Exo 8

1/ la dérivée est linéaire car

i/ si f est const $f' = 0 \Rightarrow 0 \mapsto 0$

ii/ si f et g dérivable
alor $f+g$ dérivable
et $(f+g)' = f' + g'$

iii/ si f dérivable et $\lambda \in \mathbb{R}$
λf dérivable et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$
$= 0 + \lambda f'$

Pour les polynômes on peut verifier ii/ et iii/ facilement

Soient $P = \sum a_i X^i$
$Q = \sum b_i X^i$

alors $P+Q = \sum (a_i + b_i) X^i$

$$(P+Q)' = \sum i\,(a_i+b_i) X^{i-1}$$
$$= \sum i a_i X^{i-1} + \sum i b_i X^{i-1}$$
$$= P' + Q'$$

2/ pas linéaire

si $P = X$ alors $2P = 2X$

mais $f(P) = X^2$ et $f(2P) = 8X^2 \neq 2f(P)$

3/ linéaire car si h, g $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonctions

ii/ $(h+g)(x_0) = h(x_0) + g(x_0)$ définition

iii/ $(\lambda g)(x_0) = \lambda g(x_0)$

4/ si $A(X) = X - x_0$ alors le rest $= P(x_0)$

cas $x_0 = 0$

$$P(X) = \sum_0^n a_i X^i = \sum_1^n a_i X^i + a_0 = X\left(\sum_1^n a_i X^{i-1}\right) + a_0$$
$$= X\,Q(X) \quad + P(0)$$

Calcul classique

$$X^n - (x_0)^n = (X - x_0)\left(X^{n-1} + X^{n-2}x_0 + X^{n-3}x_0^2 \quad + X x_0^{n-1} + x_n\right)$$
$$= (X - x_0)\,Q_i(X)$$

$$P(X) - P(x_0) = \sum_0^n a_i X^i - \sum_0^n a_i x_0^i$$
$$= \sum_0^n a_i\left(X^i - x_0^i\right)$$
$$= (X - x_0)\sum_0^n a_i Q_i(X)$$

du coup $P(X) = (X - x_0)\,Q(X) + P(x_0)$

et le reste $= P(x_0)$

Exo 9

1/ $\ker f = \{ f(v) = 0 \}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} x + 3y = 0 & \Rightarrow x = 3y \\ 2x - y = 0 & \Rightarrow y = 2x \\ -x + 5y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 6x$ donc $x = 0$ puis $y = 2 \times 0 = 0$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et f est injectif

limage de f est $\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$

les 2 vecteurs forment une famille libre
l'image est un plan

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x + 4z = 0 \Rightarrow z = -x$

$\Rightarrow x + y + x = 0$

$\Rightarrow y = -2x$

les 2 vecteurs de la base de imf sont perp à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \{ x - 2y - z = 0 \}$

2/ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ x = y \end{array}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} y = x \\ z = -z \end{array}$

conclusion $\ker f$ est une droite $\subset \mathbb{R}^3$
vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

l'application n'est pas injective

On a que $f \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= a\, f\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\, f\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall v \in \ker f$

$$= a\, f\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\, f\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + f(v)$$

En clair $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'image de $a \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$