

Series de tiempo

Diplomado en Ciencia de Datos

Dora Suárez

Serie de tiempo

Es una secuencia de valores, medidos en determinados momentos y ordenados de forma cronológica.

Las series de tiempo capturan información del mismo fenómeno en diferentes momentos de tiempo

Componentes de una serie de tiempo

Tendencia: Comportamiento general de la serie de tiempo

Estacionalidad: Comportamientos periódicos a corto plazo

Error: Comportamientos aleatorios

$$Y_t = \boxed{T_t + S_t} + \epsilon_t$$

Componente
Aleatoria

Componente
Determinística

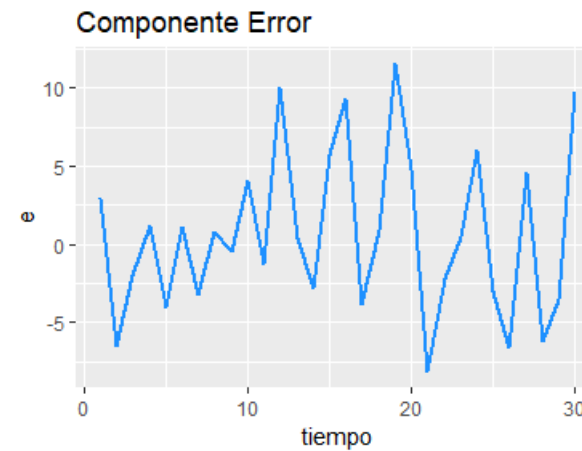
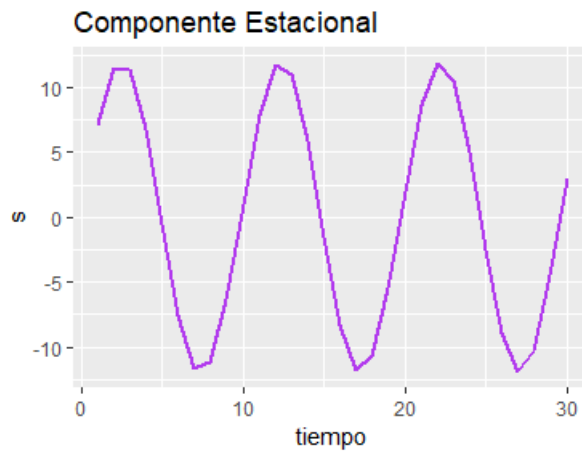
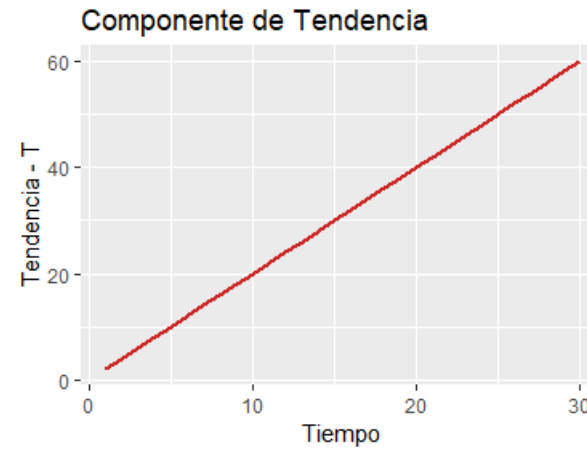
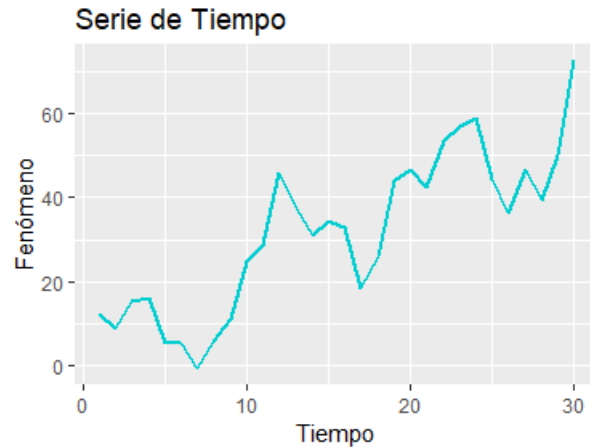
Ejercicio

