« Topology from the Differentiable Viewpoint »

Publié pour la première fois en 1965 et révisé en 1997, il s'agit de l'un des textes d'introduction les plus célèbres et les plus influents en **topologie différentielle**. Malgré sa brièveté (l'édition révisée ne compte qu'environ 80 pages), il est très estimé pour sa clarté et son élégance. Mon collegue Ph. Eyssidieux le recommande souvent à ses étudiants et l'a utilisé pour les groupes de lectures à l'École Normale Supérieure à 2 reprises. Je vais adopter une méthode plus concrète. Compte tenu des retours de Philippe, je garderai le livre de Milnor pour sa clarté, mais j'utiliserai aussi celui de Guillemin-Pollack, Differential Topology, pour expliquer les détails techniques qui manquent souvent aux étudiants (comme les variétés et les voisinages tubulaires).

Je ferai une présentation plus détaillée de ce livre dans la premiere séance ainsi qu'un rappel des notions de base en topologie différentielle, les aquis nécessaires pour bien comprendre l'ouvrage.

Bien que les recherches aient progressé vers des domaines plus complexes, les notions mathématiques exposées dans ce livre restent essentiellzss. A titre d'exemple le théorème de Poincaré-Birkhoff est une version « augmentée » de la logique de Milnor : là où une application continue standard pourrait n'avoir aucun point fixe sur un anneau, la contrainte symplectique (préservation de l'aire) force leur existence. Aujourd'hui, c'est le fondement de l'homologie de Floer, qui « compte » essentiellement ces points fixes pour étudier la forme des espaces de grande dimension. C'est un domaine de recherche tres actif, on peut citer les anciens élèves de l'école : Vincent Colin, Pierre Dehornoy et Anna Erschler, qui travaillent sur des problèmes liés à la dynamique des systèmes hamiltoniens.

Auteur et approche :

- John Milnor est un lauréat de la médaille Fields, connu pour ses contributions profondes à la topologie et à la géométrie avant de passer à la dynamique complexe.
- Contrairement à la topologie algébrique traditionnelle, qui utilise souvent des méthodes combinatoires, Milnor aborde le sujet par le biais de la topologie différentielle (en utilisant le calcul infinitésimal et les applications lisses).

Concepts fondamentaux :

- **Le théorème de Sard :** Un résultat fondateur de l'ouvrage affirmant que « presque toutes » les valeurs d'une application lisse sont des **valeurs régulières**. Ce concept permet de simplifier l'étude des fonctions complexes en se plaçant dans des conditions "génériques".

- **Le théorème du point fixe de Brouwer :** Milnor démontre ce résultat célèbre (toute application continue d'une boule fermée vers elle-même possède un point fixe) de manière très élégante en utilisant les propriétés des applications lisses et l'impossibilité d'une rétraction sur le bord.
- **Le degré d'une application :** Un thème central du livre qui mesure, de façon topologique, combien de fois une variété s'enroule autour d'une autre. C'est l'outil qui permet de généraliser la notion de point fixe et d'intersection.
- **Le théorème de Hopf :** Le livre progresse vers ce résultat majeur, qui lie le degré d'une application à la classe d'homotopie des applications entre sphères, classifiant ainsi ces applications de manière complète.

Bibliographie complémentaire

Guillemin-Pollack - Differential Topology.pdf