Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose $L = \limsup u_n$.

1. Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a. Déterminer $\limsup(a_n + u_n)$ en fonction de a et de L.
2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est seulement bornée, a-t-on $\limsup(a_n + u_n) = \limsup a_n + \limsup u_n$?
3. Déterminer $\limsup e^{u_n}$ en fonction de L.

Indications

1/ $\limsup a_n = a$

2/ Considere $a_n = (-1)^n$ et $u_n = -a_n$

3) $\exists$ ss suite de u_n, $v_{n_1} \to L$

et exp continue, croissante

1/ Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ $a_n \to a$ on va mq $\limsup a_n + u_n = a + L$

$a_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon \; \exists N$

tq $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \forall n \geq N \quad a_n + u_n \geq u_n + (a - \varepsilon)$

$\Rightarrow \sup \{ a_n + u_n , n \geq N \} \geq \sup \{ u_n + (a-\varepsilon), n \geq N \}$

$= (a - \varepsilon) + \sup \{ u_n , n \geq N \}$

$\geq (a - \varepsilon) + \limsup u_n$

$\Rightarrow \limsup a_n + u_n \geq a + L - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \limsup a_n + u_n \geq a + L$

L'autre inegalite $\leq$ est similaire

2/ $a_n = (-1)^n \quad u_n = -(-1)^n = -a_n$

On a $1 = \limsup a_n = \limsup u_n$

mais $0 = a_n + u_n \Rightarrow 0 = \lim a_n + u_n = \limsup a_n + u_n$

3/ on pose $x_n = \sup X_n$ où $X_n = \{ u_k , k \geq n \}$

x_n monotone décroissante minorée $\Rightarrow$ CV

$x_n \to L$

exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc cont en L

$\Rightarrow \exp(x_n) \to \exp L$

maintenant exp croissante $\Rightarrow \sup \{ \exp u_k , k \geq n \}$

$= \exp \sup X_n$

$= \exp x_n$

Exercice 8. Soit une application f de $[0,1]$ dans $[0,1]$, croissante. On se propose de montrer qu'il existe un point fixe de f, c'est-à-dire un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. (Note : f n'est pas supposée continue. Un exercice classique est que le résultat est vrai si on remplace le mot "croissante" par le mot "continue" dans l'hypothèse.)

Pour démontrer le résultat, on considère l'ensemble A des $x \in [0,1]$ tels que $f(x) \leqslant x$.

a) Montrer que l'ensemble A n'est pas vide et qu'il a une borne inférieure, qu'on notera α, avec $\alpha \in [0,1]$. La suite de l'exercice consiste à montrer que α est un point fixe de f.

b) Exploiter la croissance de f pour démontrer :

i) Si $x \in [0,1]$ est un minorant de A, alors $f(x)$ est aussi un minorant de A.

ii) Si $x \in [0,1]$ est un élément de A, alors $f(x)$ est aussi un élément de A.

c) En appliquant le résultat i) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, autrement dit, que $\alpha \in A$. En appliquant alors le ii) précédent au cas $x = \alpha$, montrer que $f(\alpha) \geqslant \alpha$, et conclure.

Croissante ssi $\forall\ x \leq y,\ f(x) \leq f(y)$

a) si $f(0) = 0$ alors $0 \in A$

si $f(1) = 1$ alors $1 \in A$

mais $f(1) \in [0,1] \Rightarrow f(1) \leq 1 \Rightarrow 1 \in A,\ \forall f$

$A \subset [0,1] \Rightarrow A$ borné, ss ensemble de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ admet borne sup $\sup A$

et borne inf $\inf A$

b) si $m \in [0,1]$ tq $m \leq x,\ \forall\ x \in A$

alors $f(m) \leq f(x)\ \forall x \in A$

$\leq x$ car $x \in A$

et on a $f(m) \leq x\ \forall x \in A$

ii) Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \leq x$

$\Rightarrow f(f(x)) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \in A$

c) On pose $\alpha = \inf A$

D'après bi, $f(\alpha)$ borne inferieure de A

$f(\alpha) \leq x\ \ \forall\ x \in A$

mais $\inf A$ est le plus grand

$\Rightarrow f(\alpha) \leq \inf A = \alpha \Rightarrow \alpha \in A$

D'après bii $\alpha \in A \Rightarrow f(\alpha) \in A \Rightarrow f(\alpha) \geq \inf A = \alpha$