Exercice 10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $u_0(x) = 1$ et, si $n \geq 1$,

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{si } x \in \,]0,1]\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que u_n est continue sur $[0,1]$.
2. En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 u_n(x)\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)$ converge normalement sur $[0,1]$, et calculer sa somme.
4. En déduire que

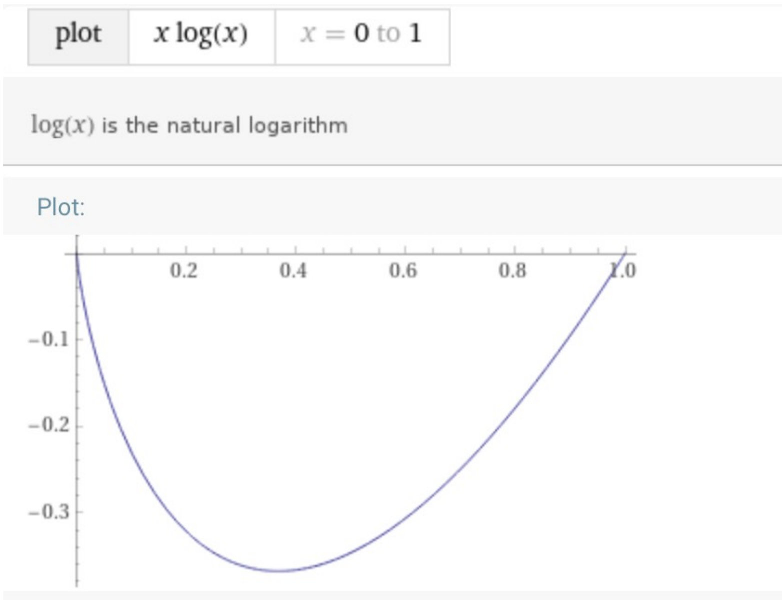
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,.$$

$y = x\ln x \qquad \sum \frac{-1^n}{n!} y^n = \exp(-y) = \frac{1}{x^x}$

2/ $g \quad x \mapsto x\log x \quad x \neq 0$ est cont dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$\qquad\qquad 0 \quad x = 0$

$g' = \log x + \frac{x}{x} = \log x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}$



$\sup |g(x)| = |g(e^{-1})|$

$= -e^{-1}\ln e^{-1}$

$= e^{-1} \approx 0{,}369$

$\sum \|u_n\| \leq \sum \frac{(e^{-1})^n}{n!} = \exp(e^{-1}) < \infty$ De plus $u_n(x) = \frac{-1^n}{n!}(g(x))^n$ cont

$\Rightarrow$ CVN sur $[0,1]$

$\Rightarrow$ CVU

$\Rightarrow \sum u_n$ cont car limite CVU de fonctions cont

2)

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(\left[x^{n+1} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x} (\ln x)^{n-1} \, dx\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1} \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right)^n \int_0^1 x^n \, dx = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$