

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA



DIPARTIMENTO DI FISICA E SCIENZE DELLA TERRA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

LA MATERIA A QUARK STRANA ED  
UNA POSSIBILE NUOVA CATEGORIA  
DI NANE BIANCHE: LE STRANGE  
DWARFS

**Relatore**

Giuseppe PAGLIARA

**Candidato**

Nicola MACCHIONI

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
1.1	Le ipotesi di Witten e la materia strana . . . . .	4
1.2	Sulle Strange Stars . . . . .	6
1.3	Sulle Strange Dwarfs . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Equazioni di stato</b>	<b>9</b>
2.1	Materia in fase adronica . . . . .	10
2.2	Strange matter . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Struttura stellare</b>	<b>19</b>
3.1	La metrica di Schwarzschild . . . . .	19
3.2	TOV . . . . .	20
3.3	Stabilità delle configurazioni stazionarie . . . . .	22
3.4	Calcolo del numero barionico . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Studio di stelle con core a quark strani</b>	<b>25</b>
4.1	Integrazione con Runge-Kutta . . . . .	25
4.2	Sequenze strane e questione sulla stabilità . . . . .	26
4.3	Il ramo delle strange dwarfs . . . . .	28
4.4	Massa barionica del core e stabilità . . . . .	30
4.5	Il ramo delle strange pulsar . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Origine e formazione di materia strana</b>	<b>48</b>
5.1	Sulla ricerca di strange dwarfs . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>52</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In astrofisica vengono distinti tre differenti tipi di stelle compatte: nane bianche, stelle di neutroni e buchi neri. Questi oggetti fungono da laboratori astrofisici per lo studio di una vasta gamma di fenomeni. Oltre a ciò che è stato studiato finora, in accordo con l'ipotesi di Witten, la materia a quark strana potrebbe essere più stabile di quella nella materia nucleare, e in tal caso le stelle di neutroni sarebbero largamente composte proprio da un core di materia strana racchiuso da una crosta di materia nucleare ordinaria. Un'ulteriore implicazione potrebbe essere l'esistenza anche di una nuova classe di nane bianche, le nane strane.

La tesi consiste nella trattazione dei fondamenti teorici alla base dell'esistenza delle nane strane, stelle appartenenti a sequenze costruite a partire da equazioni di stato con discontinuità tra due fasi. Nel seguente capitolo e in quello successivo verranno introdotte le ipotesi di Witten sullo stato fondamentale della materia e le equazioni di stato usate per costruire le sequenze di stelle con core a quark strani e crosta di materia nucleare ordinaria. Nel capitolo 3 si introducono le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff riguardanti la struttura stellare e i metodi per verificare la stabilità o instabilità delle configurazioni. Infine, nei capitoli 4 e 5 vengono trattate diverse sequenze di strange stars e strange dwarfs commentando i risultati in base allo stato attuale della ricerca.

### 1.1 Le ipotesi di Witten e la materia strana

La possibilità teorica che la materia a quark strana costituisca il vero stato fondamentale dell'interazione forte è alla base dell'ipotesi di Bodmer [1] e Terazawa [2]. Innanzitutto, l'energia per barione  $E/A$  della materia a quark strani (mistura di quark  $u$ ,  $d$  e  $s$  deconfinati) è inferiore rispetto a quella della materia a quark non strana (composta solo da quark  $u$  e  $d$ ). Infatti, la massa dei quark strange è inferiore all'energia di Fermi della materia a quark non strana, comportando una conversione energeticamente favorevole di quark up e down in  $s$  per interazione debole. L'energia per barione della materia strana potrebbe essere addirittura inferiore a  $930 \text{ MeV}$  costituendo così lo stato fondamentale della materia adronica.

Proviamo quindi a descrivere la possibilità dell'assoluta stabilità della materia a quark strani per un gas di quark  $u$ ,  $d$  e  $s$  senza massa e confinati in una bag a temperatura zero. Se indichiamo con  $f$  il sapore del quark, allora il momento di Fermi  $p_{F_f}$  eguaglia il potenziale chimico  $\mu^f$ . La densità numerica, la densità di energia e la pressione corrispondente a ciascun sapore sono riportate di seguito:

$$\rho^f = (\mu^f)^3 / \pi^2 , \quad (1.1)$$

$$\epsilon^f = 3(\mu^f)^4 / 4\pi^2 , \quad (1.2)$$

$$P^f = 3(\mu^f)^4 / 4\pi^2 = \epsilon^f / 3 . \quad (1.3)$$

Per un gas di  $u$  e  $d$  quark, la condizione di carica elettrica neutra è

$$2\rho^u - \rho^d = 0 . \quad (1.4)$$

Perciò, il potenziale chimico della materia non strana è dato da

$$\mu_2 \equiv \mu^u = \mu^d / 2^{1/3} . \quad (1.5)$$

Le espressioni per la densità di energia totale, densità di barioni e pressione diventano

$$\rho^2 = (\rho^u + \rho^d) / 3 = \mu_2^3 / \pi^2 , \quad (1.6)$$

$$\epsilon^2 = 3P_2 + B = 4B , \quad (1.7)$$

$$P^2 = P^u + P^d = (1 + 2^{4/3})\mu_2^4 / 4\pi^2 = B , \quad (1.8)$$

e l'energia per barione della materia a due quark non strana risulta

$$\left. \frac{E}{A} \right|_2 \equiv \frac{\epsilon_2}{\rho_2} = \frac{4B}{\rho_2} = 934 MeV \cdot B_{145}^{1/4} , \quad (1.9)$$

dove  $B_{145}^{1/4} = \frac{B^{1/4}}{145} MeV$ . Valori di  $B^{1/4}$  minori di  $145 MeV$  sono esclusi altrimenti la materia non strana avrebbe un'energia per barione inferiore a quella del  $^{56}Fe$ , che quindi sarebbe una mistura di quark up e down, in contraddizione con le osservazioni.

La materia strana a tre quark è elettricamente neutra per

$$\rho^u = \rho^d = \rho^s , \quad (1.10)$$

e dovrebbe esercitare la stessa pressione del gas a quark  $u$  e  $d$  non strani per una costante di bag fissata. L'energia per barione della materia a quark strana è quindi data da

$$\left. \frac{E}{A} \right|_3 \equiv \frac{\epsilon_3}{\rho_3} = \frac{4B}{1.127\rho_2} = 829 MeV \cdot B_{145}^{1/4} . \quad (1.11)$$

L'energia per barione di un gas a tre quark è di un ordine  $100 \text{ MeV}$  inferiore a quella della materia non strana. La differenza emerge dal fatto che i barioni possono essere impacchettati in maniera molto più densa a causa della buca di Fermi extra accessibile ai quark  $s$ . Siccome l'energia per barione  $E/A$  più bassa nei nuclei è quella del ferro, ovvero  $930 \text{ MeV}$ , è possibile che la materia strana abbia un'energia per barione inferiore a quella del  $^{56}\text{Fe}$  per  $B^{1/4} < 162.8 \text{ MeV}$ . Inoltre, la presenza di quark strange massivi, così come l'assunzione di una costante di accoppiamento delle interazioni forti non nulla dovuta allo scambio di un gluone tra i quark, farebbe decrescere il limite imposto a  $B^{1/4}$  per far sì che la materia strana formi a tutti gli effetti lo stato fondamentale della materia. La presenza di nuclei ordinari in natura non è assolutamente in contrasto con questa ipotesi; la conversione di nuclei atomici con  $A$  numero barionico in una mistura di materia strana richiederebbe la trasformazione simultanea di  $A$  quark  $u$  e  $d$  in  $s$ . La probabilità che questo avvenga coinvolge l'interazione debole, e comporta che nuclei con  $A > 6$  rimangano stabili per più di  $10^{60}$  anni.

Le considerazioni precedenti costituiscono l'ipotesi di Witten, e in linea di principio asseriscono che un nucleo ordinario potrebbe ridurre la propria energia convertendo parte dei quark in quark  $s$ . Ciò richiederebbe un'interazione debole di ordine molto elevato e il tempo di decadimento per tale processo risulterebbe addirittura maggiore rispetto all'età dell'Universo. A causa di queste tempistiche, i nuclei potrebbero essere stati considerati erroneamente lo stato fondamentale della materia adronica.

## 1.2 Sulle Strange Stars

Se l'ipotesi della materia strana come stato fondamentale delle interazioni forti è vera, potrebbe esistere una nuova classe di stelle chiamate strange stars ( $SSs$ ). Queste stelle formerebbero un ramo distinto e disconnesso di stelle compatte non facenti parte di un continuo di configurazioni di equilibrio che includono nane bianche e stelle di neutroni.

In teoria, strange stars e stelle di neutroni dovrebbero coesistere, ma se la materia strana è il vero stato fondamentale, è probabile che le stelle di neutroni osservate possano essere contaminate da agglomerati di materia strana che, a seconda della loro velocità, potrebbero portare alla conversione della stella di neutroni in  $SSs$ . Una conseguenza dell'ipotesi potrebbe essere l'esistenza di una nuova classe di nane bianche, dette strange dwarfs ( $SDs$ ), più un gruppo di stelle di materia strana con svariate caratteristiche planetarie, e ci si riferisce ad esse come strange MACHOS. Questi oggetti possiederebbero croste nucleari con spessore dalle centinaia alle migliaia di chilometri, e la loro esistenza avrebbe importanti implicazioni nello studio della materia oscura. Infatti, a causa delle loro dimensioni ridotte, costituirebbero oggetti di studio perfetti in eventi di microlensing gravitazionale, quindi permetterebbero la connessione tra materia a quark strani e

materia oscura.

Se si prendono in esame stelle in  $\beta$ -equilibrio, allora queste sono composte da una mistura di quark up, down e strange con un leggero deficit degli ultimi. Ciò comporta una carica netta positiva dei quark, ma siccome le stelle nel loro stato di minima energia sono elettricamente neutre, la carica positiva deve essere bilanciata da elettroni che possono estendersi centinaia di fermi sopra la superficie della SSs. Questa configurazione comporta la formazione di uno strato di dipolo sulla superficie della materia strana, il che consente alle stelle con materia a quark di supportare croste nucleari [3] [4]. Le espressioni analitiche per la densità elettronica e per il campo elettrico sulla superficie della materia a quark derivano dai modelli di Thomas-Fermi [5] e hanno la forma

$$n_e \sim \frac{9.5 \cdot 10^{35}}{(1.2z_{11} + 4)^3} cm^{-3}, \quad (1.12)$$

$$E \sim \frac{7.2 \cdot 10^{18}}{(1.2z_{11} + 4)^2} cm^{-1}, \quad (1.13)$$

dove  $z$  è l'altezza sopra la superficie dei quark, con  $z_{11} = z/(10^{-11} cm)$ . Un campo elettrico dell'ordine di  $\sim 10^{17} V/m$  può essere atteso nei pressi della superficie, e ciò permetterebbe di supportare una crosta nucleare di massa fino a  $\sim 10^5 M_\odot$ . La crosta sarebbe gravitazionalmente legata, mentre l'elevata intensità del campo elettrico consentirebbe di supportare proprio la crosta senza un reale contatto con la superficie del core strano. Inoltre, i neutroni dissolverebbero in materia a quark se gravitassero dalla crosta nucleare fino al core. Di conseguenza, la massima densità interna alla crosta è limitata a  $\epsilon_{drip} = 4 \cdot 10^{11} g/cm^3$ , ovvero la densità di neutron drip.

### 1.3 Sulle Strange Dwarfs

Le strange dwarfs (*SDs*) costituiscono la controparte strana delle nane bianche ordinarie. Sono formate da un core di materia strana a quark avvolta da un envelope di materia nucleare ordinaria. La crosta è sospesa senza alcun contatto con il core come conseguenza del dipolo elettrico sulla superficie a quark. Cioè, la sospensione isola la crosta dalla conversione dei nuclei in materia a quark. Nonostante ciò, la massima densità della crosta è limitata a quella di neutron drip, alla quale i neutroni uscirebbero dai nuclei della materia della crosta e graviterebbero fino al core dissolvendosi in materia a quark.

In base al valore della massa della crosta, le loro proprietà possono differire considerevolmente dalle nane bianche ordinarie. Ad esempio, la massima densità delle nane bianche è  $\epsilon_{wd} = 10^9 \text{ g/cm}^3$ , e a densità maggiori la pressione di degenerazione degli elettroni è insufficiente per supportare la stella, se non sopra a densità  $\epsilon \geq 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Sopra queste densità si raggiungono configurazioni stabili corrispondenti a stelle di neutroni o SSs.

In linea di principio, le SDs sarebbero indistinguibili dalle nane bianche ordinarie, ma è interessante la possibile esistenza di questa classe di nane bianche che sarebbero instabili senza l'influenza stabilizzante del core a quark. La densità alla base della crosta ordinaria sarebbe quindi compresa nel range  $\epsilon_{wd} < \epsilon_{crust} < \epsilon_{drip}$ .



## Capitolo 2

### Equazioni di stato

L'equazione di stato delle stelle con un core di materia strana a quark è costruita in modo tale da avere una discontinuità ed essere costituita da due parti distinte. La discontinuità viene collocata nella regione tra la materia a quark strani e la crosta di materia nucleare lungo il dipolo elettrico, e dove la pressione alla base della crosta eguaglia la pressione sulla superficie del core. La pressione in una stella è continua e decresce in maniera monotona come funzione della coordinata radiale della metrica di Schwarzschild. A pressioni maggiori rispetto a quelle della crosta interna, l'EoS è descritta dal modello a bag dell'MIT, mentre lungo la crosta nucleare, e quindi a pressioni minori, l'equazione di stato diventa quella di Baym, Pethick e Sutherland [6].

Tra le possibili densità interne della crosta  $\epsilon_{crust}$ , le scelte ricadono su densità minori rispetto a quella della neutron drip  $\epsilon_{crust}$ . Perciò, essendo la pressione alla base della crosta limitata dalla neutron drip, ogni valore  $P \leq P_{drip}$  è possibile. La scelta di tale densità entro i limiti consentiti influenzerà l'andamento della sequenza di stelle a due parametri, i quali sono la densità al centro della stella  $\epsilon_c$  e quella interna alla crosta nucleare.

Generalmente, la materia nelle stelle di neutroni è nel suo stato fondamentale. La sua energia termica è notevolmente minore rispetto alla scala delle energie di eccitazione, quindi può essere assunta come in equilibrio nucleare, ovvero l'energia non può essere diminuita trasformando i costituenti della materia attraverso interazioni elettromagnetiche, forti o deboli.

