M2 - Análisis de Datos 3: descriptivo e inferencial

Dora Suárez, Juan F. Pérez

Departamento MACC
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

juanferna.perez@urosario.edu.co

Primer Semestre de 2019

Contenidos

Estimadores puntuales

Inferencia a partir de una muestra aleatoria

Población: X

- Valor esperado $\mu = E[X]$
- Varianza $\sigma^2 = V[X]$
- Desviación estándar $\sigma = \sqrt{V[X]}$

Inferencia a partir de una muestra aleatoria

Muestra aleatoria $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

- Media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Inferencia a partir de una muestra aleatoria

Muestra aleatoria $\{X_1, \ldots, X_n\}$:

- Media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Estimadores puntuales

- Media muestral como estimador de la media poblacional:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estimadores puntuales

- Media muestral como estimador de la media poblacional:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Varianza muestral como estimador de la varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Estimadores puntuales

- Media muestral como estimador de la media poblacional:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Varianza muestral como estimador de la varianza muestral:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- Obtengo un número que uso para estimar el valor del parámetro

Estimadores de intervalo

Estimadores de intervalo

- $\bar{X}$ estimador puntual de μ

Estimadores de intervalo

- $\bar{X}$ estimador puntual de μ
- Intervalo: $[a, b]$

Estimadores de intervalo

- $\bar{X}$ estimador puntual de μ
- Intervalo: $[a, b]$
- Alta probabilidad de que μ esté en el intervalo

$$P(\mu \in [a, b]) = 0{,}95$$

Estimadores de intervalo

- $\bar{X}$ estimador puntual de μ
- Intervalo: $[a, b]$
- Alta probabilidad de que μ esté en el intervalo

$$P(\mu \in [a, b]) = 0{,}95$$

- Aprovechando $\bar{X}$:

$$[\bar{X} - c, \bar{X} + c]$$

Estimadores de intervalo: media

- ¿Cómo se comporta $\bar{X}$?

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estimadores de intervalo: media

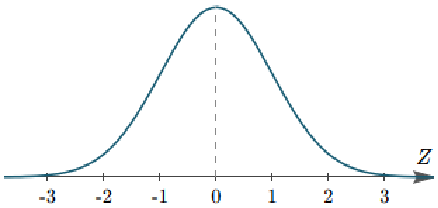
- ¿Cómo se comporta $\bar{X}$?

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Depende del comportamiento de X_i, es decir, de X

Variable aleatoria normal

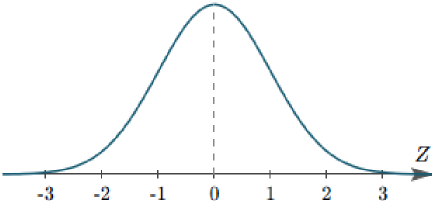
- Variable aleatoria continua



- Normal: https://www.geogebra.org/m/QEayZCpM

Variable aleatoria normal

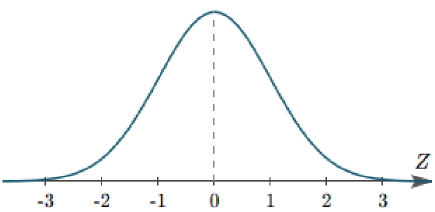
- Variable aleatoria continua
- Función de densidad de probabilidad (no de masa)



- Normal: https://www.geogebra.org/m/QEayZCpM
- Normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$): https://www.geogebra.org/m/Xhp5vB98

Variable aleatoria normal

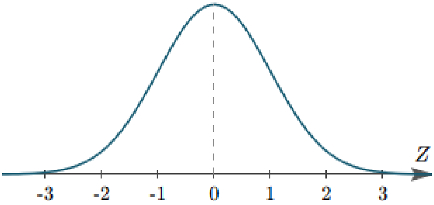
- Variable aleatoria continua
- Función de densidad de probabilidad (no de masa)
- Probabilidad: área bajo la curva