1. Crear en R una secuencia de 30 datos (almacenarlo en un vector x)
2. Crear un vector que contenga la recta $t = 2x$ (almacenarlo en un vector t)
3. Crear un vector que contenga la siguiente sinusoidal:
 $12 \cdot \sin(2 \cdot x / \pi)$ (Almacenarlo en s)
4. Crear un vector de errores como: $4 \cdot \text{rnorm}(30)$ (almacenarlo en e)

Ejercicio

1. Calcular $y = x + t + s + e$
2. Hacer un gráfico de la tendencia, la estacionalidad, y la serie de tiempo completa (usar `geom_line`)

Componentes de una serie de tiempo

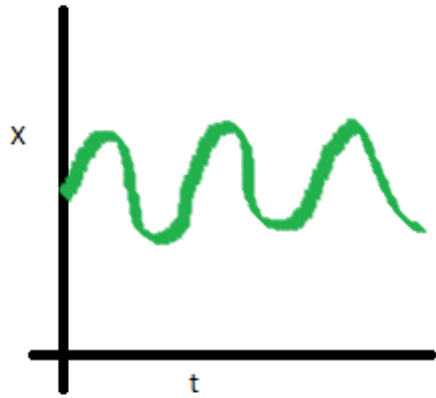


$$Y_t = T_t + S_t + \epsilon_t$$

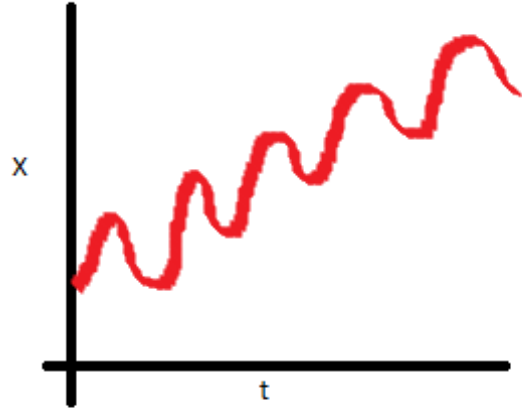
Series de tiempo estacionarias

1. El valor medio de las series de tiempo es constante en el tiempo, lo que implica que el componente de tendencia se anula.
2. La varianza no aumenta con el tiempo.
3. El efecto de la estacionalidad es mínimo.

