

## Exo 7

1. Déterminer les matrices  $A_1$  de  $s_1$  et  $A_2$  de  $s_2$ .
2. Calculer les produits  $A_1A_2$  et  $A_2A_1$ .
3. En déduire  $s_1 \circ s_2$  et  $s_2 \circ s_1$ .

1/ l'application  $s_1 (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$   
et  $s_2 (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2/ et on a que  $A_1 A_2 = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rq si  $A, B$  2 matrices diagonales  $AB = BA$

3/  $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 \quad (x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$

On considère la rotation  $r_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'axe  $Oz$  (orienté par le vecteur  $(0, 0, 1)$ ) et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et la rotation  $r_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'axe  $Ox$  et d'angle  $\pi$ .

1. Déterminer les matrices  $A_1$  de  $r_1$  et  $A_2$  de  $r_2$ .
2. Calculer les produits  $A_1 A_2$  et  $A_2 A_1$ .

Si on se place dans  $\mathbb{R}^2$  alors une rotation de  $\pi/2$   
autour de  $O$

est l'application  $(x, y) \mapsto (-y, x)$

Il s'ensuit que  $r_1 (x, y, z) \mapsto (-y, x, z)$

De même une rotation d'angle  $\pi$  dans  $\mathbb{R}^2$

est l'application  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$

et l'application  $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$

et une rotation d'axe  $Oz$

Il est facile à voir que

$$r_2 (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$$

car il a  $Ox$  pour axe

$$1) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer l'ensemble  $\Delta$  des points fixes de  $r_1 \circ r_2$  et l'ensemble  $\Delta'$  des points fixes de  $r_2 \circ r_1$ .
4. Choisir un vecteur  $v$  orthogonal à  $\Delta$  et déterminer son image par  $r_1 \circ r_2$ . En déduire  $r_1 \circ r_2$ .
5. Choisir un vecteur  $w$  orthogonal à  $\Delta'$  et déterminer son image par  $r_2 \circ r_1$ . En déduire  $r_2 \circ r_1$ .

3/

$$(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$(x, y, z) \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = z = 0$$

4/

$$r_1 \circ r_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Calculer  $AB$ ,  $BA$ ,  $\text{tr}(AB)$ ,  $\text{tr}(BA)$  pour les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que remarquez vous ?

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} = \text{somme d'élts sur la diagonale}$$

$$\text{tr } AB = 10 = \text{tr } BA$$

Remarque on a égalité !

### Exercice 10 :

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_2(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

On calcul que les élts sur la diagonale

traces

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ? \\ ? & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} aa' + b'c & ? \\ ? & c'b + dd' \end{pmatrix}$$

$$aa' + bc' + b'c + dd'$$

$$aa' + b'c + bc' + dd'$$

On voit facilement que  $\text{tr } AB = \text{tr } BA$