- Normal: `https://www.geogebra.org/m/QEayZCpM`
- Normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$): `https://www.geogebra.org/m/Xhp5vB98`

Variable aleatoria normal

- Variable aleatoria continua
- Función de densidad de probabilidad (no de masa)
- Probabilidad: área bajo la curva
- Parámetros: media μ y varianza σ^2



- Normal: `https://www.geogebra.org/m/QEayZCpM`
- Normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$):
  `https://www.geogebra.org/m/Xhp5vB98`

Estimadores de intervalo: media

- X sigue una distribución normal (μ, σ^2)

Estimadores de intervalo: media

- X sigue una distribución normal (μ, σ^2)
- Cada muestra X_i sigue la misma distribución normal

Estimadores de intervalo: media

- X sigue una distribución normal (μ, σ^2)
- Cada muestra X_i sigue la misma distribución normal
- La media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

sigue una distribución normal $\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Estimadores de intervalo: media

- Estimador de intervalo para la media μ:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Estimadores de intervalo: media

- Estimador de intervalo para la media μ:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$

Estimadores de intervalo: media

- Estimador de intervalo para la media μ:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: error estándar (variabilidad de $\bar{X}$)

Estimadores de intervalo: media

- Estimador de intervalo para la media μ:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$
- $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: error estándar (variabilidad de $\bar{X}$)
- $z_{\alpha/2}$: factor que depende de la distribución normal y el nivel de confianza

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)
- Resultado:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)
- Resultado:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)
- Resultado:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$
- $\frac{S}{\sqrt{n}}$: error estándar (variabilidad estimada de $\bar{X}$)

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)
- Resultado:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$
- $\frac{S}{\sqrt{n}}$: error estándar (variabilidad estimada de $\bar{X}$)
- $t_{\alpha/2,n-1}$: factor que depende de la **distribución T** y el tamaño de la muestra

Estimadores de intervalo: media

- Problema: intervalo depende de σ (desconocido)
- Solución: reemplazar σ por su estimador puntual S (desviación estándar muestral)
- Resultado:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- Punto medio: $\bar{X}$
- $\frac{S}{\sqrt{n}}$: error estándar (variabilidad estimada de $\bar{X}$)
- $t_{\alpha/2,n-1}$: factor que depende de la **distribución T** y el tamaño de la muestra
- https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- `https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz`

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- `https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz`
- Parámetro adicional (grados de libertad):
  - Cercano a uno: más variable/dispersa que la normal estándar

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- `https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz`
- Parámetro adicional (grados de libertad):
  - Cercano a uno: más variable/dispersa que la normal estándar
  - Al llegar a 40: similar a la normal estándar

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- `https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz`
- Parámetro adicional (grados de libertad):
  - Cercano a uno: más variable/dispersa que la normal estándar
  - Al llegar a 40: similar a la normal estándar
- Grados de libertad: asociados al número de observaciones

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz
- Parámetro adicional (grados de libertad):
  - Cercano a uno: más variable/dispersa que la normal estándar
  - Al llegar a 40: similar a la normal estándar
- Grados de libertad: asociados al número de observaciones
  - Pocas observaciones: más incertidumbre sobre el valor del parámetro

Estimadores de intervalo: media

- **Distribución T**
- `https://www.geogebra.org/m/RPGjU7Vz`
- Parámetro adicional (grados de libertad):
  - Cercano a uno: más variable/dispersa que la normal estándar
  - Al llegar a 40: similar a la normal estándar
- Grados de libertad: asociados al número de observaciones
  - Pocas observaciones: más incertidumbre sobre el valor del parámetro
  - Muchas observaciones: más certeza sobre el valor del parámetro

Estimadores de intervalo: media

- Intervalo de **confianza** para la media μ:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Estimadores de intervalo: media

