Exo 4

1/ Montrer que $P \mapsto P(2)$ est app linéaire

Si $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$

$P(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e$

alors la matrice de $P \mapsto P(2)$ est

$(16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1)$ par rapport à la base

X^4, X^3, X^2, X^1, X^0 de $\mathbb{R}_4[X]$

$\dim F_1 \leqslant \dim \mathbb{R}_4[X] = 5$, $P(X) = 1$, $P(X) \notin F_1 \Rightarrow \dim \leqslant 4$

$(X-2), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1$ est une base

Il suffit de mq c est une famille libre

On suppose $\exists$ a, b, c, d tq

$f(X) = a(X-2) + b(X-2)^2 + c(X-2)^3 + d(X-2)^4 = 0$

$f'(X) = a + 2b(X-2) + 3c(X-2)^2 + 4d(X-2)^3 = 0$

$\Rightarrow f'(2) = a = 0$

De même $f''(2) = 2b = 0$, $f'''(2) = 6c = 0 \Rightarrow d = 0$

On a que $a = b = c = d = 0 \Rightarrow$ famille libre

Complement $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$

$$P(X) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(X-2) + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}(X-2)^4$$

C'est le developpement limité de P en 2

Facile à verifier

Soient $a, b\ c, d, e \in \mathbb{R}$

$$P(X) = a + b(X-2)^1 + c(X-2)^2 + d(X-2)^3 + e(X-2)^4$$

On calcule les dérivées

$P(2) = a \qquad P^{(3)}(2) = 3\ 2\ d$

$P'(2) = b \qquad P^{(4)}(d) = 4\ 3\ 2\ e$

$P''(2) = 2c$

2/ Montrer que $P \mapsto P'(2)$ est app linéaire

Si $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$

$P'(2) = 32a + 12b + 4c + d$

alors la matrice de $P \mapsto P'(2)$ est

$\begin{pmatrix} 32 & 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base X^4, X^3, X^2, X^1, X^0 de $\mathbb{R}_4[X]$

$\dim F_2 \leqslant \dim F_1 = 4$, $P(X) = X-2$, $P(X) \notin F_2 \Rightarrow \dim \leqslant 3$

$(X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1$ est une base

Il suffit de mq c est une famille libre

$(X-2), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4 \in F_1$ est libre

sous ensemble d'une famille libre est libre

3/ Montrer que $2 \in F_3$ et faire la somme

$x - 2 \in F_3$

Si $f(X) = 2 \Rightarrow f'(X) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow f \in F_3$

Si $g(X) = X - 2 \Rightarrow g(2) = 2 - 2 \Rightarrow g \in F_3$

mais $(f+g)(X) = X \notin F_3$

4) Montrer que si f, g $E \to \mathbb{R}$ linéaire
alors $f+g$ est linéaire aussi

Prendre f, g dans 1/, 2/ ci dessus

Montrer que

$(X^2-8), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4$ est une base

5/ F_5 n'est pas linéaire justifier

1/ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

il suffit de mq c'est une famille libre

c-à-d $x\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$

sys lin $\boxed{\begin{array}{ll} 2x + y = 0 & ① \\ 3x + y = 0 & ② \end{array}}$ ② − ① $x = 0$

remplacer $\Rightarrow y = 0$

résoudre le sys pour trouver les coordonnées

$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & 2x + y = 1 \\ (2) & 3x + y = 1 \end{array}}$ $\Rightarrow$ (2) − (1) $x = 0 \Rightarrow y = 1$

donc coordonnées = $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2/ trop de vecteurs pour être famille libre

3/ 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

il suffit de mq c est une famille libre

sys lin associé

$\boxed{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}}$
$\Rightarrow y = -x$
$\Rightarrow z = -x \Rightarrow z = y$
$\Rightarrow z = -y$

donc $z = 0$

$\Rightarrow y = x = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}}$ $\Rightarrow x = y = z = 1/2$

Exo 6 $\quad C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + H_2$

$$a\, C_2H_6 = b\, C_2H_4 + c\, H_2$$

Faisons une table

	a C_2H_6	b C_2H_4	c H_2
C	2	2	0
H	6	4	2

système linéaire

$$2a = 2b$$
$$6a = 4b + 2c$$

$\Rightarrow a = b \qquad 6a = 4a + 2c \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$

substitution $a=b$

$1 = a = b = c \Rightarrow C_2H_6 = C_2H_4 + H_2$

$$a\, NO_2 + b\, H_2O = c\, HNO_3 + d\, NO$$

	NO_2	H_2O	HNO_3	NO
N	1	0	1	1
O	2	1	3	1
H	0	2	1	0

système linéaire

$$a = c + d$$
$$2a + b = 3c + d$$
$$2b = c$$

$a = 2b + d$

$2a + b = 6b + d \Rightarrow 2a = 5b + d$

$\Rightarrow a = 3b \quad d = b$

$c = 2b$

$$3NO_2 + H_2O = 2HNO_3 + NO$$

Exo 6 cont

$$Fe_7S_8 + O_2 \rightarrow Fe_3O_4 + SO_2$$

$$3\,Fe_7S_8 + 38\,O_2 = 7\,Fe_3O_4 + 24\,SO_2$$

Trouver le système linéaire et verifier