La forma della materia nel suo stato fondamentale cambia considerevolmente all'aumentare della densità. A densità molto basse la materia nello stato fondamentale è costituita da nuclei di  $^{56}Fe$  disposti in un reticolo Coulombiano in modo tale da minimizzare l'interazione. All'aumentare della densità, il momento di Fermi o potenziale chimico degli elettroni  $\mu_e$  cresce. Per densità maggiori di  $\sim 10^4 \text{ g/cm}^3$ , gli elettroni sono liberi, e superata  $\sim 10^7 \text{ g/cm}^3$  diventano relativistici. Andando oltre, per  $\rho > 8 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3$  la materia va nel suo stato fondamentale con la diminuzione di energia tramite cattura elettronica da parte dei nuclei di  $^{56}Fe$  ed emissione di neutrini. La materia diventa sempre più ricca di neutroni fino a quando non si arriva alla neutron drip per densità pari a

$\epsilon_{drip}$ . I nuclei sono ormai talmente ricchi di neutroni che cominciano a popolarsi stati neutronici continui, e fino a  $\rho \sim 4 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  la materia è caratterizzata da nuclei in un reticolo penetrato da gas di neutroni ed elettroni liberi. Infine, a densità superiori la materia è una mistura uniforme di neutroni, protoni ed elettroni. In queste condizioni estreme varie particelle come muoni e iperoni  $\Sigma$  e  $\Lambda$  potrebbero comparire. In particolare, le densità raggiunte sono dell'ordine di  $\sim 0.24 \text{ fm}^{-3}$ , ovvero densità a cui i nuclei iniziano a toccarsi tra loro. Perciò, a condizioni più estreme i quark potrebbero passare da confinati a deconfinati in un continuo di stati liberi fuori gli adroni. Infatti, il principio di esclusione di Pauli proibisce ai fermioni di occupare lo stesso stato quantico ed incrementare la densità richiederebbe l'occupazione da parte dei quark up e down di livelli energetici maggiori e liberi. In queste condizioni si apre la finestra di conversione di parte dei quark disponibili in quark  $s$ . Nonostante la massa a riposo del quark strano sia pari  $\sim 100 \text{ MeV}$  (un centinaio di volte maggiore rispetto a quella dei quark  $u$  e  $d$ ), sarebbe possibile l'apertura di un nuovo set di livelli energetici tale da rendere la materia a quark strani più stabile rispetto a quella non strana, come spiegato dalle ipotesi di Witten.

## 2.1 Materia in fase adronica

Per determinare l'equazione di stato della materia in fase adronica, consideriamo la materia come composta da nuclei con numero di massa  $A$ , carica  $Z$  e sia  $n_N$  il numero di nuclei per unità di volume. L'energia totale del sistema per unità di volume prima che vengano raggiunte le condizioni della neutron drip si scrive come

$$E_{tot}(A, Z, n_N) = n_N(W_N + W_L) + E_e(n_e) , \quad (2.1)$$

dove  $W_N(A, Z)$  è l'energia totale di un nucleo isolato, masse a riposo dei nucleoni incluse, ma non quelle degli elettroni; invece,  $E_e(n_e)$  è la densità di energia totale elettronica, dove

$$n_e = Zn_N \quad (2.2)$$

è la densità di elettroni media. Il termine  $W_L$  è l'energia del reticolo per nucleo, e per una densità di nuclei fissata con carica  $Z$ , l'energia del reticolo è minimizzata per un reticolo cubico a corpo centrato, ed è data da

$$W_L = -1.819620 Z^2 e^2 / a , \quad (2.3)$$

dove la costante del reticolo  $a$  è legata a  $n_N$  tramite

$$n_N a^3 = 2 . \quad (2.4)$$

Superate densità pari a  $10^4 \text{ g/cm}^3$  gli elettroni possono essere considerati liberi, e in tal caso

$$\begin{aligned} E_e &= \int_0^{k_e} \frac{k^2 dk}{\pi^2} c(\hbar^2 k^2 + m_e^2 c^2)^{1/2} \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \{ (2l^2 + 1)t(t^2 + 1)^{1/2} - \ln[t + (t^2 + 1)^{1/2}] \} , \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove  $k_e$  è il numero d'onda di Fermi dell'elettrone, mentre

$$t = \frac{\hbar k_e}{m_e c} . \quad (2.6)$$

Per elettroni completamente relativistici vale  $t \gg 1$ , ed inoltre

$$E_e = \frac{3}{4} n_e m_e c^2 t . \quad (2.7)$$

Il valori di  $A$  e  $Z$  che determinano l'equilibrio sono quelli che minimizzano l'energia totale  $E_{tot}$  ad una fissata densità barionica  $n_b$ . Le densità di nuclei ed elettroni in termini di  $n_b$  sono

$$n_N = \frac{n_b}{A} , \quad n_e = \frac{n_b Z}{A} . \quad (2.8)$$

E' possibile eseguire la minimizzazione usando tabelle di masse nucleari per trovare i nuclei  $A$ ,  $Z$  che individuano un'energia totale minima per una fissata densità barionica. Ad esempio, Baym, Pethick e Sutherland hanno usato le energie nucleari prese dalla tabella di massa di Myers e Swiatecki. Questi valori dell'energia di legame per nucleone assumono la forma

$$W_N = m_n c^2 (A - Z) + m_p c^2 Z - bA . \quad (2.9)$$

Le energie usate per il calcolo hanno la massa a riposo degli elettroni sottratta, ma non l'energia di legame di questi all'atomo. La giustificazione di questa mossa parte dalla seguente considerazione: una prima approssimazione vede la densità di elettroni nel reticolo come una distribuzione uniforme, quindi l'energia di interazione della nube elettronica viene inclusa nell'energia del reticolo  $W_L$ . Tuttavia, per via degli effetti di schermatura che vengono prodotti dalla nube, ci sono delle deviazioni dell'uniformità della distribuzione, e questo implica un'energia per nucleo pari a

$$W_{schermo} = -0.2535 Z^{1/3} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{\mu_e}{m_e c^2} , \quad (2.10)$$

dove

$$\mu_e = \frac{\partial E_e}{\partial n_e} \quad (2.11)$$

è l'energia di Fermi con inclusa la massa dell'elettrone. Quindi, l'energia degli elettroni di un atomo isolato, escludendo la massa a riposo, è data dall'approssimazione di Thomas-Fermi come

$$W_{atom} = -0.766 \frac{Z^{7/3} m_e e^4}{\hbar^2} , \quad (2.12)$$

la cui dimensione è comparabile a  $W_{schermo}$ . Perciò, non sottraendo il contributo elettronico alle energie di legame si commette un errore dello stesso ordine di

grandezza e di segno opposto all'escluso contributo di  $W_{schermo}$  in  $E_{tot}$ . Di conseguenza, il contributo di questi termini all'equazione di stato è trascurabile.

La pressione  $P$  in una stella cresce continuamente con profondità crescente. Questo implica che la transizione tra le varie specie nucleari debba essere accompagnata da brusche discontinuità nella densità. La discontinuità può essere stimata tenendo conto che prima delle condizioni di neutron drip, la pressione è principalmente dovuta all'energia cinetica degli elettroni. Quindi, il numero di elettroni per unità di volume si mantiene costante attraverso le diverse transizioni nucleari, mentre la densità barionica è data da  $\frac{n_e A}{Z}$ , in modo tale che lungo una transizione dal nucleo  $(A, Z)$  a  $(A', Z')$  la densità barionica vari di

$$n'_b - n_b \approx n_e \left( \frac{A'}{Z'} - \frac{A}{Z} \right) . \quad (2.13)$$

Segue che la variazione percentuale della densità di massa  $\rho = E_{tot}/c^2$  è data approssimativamente da

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx \frac{\Delta n_b}{n_b} \approx \frac{Z/A}{Z'/A'} - 1 . \quad (2.14)$$

Ad esempio, nella transizione da  $^{56}Fe$  a  $^{62}Ni$  la densità cresce del 2.9 %. Il metodo che permette di determinare la pressione alla quale la transizione avviene è la costruzione delle aree uguali di Maxwell. Si tratta la pressione come variabile indipendente e, fissata  $P$ , si minimizza il potenziale chimico barionico

$$\mu = \frac{E_{tot} + P}{n_b} . \quad (2.15)$$

La pressione è data da

$$P = n_b^2 \left. \frac{\partial(E_{tot}/n_b)}{\partial n_b} \right|_{Z,A} . \quad (2.16)$$

Sfruttando le equazioni 2.1 e 2.8, l'espressione precedente diventa

$$P = P_e + \frac{1}{3} W_L n_N . \quad (2.17)$$

Il primo termine è la pressione degli elettroni pari a

$$P_e = n_e \frac{\partial E_e}{\partial n_e} - E_e , \quad (2.18)$$

mentre il secondo termine è la pressione negativa del reticolo coulombiano. Si può allora scrivere

$$\mu = \frac{W_N + \frac{4}{3} W_L + Z \mu_e}{A} . \quad (2.19)$$

La minimizzazione del potenziale può essere condotta fissando  $P$ ,  $A$  e  $Z$ , e successivamente si risolve la 2.17 per una densità elettronica  $n_e$ , con  $n_N = n_e/Z$ .

Dato  $n_e$ ,  $\mu$  è calcolato dall'equazione usando i valori tabulati di  $W_N(A, Z)$ . Il metodo è utile per studiare la transizione tra nuclidi e  $\mu$  è continuo lungo le transizioni.

Il fatto che  $A$  e  $Z$  minimizzino

$$\frac{E_{tot}}{n_b} = \frac{W_N + W_L}{A} + \frac{E_e(n_b Z/A)}{n_b} \quad (2.20)$$

ad una fissata  $n_b$ , implica che per  $\Delta A \ll A$  e  $\Delta Z \ll Z$ ,

$$\Delta \left( \frac{W_N + W_L}{A} \right) + \left( \frac{\Delta Z}{A} - \frac{Z}{A^2} \Delta A \right) \mu_e \geq 0. \quad (2.21)$$

Per una densità barionica  $n_b$  fissata, l'energia del reticolo  $W_L$  scala come  $Z^2/A^{1/3}$  in questo modo

$$\Delta W_L = W_L \left( \frac{2\Delta Z}{Z} - \frac{\Delta A}{3A} \right). \quad (2.22)$$

Sostituendo 2.22 e 2.1 in 2.21, si trova

$$\Delta W_N \geq \mu \Delta A - \left( \mu_e + \frac{2W_L}{Z} \right) \Delta Z. \quad (2.23)$$

Considerando preliminarmente  $\Delta Z = 0$ , quindi una variazione nel numero di neutroni dei nuclei, la 2.23 diventa

$$\Delta_A W_N \geq \mu \Delta A. \quad (2.24)$$

Ciò implica che il potenziale chimico  $\mu$  è sempre minore o uguale all'energia per neutrone richiesta per aggiungere uno o più neutroni ai nuclei. Se  $A$  viene trattata come una variabile continua, 2.24 implica che  $\mu = \mu_n$ , dove  $\mu_n = \frac{\partial W_N}{\partial A}$  è il potenziale chimico del neutrone (inclusa la massa a riposo). Tenendo  $A$  fissato e variando  $Z$  di passi pari a  $\Delta Z$ , la 2.23 assume la forma

$$\Delta_Z W_N \geq -(\mu_e + 2W_L/Z) \Delta Z. \quad (2.25)$$

Quest'ultima è l'equazione per la stabilità beta dei nuclei, analoga in forma alla condizione per la beta stabilità dei nuclei isolati.

La neutron drip inizia quando il potenziale chimico  $\mu - m_n c^2$  raggiunge  $\epsilon_{n,0}$ , ovvero l'energia dello stato più basso del neutrone nel reticolo. Prima di iniziare il popolamento di neutroni liberi, il costo energetico che comporta l'incremento del numero barionico del sistema di  $A$  è pari a

$$\left( \frac{\partial E_{tot}}{\partial n_N} \right)_{n_e = Z n_N} = \mu A \quad (2.26)$$

se si aggiunge il nucleo  $(A, Z)$  più  $Z$  elettroni al sistema. Invece, l'incremento energetico è

$$(m_n c^2 + \epsilon_{n,0}) A \quad (2.27)$$

se si aggiungono  $A$  neutroni negli stati continui. Poiché prima della neutron drip si ha che  $\mu < m_n c^2 + \epsilon_{n,0}$ , quando le due energie sopra citate si equivalgono, gli stati di neutroni liberi iniziano a popolarsi. Ma alla neutron drip i nuclei occupano  $10^{-3}$  del volume disponibile, si trova quindi che  $\epsilon_{n,0} \approx -10^{-2} \text{ MeV}$ . Infine, trascurando  $\epsilon_{n,0}$ , la condizione di neutron drip diventa  $\mu - m_n c^2 = 0$ , ovvero inizia a densità  $\rho \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ .

## 2.2 Strange matter

La teoria dei campi di quark e gluoni, la Cromodinamica Quantistica, è una teoria di Gauge non Abelliana con  $SU(3)_c$  come gruppo di gauge. La Lagrangiana in questa teoria assume la forma

$$L = \overline{\psi}_f^a (i\gamma_\mu D_{ab}^\mu - m_f) \psi_f^b - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} , \quad (2.28)$$

dove  $\psi_f^a$  sono i campi dei quark per ogni sapore  $f$  e  $m_f$  sono le masse dei quark. Nello spazio dei colori, i campi  $\psi_f^a$  sono colonne di tre componenti con  $a=1,2,3$ . La derivata di colore di gauge covariante  $D^\mu$  è data da

$$D_{ab}^\mu = \delta_{ab} \partial^\mu - i \frac{g_s}{2} [\lambda_i]_{ab} G_i^\mu , \quad (2.29)$$

dove  $g_s$  è la costante di accoppiamento dell'interazione forte. Le quantità  $G_i^\mu$  sono i campi gluonici con indici di colore  $i = 1, \dots, 8$ , e  $\lambda_i$  le matrici Gell-Mann  $SU(3)_c$ . La quantità  $F_{\mu\nu}^i$  è il tensore di campo gluonico definito come

$$F_i^{\mu\nu} = \partial_\nu G_\mu^i - \partial_\mu G_\nu^i + g_s f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k , \quad (2.30)$$

dove  $f_{ijk}$  sono le costanti di struttura  $SU(3)_c$ . Le equazioni del moto dei campi gluonici e mesonici accoppiati derivanti dalla Lagrangiana in 2.28 sono scritti come segue,

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f) \psi_f^a = -g_s \gamma_\mu \left( \frac{\lambda_i}{2} \right)_{ab} \psi_f^b G_i^\mu , \quad (2.31)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^i + g_s f_{ijk} G^{j\mu} F_{\mu\nu}^k = -g_s \overline{\psi}_f^a \gamma_\nu \left( \frac{\lambda_i}{2} \right)_{ab} \psi_f^b . \quad (2.32)$$

Diversi modelli sono emersi per risolvere le equazioni QCD del moto del reticolo, ed è necessario appoggiarsi a modelli QCD non perturbativi per materia a quark che incorporano le proprietà base della Cromodinamica Quantistica. Il modello più ampiamente utilizzato è il modello a bag del MIT [7] [8] [9], nel quale la massa dei quark è fissata e il confinamento è descritto nei termini di una costante di bag.