- Intervalo de **confianza** para la media μ:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Garantiza que μ está en el intervalo con probabilidad $1-\alpha$ (nivel de confianza)

Estimadores de intervalo: media

- Intervalo de **confianza** para la media μ:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Garantiza que μ está en el intervalo con probabilidad $1 - \alpha$ (nivel de confianza)
- Probabilidad de que esté por fuera del intervalo: α

Estimadores de intervalo: media

- Intervalo de **confianza** para la media μ:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Garantiza que μ está en el intervalo con probabilidad $1-\alpha$ (nivel de confianza)
- Probabilidad de que esté por fuera del intervalo: α
- A mayor confianza $1-\alpha$, más grande el intervalo

Estimadores de intervalo: media

- Intervalo de **confianza** para la media μ:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Garantiza que μ está en el intervalo con probabilidad $1-\alpha$ (nivel de confianza)
- Probabilidad de que esté por fuera del intervalo: α
- A mayor confianza $1-\alpha$, más grande el intervalo
- `https://www.geogebra.org/m/Xhp5vB98`

Calculando intervalos de confianza en R

```
install.packages("gmodels")
library("gmodels")
ci(mtcars$mpg)

barx <- mean(mtcars$mpg); barx
n <- nrow(mtcars); n
s <- sd(mtcars$mpg); s
serr <- s/sqrt(n); serr
hw <- serr * qt(0.975, df = n-1); hw
lb <- barx - hw; lb
ub <- barx + hw; ub
```

Cuantiles en R

```
qnorm(0.9)
qt(0.9, df = 10)
qt(0.9, df = 20)
qt(0.9, df = 30)
qt(0.9, df = 40)
qt(0.9, df = 50)

qnorm(0.95, 10, 2)
qexp(0.95, 0.1)
```

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Suma de variables aleatorias

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Suma de variables aleatorias
- Teorema del límite central:

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Suma de variables aleatorias
- Teorema del límite central:
    - En la medida que n crece, la distribución de $\bar{X}$ tiende a ser normal

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Suma de variables aleatorias
- Teorema del límite central:
  - En la medida que n crece, la distribución de $\bar{X}$ tiende a ser normal
- Podemos usar los resultados anteriores aproximadamente en casos en que la población no es normal siempre que la muestra sea grande

Teorema del límite central

- Población con cualquier distribución (no normal)
- Estimamos la media poblacional μ con la media muestral

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Suma de variables aleatorias
- Teorema del límite central:
  - En la medida que n crece, la distribución de $\bar{X}$ tiende a ser normal
- Podemos usar los resultados anteriores aproximadamente en casos en que la población no es normal siempre que la muestra sea grande
  - `https://www.geogebra.org/m/pSmeAE5H`

Determinando el tamaño de la muestra

- Buscamos que la estimación por intervalo sea precisa

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Determinando el tamaño de la muestra

- Buscamos que la estimación por intervalo sea precisa

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- E.g., que la longitud del semi-intervalo sea a lo sumo 1 % del punto medio

Determinando el tamaño de la muestra

- Buscamos que la estimación por intervalo sea precisa

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- E.g., que la longitud del semi-intervalo sea a lo sumo 1 % del punto medio
-

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01\bar{X}$$

Determinando el tamaño de la muestra

- Buscamos que la estimación por intervalo sea precisa

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- E.g., que la longitud del semi-intervalo sea a lo sumo 1 % del punto medio
-
$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01\bar{X}$$

- Lo que lleva a una cota inferior para el tamaño de la muestra n:

Determinando el tamaño de la muestra

- Buscamos que la estimación por intervalo sea precisa

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- E.g., que la longitud del semi-intervalo sea a lo sumo 1 % del punto medio
- $$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01\bar{X}$$
- Lo que lleva a una cota inferior para el tamaño de la muestra n:
- $$n \geq \left(\frac{\sigma z_{\alpha/2}}{0{,}01\bar{X}}\right)^2$$