Partiel - 21 octobre 2024 (durée : 1h30)

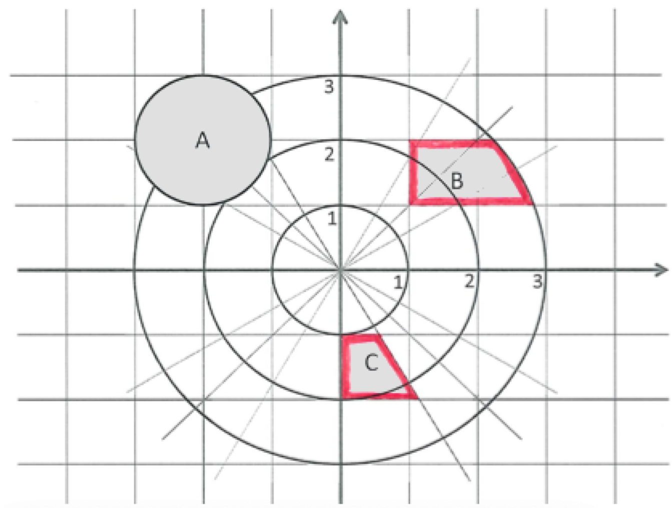
Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique.
Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 - (2-5i)\,z + 1 + 3i = 0$

INDICATION : $\sqrt{33^2 + 56^2} = 65$

Exercice 2

Par quelle(s) condition(s) sur leurs affixes peut-on caractériser les points de chacune des trois zones A, B et C du dessin ci-contre ? (donner quelques lignes d'explications).



Exercice 3 Soit $z = \sqrt{3} + i$

1. Quelle est l'écriture sous forme exponentielle de z ?

2. Comment choisir l'entier naturel n pour que z^n soit réel ?

3. Comment choisir l'entier naturel n pour que z^n soit imaginaire pur ?

Exercice 4

1.a. Calculer le produit $P_n = \prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j+1}$ pour $n \geq 1$.

1.b. Calculer la somme $S_n = \sum_{j=1}^{n} (\ln(2j+1) - \ln(2j-1))$ pour $n \geq 1$.

2.a. Rappeler la valeur de la somme $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.

2.b. En remplaçant x par $\frac{b}{a}$, en déduire une factorisation de $a^n - b^n$, où a et b sont des réels quelconques (mais vérifiant $a \neq 0$ et $a \neq b$).

TOURNEZ SVP

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Soit $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Calculer $(1 + i)\,Z$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.

2. En déduire l'écriture exponentielle de Z. Combien valent $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$?

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soit x un réel fixé. Le but de cet exercice est de calculer les sommes

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$$

RAPPEL : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \, \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

1. Calculer C_0, C_1, S_0, S_1.

2. Montrer que $1 + e^{ix} = 2 \cos \left(\dfrac{x}{2}\right) \, e^{ix/2}$.

3. Simplifier l'expression de $C_n + iS_n$.

4. En utilisant la relation de la question 2, en déduire les expressions de C_n et S_n.

5. Est-ce cohérent avec les valeurs calculées à la question 1 ?