In particolare, la pressione  $P^i$  dei singoli quark e leptoni contenuti nella bag è controbilanciata dalla pressione esterna totale  $P + B$  in accordo con

$$P + B = \sum_f P^f, \quad (2.33)$$

dove la densità di energia totale dei sapori di quark confinati nella bag è data da

$$\epsilon = \sum_f \epsilon^f + B. \quad (2.34)$$

La quantità  $B$  indica la costante di bag, e  $\epsilon^f$  sono i contributi dei singoli quark alla densità di energia totale. Infatti, il modello dell'MIT schematizza un adrone come un sacco che racchiude dei quark (tre, nel caso protoni e neutroni), con carica di colore nulla. La condizione di neutralità di carica elettrica tra i vari quark si traduce in

$$3 \sum_f q_f^{el} k_{F_f}^3 - \sum_L k_{F_L}^3 = 0, \quad (2.35)$$

dove  $q_f^{el}$  indica la carica elettrica del quark di sapore  $f$ . I contributi di ogni sapore dei quark alla pressione, densità di energia, densità barionica sono determinati dai potenziali termodinamici  $d\Omega^f = -S^f dT - P^f dV - A^f d\mu^f$ , dai quali si ricavano

$$P^f = \frac{\nu_i}{6\pi^2} \int_0^{k_{F_f}} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_f^2}}, \quad (2.36)$$

$$\epsilon^f = \frac{\nu_f}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_f}} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_f^2}, \quad (2.37)$$

$$\rho^f = \frac{\nu_f}{6\pi^2} k_{F_f}^3. \quad (2.38)$$

La quantità  $\mu^f$  denota il potenziale chimico del quark di sapore  $f$ , e  $m_f$  la massa corrispondente. Il fattore dello spazio delle fasi  $\nu_f$  equivale a  $2(\text{spin}) \times 3(\text{colore}) = 6$ . L'equilibrio chimico del fluido dei diversi sapori dei quark e dei leptoni è mantenuto dalle seguenti reazioni:

$$d \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}^e \quad (2.39)$$

$$s \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}^e \quad (2.40)$$

$$d \leftrightarrow c + e^- + \bar{\nu}^e \quad (2.41)$$

$$s + u \leftrightarrow d + u \quad (2.42)$$

$$c + d \leftrightarrow u + d. \quad (2.43)$$

Siccome la stella di neutroni perde i neutrini entro i primi secondi di vita dopo la nascita, i potenziali chimici dei neutrini ed anti-neutrini obbediscono a  $\mu^\nu = \mu^{\bar{\nu}} = 0$  e dall'interazione debole si ricavano le seguenti reazioni:

$$\mu^d = \mu^u + \mu^e \quad (2.44)$$

$$\mu^c = \mu^u \quad (2.45)$$

$$\mu \equiv \mu^d = \mu^s . \quad (2.46)$$

L'equazione di stato della materia a quark relativistica a temperatura zero fatta di particelle a massa nulla e non interagenti è calcolabile dalle 2.38. Si ottiene che

$$P^f = \frac{\nu_f}{24\pi^2} (\mu^f)^4 = \frac{1}{3} \epsilon^f , \quad (2.47)$$

$$\rho^f = \frac{\nu_f}{6\pi^2} (\mu^f)^3 , \quad (2.48)$$

con  $\nu_f = 6$ . L'equazione di stato è quindi ottenibile attraverso le equazioni 2.33 e 2.34 come

$$P = (\epsilon - 4B)/3 . \quad (2.49)$$

Da 2.49 si evince che la pressione esterna agente su una bag riempita di quark svanisce per  $\epsilon = 4B$ . La massa contenuta all'interno della bag è calcolabile come  $M = \int_0^R \epsilon dV = (4\pi/3)\epsilon R^3$ , che è la generica relazione tra massa e raggio di materia auto-gravitante. Ciò significa che per masse minori di  $10^9 \text{ GeV}$  gli elettroni sono all'esterno della bag a quark e il sistema core-elettrone ha una dimensione di  $\sim 10^5 \text{ fm}$ . Per masse comprese tra  $10^9$  e  $10^{15} \text{ GeV}$  gli elettroni sono parzialmente dentro il core. Per masse maggiori di  $10^{15} \text{ GeV}$  tutti gli elettroni sono all'interno del core.

La condizione di neutralità della carica elettrica della materia stellare a quark espressa da 2.35, porta a

$$2\rho^u - \rho^d - \rho^s = 0 . \quad (2.50)$$

Siccome vale  $\mu^u = \mu^d = \mu^s$  per quark senza massa, si trova da 2.33 che per pressione esterna  $P$  pari a zero, la costante di bag è legata al potenziale chimico del quark come  $B = 3\mu^4/4\pi^2$ . L'espressione dell'energia per barione di materia a quark si traduce in

$$\frac{E}{A} \equiv \frac{\epsilon}{\rho} = 4 \frac{B}{\rho^u + \rho^d + \rho^s} / 3 = 4 \frac{B}{\rho^u} = 4\pi^2 \frac{B}{\mu^3} , \quad (2.51)$$

con  $\rho$  densità barionica totale definita come

$$\rho = \sum_f \rho^f / 3 . \quad (2.52)$$



Assunti i quark strani e charm con i loro valori finiti di massa, le espressioni per pressione, densità di energia e densità barionica diventano

$$P^f = \frac{\nu_f (\mu^f)^4}{24\pi^2} \left( \sqrt{1 - z_f^2} \left( 1 - \frac{5}{2} z_f^2 \right) + \frac{3}{2} z_f^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z_f^2}}{z_f} \right), \quad (2.53)$$

$$\rho^f = \frac{\nu_f (\mu^f)^3}{6\pi^2} (1 - z_f^2)^{3/2}, \quad (2.54)$$

$$\epsilon^f = \frac{\nu_f (\mu^f)^4}{8\pi^2} \left( \sqrt{1 - z_f^2} \left( 1 - \frac{1}{2} z_f^2 \right) + \frac{z_f^4}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z_f^2}}{z_f} \right), \quad (2.55)$$

con  $z_i$  definito come  $z_f = m_f/\mu^f$ . Trascurando i quark di sapore  $t$  e  $b$ , perché troppo massivi per arrivare a popolare stelle compatte, la condizione di neutralità della carica elettrica è pari a

$$2(\rho^u + \rho^c) - (\rho^d + \rho^s) - 3(\rho^e + \rho^u) = 0. \quad (2.56)$$

Sostituendo 2.54 in 2.56, la relazione può assumere la seguente forma

$$2(1 - (\mu^e/\mu)^3) (1 + (1 - z_c^2)^{3/2}) - (1 + (1 - z_s^2)^{3/2}) - (\mu^e/\mu)^3 (1 + (1 - z_\mu^2)^{3/2}) = 0. \quad (2.57)$$

Un'espressione per la pressione del sistema è ottenuta sostituendo 2.53 in 2.28, e questo porta a

$$P + B = \frac{\mu^4}{4\pi^2} ((1 - (\mu^e/\mu)^3) \Phi(z_c) + \Phi(z_s)), \quad (2.58)$$

con  $\Phi$  definito come

$$\Phi(z_f) = 1 + \sqrt{1 - z_f^2} \left( 1 - \frac{5}{2} z_f^2 \right) + \frac{3}{2} z_f^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z_f^2}}{z_f} \quad (2.59)$$

Perciò, la densità di energia totale diventa

$$\epsilon = (3P + 4B) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{f=s,c} \nu_f (\mu^f)^4 z_f^{-2} \left( \sqrt{1 - z_f^2} - z_f^2 \ln \frac{\sqrt{1 + z_f^2}}{z_f} \right). \quad (2.60)$$

Il primo termine del secondo membro di 2.60 rappresenta l'equazione di stato di un gas relativistico di quark a massa nulla, mentre il secondo termine tiene conto della massa finita dei quark strange e charm. Infine, la densità barionica della materia a quark è data da

$$\rho = \frac{\mu^3}{3\pi^2} ((1 - (\mu^3/\mu)^3) (1 + (1 - z_c^2)^{3/2}) + (1 + (1 - z_s^2)^{3/2})). \quad (2.61)$$

Poiché l'interazione Coulombiana diventa molto più intensa della gravità nelle stelle compatte a densità elevate, la materia a quark della stella nel livello di energia più basso deve essere bilanciato da un numero sufficientemente grande di quark e leptoni carichi negativamente. Dallo studio dell'equazione di stato, la presenza di quark charm richiede densità maggiori di  $10^{17} \text{ g/cm}^3$  affinché questi possano essere presenti. Tuttavia, uno studio delle sequenze stellari con quark charm mostra che queste non possono esistere in quanto instabili.

Il valore per la costante a bag di  $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$  determina un'energia per barione della materia a quark strani non interagenti a  $E/A = 829 \text{ MeV}$ , corrispondente quindi a materia strana fortemente legata rispetto al  $^{56}\text{Fe}$ , la cui energia per barione è pari a  $M(^{56}\text{Fe})c^2/56 = 930.4 \text{ MeV}$ , con  $M(^{56}\text{Fe})$  massa dell'atomo di ferro. In generale, assumendo la massa del quark strano pari a  $m_s = 100 \text{ MeV}$ , si trova che la materia strana è assolutamente stabile, cioè ha un'energia per barione inferiore a quella del ferro, per  $B^{1/4}$  inferiore a  $158 \text{ MeV}$ .

Infine, considerando l'effetto prodotto dallo scambio di un gluone, si trova che al crescere di  $g_s$  diminuisce il valore massimo di  $B^{1/4}$  per cui la materia strana è assolutamente stabile, con  $g_s$  costante di accoppiamento dell'interazione forte. Infatti, gli effetti di scambio di un gluone dentro un adrone sono repulsivi se i quark sono privi di massa e relativistici, attrattivi se sono massivi e non relativistici.

# Capitolo 3

## Struttura stellare

Il profilo di densità di stelle la cui temperatura è piccola se comparata con l'energia di Fermi dei loro fermioni costituenti può essere rappresentata in termini di un'equazione di stato  $\epsilon(P)$  a temperatura zero e che esprime la densità di energia in funzione della pressione. Configurazioni a simmetria sferica possono essere calcolate dalla risoluzione delle equazioni Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), ma questo procedimento comprende soluzioni sia stabili che instabili. Ci sono due modi principali per determinare la stabilità delle soluzioni: uno è il calcolo dei modi normali di oscillazione dalla risoluzione di un'equazione di Sturm-Liouville, l'altro si basa sul conteggio dei punti estremali della relazione massa-raggio  $M(R)$ .

### 3.1 La metrica di Schwarzschild

Il campo gravitazionale all'esterno di una stella sferica deve essere descritto da una metrica sfericamente simmetrica. La metrica può dipendere dalle coordinate angolari nella combinazione:

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 . \quad (3.1)$$

La più generale metrica a simmetria sferica può essere scritta come

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + 2C(t, r)dtdr + D(t, r)d\Omega^2 , \quad (3.2)$$

dove  $t$  e  $r$  sono la variabile temporale e quella radiale. Scegliendo una nuova coordinata radiale  $r' = D^{1/2}(t, r)$  ed una nuova coordinata temporale

$$dt' = H(t, r')[E(t, r')dt - G(t, r')dr'] , \quad (3.3)$$

con  $H(t, r')$  tale che il secondo membro di 3.3 è un differenziale esatto, la metrica si può riscrivere come:

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt'^2 + e^{2\lambda}dr'^2 + r'^2d\Omega^2 , \quad (3.4)$$

dove  $r'$  e  $t'$  sono variabili mute, mentre  $\Phi$  e  $\lambda$  sono funzioni di  $r$  e  $t$ .

Il teorema di Gauss enuncia che in un qualsiasi punto al di fuori della distribuzione sferica di massa, il campo gravitazionale dipende solo dalla massa contenuta all'interno della superficie sferica passante per il punto. Se il moto dell'oggetto è a simmetria sferica, allora il campo esterno è costante nel tempo ed è descritto dalla metrica di Schwarzschild [10]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.5)$$

dove le formule sono da intendersi in unità gravitazionali, perciò  $G = c = 1$ . Se  $M$  è la massa dell'oggetto che genera il campo, nel limite  $r \gg M$ , quindi nel limite newtoniano, il campo è approssimabile come:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.6)$$

Infine, poiché nel limite di campo debole la componente temporale del tensore metrico vale  $g_{00} \simeq -(1+2\Phi)$ , dove  $\Phi$  è il potenziale newtoniano, si ottiene proprio che  $\Phi = -M/r$ , e di conseguenza  $M$  va identificata come la massa gravitazionale.

## 3.2 TOV

La metrica 3.4 permette di descrivere il campo gravitazionale all'interno di una stella sferica. Se questa si trova in condizioni di equilibrio idrostatico,  $\Phi$  e  $\lambda$  sono indipendenti da  $t$ . Sia  $m(r)$  una funzione metrica tale per cui

$$e^{2\lambda} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.7)$$

e siano date le equazioni di Einstein del campo gravitazionale

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi k T^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

dove  $R^{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci,  $g^{\mu\nu}$  il tensore metrico,  $R$  la curvatura scalare,  $k$  costante gravitazionale e  $T^{\mu\nu}$  il tensore energia-impulso nel sistema di riposo della materia.

Le equazioni di Einstein e la metrica 3.4 permettono di ricavare le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [11] [12]:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon, \quad (3.9)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\epsilon m}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi p r^3}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.10)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{p}{r} \left(1 + \frac{p}{\epsilon}\right)^{-1}, \quad (3.11)$$

dove  $p = p(r)$  e  $\epsilon = \epsilon(r)$  sono il profilo di pressione e densità di energia della stella,  $m$  la massa racchiusa entro un raggio  $r$ . Si noti che la massa totale della stella è data dall'espressione:

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon dr \quad (3.12)$$

che comprende tutti i contributi alla massa, compresa l'energia potenziale gravitazionale. L'elemento di volume proprio non è  $4\pi r^2 dr$ , ma

$$dV = (g_{rr})^{1/2} 4\pi r^2 dr = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} 4\pi r^2 dr. \quad (3.13)$$

Le equazioni 3.9, 3.10 e 3.11 sono utili per fare calcoli numerici su un modello stellare relativistico. Dato che per una certa equazione di stato c'è un'unica relazione fra massa e densità centrale  $\epsilon_c = \epsilon(0)$ , preso un valore di  $\epsilon_c$  dall'EoS della materia stellare, si ottiene la pressione centrale  $p_c$ . Si ha inoltre la condizione al contorno  $m(0) = 0$ . Usando i valori di pressione e massa centrale come condizioni al contorno, si integrano le equazioni 3.9 e 3.10 da  $r = 0$  a  $r = R$ . Il valore  $R$  per cui  $p = 0$  è il raggio della stella (una pressione nulla o negativa non può supportare ulteriore materia sovrastante in opposizione all'attrazione gravitazionale), e  $M = m(R)$  è la massa gravitazionale della stella. Inoltre per la funzione metrica  $\Phi$  vale la seguente condizione al contorno:

$$\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R}\right), \quad (3.14)$$

in questa maniera la metrica sulla superficie della stella si raccorda in maniera continua e regolare con la metrica di Schwarzschild.

Perciò, per ogni possibile equazione di stato, c'è un'unica sequenza di stelle parametrizzata dalla densità centrale, o equivalentemente, dalla pressione centrale. Un buon modo di rappresentare tali sequenze è nel piano  $M(R)$  in cui si riporta la massa in funzione del raggio delle stelle appartenenti alla sequenza. Il risultato è una curva i cui punti rappresentano configurazioni stellari stazionarie, ma non tutte sono stabili rispetto ad oscillazioni radiali.

Il significato delle TOV può essere compreso se riscriviamo le equazioni 3.9 e 3.10 nella seguente maniera:

$$dm = 4\pi r^2 \epsilon dr, \quad (3.15)$$

$$4\pi r^2 dp = -\frac{mdm}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\epsilon}\right) \left(1 + \frac{4\pi p r^3}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (3.16)$$

Considerato all'interno della stella un guscio di materia di raggio  $r$  e spessore  $dr$ , l'equazione 3.15 dà la massa di questo guscio. La pressione della materia all'esterno del guscio è  $p(r)$ , mentre  $p(r) + dp(r)$  all'interno. Il primo membro dell'equazione 3.16 è la forza netta che agisce verso l'esterno della superficie del guscio dovuta alla differenza di pressione  $dp(r)$ , mentre il primo fattore del secondo membro è la forza gravitazionale che la massa all'interno del guscio esercita su di esso (gli altri fattori sono correzioni dovute alla relatività generale). In definitiva, le TOV esprimono l'equilibrio per ogni  $r$  fra due forze, la pressione rivolta verso l'esterno e supportata dalla materia sovrastante, e l'attrazione gravitazionale esercitata dalla massa che si trova internamente rispetto a  $r$ . Sono quindi le equazioni che rappresentano l'equilibrio idrostatico della stella in relatività generale.

