Solutions to Markov Chain Exercises

Mathematics Assistant

Définitions : Périodicité et Apériodicité

Dans l'étude des chaînes de Markov, la périodicité décrit si un état (ou une chaîne) ne peut être visité qu'à des intervalles réguliers spécifiques.

1. Période d'un État

La **période** $d(i)$ d'un état i est le plus grand commun diviseur (PGCD) de tous les temps n possibles auxquels il est possible de revenir à l'état i, en partant de l'état i.

Formellement, pour un état $i \in S$:

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = i) > 0\}$$

- **Périodique :** Un état est dit **périodique** si $d(i) > 1$. Cela signifie que les retours à cet état ne peuvent se produire qu'à des multiples de $d(i)$.
- **Apériodique :** Un état est dit **apériodique** si $d(i) = 1$.

2. Chaînes Périodiques vs Apériodiques

Pour une chaîne de Markov **irréductible** (où tous les états communiquent entre eux), la période est une propriété de classe : tous les états partagent la même période.

Chaînes Périodiques

Une chaîne est **périodique** si ses états ont une période $d > 1$.

- **Exemple (Exercice 2.1) :** Une marche aléatoire sur deux sommets ($1 \leftrightarrow 2$) est périodique de période $d = 2$. Si vous commencez au sommet 1, vous ne pouvez revenir au sommet 1 qu'aux instants $n = 2, 4, 6, \ldots$.
- **Exemple (Cube) :** Une marche aléatoire sur les sommets d'un cube est périodique de période $d = 2$ car le graphe est biparti.

Chaînes Apériodiques

Une chaîne est **apériodique** si ses états ont une période $d = 1$.

- **Condition suffisante :** Si un état possède une **boucle réflexive** (c'est-à-dire $P(i, i) > 0$), cet état est automatiquement apériodique car $\text{pgcd}(1, 2, 3, \ldots) = 1$.
- **Exemple (Exercice 2.2) :** La marche sur un triangle est apériodique. Bien qu'il n'y ait pas de boucles réflexives, on peut revenir au départ en 2 étapes ($1 \to 2 \to 1$) ou 3 étapes ($1 \to 2 \to 3 \to 1$). Comme $\text{pgcd}(2, 3) = 1$, la période est 1.

3. Importance : Convergence

La périodicité est un obstacle à la convergence vers une mesure stationnaire :

- **Apériodique + Irréductible :** La loi de X_n convergera vers la mesure stationnaire unique π.
- **Périodique :** La loi de X_n oscillera indéfiniment et ne se stabilisera jamais vers une distribution unique.

Exercice 2: Random Walks on Graphs

1. Simple Random Walk on Two Vertices ($S = \{1, 2\}$)

(a) Invariant Probability Measures
The transition matrix is $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. An invariant measure $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ must satisfy $\pi P = \pi$ and $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Solving $\pi_1(0) + \pi_2(1) = \pi_1$ gives $\pi_1 = \pi_2$. The unique invariant measure is $\pi = (1/2, 1/2)$.

(b) Law of X_n and Convergence
Assume $X_0 = 1$ (deterministic).

- For n even: $X_n = 1$ with probability 1.
- For n odd: $X_n = 2$ with probability 1.

The law of X_n is $\mu_n = (1, 0)$ if n is even and $\mu_n = (0, 1)$ if n is odd. **Convergence:** The law does not converge because the chain is periodic with period $d = 2$.

2. Simple Random Walk on a Triangle ($S = \{1, 2, 3\}$)

(a) Invariant Probability Measures
The transition matrix is $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Since the graph is regular (all vertices have degree 2) and connected, the unique invariant measure is uniform: $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.

(b) Law of X_n and Convergence
Let $p_n = P(X_n = 1)$ with $p_0 = 1$. By symmetry, $P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1-p_n}{2}$. The recurrence is $p_{n+1} = \frac{1-p_n}{2}$. The general term is:

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Convergence: As $n \to \infty$, $p_n \to 1/3$. The law converges to π because the chain is aperiodic (contains an odd cycle).
—

Exercice 3: Photocopier Maintenance Model

1. The Chain I_n

Let $I_n = (C_{1,n}, C_{2,n}) \in \{0, 1\}^2$ where 1 represents "broken" and 0 represents "working". **Proof:** The state at morning $n + 1$ depends only on the state at morning n and the independent failures/repairs occurring in between. Thus, it is a Markov chain.

2. The Chain X_n

X_n is the number of broken machines $\{0, 1, 2\}$. **(a) Transition Matrix and Graph**
Let $p = 1/3$ (failure probability) and $q = 2/3$ (success probability).

- **From 0:** Both work. Evening state can be 0 (prob q^2), 1 (prob $2pq$), 2 (prob p^2). Repairs make them: 0, 0, 1.
$$P_{00} = q^2 + 2pq = 8/9, \quad P_{01} = p^2 = 1/9$$
- **From 1:** One works. Evening state can be 0 (prob q), 1 (prob p). Repairs make them: 0, 0.
$$P_{10} = 1, \quad P_{11} = 0, \quad P_{12} = 0$$
- **From 2:** Both broken. Evening state is 2. Repair makes it 1.
$$P_{21} = 1, \quad P_{20} = 0, \quad P_{22} = 0$$

Actually, based on the specific repair rule (one machine fixed overnight), the states are:

$$P = \begin{pmatrix} 8/9 & 1/9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Invariant Measures
Solving $\pi P = \pi$: $\pi_0 = \frac{8}{9}\pi_0 + \pi_1 \implies \pi_1 = \frac{1}{9}\pi_0$. $\pi_1 = \frac{1}{9}\pi_0 + \pi_2 \implies \pi_2 = 0$. (Correction: if X_n can reach 2, it is in the evening). Actually, per morning counts: $\pi = (9/10, 1/10, 0)$.
(c) Convergence
The chain is irreducible and aperiodic (due to the self-loop P_{00}). It converges to the stationary distribution $\pi = (0.9, 0.1, 0)$.

1 Fibonacci nearly: Probabilités de transition après n étapes

2 Position du problème

On considère la matrice de transition P et un état initial $X_0 = 0$:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = (1, 0)$$

La distribution après n étapes est donnée par le vecteur ligne $\mu_n = \mu_0 P^n$, ce qui correspond à la première ligne de la matrice P^n.

3 Calcul de P^n par diagonalisation

D'après l'analyse précédente, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1/2$. En calculant les vecteurs propres associés, on peut décomposer P sous la forme $P = VDV^{-1}$. Cela nous permet d'élever la matrice à la puissance n : $P^n = VD^nV^{-1}$.

Après calculs, la forme générale de la matrice de puissance est :

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

4 Probabilités après n étapes (Départ de l'état 0)

En multipliant $\mu_0 = (1, 0)$ par P^n, on obtient les probabilités d'être dans l'état 0 ou 1 à l'instant n :

- **Probabilité d'être en 0 :**

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

- **Probabilité d'être en 1 :**

$$\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

5 Interprétation

On observe que :

1. Pour $n = 0$, on retrouve bien $(1, 0)$.
2. Pour $n = 1$, on retrouve la première ligne de P : $(1/2, 1/2)$.
3. Quand $n \to \infty$, les termes en $(-1/2)^n$ tendent vers 0, et la distribution converge vers la mesure stationnaire $\pi = (2/3, 1/3)$.