M1–Analyse Fonctionnelle
2020-2021

TD n^{o}5 : Topologies et derivées faibles.

Exercice 1 : En dimension finie
Montrer que sur $\mathbb{R}^n$, la topologie faible est identique à la topologie forte.

Exercice 2 : Test sur un sous-ensemble dense
1) Montrer que si (x_n) est une suite bornée de X telle que $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ pour tout f dans un ensemble D dense de X^*, alors (x_n) converge vers x faiblement.
2) Montrer que si (f_n) est une suite bornée de X' telle que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout x dans un ensemble D dense de X, alors (f_n) converge vers f faiblement-$*$.
3) Donner un exemple de suite $(x_n) \subset X$ telle que $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ pour tout f dans un ensemble D dense de X^* mais telle que (x_n) ne converge pas faiblement.

Exercice 3 : Ouverts et fermés de la topologie faible.

Soit X un espace de Banach de dimension infinie qu'on munit de sa topologie faible.

1. Soit V un ouvert de la topologie faible de X. Montrer que pour chaque $x \in V$ il existe un sous-espace $K \subset X$ de dimension infinie telle que $x + K \subset V$. Déduire qu'aucun ouvert de la topologie faible n'est borné dans X.
2. En déduire que le sphère unité de X n'est pas fermé pour la topologie faible. Quel est son adhérence ?
3. Soit W un convexe fermé pour la topologie forte. Montrer que W est fermé pour la topologie faible. Déduire que la boule unité est un fermé de la topologie faible, d'intérieur vide.
4. Donner un exemple d'un fermé pour la topologie faible qui n'est pas convexe.

Exercice 4 : Dans un Hilbert.

Soit X un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Soit (e_i) une famille orthonormé de vecteurs dans H tels que

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n, \ldots)} = H.$$

Soit (x_n) une suite dans X.

1. Montrer que $x_n \to x$ faiblement si et seulement si pour tout $y \in X$ on a $\lim_{n\to\infty} \langle y, x_n \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. Montrer que les trois affirmations suivantes sont équivalentes
   (a) x_n converge vers x faiblement quand $n \to \infty$

(b) $\sup||x_n|| < \infty$ et pour chaque i la suite $\langle e_i, x_n\rangle$ converge quand $n \to \infty$.

(c) $\sup||x_n|| < \infty$ et il existe un ensemble dense M tel que pour chaque $y \in M$ on a que la suite $\langle y, x_n\rangle$ converge quand $n \to \infty$.

3. Soit maintenant $X = l^2(\mathbb{N})$ et e_i sa base canonique. Donner un exemple d'une suite x_n d'éléments de X telle que $\langle e_i, x_n\rangle$ converge pour chaque i mais x_n ne converge pas faiblement.

Exercice 5 : Exemples dans L^p
On considère $X = L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in]1, +\infty[$. On introduit une fonction $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_p = 1$. Montrer que les suites suivantes convergent faiblement vers 0 dans X, bien qu'elles soient de norme 1.
1) Concentration : $u_n \ : \ x \longmapsto n^{1/p} f(nx)$.
2) Fuite à l'infini $v_n \ : \ x \longmapsto f(x-n)$.
3) Etalement $w_n \ : \ x \longmapsto n^{-1/p} f(x/n)$.
4) Oscillations : $e_n \ : \ x \longmapsto e^{2i\pi nx} f(x)$.
On admettra que $X^* = L^q(\mathbb{R})$, q étant le conjugé de p, et que les fonction continues sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \neq \infty$.

En déduire un exemple sur $X = L^2(\mathbb{R})$ de suites (x_n) convergeant faiblement dans X et (f_n) convergeant faiblement-$*$ dans X' telles que $f_n(x_n)$ ne converge pas.

Exercice 6 : Compacité séquentielle de la boule unité faible-$*$
1) Montrer que la boule unité fermée de X^* pour la topologie forte est compacte pour la topologie faible-$*$.
2) On suppose que X est séparable. Soit (x_n) un ensemble dense et dénombrable de X. Montrer qu'un suite bornée f_n converge vers f dans la topologie faible-$*$ si et seulement si pour tout m on a que $f_n(x_m)$ converge vers $f(x_m)$.
3) En déduire une métrique d sur la boule unité dans X^* telle que $d(f_n, f) \to 0$ si et seulement si f_n converge vers f pour la topologie faible-$*$.
4) Montrer par un exemple que la sphère unité de X^* pour la topologie forte n'est pas compacte pour la topologie faible-$*$.
5) En déduire que si X est réflexif et séparable, alors la boule unité fermée de X (pour la topologie forte) est faiblement compacte pour les suites.
6) Montrer par un contre-exemple que la compacité de la question précédente est fausse si X n'est pas réfléxif.