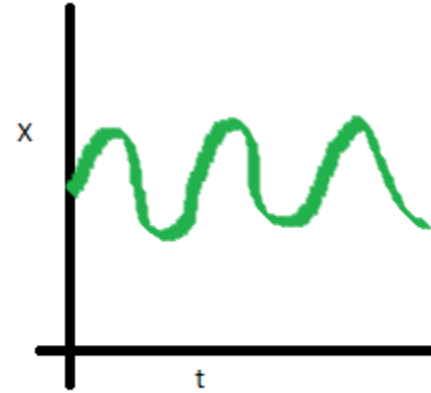
Series estacionarias y no estacionarias



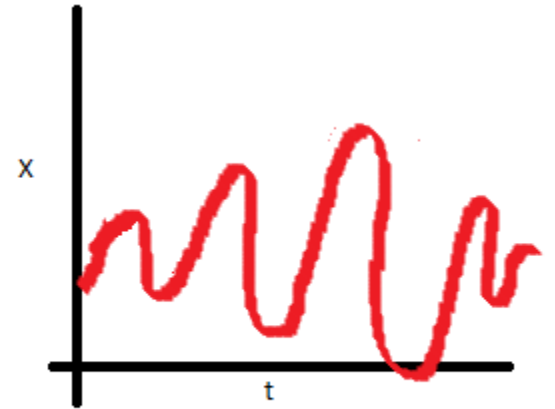
Stationary series



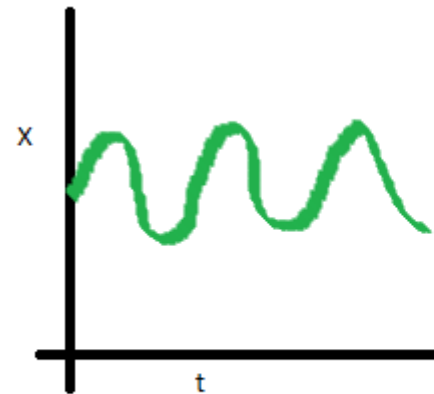
Non-Stationary series



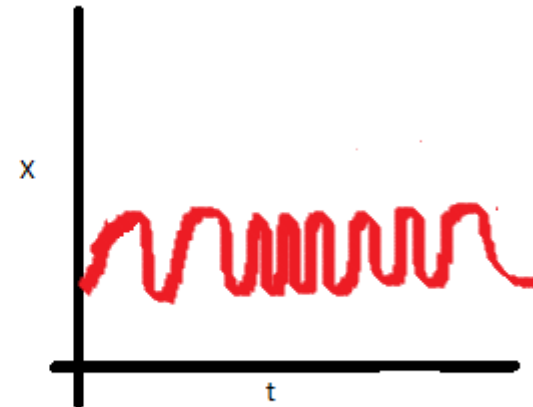
Stationary series



Non-Stationary series



Stationary series



Non-Stationary series

Media móvil

Es el resultado del promedio de conjuntos de observaciones de forma agrupada, sirve para suavizar líneas de tendencia

$$\text{Ej: } x = [1, 4, 9, 15, 22, 31]$$

Media móvil tamaño 2:

$$Y = [2.5, 6.5, 12, 18.5, 26.5]$$

Medias Móviles – Ejercicio

Ejecutar las siguientes líneas de Código ¿Qué observa?

```
x <- 1:20 %>% .^2 + 40*rnorm(20)
plot(x, type = "l")
y = rollmean(x, k = 3) # Calculo del promedio móvil
plot(y, type = "l")
```

Descripción de una serie de tiempo

1. Indicarle al software que la base de datos es de tipo temporal
2. Analizar los posibles ciclos existentes en la serie temporal
3. Descomponer la serie en cada una de las partes (Tendencia, estacionalidad y error)

Primer conjunto de datos

```
gas = scan('http://verso.mat.uam.es/~joser.berrendero/datos/gas6677.dat')  
plot(gas)
```

```
gas.ts = ts(gas, start = c(1966,1), frequency = 12)  
plot(gas.ts)
```

```
boxplot(gas.ts ~ cycle(gas.ts))
```

```
cycle(gas.ts)
```

```
gas.ts.desc = decompose(gas.ts)  
plot(gas.ts.desc, xlab='Año')
```

Transformaciones de una serie de tiempo

1. Estabilización de la varianza -> Logaritmo
2. Eliminación de la tendencia -> Primera diferencia finita
$$\text{diff}(x_t) = x_t - x_{t-1}$$
3. Eliminar la estacionalidad -> Doceava diferencia finita
$$\text{diff}(x_t) = x_t - x_{t-12}$$

Ejercicio: Calcular las siguientes transformaciones ¿Qué observa?

```
plot(log(gas.ts))
```

```
x = log(gas.ts)
```

```
dif1.x = diff(x)
```

```
plot(dif1.x)
```

```
dif12.dif1.x = diff(dif1.x, lag=12)
```

```
plot(dif12.dif1.x)
```

Modelaje de la tendencia

$$Y_t = T_t + S_t + \epsilon_t$$

Cubico

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

Lineal

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

Exponencial

$$T_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t)$$

Logístico

$$T_t = \frac{\beta_2}{1 + \beta_1 \exp(-\beta_0 t)}$$

Cuadrático

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

Como hacer que una serie sea estacionaria?

1. Aplicando logaritmos
2. Diferencias finitas (para corregir estacionariedad y tendencia)

Segunda base de datos

bit.ly/2Pqh8Sk

Ventas al menudeo en dólares Estadounidenses desde enero de 1955 de una empresa de confecciones

Pronósticos basados en la tendencia

$$\hat{Y}_{t+j} = E(Y_{t+j} | Y_1, Y_2, \dots, Y_t)$$

1. Dividir los datos en entrenamiento y prueba
2. Calcular los modelos correspondientes como regresiones lineales
3. Medir el desempeño del modelo con criterios como AIC y BIC
4. Seleccionar el modelo y probarlo con los datos de prueba

Suavizadores – Descomposición

Regresión Local Loess: Busca encontrar una línea de tendencia basada en métodos no paramétricos