### 3.3 Stabilità delle configurazioni stazionarie

Bardeen, Thorne e Meltzer [13] danno una formulazione semplice del criterio di stabilità delle configurazioni stellari stazionarie riferendosi al grafico raggio *vs* massa delle sequenza stellari:

1. ad ogni estremo dove la curva  $m(r)$  ruota in senso anti-orario con pressione centrale crescente, un modo stabile diventa instabile;
2. ad ogni estremo dove la curva  $m(r)$  ruota in senso orario con pressione centrale crescente, un modo instabile diventa stabile.

Il criterio di stabilità BTM è conveniente, ma il criterio fondamentale per lo studio della stabilità è basato sul calcolo dello spettro delle oscillazioni radiali della stella. Le oscillazioni radiali sono descritte [14] dalla perturbazione dipendente dal tempo

$$\delta r_n(r, t) = \frac{e^{\nu(r)}}{r^2} u_n(r) e^{i\omega_n t}, \quad (3.17)$$

dove  $n$  è un indice per lo spettro dei modi normali e  $u_n(r)$  è una soluzione con autovalore  $\omega_n^2$  al problema agli autovalori di Sturm-Liouville.

L'equazione di Sturm-Liouville ha una forma del tipo:

$$\frac{d}{dr} \left( \Pi(r) \frac{du_n}{dr} \right) + (Q(r) + \omega_n^2 W(r)) u_n(r) = 0, \quad (3.18)$$

dove

$$\begin{aligned} \Pi(r) &= \frac{e^{\lambda(r)+3\nu(r)}}{r^2} \Gamma(r) P(r), \\ Q(r) &= -4 \frac{e^{\lambda(r)+3\nu(r)}}{r^3} \frac{dP}{dr} - 8\pi \frac{e^{3\lambda(r)+3\nu(r)}}{r^2} P(r) (\epsilon(r) + P(r)) + \frac{e^{\lambda(r)+3\nu(r)}}{r^2 (\epsilon(r) + P(r))} \left( \frac{dP}{dr} \right)^2, \\ W(r) &= \frac{e^{3\lambda(r)+\nu(r)}}{r^2} (\epsilon(r) + P(r)), \\ \Gamma(r) &= \frac{\epsilon(r) + P(r)}{P(r)} \frac{dP}{d\epsilon}. \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno del problema agli autovalori sono:

$$u_n \propto r^3 \text{ in } r = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{du_n}{dr} = 0 \text{ in } r = R \quad (3.20)$$

dove  $R$  è la superficie della stella.

Le soluzioni al problema agli autovalori di Sturm-Liouville sono un set discreto di autofunzioni  $u_n(r)$  con autovalori  $w_n^2$  che sono il quadrato delle frequenze dei modi di oscillazione. Gli autovalori, che sono reali, formano una sequenza infinita limitata inferiormente  $w_0^2 < w_1^2 < w_2^2 < \dots$ . Per il modo  $n$ -esimo, se  $w_n^2 > 0$ , la frequenza è reale e il modo è stabile ed oscillante. Tuttavia, se  $w_n^2 < 0$  allora la frequenza è immaginaria e il modo è instabile e crescente o decrescente esponenzialmente. Per determinare la stabilità globale della stella, è sufficiente guardare all'autovalore fondamentale  $w_0^2$ . Se  $w_0^2 > 0$ , allora tutti  $w_n^2 > 0$  e la stella è stabile. Se  $w_0^2 < 0$ , allora c'è almeno un modo stabile e la stella è globalmente instabile.

### 3.4 Calcolo del numero barionico

Il teorema [15] può essere applicato ad una stella per trovarne il numero barionico  $A$  e la sua energia di legame per barione  $E/A$ .

Indicata con  $j^\mu$  la corrente di conservazione del numero barionico, il suo legame con la densità barionica  $\rho$  in un sistema di riferimento inerziale centrato in un elemento di fluido infinitesimo della stella è dato dalla relazione

$$j^\mu(r) = u^\mu \rho(r) = e^{-\nu(r)} \rho(r) \delta_0^\mu, \quad (3.21)$$

dove  $u^\mu$  è la quadri-velocità del fluido. Poiché l'elemento invariante di volume è  $\sqrt{-g} d^4x$ , per la metrica di Schwarzschild abbiamo:

$$\sqrt{-g} = e^{\nu(r)+\lambda(r)} r^2 \sin\theta. \quad (3.22)$$

E' quindi possibile ottenere il numero barionico totale della stella come

$$A = 4\pi \int_0^R e^{\lambda(r)} r^2 \rho(r) dr = 4\pi \int_0^R \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1/2} r^2 \rho(r) dr . \quad (3.23)$$

A partire dall'equazione di stato si può quindi integrare l'ultima equazione insieme alle equazioni di Oppenheimer-Volkoff calcolando numericamente la massa barionica della stella.



## Capitolo 4

# Studio di stelle con core a quark strani

In questa sezione verranno trattate sequenze stellari a due parametri, ovvero: la densità interna alla crosta di materia adronica e, per un valore fissato di questa, la densità centrale del core di materia a quark. I due parametri consentono di creare sequenze di stelle a materia strana che sono considerevolmente più complesse di quelle consistenti di nane bianche a densità sub-nucleari e stelle di neutroni a densità super-nucleari.

L'equazione di stato usata a basse pressioni è l'equazione BPS per materia degenera, mentre a pressioni maggiori di quella critica  $P_{crit}$  associata ad una densità  $\epsilon_{crust} \lesssim \epsilon_{drip}$ , dove  $\epsilon_{drip} = 4 \cdot 10^{11} \text{ gcm}^{-3}$ , l'equazione diventa il modello a bag del MIT per poter riflettere il comportamento della materia a quark strani. In particolare, il valore scelto per la costante a bag è  $B = 145 \text{ MeV}$ .

Uno sguardo iniziale ai risultati viene mostrato nella figura 4.1 dove vengono riportate le relazioni  $M = M(R)$  sia per nane bianche e stelle di neutroni ordinarie che per una sequenza di stelle a materia strana. Lungo entrambe le sequenze la densità centrale decresce in maniera monotona ed è massima verso le configurazioni compatte.

### 4.1 Integrazione con Runge-Kutta

Per poter riprodurre le curve  $M(R)$  associate alle diverse EoS, le equazioni TOV sono state integrate numericamente per una fissata equazione di stato. La costante di integrazione  $P_C$ , pressione centrale della stella, specifica completamente la soluzione. L'integrazione numerica è stata realizzata grazie ad un algoritmo di Runge-Kutta a 4 punti, in cui lo step radiale  $\Delta r$  è stato preso come una frazione fissata  $\delta$  di una scala massa-pressione media

$$\Delta r = \delta \left( \frac{1}{m} \frac{dm}{dr} - \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

Il vantaggio di questa imposizione su  $\Delta r$  è che lo step è piccolo sia quando  $m$  (per  $r \ll R$ ) o  $P$  ( $r < R$ ) cambiano rapidamente; inoltre, non è necessario stimare il raggio a priori, come se stessimo usando uno step fissato. Il valore di  $\delta = 0.23$  è ottimale dal punto di vista del tempo di calcolo che accuratezza. Un incremento nel numero di step di integrazione con  $\delta = 0.115$  produce una variazione del  $10^{-5}$  % nei raggi e masse calcolati. Invece, un  $\delta = 0.46$  produce variazioni minori del  $10^{-2}$  %. Utilizzando proprio  $\delta = 0.23$ , si ottengono  $\sim 250 - 300$  step di integrazione per configurazione.

## 4.2 Sequenze strane e questione sulla stabilità

La sequenza di stelle associata all'EoS con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$  è stata riportata individualmente nel diagramma massa-raggio di figura 4.2 per evidenziare alcuni punti estremali specifici. L'estremo indicato con  $b$  viene raggiunto quando la pressione centrale della stella raggiunge la pressione critica  $P_{crit}$  relativa alla densità  $\epsilon_{drip}$ . Questo significa che tutte le stelle con pressione centrale inferiore a  $P_{crit}$ , perciò quelle sulla curva che va da  $b$  ad  $a$  e lungo il ramo delle nane bianche, sono formate da materia convenzionale di elettroni degeneri: il centro della stella non è abbastanza denso da poter contenere materia in fasi a densità più elevata come la materia strana. Per pressioni centrali maggiori di quella in  $b$ , la stella acquisisce un core a quark strani, e lungo la curva da  $b$  a  $d$ , passando per  $c$ , questo core è piccolo rispetto allo spessore della crosta di materia nucleare. Quest'ultimo ramo della curva è identificato come quello delle strange dwarfs (SDs). A pressioni maggiori, lungo la curva da  $d$  a  $e$ , il core si allarga e il suo potenziale gravitazionale restringe la crosta adronica ad uno strato sottile: queste configurazioni sono le strange stars (SSs).

Una delle differenze più evidenti confrontando con le sequenze di nane bianche e stelle di neutroni è la cuspide in  $b$  di 4.2 come conseguenza della discontinuità dell'equazione di stato. Si potrebbe pensare di usare il criterio di stabilità BTM lungo tutta la sequenza per mettere in evidenza i rami stabili ed instabili, e trattare la cuspide come un punto di minimo comporterebbe il passaggio del secondo modo di oscillazione minimo da stabile ad instabile all'aumentare della densità centrale. La conseguenza di questa trattazione sarebbe l'inesistenza del ramo stabile delle SDs da  $c$  a  $d$ . La situazione è però più complessa del previsto, infatti  $M(R)$  sviluppa una struttura molto complicata in  $b$  dove quindi potrebbero esserci molteplici estremi: la curva infatti ha un andamento spiraleggiante e si contorce su se stessa. Tale comportamento si manifesta solo in un range di masse e raggi limitato vicino a  $b$ , ed è invisibile alle scale ordinarie. Da questo punto in poi della trattazione assumeremo il tratto da  $b$  a  $c$  come instabile per consentire l'esistenza alle strange dwarfs e verrà giustificata questa imposizione verso la fine della sezione.

In 4.4 sono riportate le relazioni massa-raggio per varie equazioni di stato con discontinuità della stessa natura di quella usata in precedenza. Indichiamo allora con *EoS1* l'equazione di stato con densità interna della crosta pari ad  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ , mentre alle altre ci riferiremo con *EoS2*, *EoS3*, *EoS4*; le rispettive densità interne sono prese come  $4 \cdot 10^{10}$ ,  $4 \cdot 10^9$ ,  $4 \cdot 10^8 \text{ gcm}^{-3}$ . Si osserva che l'andamento delle curve associate a *EoS2*, *EoS3* è della stessa natura delle sequenza calcolata con *EoS1*, mentre la relazione  $M(R)$  ricavata tramite *EoS4* è differente, e in figura 4.3 è stata riportata singolarmente nel diagramma. A prescindere dall'effettiva natura delle configurazioni stellari, il comportamento delle diverse famiglie di stelle nella regione della cuspid è molto simile e caratterizzato da una serie di andamenti oscillanti. D'altronde, così come per la prima sequenza, pure per le altre tre la cuspid è proprio la regione in cui avviene la discontinuità dell'equazione di stato.

Lo studio della stabilità delle configurazioni stellari a materia strana è stato effettuato da Glendenning, Kettner e Weber [16]. Le equazioni da risolvere per calcolare le auto frequenze e auto funzioni dei modi di oscillazione radiali e normali della stella sono, con qualche leggera modifica, quelle caratteristiche fornite dal metodo di Bardeen, Thorne e Meltzer. L'analisi è stata effettuata per soluzioni delle TOV soggette a piccole perturbazioni lagrangiane radiali. In base al calcolo delle quattro auto frequenze fondamentali, è evidente che il ramo della curva in 4.2 che va da *e* fino a *c* è stabile, ossia  $\omega_0$  è positivo (di conseguenza lo saranno tutti i modi di ordine superiore). Al contrario, le configurazioni da *c* a *b* sono instabili. Tuttavia, questa descrizione è valida in relazione a quelle EoS che mantengono  $10^9 < \epsilon_{crust}(\text{g/cm}^3) < \epsilon_{drip}$ , come *EoS1*, *EoS2*, *EoS3*. La questione è leggermente differente se  $\epsilon_{crust} < 10^9 \text{ g/cm}^3$ , come nel caso di *EoS4*. Infatti, il ramo delle nane bianche non raggiunge la configurazione stabile con massa massima, perciò l'intera sequenza di stelle dalla cuspid fino alle stelle più compatte permane stabile. Come anticipato, lo studio della stabilità assume ancora una connotazione controversa, e inerente a ciò lo studio di Alford [17] ha condotto alla totale instabilità delle strange dwarfs risolvendo le stesse equazioni di Sturm-Liouville citate precedentemente. Noi assumeremo le strange dwarfs come esistenti, fornendo un metodo per dare consistenza all'affermazione.

### 4.3 Il ramo delle strange dwarfs

Osservando il diagramma in figura 4.1, si osserva che le stelle con densità centrali minori di quella che si trova nel punto  $d$  possiedono masse e raggi simili a quelli delle ordinarie nane bianche. La direzione in cui la densità decresce è quella che va da  $d$  a  $b$ , e in tale zona il suo valore varia di meno del 2%: questo è il ramo delle strange dwarfs.

In figura 4.8 vengono mostrati gli andamenti della massa totale  $M_{tot}$  e della massa del core strano  $M_{core}$  in funzione della densità centrale delle stelle appartenenti alla sequenza denominata *EoS1*. Nel grafico, i punti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  corrispondono esattamente agli stessi che sono indicati in 4.2. Inoltre, in figura 4.9 è riportato un ingrandimento della zona che va da  $b$  a  $d$ , ovvero la regione che passa dalla cuspidale al raccordo tra SDs e SSs. La densità in quella zona è pressoché costante e varia di una percentuale minima rispetto al valore iniziale. Il punto che in 4.2 è stato denominato con la lettera  $b$ , nel grafico 4.8 non appare tanto come un punto, quanto come un tratto orizzontale in cui la massa delle configurazioni rimane costante. Al contrario, la densità centrale aumenta di ben tre ordini di grandezza: la variazione della densità centrale rispecchia la discontinuità presente nell'equazione di stato. Infatti, come è evidenziato dalla retta, la discontinuità inizia proprio quando viene raggiunta la densità interna alla crosta di materia nucleare  $\epsilon_{crust}$ .

Il grafico permette di osservare che la nana bianca di massa massima viene raggiunta alla densità di  $\sim 10^9 \text{ g/cm}^3$ , oltre che a mostrare che il core di materia strana non si è ancora formato prima della discontinuità. Ciò indica che le stelle fino a  $b$  sono completamente composte da materia ordinaria, ovvero sono nane bianche stabili fino ad  $a$ , e instabili da  $a$  a  $b$ . Dall'ingrandimento in 4.9, è evidente che il core strano inizia a formarsi dopo la transizione dell'equazione di stato a densità centrali pari a  $\sim \epsilon_{sat}$ , densità di saturazione della materia nucleare. All'aumentare della densità, aumenta pure la massa del core, ma solo in  $c$  le configurazioni stellari diventano stabili e quindi nascono possedendo già un core di materia strana ben formato e di dimensioni finite.

