Exercice 8 : Suites vides

On appelle « suite vide » une suite (u_n) qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On note E l'espace des suites vides que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1) Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$ l'espace E est un sous-espace vectoriel de $\ell^p(\mathbb{N})$ qui n'est pas fermé. L'espace E est-il complet ?

2) Pour chaque p, déterminer l'adhérence dans $\ell^p(\mathbb{N})$ de E.

3) (*) Pour chaque p tel que l'adhérence de E n'est pas égal à $\ell^p(\mathbb{N})$, construire une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})/\overline{E}$ rendant l'application quotient $\pi : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})/\overline{E}$ continue.

1/

Soit $f, g \in E$

alors $\exists\, M, N$ tq $\left.\begin{array}{ll} f(k) = 0 & k > M \\ g(k) = 0 & k > N \end{array}\right\} \Rightarrow f(k) = g(k) = 0 \quad \forall\, k > T = \max M, N$

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f + \beta g)(k) = \alpha f(k) + \beta g(k)$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in E$

$u \quad n \mapsto 1/n^2$ est dans $\bar{E}$ pour la norme $\| \ \|_1$

On pose $f_n(k) = \begin{cases} u(k) & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$

$\|u - f_n\|_1 = \sum_{k>n} 1/k^2 \to 0 \quad n \to \infty \Rightarrow f_n \to u$

On a $u \notin E_n \ \forall n$, mais $u \in \bar{E}$

Dans l'exo 4 vous devez trouver

$\ell^p \subset \ell^q, \quad p < q$

$\|f\|_q \leq \|f\|_p \quad \forall\, f \in \ell^p$

Du coup $u, f_n \in \ell^p \quad 1 \leq p \leq \infty$

$f_n \to u$ dans ℓ^p

2/

Soit $f_n \in E$ $f_n \to f$ dans $\ell' \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$ $n \to \infty$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, $n > N$ $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$

$\forall k$ $|f_n(k) - f(k)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$

avec $n = N+1$ $|f_n(k) - f(k)| < \varepsilon$

mais $f_n \in E$ donc $\exists M$ tq $f_n(k) = 0$ $k > M$

donc $\forall k > \max M, N$ $|f(k)| < \varepsilon$

Conclusion $\bar{E} = \{ f \in \ell^\infty, f(n) \to 0 \ n \to \infty \}$

3/ Si $F \subset E$ ss espace fermé, E banach

$\|y\|_{E/F} = \inf \{ \|x\|_E , y \in x + F \}$ est une norme sur E/F et E/F banach

Définition — Un **K**-espace vectoriel E est dit **normé** lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application

$$\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+$$

satisfaisant les hypothèses suivantes :

- **séparation** : $\forall x \in E, \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$;
- **homogénéité** : $\forall (\lambda, x) \in \mathrm{K} \times E, \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$;
- **sous-additivité** (**inégalité triangulaire**) : $\forall (x,y) \in E^2, \mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

1) separation si $y \in 0 + F = F$ alors $\|y\|_{E/F} = 0$

si $\|y\|_{E/F} = 0$ alors $\exists x_n \in y + F \Leftrightarrow y - x_n \in F$

tq $\|x_n\|_E \to 0$

$\Rightarrow$ $x_n \to 0_E$ car $\| \ \|_E$ norme

On a $y - x_n \in F$ et $y - x_n \to y$ $\Rightarrow$ $y \in F$ car F fermé

ii) homogénité facile

iii) inégalité Δ

Soient $x, y, z \in E$ alors $\|z\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$

$z = x + y$

Dans E/F on a $z + F = x + F + y + F$

On choisit une suite $x_m \in x + F$ tq $\|x_m\|_E \to \|x\|_{E/F}$

$y_n \in y + F$ $\qquad \|y_n\|_E \to \|y\|_{E/F}$

On a i) $(x_m + y_n) \in z + F \quad \forall\, m, n$

ii) $\|x_m + y_n\|_E \leq \|x_m\|_E + \|y_n\|_E$

$\Rightarrow \quad \inf_{n,m} \|x_m + y_n\|_E \leq \inf \|x_m\|_E + \inf_n \|y_n\|_E$

j'ai besoin de 2 jeux d'indice pour faire $\leq$

Continuité facile $\qquad \|y + F\|_{E/F} \leq \|y\|_E$

$\Rightarrow$ contraction