

Exo 4

1/ Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\det AB = \det A \det B$

A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

B inversible $\Leftrightarrow \det B \neq 0$

A, B inversible $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \det AB = \det A \det B \neq 0$
 $\det B \neq 0$

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \text{ car } (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}I_n B \\ &= B^{-1}B \\ &= I_n\end{aligned}$$

de même $AB(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

2/ $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

on a que ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA \Rightarrow I_n = {}^tI_n = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}) {}^tA$
 $\Rightarrow ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Exo 5/

$$\begin{aligned} 1/ \quad \det M &= 8 \\ &= -(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)2 + (2\sqrt{3})^2 \\ &= -2(3-1) + 4 \times 3 = 12 - 4 \end{aligned}$$

$$2/ \quad M^3 = 8I_n \quad \text{à vérifier}$$

$$\begin{aligned} 3/ \quad M^3 &= 8I_n \Rightarrow M M^2 = 8I_n \\ &\Rightarrow M \left(\frac{1}{8} M^2 \right) = I_n \\ &\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{8} M^2 \end{aligned}$$

Exo 7

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{pas inversible} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker$$

Si une matrice est triangulaire
alors $\det = \text{produit des coeffs sur la diagonale}$

Ex $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$ $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

Pivot de Gauss pour trouver son inverse

	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	
$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_4 \end{array}$	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	vous devez remplir les cases vides
$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3 \end{array}$	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	
$L_1 \rightarrow L_1 - L_2$	$\begin{array}{cccc cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 24 \quad \text{son inverse} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & -1/12 \\ 0 & 1/3 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$