Un comportamento simile si può notare costruendo le sequenze con le equazioni di stato *EoS2* ed *EoS3* (vedere figure 4.10 e 4.11). Il discorso è invece leggermente diverso per la sequenza creata con *EoS4*. Quest'ultima non possiede la nana bianca di massa massima: la densità  $\epsilon_{crust}$  è infatti minore di  $10^9 \text{ g/cm}^3$ . Nelle figure sono riportate le lettere  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  che denotano i punti critici, quindi le stesse che si possono trovare in 4.3. Dato che le nane bianche formano un continuo di configurazioni stabili fino alle SSs, e poiché in questa sequenza viene completamente a mancare una regione di instabilità, all'aumentare della densità si formano immediatamente SDs con un core che è inizialmente a massa e dimensioni nulle dopo il raggiungimento di  $\epsilon_{sat}$  a causa discontinuità nell'equazione di stato. Quindi, le stelle che vanno da  $\alpha$  a  $\beta$  in 4.3 sono sempre strange dwarfs ma con evidenti differenze rispetto alle sequenze ricavate a partire dalle altre equazioni di stato.

Sul piano riguardante le dimensioni del core strano, in figura 4.12 viene mostrato l'andamento del raggio del core  $R_{core}$  delle stelle a materia strana per le diverse EoS, con le frecce che indicano il verso in cui aumenta la densità e le lettere i punti critici delle sequenze analizzate in precedenza. Per *EoS1*, l'interno delle strange dwarfs che vanno da  $b$  a  $d$  consiste di core strani molto piccoli rispetto al raggio equatoriale, quindi l'envelope nucleare che avvolge il core è spesso fino a qualche migliaio di chilometri. Effettivamente, spostandoci verso  $b$ , ovvero la regione in cui si forma il core per densità centrale decrescente, il raggio del core precipita a zero per lasciare spazio alla sequenza di nane bianche.

Il paragone di profili di densità tra nane bianche e strange dwarfs viene mostrato nelle figure 4.6 e 4.7. Nel primo grafico è riportato il profilo delle SDs a fissata equazione di stato (*EoS1*) e massa variabile, ovvero  $M = 0.3, 0.8, 0.9 M_{\odot}$ . Invece, nel secondo è stata fissata la massa a  $0.6 M_{\odot}$ , ed è stato comparato il profilo di una nana bianca e di due strange dwarfs, una relativa a *EoS1*, l'altra a *EoS2*.

Siccome per quanto detto la densità centrale delle SDs stabili praticamente non cambia al variare della massa, anche il raggio del core a materia strana  $R_{core}$  rimane indipendente dalla massa della stella. Il diagramma in 4.12 mostra perfettamente come  $R_{core}$  sia indipendente da  $M$  nel ramo delle strange dwarfs, e le lettere nei grafici si riferiscono ancora una volta ai punti nodali dei profili  $M(R)$  presentati nelle figure 4.2 e 4.3. Il grafico riporta pure i profili  $M(R_{core})$  associati alle equazioni di stato *EoS2* ed *EoS3* che rimangono della stessa natura del profilo relativo a *EoS1*. I core di questa specie, nonostante la loro elevata densità, esercitano un'influenza trascurabile all'equilibrio idrostatico delle stelle, come segue dai profili mostrati in 4.6. Il profilo delle strange dwarfs ricorda quello di nane bianche ordinarie a causa del leggero impatto gravitazionale che il core ha sulla struttura stellare. Infatti, il raggio dei core a materia strana in questi modelli può passare da  $3 \text{ km}$  per *EoS1* a  $\sim 10^{-1} \text{ km}$  fino ad annullarsi per *EoS4*.

A questo punto della trattazione è finalmente possibile distinguere due classi differenti di strange dwarfs. Se la densità della crosta nucleare è  $\epsilon_{crust} \lesssim 10^9 \text{ g/cm}^3$ , la configurazione in cui il core si annulla (punto  $\alpha$  della 4.3) diventa ad una nana bianca ordinaria e stabile. Ma la densità di  $\sim 10^9 \text{ g/cm}^3$  è la densità centrale corrispondente alla nana bianca a massa massima, come è stato possibile constatare dai grafici presentati. Se la densità interna diventa minore di  $\sim 10^9 \text{ g/cm}^3$  come nel caso di *EoS4* il ramo delle nane bianche non possiede più una configurazione di massa massima, ma si interrompe in corrispondenza della cuspid. E' immediato notare il risultato a partire dai grafici mostrati nelle figure 4.10 e 4.12: ne consegue che la sequenza che va dalle nane bianche alle strange stars è stabile, e il ramo di 4.3 che va dalla cuspid in  $\alpha$  fino alla strange star di massa minima in  $\beta$  è formato da strange dwarfs "triviali". Questa categoria di SDs è caratterizzata essenzialmente da nane bianche leggermente perturbate dal core di materia a quark strani. Il core è decisamente di dimensioni ridotte rispetto a quello delle SDs definite dalle altre equazioni di stato, come mostrato

in 4.12.

A questo proposito, se  $10^9 \text{ g/cm}^3, \epsilon_{crust} < \epsilon_{drip}$  il ramo delle SDs è popolato da oggetti diversi da quelli "triviali": tali stelle devono la loro stabilità proprio alla presenza del core strano. Infatti nane bianche stabili con densità centrali  $\epsilon_{cen} \geq 10^9 \text{ g/cm}^3$  non possono esistere, ed è proprio il core a quark strani a "donare" stabilità ad una struttura di crosta adronica dello stesso genere di quella delle nane bianche ma con un valore di  $\epsilon_{crust}$  proibito per le stesse. La loro densità può addirittura diventare  $10^2 - 10^4$  volte maggiore di quella delle ordinarie nane bianche.

In definitiva, il ramo delle strange dwarfs calcolato a partire dall'equazione di stato *EoS4* è formato da SDs triviali, mentre definiamo ordinare quelle corrispondenti a *EoS1*, *EoS2* ed *EoS3*.

## 4.4 Massa barionica del core e stabilità

L'importanza del calcolo del numero barionico del core  $A_{core}$  può essere cruciale nello studio della stabilità degli oggetti compatti con core a quark strani.

Il risultato del calcolo di  $A_{core}$  in funzione della massa gravitazionale delle SDs per alcune equazioni di stato è riportato in figura 4.13.. Per le SDs triviali la massa barionica può passare da zero, dove il core strano ha dimensioni e massa nulle, fino a  $\sim 10^{54}$ . D'altro canto, la sequenza delle SDs ordinarie termina nella regione delle nane bianche instabili ed il punto *c* di 4.2 è stato identificato come quello che divide il ramo instabile delle SDs da quello stabile. Come è stato visto, raggiunte densità centrali pari a quella della stella in *c*, le strange dwarfs stabili nasceranno possedendo già un core di dimensione e massa finite. L'ordine di grandezza attorno al quale si aggira  $A_{core}$  è  $\sim 10^{55}$ . In figura 4.14 vengono riportano le stesse sequenze di 4.13 aggiungendone altre relative ad EoS intermedie ed omettendo le regioni di instabilità.

Gli ordini di grandezza sono indicativi per descrivere le caratteristiche dei core. Infatti, fissandoci ad una massa barionica di  $10^{54}$ , esistono SDs stabili costruite con *EoS4*, ma non con le altre equazioni. Lo stesso discorso è analogo per altre sequenze: nella maggior parte dei casi il range di  $A_{core}$  corrispondente ad una sequenza stabile a fissata EoS non è il range di massa barionica associato alla stabilità per le altre famiglie. Questa osservazione evidenzia la forte dipendenza delle sequenze dal secondo parametro, ovvero dalla densità interna alla crosta nucleare.

Infine, è stata studiata qualche sequenza di stelle a massa barionica del core  $A_{core}$  fissata nel diagramma  $M - R$ . A differenza delle sequenze finora costruite nello stesso diagramma, la nuova famiglia di stelle è formata da configurazioni che hanno densità interna alla crosta  $\epsilon_{crust}$  e che sono derivanti da diverse EoS. Sono state quindi state costruite fissando un valore di  $A_{core}$  nel grafico di 4.16 e prendendo tutte le SDs stabili o instabili intercettate e che avranno quindi  $\epsilon_{crust}$

diverse tra loro. Una sequenza così descritta è stata riportata qualitativamente in figura 4.16, dove sarebbe stato necessario prendere una moltitudine di stelle con equazioni di stato intermedie per constatare la continuità della famiglia. Infatti, se a livello teorico avessimo preso un set di equazioni di stato  $\epsilon_{crust}$  che varia pressoché in maniera continua in un certo range si sarebbe ottenuta una sequenza continua di configurazioni la cui stabilità può essere studiata senza problemi dalle regole classiche presentate in 3.3.

Nell'esempio di 4.16 è stata fissata la massa barionica a  $A_{core} = 2.3 \cdot 10^{53}$  ed interpolando con le sequenze stabili ed instabili di 4.14 si è ottenuto un andamento simile alle famiglie di stelle riportate nel diagramma 4.4. E' stata tracciata come confronto pure la sequenza di stelle a fissata equazione di stato con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ . In particolare, la nuova famiglia di stelle con  $A_{core}$  fissato ha un andamento del raggio decrescente all'aumentare della  $\epsilon_{crust}$  delle stelle che la costituiscono. Seguendo la linea all'aumentare di  $\epsilon_{crust}$ , la massa totale gravitazionale delle configurazioni aumenta, raggiunge una massa massima e torna a decrescere. Ma sequenze così costruite consentono l'uso delle regole di selezione della stabilità stellare la cui validità sarebbe apparentemente compromessa nella regione a cuspidi delle sequenze a  $\epsilon_{crust}$  fissato. Un trattamento di questo genere andrebbe così a giustificare e validare quanto detto sulla stabilità delle strange dwarfs. Nel diagramma in 4.16, all'aumentare di  $\epsilon_{crust}$  la regione con massa crescente sarebbe composta da configurazioni stabili, quella con massa decrescente sarebbe invece di instabilità: tutto ciò è proprio in accordo con le regioni delle sequenze di 4.4 che erano state supposte e prese stabili o instabili.

## 4.5 Il ramo delle strange pulsar

In riferimento alle figure 4.2 e 4.3, la sequenza delle strange stars è quella che va rispettivamente da  $d$  a  $e$  (valido quindi per le  $EoS1$ ,  $EoS2$  e  $EoS3$ ), e da  $\beta$  a  $\gamma$  ( $EoS4$ ). Un ingrandimento di tali regioni è stato riportato per ciascuna equazione di stato in figura 4.5.

Riferendosi alla sequenza di nane bianche e stelle di neutroni basata sull'equazione di stato BTS, è possibile trovare certe similitudini, come la massa e il raggio della stella più compatta di ciascuna sequenza. Se la stella di neutroni più compatta ha  $M_{NS} \sim 2.74 M_{\odot}$  e  $R_{NS} \sim 12.9 \text{ km}$ , la corrispondente SS associata a  $EoS1$  ha  $M_{SSs} \sim 2.1 M_{\odot}$  e  $R_{SSs} \sim 11.82 \text{ km}$ . Inoltre, permane la proporzionalità  $R \propto M^{1/3}$  che regge per SSs leggere, e specialmente per EoS con  $\epsilon_{crust}$  inferiori. Queste stelle raggiungono raggi molto piccoli se comparati con quelli delle stelle di neutroni; ciò suggerisce che le SSs possano avere frequenze di rotazione  $\Omega_K$  maggiori, fissando un nuovo limite superiore alle rotazioni stabili delle stelle compatte. Classicamente, l'equilibrio tra la forza gravitazionale e centripeta agenti su una particella che ruota lungo l'equatore della stella è dato



da

$$\Omega_K = \sqrt{M/R^3} . \quad (4.2)$$

L'espressione in relatività generale è della forma [18]

$$\Omega_K = \omega + \frac{\omega'}{2\psi'} + e^{\nu-\psi} \sqrt{\frac{\nu'}{\psi'} + \left( \frac{\omega'}{2\psi'} e^{\psi-\nu} \right)^2} . \quad (4.3)$$

L'ultima quantità può essere valutata in un algoritmo per risolvere le equazioni di Einstein per una stella rotante, infatti le quantità nel secondo membro ( $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  e le loro derivate radiali identificate con l'apice e valutate all'equatore della stella) dipendono da  $\Omega_K$ . Nonostante ciò, la dipendenza qualitativa di  $\Omega_K$  da massa e raggio è data approssimativamente dall'espressione classica se comparata con le soluzioni numeriche alle equazioni di Einstein.

Come studiato da Glendenning [19], le SSs con crosta di materia nucleare ordinaria hanno frequenze rotazionali maggiori di quelle delle stelle di neutroni gravitazionalmente legate. Non solo le strange stars più compatte possono sostenere rotazioni così rapide, ma addirittura quelle con massa minima possono rivaleggiare con le stelle di neutroni più compatte. Ciò è dovuto alle loro dimensioni ridotte, e SSs senza crosta ruoterebbero addirittura più rapidamente di quelle con la crosta, venendo infatti a mancare il legame gravitazionale con essa. L'intensità di tale legame è comunque molto ridotta: come è possibile notare dai grafici in 4.8 e 4.10, nel ramo delle strange stars tutta la massa è concentrata nel core di materia a quark strani; inoltre, il raggio del core corrisponde praticamente al raggio equatoriale (come si può osservare comparando  $R$  e  $R_{core}$  nel ramo delle SSs nelle figure 4.5 e 4.12), lasciando così spazio ad uno strato sottilissimo di materia nucleare.

Il risultato dello studio è che strange stars con masse dell'ordine di  $1.45 M_\odot$  possono ruotare con periodi nel range  $0.55 \lesssim P_K / msec \lesssim 0.8$ , a differenza delle stelle di neutroni con la stessa massa, le quali possiedono un limite rotazionale di  $\sim 1 msec$ .



