Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$

La **loi géométrique** modélise le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

- **Support :** $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$
- **Probabilité :** $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$
- **Espérance :** $E(X) = \frac{1}{p}$
- **Variance :** $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- **Absence de mémoire :** $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$

Une **épreuve de Bernoulli** est l'expérience aléatoire la plus simple en probabilités. Voici sa définition et ses caractéristiques fondamentales :

1. Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues possibles**, généralement qualifiées de : * **Succès** (noté S ou 1) : l'événement que l'on étudie. * **Échec** (noté E ou 0) : l'événement contraire.

2. Paramètre de l'épreuve

Elle est caractérisée par un unique paramètre réel $p \in [0, 1]$, où : * p est la probabilité du succès : $\mathbb{P}(S) = p$. * $q = 1 - p$ est la probabilité de l'échec : $\mathbb{P}(E) = 1 - p$.

3. La Variable Aléatoire de Bernoulli

On associe souvent à cette épreuve une variable aléatoire X qui prend la valeur **1** en cas de succès et **0** en cas d'échec. Sa loi de probabilité est définie par :

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

4. Propriétés Mathématiques

Pour une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (notée $X \sim \mathcal{B}(p)$) : * **Espérance :** $E(X) = p$ * **Variance :** $V(X) = p(1-p)$

Exemples classiques

- **Lancer de pièce :** Si on cherche "Pile" (succès), alors $p = 0,5$.
- **Lancer de dé :** Si on cherche à obtenir un "6" (succès), alors $p = 1/6$ et l'échec (ne pas avoir 6) a une probabilité $q = 5/6$.

- **Contrôle qualité :** Vérifier si une pièce est défectueuse ou non.

Vers la Loi Binomiale

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve de Bernoulli de manière **indépendante** et dans les mêmes conditions, on obtient un **schéma de Bernoulli**. La variable aléatoire qui compte le nombre total de succès obtenus suit alors une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice : Minimum de variables géométriques indépendantes

Soient $p_1, \ldots, p_n \in (0, 1)$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim \text{géom}(p_i)$. On définit $M := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

---

a) Détermination de $\mathbb{P}(X_i \geq k)$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{X_i \geq k\}$ signifie que les $k-1$ premières épreuves ont été des échecs. La probabilité d'un échec pour la variable i est $1 - p_i$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(X_i \geq k) = (1 - p_i)^{k-1}$$

Voici le texte extrait de l'image :

Solution : On peut soit procéder par un calcul direct,

$$\mathbb{P}(X_i \geq k) = p_i \sum_{\ell \geq k} (1 - p_i)^{\ell - 1} = p_i (1 - p_i)^{k-1} \sum_{\ell \geq 0} (1 - p_i)^{\ell} = (1 - p_i)^{k-1},$$

soit observer que cette probabilité est la probabilité que (k - 1) épreuves de Bernoulli de paramètre (p_i) résultent toutes en un échec.

---

b) Détermination de $\mathbb{P}(M \geq k)$

Par définition du minimum, l'événement $\{M \geq k\}$ est réalisé si et seulement si toutes les variables X_i sont simultanément supérieures ou égales à k :

$$\{M \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \{X_2 \geq k\} \cap \cdots \cap \{X_n \geq k\}$$

Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités individuelles :

$$\mathbb{P}(M \geq k) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq k) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)^{k-1}$$

En utilisant les propriétés des puissances, on obtient :

$$\mathbb{P}(M \geq k) = \left[\prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \right]^{k-1}$$

c) Loi de M et expression de ρ

On reconnaît dans l'expression précédente la fonction de survie d'une loi géométrique. En effet, si $M \sim \text{géom}(\rho)$, alors $\mathbb{P}(M \geq k) = (1 - \rho)^{k-1}$. Par identification :

$$1 - \rho = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \implies \rho = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

Conclusion : M suit une loi géométrique de paramètre $\rho = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$.

d) Preuve alternative par réinterprétation

Considérons n suites d'épreuves de Bernoulli menées en parallèle. À chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, on effectue n lancers où la probabilité de succès pour la suite i est p_i. X_i est le temps du premier succès de la suite i.

Le minimum M représente l'instant du **premier succès observé globalement** (toutes suites confondues). À chaque instant t, la probabilité qu'aucun succès ne survienne dans aucune des n suites est :

$$\mathbb{P}(\text{aucun succès à } t) = (1 - p_1) \times (1 - p_2) \times \dots \times (1 - p_n)$$

L'événement "avoir au moins un succès global" à l'instant t est le complémentaire, de probabilité :

$$\rho = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$$

---

exercise 2

Solution

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

---

a) Calcul de $\mathbb{P}(U \le u, V \ge v)$ et lois de U et V

On a
$$\{U \le u, V \ge v\} = \{v \le X \le u,\ v \le Y \le u\}.$$
Par indépendance de X et Y,
$$\mathbb{P}(U \le u, V \ge v) = \mathbb{P}(v \le X \le u)^2.$$
Or
$$\mathbb{P}(v \le X \le u) = \mathbb{P}(X \ge v) - \mathbb{P}(X \ge u+1) = (1-p)^{v-1} - (1-p)^u.$$
Donc
$$\mathbb{P}(U \le u, V \ge v) = \left((1-p)^{v-1} - (1-p)^u\right)^2.$$

Loi de V

On a
$$\mathbb{P}(V \ge v) = \mathbb{P}(X \ge v, Y \ge v) = (1-p)^{2(v-1)}.$$
Ainsi V suit une loi géométrique de paramètre
$$\rho = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2.$$

Loi de U

On a
$$\mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(X \le u, Y \le u) = \left(1 - (1-p)^u\right)^2.$$
Donc
$$\mathbb{P}(U = u) = \mathbb{P}(U \le u) - \mathbb{P}(U \le u-1) = (1-p)^{u-1}\big(2p - p^2(1-p)^{u-1}\big).$$

---

b) Loi de $D = |X - Y|$ et indépendance avec V

Pour $k \ge 1$,
$$\mathbb{P}(D = k) = 2\sum_{n\ge1} \mathbb{P}(X = n+k, Y = n) = 2\sum_{n\ge1} p^2(1-p)^{2n+k-2}.$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(D = k) = 2p^2(1-p)^k \sum_{n\ge0}(1-p)^{2n} = \frac{2p^2(1-p)^k}{1-(1-p)^2} = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$
Pour $k = 0$,
$$\mathbb{P}(D = 0) = \sum_{n\ge1} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p}{2-p}.$$

Indépendance de D et V

Pour $v \geq 1$ et $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(D = k, V = v) = \begin{cases} p^2(1-p)^{2v-2}, & k = 0, \\ 2p^2(1-p)^{2v+k-2}, & k \geq 1. \end{cases}$$

On vérifie alors que

$$\mathbb{P}(D = k, V = v) = \mathbb{P}(D = k)\,\mathbb{P}(V = v),$$

ce qui montre que D et V sont indépendantes.