Exercice 7 : Dérivées faibles. On considère une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$, ou $p \in [1, \infty]$.

1. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ on a que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \phi(x) dx \to_{h \to 0} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx.$$
2. Soit pour tout h la fonction $g_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Montrer que s'il existe une suite h_n avec $h_n \to 0$ et une fonction g telle que $g_{h_n} \to g$ faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$ alors g est la dérivée faible de f.

Exercice 8 : Derivées faibles, primitives et representants continus.

1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Montrer que la onction $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ est continue.
2. Montrer que $f(x)$ est la dérivée faible de $g(x)$. (On pourra utiliser le théorème de Fubini.)
3. Soit f une fonction en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ qui admet une derivée faible. Montrer que la classe de f dans $L^1(\mathbb{R})$) contient un unique représentant continu.

Exercice 9 : Espaces de Sobolev et séries de Fourier.

On considère dans cet exercices l'espace des fonctions L^2 à valeur dans $\mathbb{C}$ et 2π-péreriodiques sur R, muni du produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)dx.$$

On identifie cet espace avec l'espace de fonctions complexes L^2 sur $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On le note $L^2(S^1)$. On note que toute fonction sur S^1 est de support compacte.

Soit $H^1(S^1)$ l'ensemble de fonctions $f \in L^2(S^1)$ qui admettent un derivée faible dans $L^2(S^1)$. Nous munissons cet espace de son produit hermitien de Sobolev

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f'(x)}g'(x)dx$$

ou les derivées sont prises au sens faible. Nous noterons $||\cdot||_{1,2}$ la norme associée.

On admettra que chaque $f \in L^2(S^1)$ s'écrit de façon unique dans la forme

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$$

ou la somme est prise par rapport à la norme L^2 et que nous avons alors que $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

1. Justifier que l'application $L^2(S^1) \to l^2(\mathbb{Z})$ donnée par $f \to \left(\frac{c_n(f)}{\sqrt{2\pi}}\right)$ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Hilberts complexes.
2. Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$ au sens fort alors $c_n = o(1/n)$. Montrer que si $c_n = o(1/n^{2+\delta})$ et $\delta > 0$ alors f est $\mathcal{C}^1$ au sens fort.
3. Montrer que si f admet une derivée faible f' alors la séries de Fourier de f' est donnée par $c_n(f') = -inc_n(f)$. Montrer que f admet une dérivée faible si et seulement si $(-inc_n(f))$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$.
4. Exprimer la norme de Sobolev $||\cdot||_{1,2}$ en termes des coefficients de Fourier $c_n(f)$.
5. Montrer que l'adhérence en $L^2(S^1)$ de $B_1(H^1(S^1))$, la boule unité de la norme de Sobolev, est compacte dans $L^2(S^1)$.

Exercice 10 : Formule de trace, cas simple. On considère dans cette exercice le carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Nous considérons l'espace de Sobolev $W_{1,1}(C)$ que l'on munit de la norme de Sobolev

$$||f||_{1,1} = \int_C |f| + |\frac{\partial f}{\partial x}| + |\frac{\partial f}{\partial y}|dx.$$

On note que, a priori, les éléments de $W_{1,1}$ ´tant définis seulement presque partout,a restriction d'un élément de $W_{1,1}(C)$ au bord δC n'est pas définis pour les élḿents non continus. Le but de cet exercice est de contourner ce problème.

1. Montrer que l'application de restriction $\mathcal{C}^1(C) \to \mathcal{C}^0(\delta C)$ n'est pas continu si on munit $\mathcal{C}^1(C)$ et $\mathcal{C}^0(\delta C)$ de la norme L^1.
2. Pour tout $(x, y) \in C$ justifier que

$$|f(x,-1) \leq |f(x,y)| + \int_{-1}^{1} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)|dt$$

   et en déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\int_{-1}^{1} |f(x,-1)|dx \leq C||f||_{1,1}$$

3. Montrer que l'application de restriction $\mathcal{C}^1(C) \to \mathcal{C}^0(\delta C)$ est continue si on munit $\mathcal{C}^1(C)$ de la norme $W_{1,1}$ et $\mathcal{C}^0(\delta C)$ de la norme L^1.
4. En déduire que cette application de restriction admet une extension

$$\text{trace} : W_{1,1}(C) \to L^1(\delta C).$$

   (Vous pouvez utiliser la densité des fonctions lisses à support compact dans les espaces de Sobolev.)