Exo 7

1. Déterminer les matrices A_1 de s_1 et A_2 de s_2.
2. Calculer les produits A_1A_2 et A_2A_1.
3. En déduire $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.

1/ l'application $s_1 \; (x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$

et $S_2 \; (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2/ et on a que $A_1A_2 = A_2A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rq si A,B 2 matrices diagonales $AB = BA$

3/ $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1 \quad (x,y,z) \mapsto (-x,y,-z)$

L'objet est de déterminer la transformation associée à $s_1 \circ S_2$ comme dans exo 8

$$S_1 \circ S_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = z = 0$$

est une droite $= OY$

En suivant le schéma d'exo 8

$s_1 \circ S_2$ est une rotation d'angle π

d'axe OY

On considère la rotation $r_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'axe Oz (orienté par le vecteur $(0,0,1)$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation $r_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'axe Ox et d'angle π .

1. Déterminer les matrices A_1 de r_1 et A_2 de r_2.
2. Calculer les produits A_1A_2 et A_2A_1.

Si on se place dans $\mathbb{R}^2$ alors une rotation de $\pi/2$ autour de 0

est l'application $(x,y) \mapsto (-y,x)$

Il s'ensuit que $r_1 \; (x,y,z) \mapsto (-y,x,z)$

De même une rotation d'angle π dans $\mathbb{R}^2$

est l'application $(x,y) \mapsto (-x,-y)$

et l'application $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$

et une rotation d'axe Oz

Il est facile à voir que

$r_2 \; (x,y,z) \mapsto (x,-y,-z)$

car il a Ox pour axe

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A_1A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Calculer l'ensemble Δ des points fixes de $r_1 \circ r_2$ et l'ensemble Δ' des points fixes de $r_2 \circ r_1$.
4. Choisir un vecteur v orthogonal à Δ et déterminer sont image par $r_1 \circ r_2$. En déduire $r_1 \circ r_2$.
5. Choisir un vecteur w orthogonal à Δ' et déterminer sont image par $r_2 \circ r_1$. En déduire $r_2 \circ r_1$.

3/

$$(x, y, z) \in \Delta \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$(x, y, z) \in \Delta' \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -y \\ z = 0 \end{matrix}$$

4/ Δ est une droite vecteur directeur $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire $\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_1 \circ r_2$ est rotation d'angle π d'axe Δ

5/ Δ' est une droite v d $= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

par un argument similaire

$r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle π d'axe Δ'

Exo 9

Calculer AB, BA, $\mathrm{tr}(AB)$, $\mathrm{tr}(BA)$ pour les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que remarquez vous ?

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} =$$ somme d'élts sur la diagonale

$$\mathrm{tr}\, AB = 10 = \mathrm{tr}\, BA$$

Remarque on a égalité !

Exercice 10 :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

On calcul que les élts sur la diagonale

	traces
$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ?? \\ ?? & cb' + dd' \end{pmatrix}$	$aa' + bc' + b'c + dd'$
$BA = \begin{pmatrix} aa' + b'c & ?? \\ ?? & c'b + dd' \end{pmatrix}$	$aa' + b'c + bc' + dd'$

On voit facilement que $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$

Exo 11 Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

et $A^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ?? \\ ?? & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{tr} A^tA = a^2+b^2+c^2+d^2$

≥ 0 car $a^2 \geq 0$ $c^2 \geq 0$
$b^2 \geq 0$ $d^2 \geq 0$

Exo 12 (cours)

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ alors $AB = \left(\sum_j a_{ij} b_{js}\right)_{is}$

$B = (b_{rs})_{rs}$ $BA = \left(\sum_s b_{rs} a_{sj}\right)_{rj}$

$\operatorname{tr} AB = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} b_{ji}\right)$ sur la diagonale $i=s$

$= \sum_j \left(\sum_i b_{ji} a_{ij}\right)$

$= \sum_j \left(\sum_s b_{js} a_{sj}\right)$ sur la diagonale $r=j$

$= \operatorname{tr} BA$