Examen - 17 décembre 2024 (durée : 2h)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique.

Vos résultats devront être justifiés. Vous apporterez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation tiendra compte de ces deux aspects.

Exercice 1 *Nombres complexes*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 5 - 12i$ (Indication : $13^2 = 169$)

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = 1 + 3i$.
Soit un point M d'affixe z.

2.a. A quelle(s) condition(s) sur z correspond la propriété : “ M appartient à la médiatrice de $[AB]$ ”

2.b. A quelle(s) condition(s) sur z correspond la propriété : “ M appartient au disque de centre B et de rayon 1 ”

2.c. Faire une représentation graphique correspondant à ces deux questions.

Exercice 2 Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$

1. On considère pour commencer la fonction $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

1.a. Calculer $u(1)$.

1.b. Etudier le domaine de définition, les limites aux bornes de ce domaine, et le signe de la dérivée de $u(x)$.
Résumer ces informations dans un tableau de variations.

1.c. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

2. On va maintenant étudier la fonction $f(x)$ définie précédemment.

2.a. Etudier le domaine de définition, les limites aux bornes de ce domaine, et le signe de la dérivée de $f(x)$. (les résultats de la question 1 seront utiles pour ce dernier point)
Résumer ces informations dans un tableau de variations.

2.b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.

2.c. Tracer avec soin $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$. Pour aider au tracé, on donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.

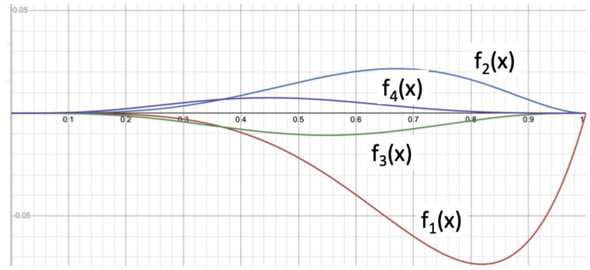
Exercice 3 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = x^5 (\ln x)^n$. f_n est ainsi définie sur $]0, +\infty[$.

1. Pourquoi a-t-on $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$?

On peut donc prolonger f_n par continuité en $x = 0$ en posant $f_n(0) = 0$. f_n est désormais définie sur $[0, +\infty[$. Par exemple, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont tracées sur $[0, 1]$ dans la figure suivante.

.../...

On pose maintenant $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^5 (\ln x)^n\,dx$ pour tout $n \geq 1$.



2. Calculer $J_1 = \displaystyle\int_0^1 x^5 \ln x\,dx$.

3. Montrer que $J_n = -\dfrac{n}{6}\,J_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.
(ON POURRA UTILISER UNE INTÉGRATION PAR PARTIES)

4. En déduire l'expression de J_n en fonction de n.

Exercice 4 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations paramétriques :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -1 - s \\ z = -2 + s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2.a. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\mathcal{P}$.

2.b. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 5 LES 2 QUESTIONS SONT INDÉPENDANTES

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le point $A(-1, 1, 3)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique

$$\mathcal{D} = \{ \ (-1 + t, 1 + t, t) \ , \ t \in \mathbb{R}\}$$

Le but de cet exercice est de calculer de 2 façons différentes la distance δ entre A et $\mathcal{D}$.

1. *Méthode 1 : géométrie dans* $\mathbb{R}^3$

1.a. Calculer les coordonnées du point H, projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$.

1.b. En déduire la valeur de $\delta = \|\overrightarrow{AH}\|$

2. *Méthode 2 : par minimisation*

On va utiliser le fait que δ est le minimum de la distance entre A et un point M parcourant la droite $\mathcal{D}$. On note $M(t) = (-1 + t, 1 + t, t)$.

2.a. Calculer $\|\overrightarrow{AM(t)}\|$. On définit ainsi la fonction $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2$. (ATTENTION AU CARRÉ)

2.b. Pour quelle valeur de t la fonction f admet-elle un minimum ?

2.c. Quel est ce minimum ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 1 ?