Exercice 6 : Unicité des extensions préservant la norme.

1. Soit H un espace de Hilbert et V un sous-espace fermé de H muni d'une forme linéaire continue f_V de norme 1. Montrer que l'extension de f_V en une forme linéaire f_H continue de norme 1 sur H est unique.
2. Montrer que la conclusion de 1) reste valable si on remplace la condition "H est un espace de Hilbert" par "H est un espace uniformément convexe et lisse".

1/ Soient H, V, f_V comme dans l'énoncé

$H = V + V^\perp$ où $V^\perp = \{ v \in H,\ \langle v, x \rangle = 0\ \forall x \in V\}$

$\hat{f}_V(x) = \begin{cases} f_V(x) & x \in V \\ 0 & x \in V^\perp \end{cases}$ est l'unique prolongement

$\forall x \in H$, $x = v + w$ pour unique $v \in V$, $w \in V^\perp$

$\hat{f}_V(x) = f_V(v) \Rightarrow \dfrac{|\hat{f}_V(x)|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{|\hat{f}_V(v)|}{\|v\|} \leqslant 1$

$\|x\|^2 = \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v,w) + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geqslant \|v\|^2$

$v \perp w$

Pour mq $\hat{f}_V$ est unique il suffit de mq si g prolongement alors $V^\perp \subset \ker g$

Soit g prolongement de $\hat{f}_V$

La norme est unif cvx $\Rightarrow \exists\, x \in V$ $\|x\| = 1$ et $f_V(x) = g(x) = 1$

si $v \in V^\perp$, $\|x + tv\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|v\|^2$ et on choisit v avec $g(v) > 0$

On va mq $\dfrac{|g(x+tv)|^2}{\|x+tv\|^2} > 1$ pour t suff petit (contradiction car $\|g\| \leq 1$)

$g(x+tv)^2 = (g(x) + t\, g(v))^2 = 1 + 2t\, g(v) + t^2|g(v)|^2 > \cancel{\|x\|^2}^{\,1} + t^2\|v\|^2$

$\Leftrightarrow 2t\, g(v) > t^2(\|v\|^2 - |g(v)|^2)$

$\Leftrightarrow 2\, g(v) > t\underbrace{(\|v\|^2 - |g(v)|)^2}_{\geqslant 0}$

2/ Je donnerai correction plus tard

Exercice 7 : Non-unicité de l'extension.
Donner un exemple dans $l^1(\mathbb{N})$ d'un sous-espace V muni d'une forme linéaire f_V qui admet une infinité d'extensions f sur $l^1(\mathbb{N})$ telles que $|||f_V||| = |||f|||$.

Soit $E_0 \subset \ell^1(\mathbb{N})$, $= \{ (v_i),\ v_{2i} = 0,\ \forall i \}$

E_0 est fermé, f $E_0 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire
$v_i \mapsto \sum v_i$

inégalité triang $\Rightarrow |f(v_i)| = |\sum v_i| \leq \sum |v_i| = \|(v_i)\|$

Pour i impair $v_i = \delta_{1i}$ $\|\delta_{1i}\| = 1$, $f(\delta_{1i}) = 1$ $\Rightarrow \|f\| = 1$

f se prolonge d'une infinité de façons
$\exists\ \hat{f}_k$ lin indep $\hat{f}_k|_{E_0} = f$, $\|g_k\| = 1$

On prends $\hat{f}_k((v_i)) =$ "$f(v_i) + v_{2k}$" $= \sum_{i \text{ impair}} v_i + v_{2k}$

$|\hat{f}_k((v_i))| \leq |\sum v_i| = \|v_i\| \Rightarrow \|\hat{f}\| \leq 1$

Exercice 8 : Un contre-exemple de séparation de deux convexes fermés
On se place dans $X = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle. On considère les convexes fermés

$$A = \left\{ (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \ , \ u_n \geq \frac{1}{n^2} \right\} \quad \text{et} \quad B = \mathbb{R}. \left(\frac{1}{n^3} \right) \ .$$

Soit f une forme linéaire continue telle que $f(b) \leq f(a)$ pour tout $b \in B$ et $a \in A$.

1. Que pouvez vous dire sur $f|_B$?
2. Montrer que pour tout (u_n) telle que

$$\exists N \text{ tel que } u_n \geq \frac{1}{n^2} \forall n > N$$

   on a $f(u_n) > 0$.
3. Déduire que $f = 0$.

1/ $f|_B = 0$ car c une forme linéaire sur $\mathbb{R}$ non surjective $\phi(t) = f(t(1/n^3)_n)$

2/ Soit v_n une suite qui verifie la condition

alors $\exists M$ tq $M(1/n^3)_n + (v_n)_n \in A$

$\Rightarrow M f(1/n^3)_n + f(v_n) \geq 0$

3/ Soit $v_n \in A$, $U_n(N) = \begin{cases} -v_n & n \leq N \\ v_n & n > N \end{cases}$ $\Rightarrow$ U_n verifie hyp de q2

$f(U_n) \geq 0 \Rightarrow f(-U_n) \leq 0$

$\|(-U_n(N)) - (v_n)\| = \sum_N |2v_n| \to 0 \Rightarrow -U_n(N) \to v_n \quad N \to \infty$

$\Rightarrow f(v_n) \leq 0$

Exercice 9 : Convexes et demi-espaces fermés

Soit C un convexe fermé dun espace de Banach E. On appelle demi-espace fermé de E tout ensemble de la forme

$$D = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

où $f \in E^*$ et $\alpha \in E$. Montrer que C est l'intersection de tous les demi-espaces fermes qui le contiennent.

$C \subset \bigcap_{\lambda} D_{\lambda}$ mais il faut égalite

Soit $v \notin C$, $\exists$ hyperplan qui sépare v, C