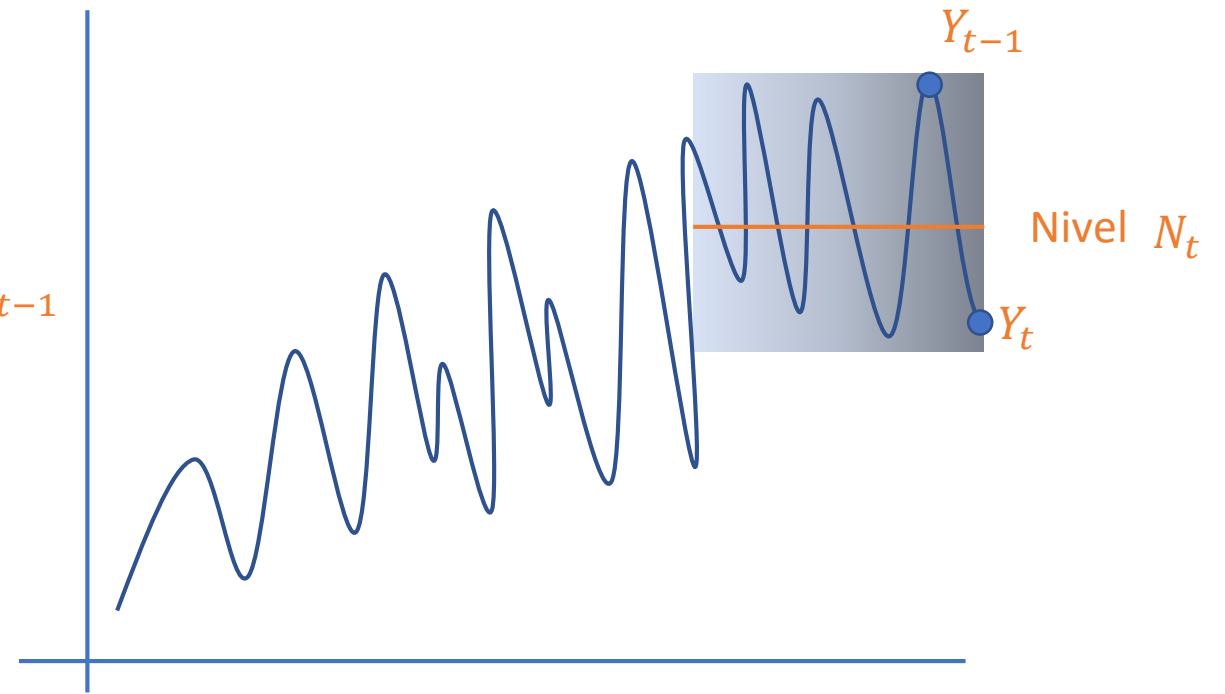
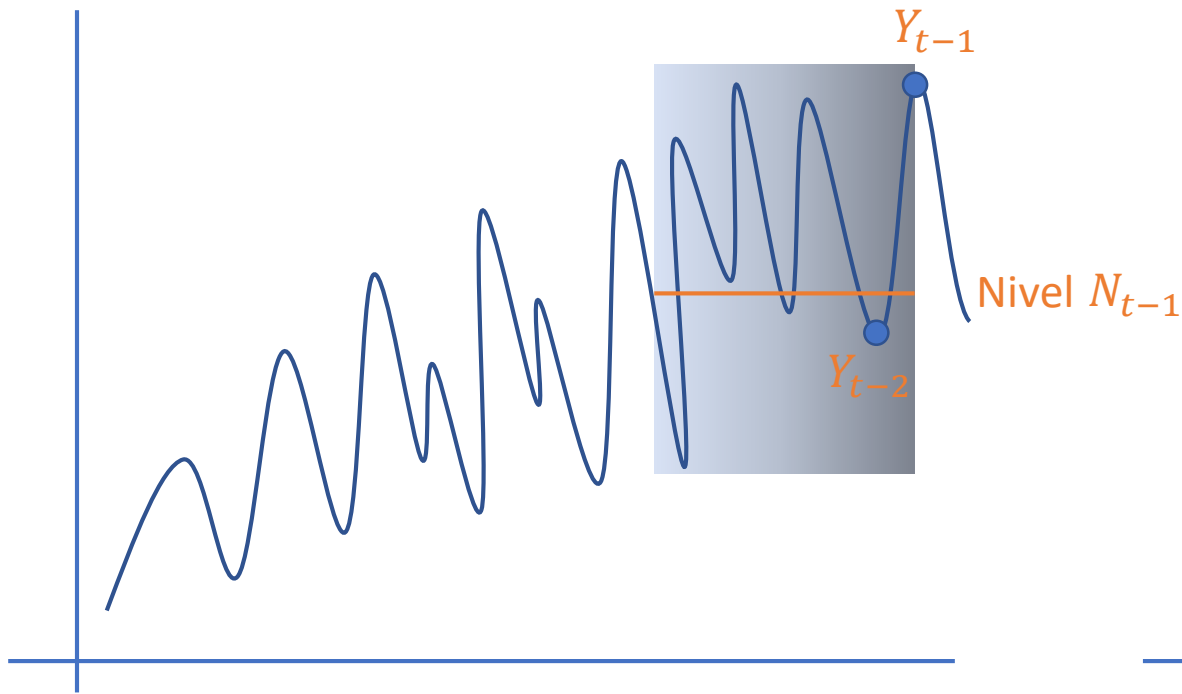
1. Se escoge $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que $q \leq n$.
2. Se escogen los q valores x_i más cercanos a x
3. Defina $w(x) = \begin{cases} (1 - x^3)^3 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases}$
4. Defina $\lambda_q(x)$ la distancia de x al x_i más alejado entre los q escogidos.
5. Defina $v_i(x) = w\left(\frac{|x_i - x|}{\lambda_q(x)}\right)$, para cada x_i escogido.
6. Ajuste $Y_i = a + bx_i$ ó $Y_i = a + bx_i + cx_i^2$ con MCP ponderando cada x_i con $v_i(x)$.
7. Defina $g(x)$ como el valor estimado de la regresión en x .

