

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= (4x(x^2 + y^2) - 4x, 4y(x^2 + y^2) + 4y) \\ &= 4(x(x^2 + y^2) - x, y(x^2 + y^2) + y)\end{aligned}$$

les points critiques sont les solutions de

$$\begin{aligned}x(x^2 + y^2) - x &= 0 \\ y(x^2 + y^2) + y &= 0\end{aligned}$$

- Si $x = 0$, on a $y(y^2 + 1) = 0$, donc $y = 0$.
- Si $y = 0$, on a $x(x^2 - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \pm 1$.

L'hessien est

$$H = \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2) + 8x^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2) + 8y^2 + 4 \end{pmatrix}$$

En $(0, 0)$, on a $H = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det H = -16 < 0$, donc $(0, 0)$ est un point selle.

En $(\pm 1, 0)$, on a $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det H = 32 > 0$ et $\operatorname{tr} H = 12 > 0$, donc $(1, 0)$ est un minimum local.