trouver le nombre d'itérations optimal N_{opt} en minimisant le membre de droite de l'inégalité (1).

4. En utilisant la fonction numérique de l'exercice précédent, donner les valeurs numériques de l'erreur $|y(1)-w_N|$ pour différentes valeurs de N comprises entre 10^4 et 10^6. Comparez vos résultats avec votre prédiction théorique de N_{opt}.

Exercice 4 : (Équation d'ordre > 1)
On considère l'équation différentielle

$$x'' = x \tag{2}$$

1. On pose $y = x + x'$ et $z = x - x'$. Trouver les équations différentielles du premier ordre vérifiées par y et z, et en déduire x.
2. Donner l'algorithme permettant de trouver une solution approchée de (2) par la méthode d'Euler. Écrire une fonction (Python, Xcas) qui résout (2) pour les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$ par cette méthode, et tracer les solutions exactes et approchées.

Exercice 5 : (Runge-Kutta 4)
Écrire une fonction (Xcas ou Python) prenant en argument
— une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
— des réels $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$
— un entier N
et retournant un vecteur donnant les valeurs approchées de la solution du problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ au temps $t_n = t_0 + nhT$, $0 \leq n < N$, par la méthode de Runge-Kuta RK4 avec un pas constant $h = T/N$. Testez votre fonction sur quelques exemples pour lesquels vous connaissez la solution exacte. Tracez la courbe de l'erreur $y(t_n) - y_n$ en fonction du temps.

Exercice 6 : (Euler implicite)
Écrire une fonction (Python, Xcas) implémentant la méthode d'Euler implicite, et comparer numériquement les erreurs avec Euler explicite par exemple pour $y' = y, y(0) = 1$.

Exercice 7 : (Pas variable)
Soit $f : (t,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t,y) \in \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne en y de rapport k. Soit $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$. On pose $p_n = f(t_n, y_n)$ et $h_n = t_{n+1} - t_n$ pour tout $n = 0, \cdots N-1$.

1. Montrer que l'erreur locale (erreur de consistance) e_n de la méthode d'Euler avec les pas variables h_n vaut :

$$e_n = \frac{h_n}{2}\big(p_{n+1} - p_n\big) + o(h_n)$$

2. On veut contrôler le pas h_n de manière à ce que l'erreur globale théorique (c'est-à-dire sans prendre en compte les erreurs d'arrondis) $E_{\text{th}} = \max_{0 \le n < N}\{|y(t_n) - y_n|\}$ soit inférieure à une valeur $\delta > 0$ fixée à l'avance. Montrer que, pour h_n suffisamment petit, une condition suffisante pour avoir $E_{\text{th}} \le \delta$ est :

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{2} < \frac{\delta}{MT} \quad \text{avec} \quad M = e^{kT} .$$

3. Modifier votre fonction de l'exercice 2.1) en prenant un pas variable $h_n \in [h_{\min}, h_{\max}]$ (les pas minimum $h_{\min}$ et maximum $h_{\max}$ seront donnés en arguments de la fonction) tel que $h_0 = \sqrt{h_{\min} h_{\max}}$ et
— si $\frac{|p_{n+1}-p_n|}{2} < \frac{\delta}{3MT}$ alors $h_{n+1} = \min\{1.25h_n, h_{\max}\}$
— si $\frac{|p_{n+1}-p_n|}{2} > \frac{\delta}{MT}$ alors $h_{n+1} = 0.8h_n$ avec arrêt si $h_{n+1} < h_{\min}$ ou si $n = 0$.
— sinon $h_{n+1} = h_n$
Application : résoudre numériquement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{y}{1-t} \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad , \quad t \in [0, 0.8] \tag{3}$$

avec une précision $\delta = 10^{-2}$. Trouver la solution exacte de (3). Pourquoi selon vous la précision obtenue est-elle meilleure que 10^{-2} ?