Algoritmos de suavizamiento exponencial

Idea: La serie tiene un nivel N_t desconocido que no necesariamente es constante pero las variaciones de el pueden ser imperceptibles

Objetivo: Estimar el Nivel

Algoritmos de suavizamiento exponencial



Algoritmos de suavizamiento exponencial

Se basan en formas de recurrencia:

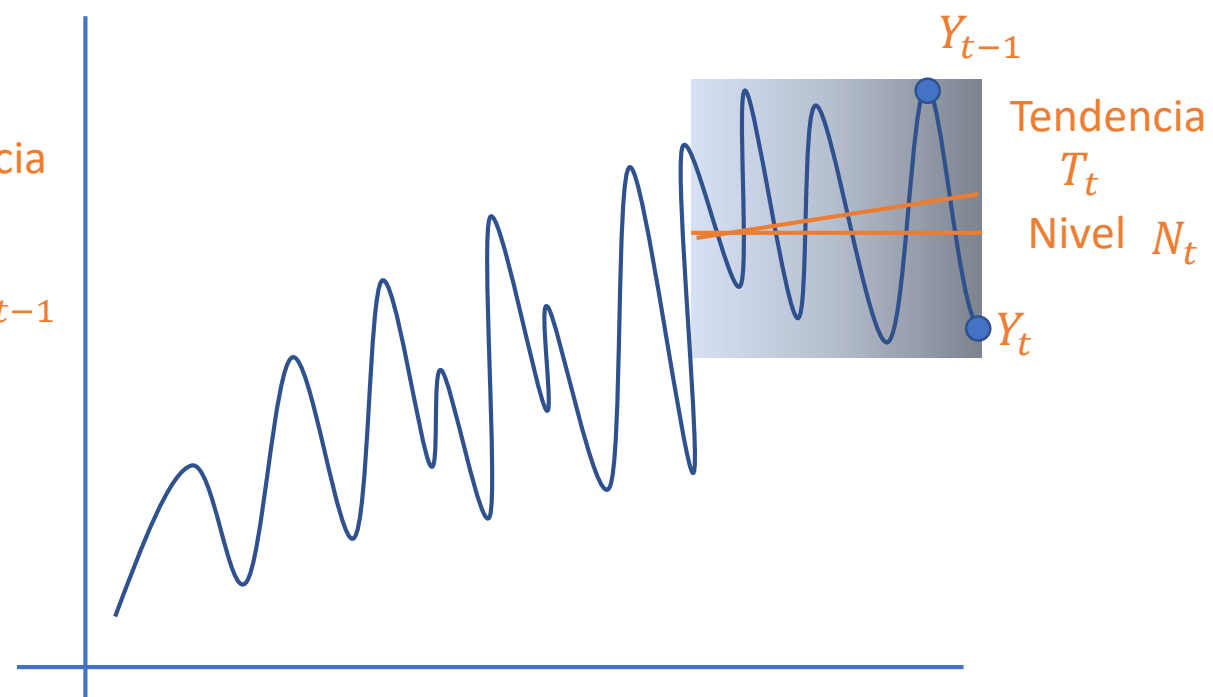
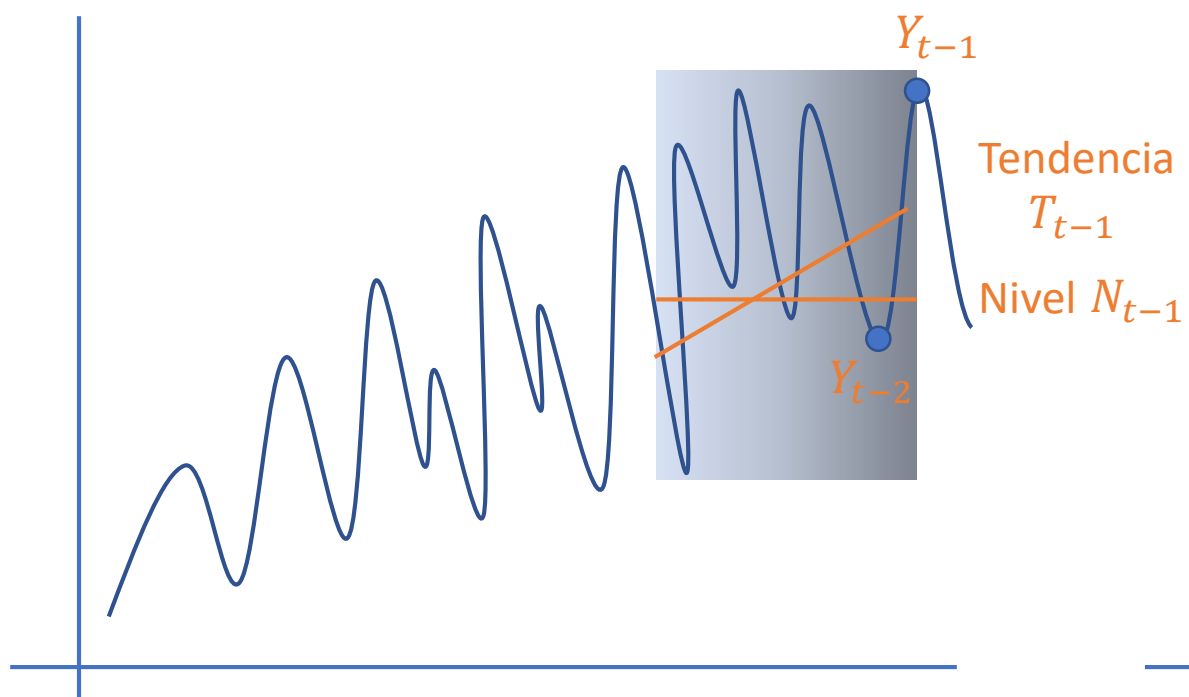
$$N_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)N_{t-1}$$

Se asume que la serie tiene un determinado nivel N_t asociado a la tendencia. Cuanto menor sea el valor de α , mayor peso es dado a la estimativa anterior. Suponemos que la mejor predicción que podemos tener de “mañana” es la observación que tenemos “hoy”

Ejercicio

1. Dividir la serie del precio de cierre de las acciones de Microsoft en entrenamiento y prueba, para ello dejar los últimos 20 días para hacer la predicción
2. Ajustar el algoritmo de suavizamiento exponencial para la serie de entrenamiento para 100 valores diferentes de Alpha
3. Para cada uno de los modelos ajustados, predecir el valor de la serie en los siguientes 20 días y calcular el error respecto a la serie real
4. Seleccionar el valor de Alpha que minimice el error

Algoritmo de Holt



Algoritmo de Holt

Se asume que la dinámica de la serie es determinada por dos componentes no observables que no necesitan ser fijas (nivel y tendencia)

Algoritmo:

$$\begin{aligned} N_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(N_{t-1} + T_{t-1}) \\ T_t &= \beta(N_t - N_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \end{aligned}$$

Inicialización: $N_2 = y_2; T_2 = y_2 - y_1$

Pronósticos: $\hat{y}_t(h) = N_t + hT_t, h = 1, 2, \dots$

Ejercicio

Simular una serie de tiempo aleatoria con una tendencia (ver primer ejercicio)

```
x <- 1:30
```

```
t <- 2*x
```

```
s <- 12*sin(2*x/pi)
```

```
e <- 4*rnorm(30)
```

```
y <- t + s + e
```

```
datos <- data.frame(fenomeno = y,  
                    tendencia = t,  
                    estacionalidad = s,  
                    error = e,  
                    tiempo = x)
```

