Exercice 8. **[CC du 05/05/2010]** Déterminer le rayon de convergence R puis la somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

le rayon de cv est facile à trouver $R=1$

faites le calcul vous m$^{\text{1}}$ pour verifier !

Pour la somme $\displaystyle\int_0^x t^{2n}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ non ?

et $\displaystyle\sum t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$

puis il faut justifier qu'on a le droit d'echanger l'ordre le $\displaystyle\sum \int_0^x = \int_0^x \sum$

Exercice 9. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :
(a) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$; (b) $\sum_{n\geqslant 0} n(n+1)x^n$; (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n}{n+2}x^n$; (d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n-1}{n!}x^n$.

Rappel $P \not\equiv 0$ un polynôme alors $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{P(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1$

avec ça vous pouvez trouver R pour a/ b/ c) facilement!

cherchez d/ la réponse $= +\infty$

a/ $\int_0^t t^{n-1}\,dt = \frac{x^{n-1}}{n-1}$ et $\int_0^t \frac{t^{n-1}}{n-1}\,dt = \frac{x^n}{n(n-1)}$

b) $x \frac{d^2}{dx^2} x^{n+1} = (n+1)\,n\,x^{n-1} x$

$$x e^x = \sum \frac{x^{n+1}}{n!} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} x e^x = \sum \frac{n(n+1)}{n!} x^{n-1}$$

$$\overset{\shortparallel}{(x+2)e^x}$$ faire dérivée(s)

du coup vous devez trouver $(x^2+2x)\,e^x$

Input interpretation:

series	$(x^2+2x)\exp(x)$	point	$x=0$

Series expansion at x = 0:

$$\underset{a_1}{2x} + \underset{a_2}{3x^2} + \underset{a_3}{2x^3} + \frac{5x^4}{6} + \frac{x^5}{4} + \frac{7x^6}{120} + O(x^7)$$

(Taylor series)

(converges everywhere)

n	$a_n = \frac{n(n+1)}{n!}$
0	0
1	2
2	3
3	$\frac{3\times 4}{6} = 2$

c) à faire ce weekend voici un exemple plus "simple"

$$\sum \frac{n}{n+1} x^n = f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\, x f(x) = \sum n x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x-1+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)}$$

j'ai fait ce calcul "à la louche" j'ai oublié des const d'intégration

mais le résultat est presque bon !

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x} + \ln(1-x) \right)$$

On peut vérifier

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

$$= \sum x^n - \sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}$$

d) $n^2+n-1 = n(n+1) - 1 \Rightarrow \dfrac{n(n+1)-1}{n!} =$

exp(x)

$\frac{n(n+1)}{n!} - \cancel{\frac{1}{n!}}$	
-1	$n=0$
1	$n=1$
$1/2$	$n=2$

je calcul des valeurs car je vais vérifier avec WOLFRAM

$$x e^x = \sum \frac{x^{n+1}}{n!} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} x e^x = \sum \frac{n(n+1)}{n!} x^{n-1}$$

$$= (x+2) e^x$$

faire dérivée(s)

Exercice 11. On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) - f(-x) = \frac{2x}{1-x^2}. \tag{E}$$

1. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.
2. A quelle(s) condition(s) la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est-elle solution de (??) ?
3. Expliciter toutes les fonctions impaires développables en série entière qui sont solutions de (??).

1/ $\frac{1}{1-x^2} = \sum (x^2)^n \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} = \sum x^{2n+1} = \sum a_n x^n$

où $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ 1 & \text{impair} \end{cases}$

2/ On a déja calculer $f(x) - f(-x)$ (exo 5)

$$f(x) - f(-x) = \sum a_n x^n - \sum a_n (-x)^n$$
$$= \sum a_n (1-(-1)^n) x^n$$
$$= \sum_{n \text{ impair}} 2a_n x^n$$

$\sum a_n x^n$ sol$\underline{\underline{n}}$ $\Rightarrow a_n = 1$ n impair

3) si f pair alors $f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow$??

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions développables en série entière solutions de l'équation

$$y'(x) + 2xy(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On pose $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

$$= \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

donc y soln $\Rightarrow (n+1) a_{n+1} + 2 a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{-2}{a_{n+1}} a_{n-1}$

On a aussi $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = -z x^2 + c$

$$\Rightarrow y = A \exp(-z x^2) \quad \text{où } A = e^c$$