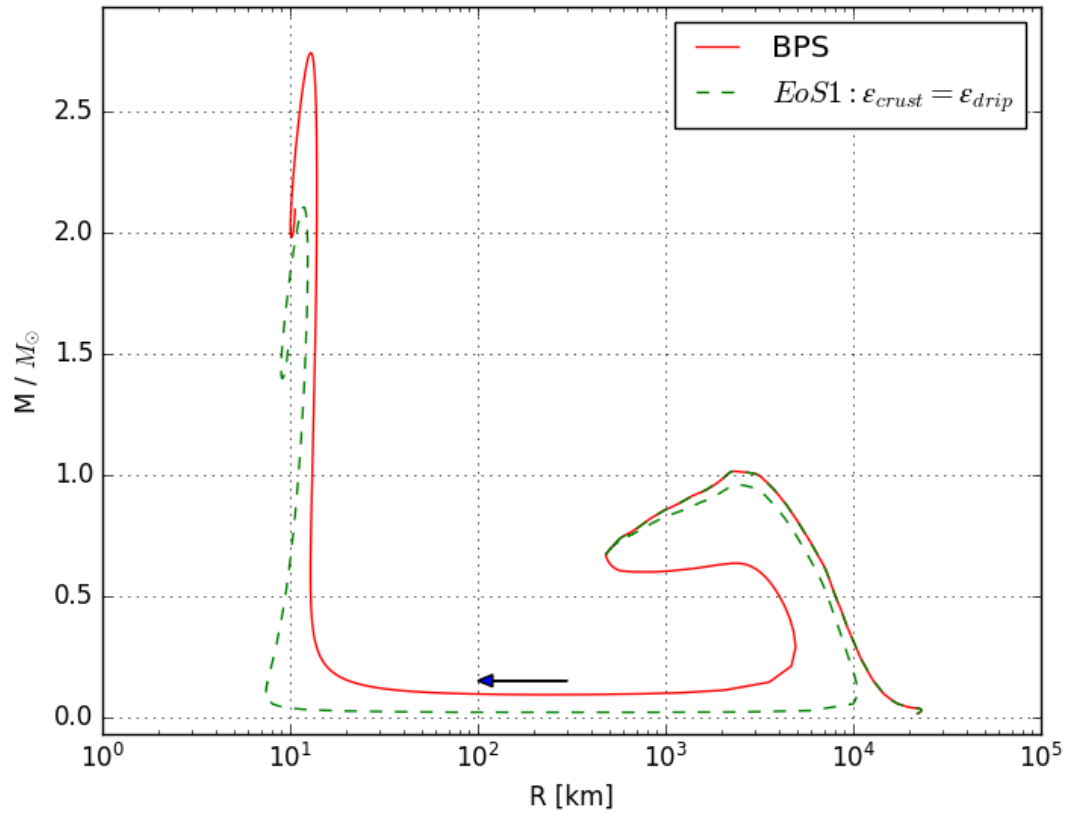


Figura 4.1: Diagramma M-R di stelle con core a quark strani e crosta nucleare ( $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ) e stelle gravitazionalmente legate, rispettivamente indicate con linea continua e tratteggiata. La freccia indica il verso in cui aumenta la densità centrale delle configurazioni stellari per ciascuna sequenza.

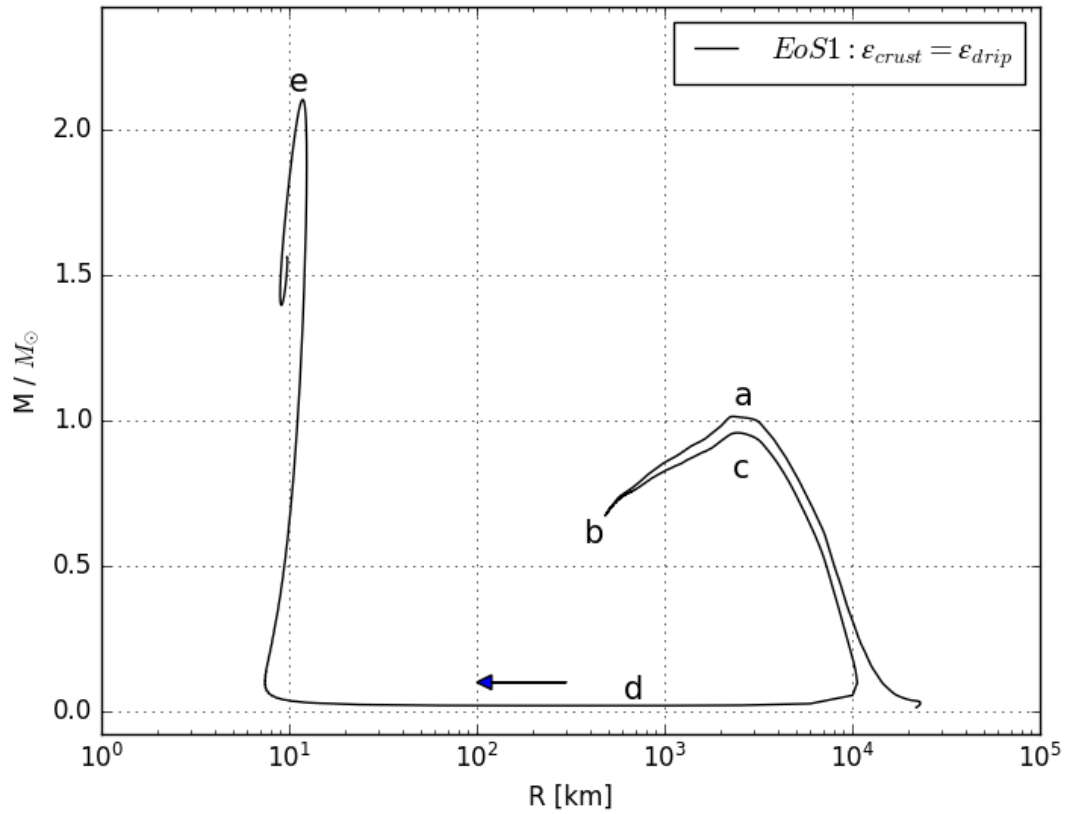


Figura 4.2: Diagramma M-R di stelle con core a quark strani e crosta nucleare ( $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ) in cui si sono indicati con  $a$  la nana bianca più massiva, con  $b$  la regione a cuspide di instabilità tra nane bianche e strange dwarfs, con  $c$  la strange dwarf più massiva, mentre con  $d$  ed  $e$  la strange star più leggera e con massa massima.

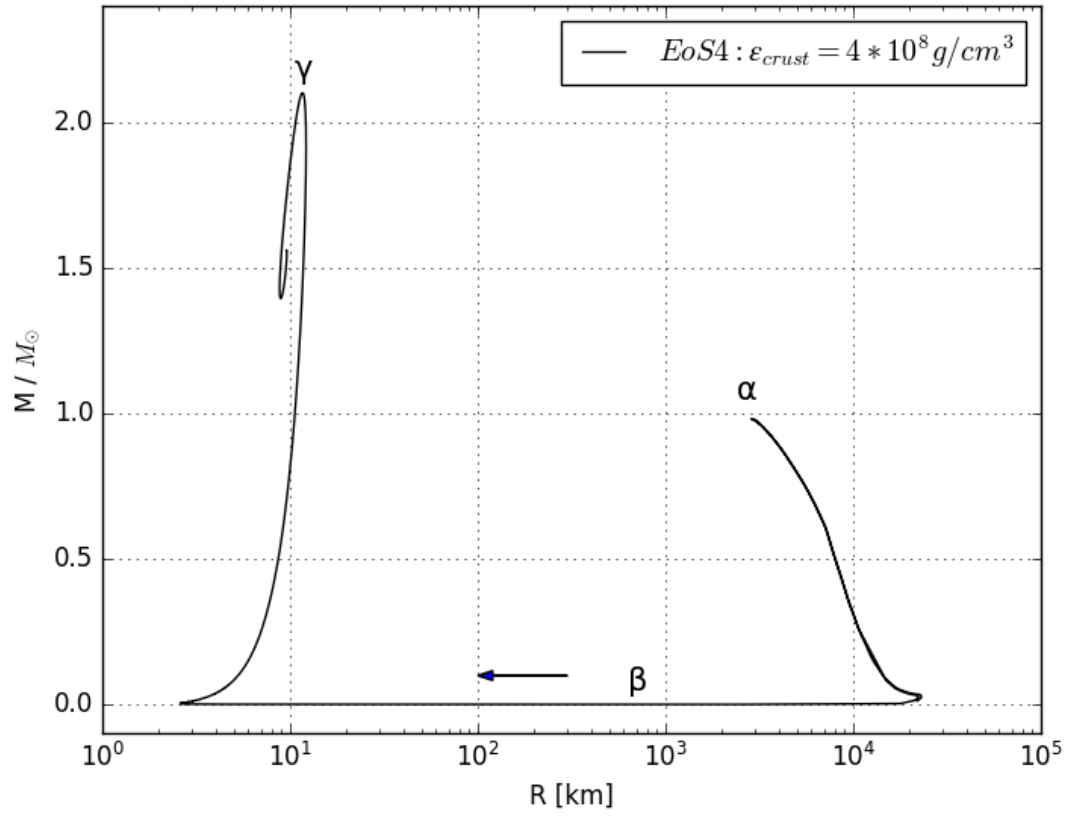


Figura 4.3: Diagramma M-R di stelle con core a quark strani e crosta nucleare ( $\epsilon_{crust} = 4 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$ ) in cui si sono indicati con  $\alpha$  la nana bianca più massiva (configurazione nella cuspide tra i tratti stabilità di nane bianche e strange dwarfs), con  $\beta$  e  $\gamma$  la strange star più leggera e con massa massima.

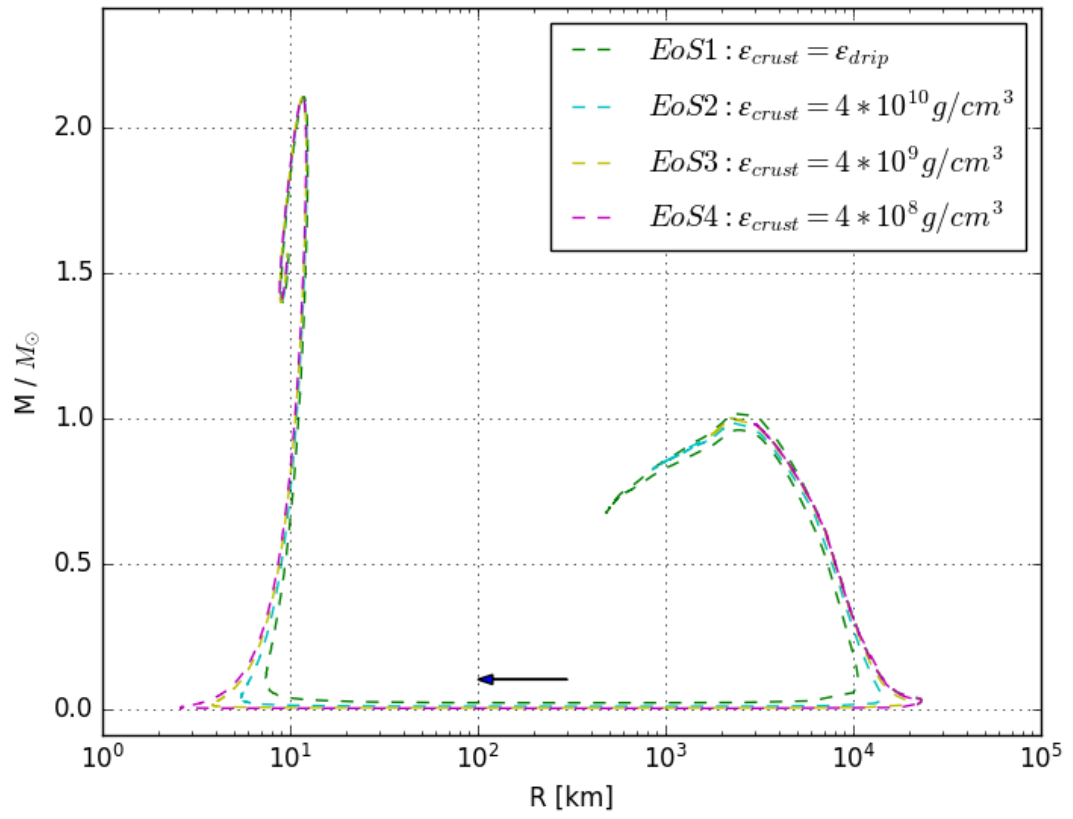


Figura 4.4: Diagramma M-R di quattro sequenze di stelle con core a quark strani e crosta nucleare per  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ,  $4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ ,  $4 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$  e  $4 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$ .

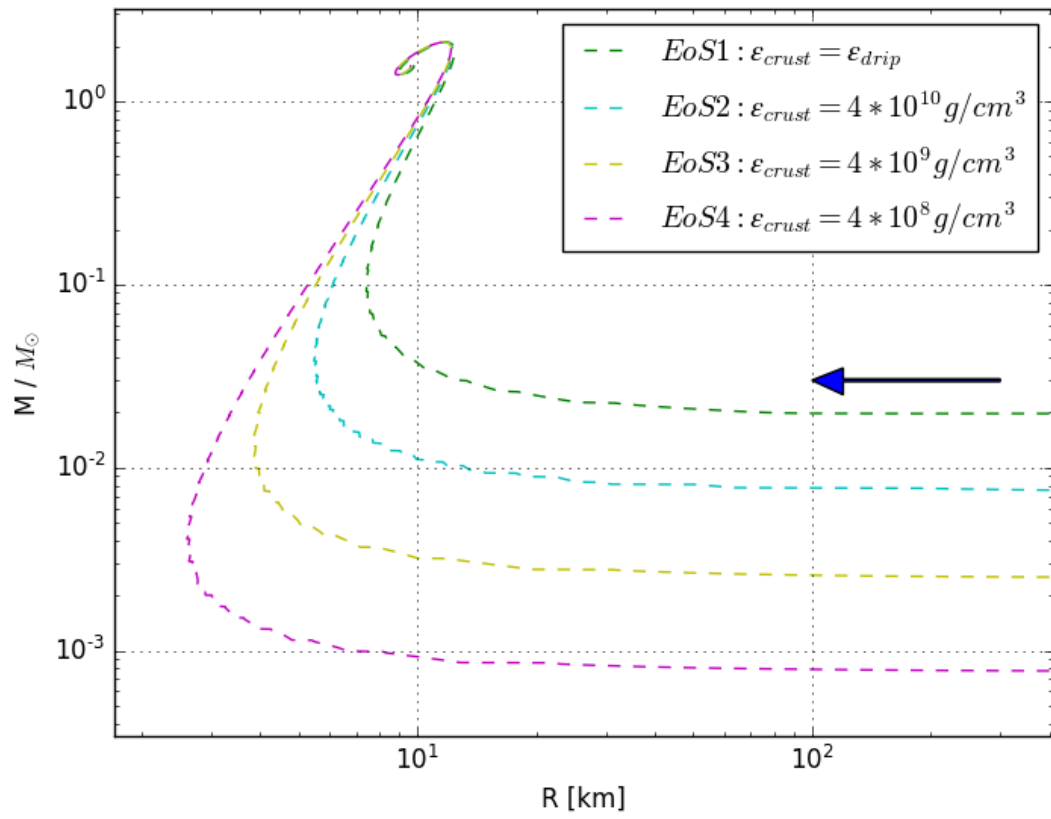


Figura 4.5: Ingrandimento di 4.4 nella regione delle strange stars.