Ejercicio

Hacer una función que de forma recurrente calcule las predicciones para el algoritmo de Holt:

Inicialización:

$$N_2 = y_2$$

$$T_2 = y_2 - y_1$$

$$N_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(N_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(N_t - N_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

Algoritmo de Holt

Ventajas:

Aprende de los errores

Predicciones sencillas

Desventajas:

No tiene en cuenta la estacionalidad

Las predicciones a largo plazo son malas

Algoritmo de Holt - Winters

Es una ampliación del modelo anterior, se tienen en cuenta las componentes estacionales

Algoritmo aditivo:

$$\begin{aligned}N_t &= \alpha(y_t - F_{t-s}) + (1 - \alpha)(N_{t-1} + T_{t-1}) \\T_t &= \beta(N_t - N_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \\F_t &= \gamma(y_t - N_t) + (1 - \gamma)F_{t-s}\end{aligned}$$

Inicialización: $N_2 = y_2; T_2 = y_2 - y_1; F_1 = (y_1 - N_1); \dots F_s = (y_s - N_s)$

Pronósticos: $\hat{y}_t(h) = N_t + hT_t + F_{t+h+s} \quad h = 1, 2, \dots$

Algoritmo de Holt Winters

Ventajas:

Ajusta la tendencia a los errores de pronostico

Predicciones sencillas

Tiene en cuenta el efecto de la estacionalidad

Desventajas:

Las predicciones a largo plazo son malas

No tiene en cuenta cambios en las variaciones a lo largo del tiempo

Depende de la cantidad de observaciones para ajustar buenas predicciones de la estacionalidad

Algoritmo de Holt - Winters

Es una ampliación del modelo anterior, se tienen en cuenta las componentes estacionales

Algoritmo Multiplicativo:

$$\begin{aligned}N_t &= \alpha(y_t)/F_{t-s} + (1 - \alpha)(N_{t-1} + T_{t-1}) \\T_t &= \beta(N_t - N_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \\F_t &= \gamma(y_t)/N_t + (1 - \gamma)F_{t-s}\end{aligned}$$

Inicialización: $N_2 = y_2; T_2 = y_2 - y_1; F_1 = (y_1 - N_1); \dots F_s = (y_s - N_s)$

Pronósticos: $\hat{y}_t(h) = N_t + hT_t + F_{t+h+s} \quad h = 1, 2, \dots$

Algoritmo de Holt Winters

Ventajas:

Ajusta la tendencia a los errores de pronostico

Predicciones sencillas

Tiene en cuenta el efecto de la estacionalidad

Tiene en cuenta las variaciones a lo largo del tiempo

Desventajas:

Las predicciones a largo plazo son malas

Depende de la cantidad de observaciones para ajustar buenas predicciones de la estacionalidad

Ejercicio

1. Consultar la base de datos `co2` (precargada en R)
2. Describir la serie (separarla en su componente de tendencia, estacionalidad y error) ¿Qué observa?
3. Use el comando `stl(serie, s.window = "period")` y grafique los resultados
4. Que observa en el siguiente gráfico `monthplot(serie)`
5. Que observa en el siguiente gráfico `seasonplot(serie)`

Metodología de Box y Jenkins, 1970

1. Identificación y selección del modelo
 - ¿La serie es estacionaria? Si no es así, ¿qué debería hacer para que sea estacionaria?
 - ¿Cuántos periodos anteriores influyen en una observación de la serie?



