Exercice 6. Lemme de Pólya

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $[a,b]$ convergeant vers l.

Montrer que la suite $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ tend vers $f(l)$.

Peut-on supprimer l'hypothèse de convergence uniforme ?

On veut $|f_n(x_n) - f(\ell)| \to 0$, $n \to \infty$

On a par l'inégalité triangulaire

$$0 \leq |f_n(x_n) \underbrace{- f(x_n) + f(x_n)}_{=0} - f(\ell)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)|$$

$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\| \to 0$ car $f_n \underset{CVU}{\to} f$

$|f(x_n) - f(\ell)| \to 0$ car $x_n \to \ell$ et f cont en ℓ

D'après le thm des gendarmes $|f_n(x_n) - f(\ell)| \to 0$

Exercice 8. Trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

(i) pour tout entier n, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge (i.e. est finie) ;

(ii) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f ;

(iii) l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge (i.e. est finie) ;

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ ne tende pas vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ quand n tend vers $+\infty$.

On a trouvé f_n qui verifient

$\int_{-\infty}^{\infty} f_n = 1$

$f(0) = \|f_n\| = \sup |f_n(t)| \to 0$ càd $f_n \to 0$

$f_n \geq 0 \Rightarrow \|f_n\| = \sup f_n$

On peut choisir $f \geq 0$, paire, bornée

avec $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$

puis $f_n(t) = \frac{1}{n} f(t/n)$

On a $\|f_n\| = \frac{1}{n} \|f\| \to 0, n \to \infty$

et $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} f(t/n)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t/n)\, dt/n$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, ds$ changement de var $s = t/n$

$= 1$ $\Rightarrow ds = dt/n$