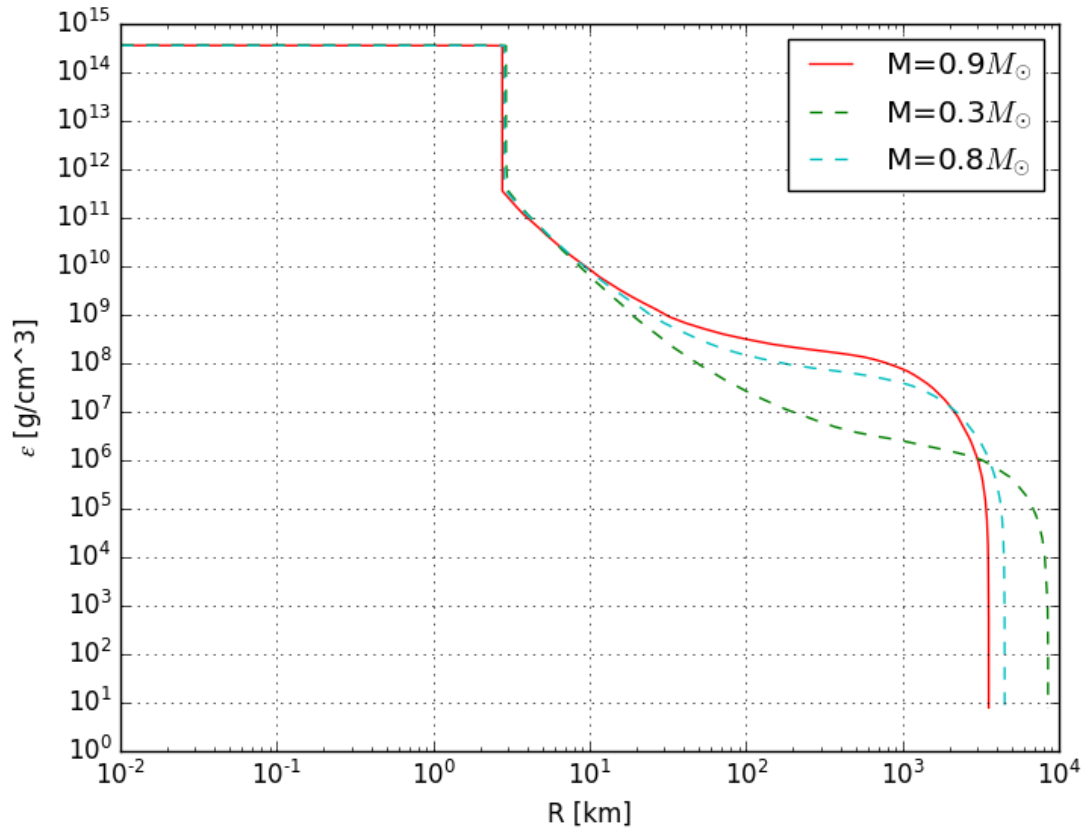


Figura 4.6: Diagramma densità-raggio di alcune strange dwarfs stabili ( $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ). Sono riportate le configurazioni con massa gravitazionale totale  $M = 0.3M_{\odot}$ ,  $0.8M_{\odot}$ ,  $0.9M_{\odot}$ .

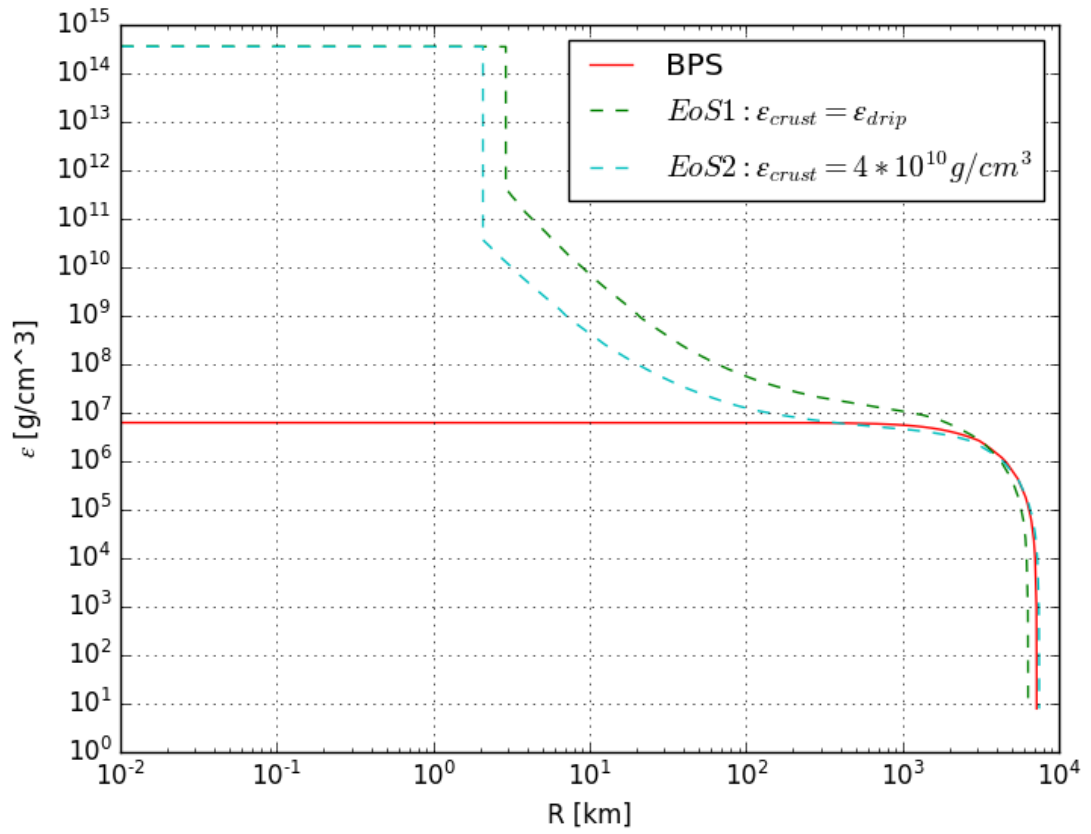


Figura 4.7: Diagramma densità-raggio di una nana bianca e varie strange dwarfs della stessa massa pari a  $M = 0.6 M_\odot$ . Le densità interne alla crosta delle ultime sono  $\epsilon_{\text{crust}} = \epsilon_{\text{drip}}, 4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$

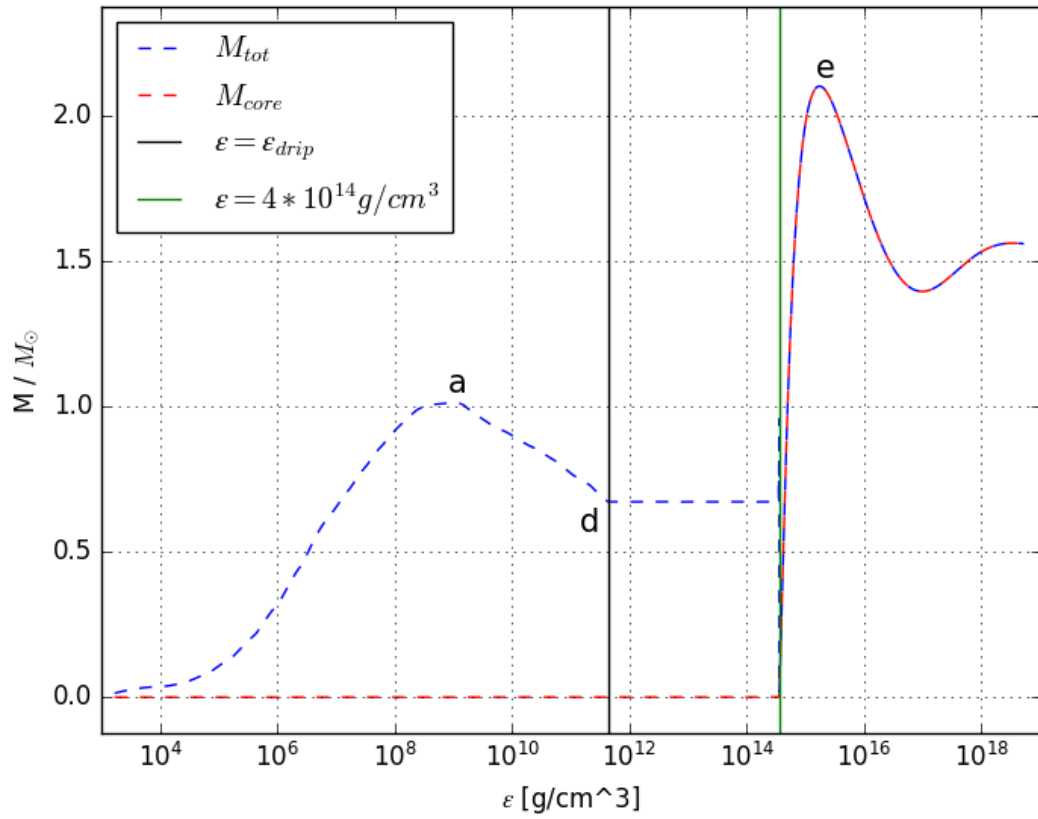


Figura 4.8: Diagramma in cui sono riportate la massa totale gravitazionale (in blu) e la massa gravitazionale del core a quark strani (in rosso) in funzione della densità centrale delle stelle appartenenti alla sequenza con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ . I punti con le lettere *a*, *b* ed *e* si riferiscono alle omonime configurazioni della sequenza in 4.2. Infine, in nero si è evidenziata la densità centrale della configurazione nella cuspide mentre in verde la densità centrale della stella in cui inizia a formarsi il core a materia strana.



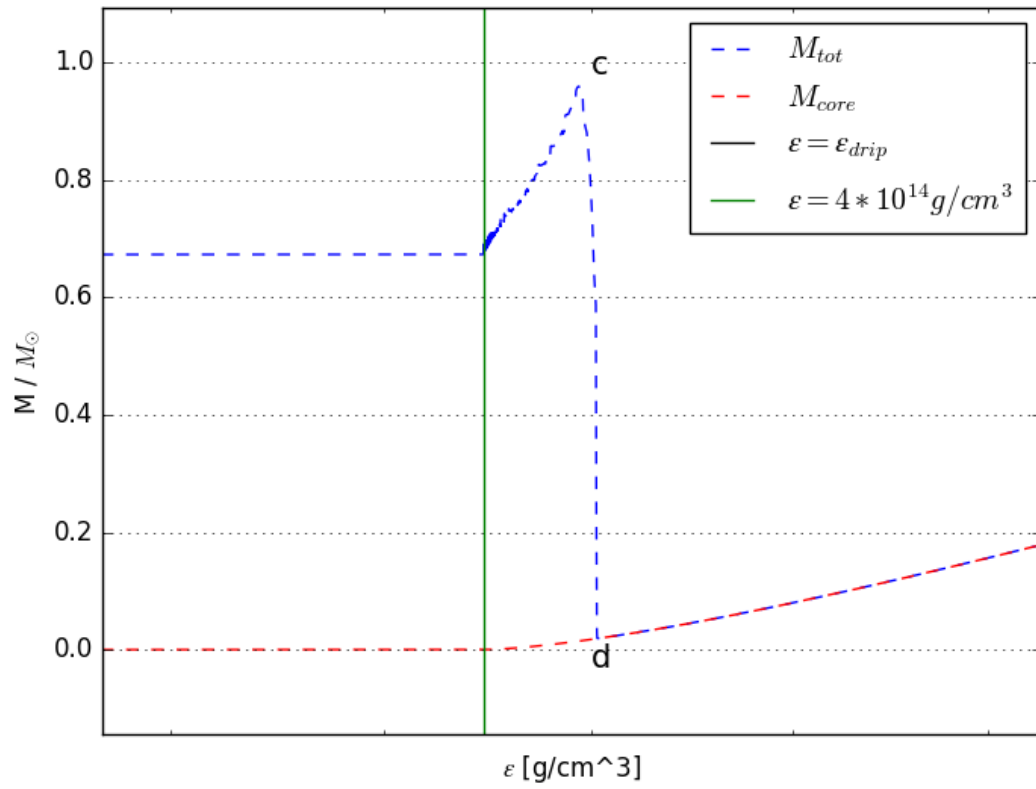


Figura 4.9: Ingrandimento di 4.8 nella regione in cui si forma il core a materia strana, con indicate anche la configurazioni *b* e *c* di 4.2

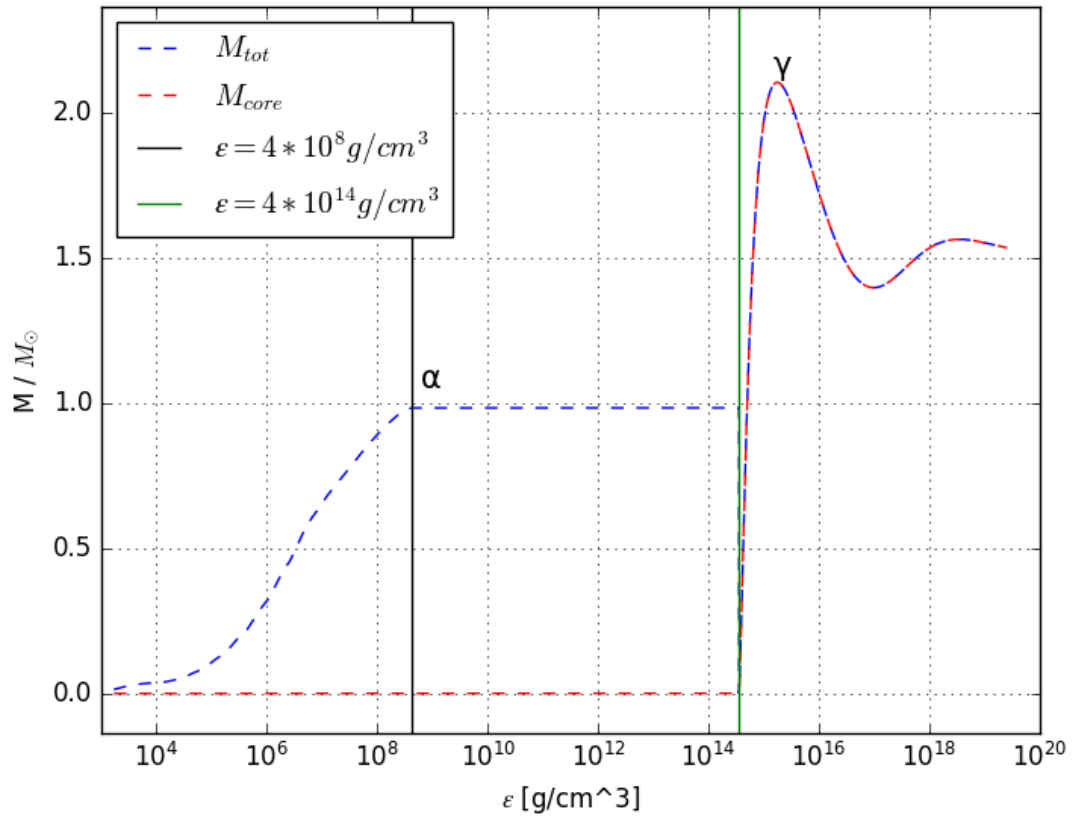


Figura 4.10: Diagramma in cui sono riportate la massa totale gravitazionale (in blu) e la massa gravitazionale del core a quark strani (in rosso) in funzione della densità centrale delle stelle appartenenti alla sequenza con  $\epsilon_{crust} = 4 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$ . I punti con le lettere  $\alpha$  e  $\gamma$  si riferiscono alle omonime configurazioni della sequenza in 4.3. Infine, in nero si è evidenziata la densità centrale della configurazione nella cuspide mentre in verde la densità centrale della stella in cui inizia a formarsi il core a materia strana.

