

## Exo 8

i/ la dérivée est linéaire car

i / si  $f$  est const  $f' = 0 \Rightarrow 0 \mapsto 0$

ii / si  $f$  et  $g$  dérivable

alors  $f + g$  dérivable

$$\text{et } (f + g)' = f' + g'$$

iii / si  $f$  dérivable et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda f \text{ dérivable et } (\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f' \\ = 0 + \lambda f'$$

Pour les polynômes on peut vérifier

ii / et iii / facilement

Soient  $P = \sum a_i X^i$

$$Q = \sum b_i X^i$$

alors  $P + Q = \sum (a_i + b_i) X^i$

$$(P + Q)' = \sum (a_i + b_i) X^{i-1}$$

$$= \sum a_i X^{i-1} + \sum b_i X^{i-1}$$

$$= P' + Q'$$

2/

pas linéaire

$$\text{si } P = X \text{ alors } 2P = 2X$$

$$\text{mais } f(P) = X^2 \text{ et } f(2P) = 8X^2 \neq 2f(P)$$

3/ linéaire car si  $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions

$$\text{II/ } (h+g)(x_0) = h(x_0) + g(x_0) \quad \text{définition}$$

$$\text{III/ } (\lambda g)(x_0) = \lambda g(x_0)$$

4/ Si  $A(X) = X - x_0$  alors le rest =  $P(x_0)$ cas  $x_0 = 0$ 

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_0^n a_i X^i = \sum_1^n a_i X^i + a_0 = X \left( \sum_1^n a_i X^{i-1} \right) + a_0 \\ &= X Q(X) + P(0) \end{aligned}$$

Calcul classique

$$\begin{aligned} X^n - (x_0)^n &= (X - x_0) (X^{n-1} + X^{n-2}x_0 + X^{n-3}x_0^2 + \dots + Xx_0^{n-1} + x_0^n) \\ &= (X - x_0) Q_1(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X) - P(x_0) &= \sum_0^n a_i X^i - \sum_0^n a_i x_0^i \\ &= \sum_0^n a_i (X^i - x_0^i) \\ &= (X - x_0) \sum_0^n a_i Q_i(X) \end{aligned}$$

$$\text{donc } P(X) = (X - x_0) Q(X) + P(x_0)$$

$$\text{et le reste} = P(x_0)$$

Exo 9

$$1/ \ker f = \{ f(v) = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow$$

$$x + 3y = 0$$

$$2x - y = 0$$

$$-x + 5y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -6x \\ \text{donc } x = 0 \\ \text{puis } y = 0 \end{cases}$$

si  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f$  alors  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  est injectif

$$\begin{aligned} \text{Image de } f & \text{ est } \{ x f(e_1) + y f(e_2) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ & = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

les 2 vecteurs forment une famille libre

l'image est un plan C'est libre car

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Im f est un plan avec equation  $ax + by + cz = 0$

remplacer 2 fois

$$(x, y, z) = (1, 2, -1)$$

$$(x, y, z) = (3, -1, 5)$$

$$a + 2b - c = 0$$

$$3a - b + 5c = 0$$

$$\Rightarrow 7a + 9c = 0$$

$$\Rightarrow -9c + 14b - 7c = 0$$

$$\Rightarrow 16c = 7b$$

$$7a = -9c$$

$$7b = 8c$$

$$\begin{cases} c = 7 \\ a = -9 \\ b = 8 \end{cases}$$

les 2 vecteurs de la base de imf sont perp à  $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Im } f = \{ -9x + 8y + 7z = 0 \}$$

2/

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x = y \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -x \end{cases}$$

conclusion  $\ker f$  est une droite  $\subset \mathbb{R}^3$

vecteur directeur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

l'application n'est pas injective

$$\text{On a que } f \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{Im} f = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Soit } w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall v \in \ker f \quad = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + f(v)$$

$$\text{En clair } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est l'image de } a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3/ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{subs} \\ \Rightarrow -5x + z = 0 \\ \Rightarrow y = 2x \\ \Rightarrow -5x + z = 0 \\ \text{subs} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 5x \end{pmatrix} \in \ker f_3 \quad \text{si } x=1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\dim \ker f_3 = 1 \quad \text{et} \quad \dim \text{Im} f_3 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Im} f_3 &= \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

c'est un plan  $\subset \mathbb{R}^3$  et on peut déterminer son éqn

$$ax + by + cz = 0$$

$$a + c = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$-2a - b - 3c = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

subs

avec  $a=1$

$$x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$$

Soit  $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x - 2y + z = a \\ 2x - y = b \\ x - 3y + z = a+b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -5x + z + 2b = a \\ &\Rightarrow y = 2x - b \end{aligned}$$

$$x = 0 + x$$

$$y = -b + 2x$$

$$z = a - 2b + 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ a-2b \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4/  $\ker f_4$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}$$

subs

$$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow y = 2x$$

$$\text{donc } y = -2x$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0$$

on a  $x=y=z$  pour  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f_4 \Rightarrow \ker f_4 = \{0\}$   
 $\Rightarrow f_4$  injectif

$$\text{Im } f_4 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

les trois vecteurs forment famille libre  $\Rightarrow \text{Im } f_4 = \mathbb{R}^3$

$$\text{Soit } w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & a \\ 2x - y & = & b \\ z & = & c \end{array}$$