1) Soit $\phi : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique suite $(v_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ nous avons que

$$\phi((u_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n.$$

2) (*) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui n'est pas de la forme $\phi((v_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ pour un certain $u_n \in \ell^1(\mathbb{N})$. (Vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice précedent.)

1/ Soit ϕ une forme lin cont

On voit $\ell^1(\mathbb{N})$ comme esp de fonctions

$\{ f\ \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \sum |f(n)| < \infty \}$

$$\chi_{\{n\}}(t) = \begin{cases} 1 & t = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Existence

$\exists\, v_n \in \mathbb{R}$ tq $\phi(\chi_{\{n\}}) = v_n$

Par l'exo 3 $\bigcup_{n \geq 0} E_n$ est dense dans ℓ^1

où $E_n = \langle \chi_{\{0\}}, \quad \chi_{\{n\}} \rangle$

La restriction $\phi|_E$ $\sum u_k \chi_{\{k\}} \mapsto \sum u_k v_k$

On a que ϕ borné $\Rightarrow |\phi(f)| \leq \|\phi\| \|f\|_1$

$\Rightarrow |v_k| \leq \|\phi\| |\chi_{\{k\}}| \leq \|\phi\|$

Donc $v_k \in \ell^\infty$

Unicité on suppose $\phi(\sum u_n \chi_n) = \sum v_n u_n = \sum v_n' u_n$

$v_n' = \phi(\chi_{\{n\}}) = v_n$

21

On considère $F \subset \ell^\infty$ les suites CV

le thm d'interversion des limites $\Rightarrow$ F fermé

$$\lim_k \lim_n f_k(n) = \lim_k \lim_n f_k(n)$$

$f_k \in F$, $f_k \xrightarrow[CVU]{} f$ càd dans ℓ^∞

On note $\phi \quad F \to \mathbb{R}$
$\qquad f \mapsto \lim_n f$

ϕ est une forme linéaire

ϕ est borné

$$\left|\lim_{n\to\infty} f(n)\right| = \lim_{n\to\infty} |f(n)| = \lim \sup |f(n)| \leq \sup |f(n)| = \|f\|_\infty$$

donc $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$

D'après Hahn Banach $\exists$ un prolongement $\hat{\phi}$ de ϕ

et $|\hat{\phi}(f)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in \ell^\infty$

Mais $\hat{\phi}$ n'est pas de la forme voulue

car $x_{\{k\}} \in \ell^\infty$ et $\lim_n x_{\{k\}}(n) = 0 \Rightarrow \phi(x_{\{k\}}) = v_k = 0$