Metodología de Box y Jenkins, 1970

2. Estimación de parámetros
 - Máxima verosimilitud
 - Mínimos cuadrados no lineales



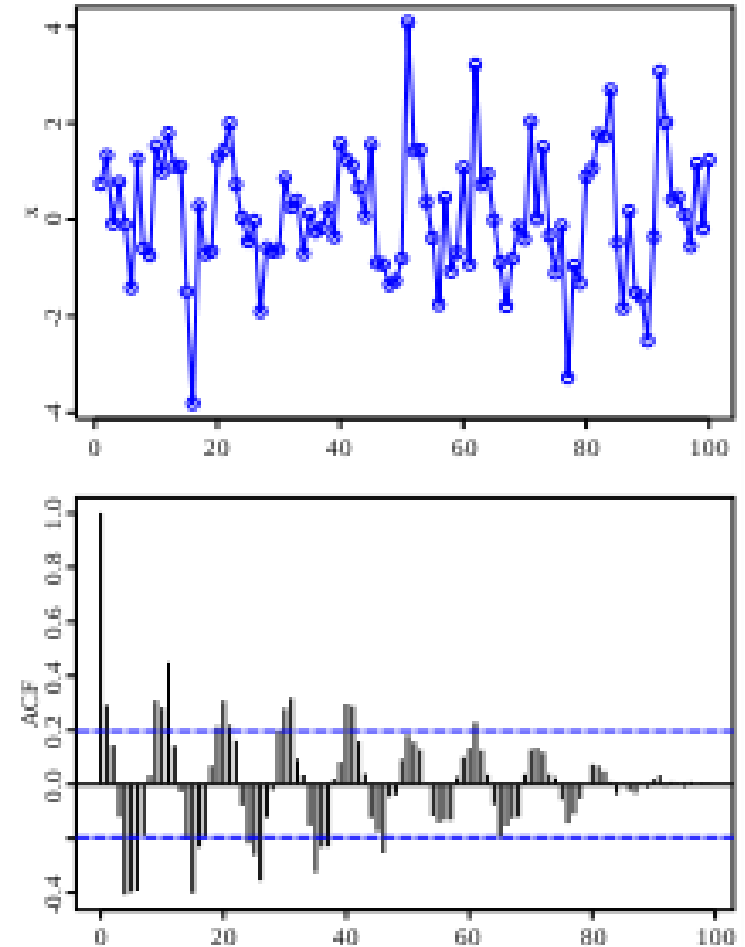
Metodología de Box y Jenkins, 1970

3. Comprobar el modelo
 - Ensayo con datos de test
 - ¿Los residuos son independientes?
 - La media y varianza de los residuos son constantes en el tiempo



Correlograma de una serie de tiempo

Una gráfica de autocorrelación está diseñada para mostrar si los elementos de una serie temporal están correlacionados positivamente, correlacionados negativamente o independientes entre sí.



Datos – Ejercicio

1- Consultar los datos `Ideaths` precargados en R ¿qué puede observar?

2- Haga una descripción de la serie de tiempo

3- Divida los datos en entrenamiento y prueba dejando los últimos 12 datos como los de prueba

Funciones de autocorrelación

La función de autocorrelación (ACF)

- Mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos.
- Mide el grado de asociación lineal que existe entre dos variables del mismo proceso estocástico.

```
acf(serie_train)
```

Funciones de autocorrelación

La función de autocorrelación parcial (PACF)

- Mide la correlación entre dos variables separadas por k periodos cuando no se considera la dependencia creada por los retardos intermedios existentes entre ambas.
- Mide la autocorrelación que existe entre dos variables separadas k períodos descontando los posibles efectos debidos a variables intermedias

```
pacf(serie_train)
```


Modelos de medias móviles

Se asume que el valor que toma la variable en el momento t depende de forma lineal de el valor actual y de un término estocástico. Se asume que el proceso es estacionario (tendencia cero)

Modelo medias móviles de orden 1

$$y_t = \mu + u_t + \theta u_{t-1}$$
$$u_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Modelo medias móviles de orden p

$$y_t = \mu_t + u_t + \theta u_{t-1} + \theta u_{t-p}$$
$$u_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Modelos Autorregresivos

Modelos que asumen que el comportamiento de la variable a través del tiempo depende de sus propios valores anteriores

Modelo Autorregresivo de orden 1

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t$$
$$u_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Modelo Autorregresivo de orden p

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t$$
$$u_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Modelos Autorregresivos de promedios móviles ARMA

Modelos que asumen que el comportamiento de la variable a través del tiempo depende de sus propios valores anteriores y un término estocástico

Modelo ARMA de orden 1

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$$
$$u_t \sim RB(0, \sigma^2)$$

Modelos Autorregresivos de promedios móviles con estacionalidad ARIMA

Modelos que asumen que el comportamiento de la variable a través del tiempo depende de sus propios valores anteriores y un término estocástico

Modelo ARIMA de orden p

$$Y_t = -(\Delta^d Y_t - Y_t) + \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta^d Y_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$