

Fiche d'exercices n°5 : primitives et intégrales

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec www.wolframalpha.com.

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \int (x^4 - 3x + 1) dx & \text{b)} & \int (t + 1)^2 dt \\ \text{c)} & \int (x - 1)^3 dx & \text{d)} & \int \sqrt{s + 2} ds \\ \text{e)} & \int (x + 1)^{1/3} dx & \text{f)} & \int \frac{dy}{\sqrt{3y + 1}} \\ \text{g)} & \int \frac{dx}{(2x + 1)^2} & \text{h)} & \int \sin(2t) dt \\ \text{i)} & \int \sin(1 - x) dx & \text{j)} & \int \sin(3u - 2) du \\ \text{k)} & \int \cos(5x + 1) dx & \text{l)} & \int e^{2s} ds \end{array}$$

Exercice 2. En utilisant le formulaire des primitives usuelles, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 (x^3 + x^2 + x + 1) dx \quad I_2 = \int_0^1 (1 + t)^2 dt \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \quad I_4 = \int_0^{\pi/2} \cos 2u du$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t e^x dt \quad I_2 = \int_0^1 t e^x dx \quad I_3 = \int_0^1 e^{tx} dx \quad I_4 = \int_0^1 e^x dt$$

Exercice 4.

- Soit $u(x)$ une fonction dérivable. Quelles sont les primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$?
- En déduire les primitives de la fonction $\tan x$.

Exercice 5. Soient F et u deux fonctions données. On rappelle que $(F(u(x)))' = F'(u(x)) u'(x)$, et donc que $\int F'(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$. En utilisant ce résultat, calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \int y'(x)y(x) dx & \text{b)} & \int u'(x)u(x)^4 dx \\ \text{c)} & \int u'(x)u(x)^n dx & \text{d)} & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ \text{e)} & \int \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds & \text{f)} & \int \frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}} dx \\ \text{g)} & \int \frac{u'(x)}{u(x)^7} dx & \text{h)} & \int \frac{v'(t)}{1 + v(t)^2} dt \\ \text{i)} & \int y'(t)e^{y(t)} dt & \text{j)} & \int u'(x) \sin u(x) dx \\ \text{k)} & \int \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y(x)^2}} dx & \text{l)} & \int y'(x)(1 + \tan^2 y(x)) dx \end{array}$$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \int \frac{dx}{1 + x^2} & \text{b)} & \int \frac{dx}{1 + 4x^2} \\ \text{c)} & \int \frac{dx}{3 + 27x^2} & \text{d)} & \int \frac{dx}{4 + x^2} \\ \text{e)} & \int \cos x e^{\sin x} dx & \text{f)} & \int \sin^3 x \cos x dx \\ \text{g)} & \int \frac{dx}{2x + 3} dx & \text{h)} & \int \frac{\ln x}{x} dx \\ \text{i)} & \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx & \text{j)} & \int \frac{3x + 1}{9x^2 + 6x + 2} dx \\ \text{k)} & \int \frac{\cos x}{\sin x} dx & \text{l)} & \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} dx \end{array}$$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

$$\begin{array}{llll} I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx & I_2 = \int_0^1 e^u \cos(e^u) du & I_3 = \int_0^{\pi/4} \tan^3 x dx \\ I_4 = \int_1^2 (3t - 1)^{-2/3} dt & I_5 = \int_1^2 \frac{u + 1}{\sqrt{u^2 + 2u}} du & I_6 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx & I_7 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \end{array}$$

Exercice 8. Calculer les primitives ci-dessous. Dans chaque cas, on cherchera un changement de variable transformant le polynôme du second degré en un polynôme du type $1 + X^2$ ou $1 - X^2$ ou $X^2 - 1$:

$$a) \int \frac{dt}{t^2 + 4} \quad b) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} \quad c) \int \frac{dt}{\sqrt{9 - 4t^2}} \quad d) \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 5}$$

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

$$\begin{array}{llll} a) \int x e^x dx & b) \int t \sin t dt & c) \int \ln x dx & d) \int \ln(2s + 3) ds \\ e) \int x \cos x dx & f) \int \ln(1 + u^2) du & g) \int \arctan x dx & h) \int \ln^2 s ds \\ i) \int \frac{\ln x}{x^2} dx & j) \int u \ln u du & k) \int e^x \sin x dx & \end{array}$$

Exercice 10.

- a. Trouver a et b tels que $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$. En déduire les primitives de $\frac{1}{x(x-1)}$.
- b. De façon plus générale, soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré admettant deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que
- $$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2}$$

Exercice 11. De façon similaire à l'exercice précédent, calculer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{dx}{x(x+1)} & b) \int \frac{dt}{(t+2)(t+3)} & c) \int \frac{ds}{s^2 - 1} & d) \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \\ e) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} & f) \int \frac{dy}{y^2 + 4y + 4} & g) \int \frac{du}{u^2 - 2u + 1} & h) \int \frac{x-3}{x^2 - 6x + 9} dx \end{array}$$

Exercice 12. Identifier a priori la (ou les) méthode(s) qui semble(nt) adéquate(s) pour calculer chacune des primitives suivantes, puis les calculer effectivement :

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{du}{u^2 + 5} & b) \int \frac{\ln t}{t} dt & c) \int x \ln x dx & d) \int \tan^3 s ds \\ e) \int e^x \cos x dx & f) \int \frac{3y}{\sqrt{y^2 - 5}} dy & g) \int \frac{\cosh x}{\sinh^5 x} dx & h) \int (u^2 + u + 1) e^u du \\ i) \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 7)^3} dx & j) \int y e^{y^2} dy & k) \int t \arctan t dt & l) \int e^u \sin(e^u) du \\ m) \int x^2 \sqrt{1 + x^3} dx & n) \int \frac{ds}{s^2 - 4} & o) \int \frac{ds}{s^2 + 2s + 5} & p) \int \frac{\ln(x)}{x^n} dx \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

Exercice 13. On note $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$. On va dans cet exercice calculer ces intégrales de plusieurs façons différentes.

1. Méthode 1

- 1.a. Simplifier l'expression de $I + J$ et calculer cette valeur.
 1.b. Par intégration par parties dans I , donner une relation entre I et J .
 1.c. En déduire les valeurs de I et J .

2. Méthode 2

- 2.a.** Faire le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$ dans I . En déduire une relation entre I et J .
2.b. En utilisant la relation trouvée à la question 1.a., en déduire les valeurs de I et J .

3. Méthode 3

- 3.a.** Rappeler les différentes expressions de $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3.b. En utilisant ces expressions, calculer directement les valeurs de I et J .

Exercice 14.

- a.** Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, et exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.
b. En déduire les valeurs des intégrales $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$

Pour vous entraîner...

Exercice 15. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int e^{2x} dx \quad b) \int e^{-7x} dx \quad c) \int \cos 3x \, dx \quad d) \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad e) \int \sqrt{2x+1} \, dx$$

Exercice 16. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int x e^{x^2} dx \quad b) \int x^2 e^{x^3+1} dx \quad c) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad d) \int \sqrt{e^x} \, dx \quad e) \int \frac{dx}{x(\ln x + 1)}$$

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{2x+5}{(x^2+5x+9)^m} dx \quad b) \int \frac{(\ln|u|)^3}{u} du \quad c) \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^4(x)} dx \quad d) \int x^4(x^5+3)^{1/3} dx$$

$$e) \int (\tan^4 x + \tan^2 x) dx \quad f) \int x(x^2+1)^3 dx \quad g) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad h) \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t e^{t^2} dt \quad I_2 = \int_0^1 t^2 e^t dt \quad I_3 = \int_0^1 t e^t dt \quad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx \quad I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}$$

Exercice 19. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{x+3}{x^2+1} dx \quad b) \int \frac{x^2+3x+1}{x^2+1} dx \quad c) \int \sin x \cos x \, dx \quad d) \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$$

$$e) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad f) \int f'(s) \cos f(s) ds \quad g) \int \frac{y'(t)}{\cos^2 y(t)} dt$$

Exercice 20. Trouver a , b et c tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$. En déduire $\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$

Exercice 21. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int x^2 \arctan x \, dx \quad b) \int \frac{\ln x}{x} \cos(1+\ln^2 x) \, dx \quad c) \int \cos^3 x \, dx \quad d) \int \frac{1}{\sin x} \, dx$$

$$e) \int x \cos(3x) \, dx \quad f) \int \ln(x^2+1) \, dx \quad g) \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad h) \int (x+1) \sin(2x) \, dx$$

Pour aller plus loin...

Exercice 22. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)} \quad \int \frac{e^{3x} - 2e^x}{e^x + 2} dx \quad \text{b)} \quad \int \frac{x+5}{x^2+2x+2} dx \quad \text{c)} \quad \int \frac{2-x}{x^2-2x+2} dx$$

Exercice 23. Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Établir une relation entre I_n et I_{n+1} , et en déduire la valeur de I_n .

Exercice 24. *Intégrales de Wallis*

On pose : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

- Par le changement de variable $t = \pi/2 - x$, montrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.
- Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
- Pour $n \geq 2$, remarquer que $W_n = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$. Par intégrations par parties, en déduire que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
- En déduire l'expression de W_n (on différenciera les cas n pair et impair).

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un nombre réel. On pose $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t dt$.

- En utilisant une intégration par parties, trouver une relation liant $I_n(x)$ à $I_{n+1}(x)$.
- Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 (t^2 - 3t + 1) e^t dt$

Exercice 26. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable. On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(s) ds.$$

- Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque .
- Faire le changement de variable $s = f(u)$ dans l'intégrale I_2 .
- Calculer I_2 en fonction de I_1 .
- Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1} , et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 27.

a. Rappeler les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\sin \frac{x}{2}$ et $\cos \frac{x}{2}$. En divisant ces expressions par $\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$, déduire l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$.

b. Grâce au changement de variable $t = \tan x/2$, calculer les primitives : $\int \frac{dx}{\cos x}$ et $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Exercice 28. Faire la division euclidienne de x^3 par $x^2 + 4$, c'est-à-dire trouver les polynômes $P(x)$ et $R(x)$ tels que $x^3 = P(x)(x^2 + 4) + R(x)$, avec $R(x)$ de degré inférieur ou égal à 1. En déduire les primitives de $\frac{x^3}{x^2 + 4}$.

Exercice 29. Calculer $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$.

Exercice 30. Essayer de calculer les primitives de $\frac{1}{\ln x}$.