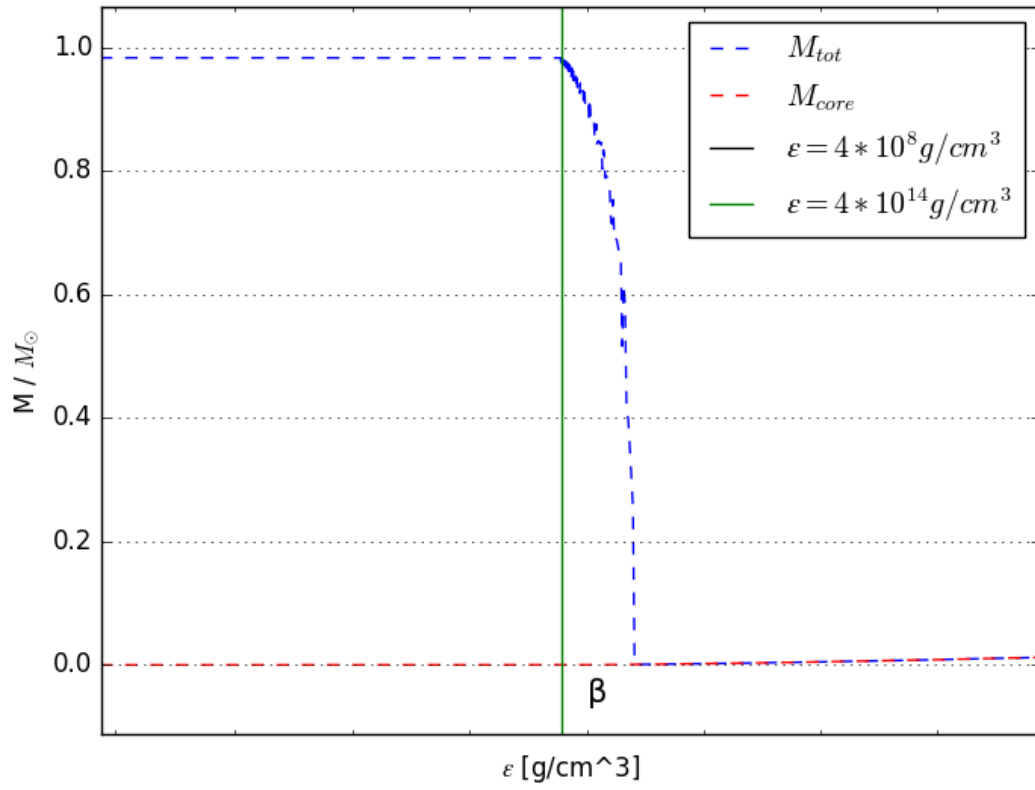


Figura 4.11: Ingrandimento di 4.10 nella regione in cui si forma il core a materia strana, con indicata anche la configurazione  $\beta$  di 4.3. Mentre nella sequenza di 4.8 la sequenza stabile di strange dwarfs nasce da quella instabile con un core strano già formato, nel caso rappresentato in figura la sequenza parte con core nullo.

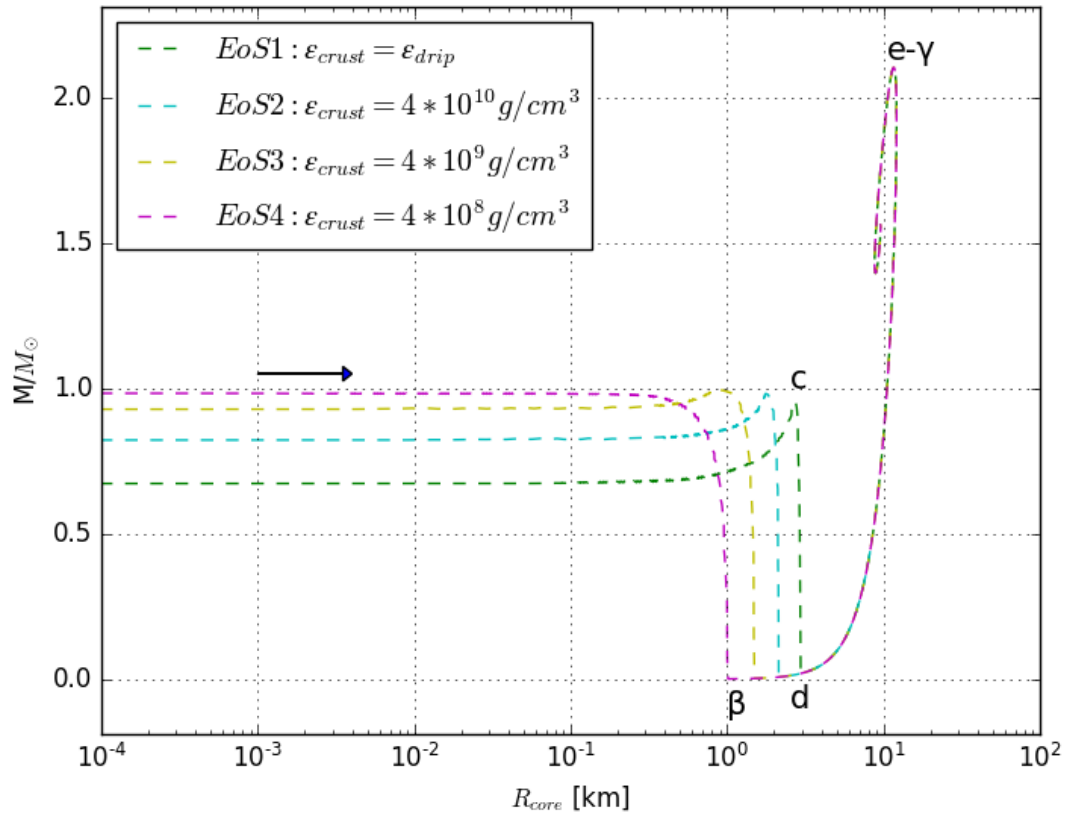


Figura 4.12: Diagramma che riporta la massa totale gravitazionale in funzione del raggio del core di sequenze stellari con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ,  $4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ ,  $4 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$  e  $4 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^3$ . I punti evidenziati con le lettere si riferiscono agli omonimi nelle sequenze di 4.2 e 4.3

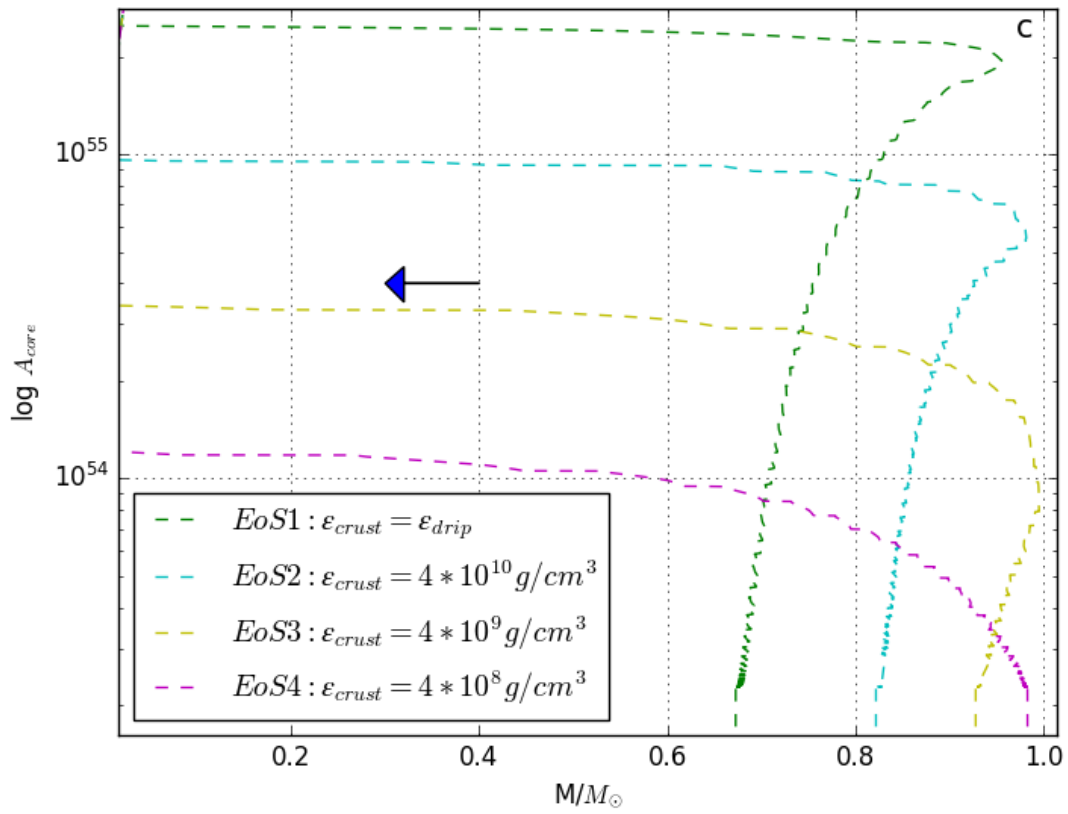


Figura 4.13: Massa barionica del core in funzione della massa totale gravitazionale per varie sequenze di strange dwarfs con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ,  $4 \cdot 10^{10} g/cm^3$ ,  $4 \cdot 10^9 g/cm^3$  e  $4 \cdot 10^8 g/cm^3$ . La freccia indica il verso in cui aumenta la densità centrale delle stelle e per ciascuna sequenza si è riportata la regione stabile ed instabile. Il punto *c* è stato riportato in riferimento alla sequenza in 4.2 e in modo tale da individuare più facilmente le regioni stabili ed instabili.

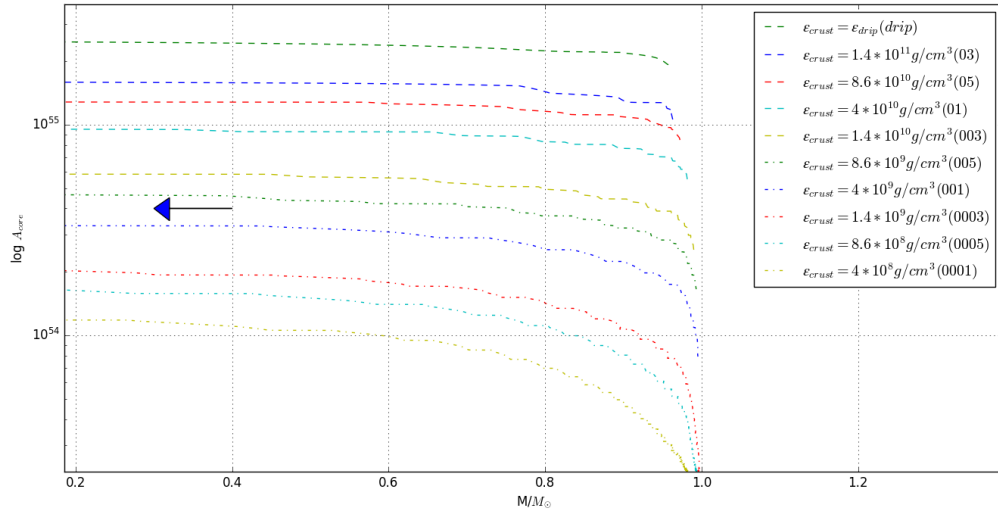


Figura 4.14: Diagramma analogo a quello in 4.13 dove per ciascuna sequenza è stata indicata solo la regione di stabilità delle strange dwarfs. Inoltre sono state aggiunte sequenze ottenute a partire da equazioni di stato con  $\epsilon_{\text{drip}}$  intermedie.

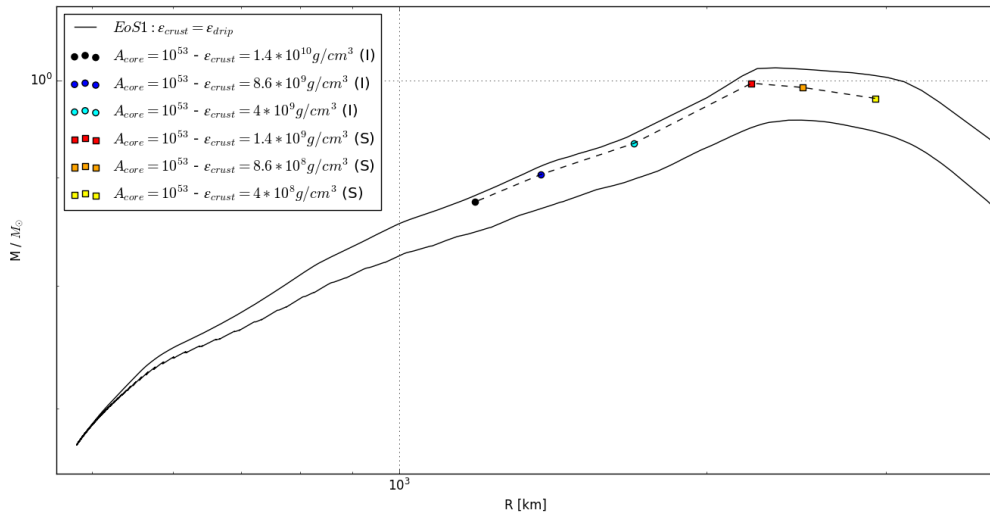


Figura 4.15: Ingrandimento della regione a cuspidi nel diagramma M-R in 4.2. In particolare, in riferimento ai risultati presentati in 4.14, sono state riportate le configurazioni di diverse sequenze a fissata massa barionica del core. Si nota che all'aumentare della  $\epsilon_{\text{crust}}$ , le stelle in questione formano una sequenza con due rami di stabilità e instabilità a massa crescente e decrescente. Ciò suggerisce l'applicabilità degli ordinari criteri di stabilità nel diagramma M-R a sequenze di questo genere, confermando così la stabilità o meno delle varie regioni nelle sequenze costruite e alle quali sarebbe complicato applicare gli ordinari criteri, come nelle regioni di cuspidi in 4.2 e 4.3.

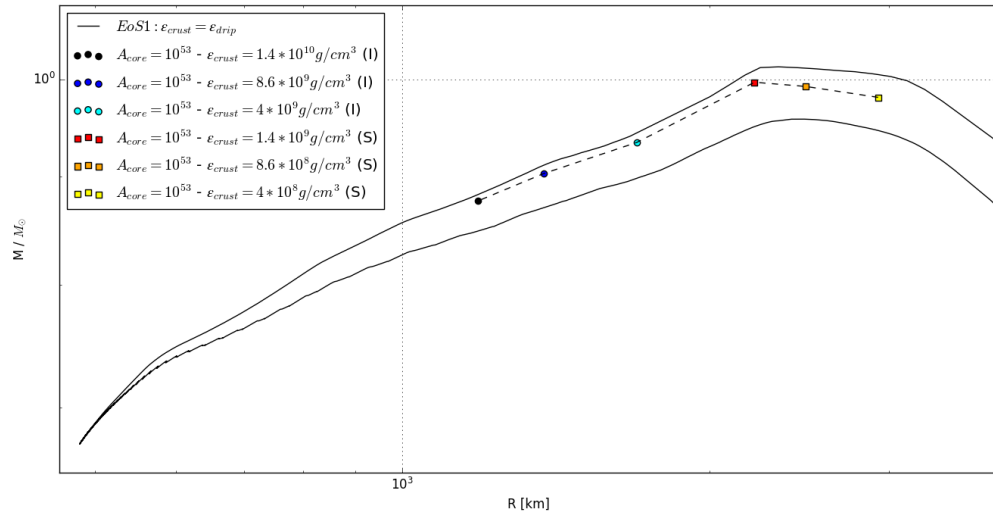


Figura 4.16: Prof di merda

## Capitolo 5

# Origine e formazione di materia strana

La ricerca di sistemi stabili o quasi stabili di materia strana può ricadere su tre categorie principali: agglomerati di materia strana nei raggi cosmici, materia strana presente in quella ordinaria e tentativi di produzione di materia strana negli acceleratori. Non essendoci un modello certo di formazione di strange dwarfs che ne possa determinare l'abbondanza nell'universo, la formazione di SDs potrebbe derivare da stelle progenitrici contaminate con strange nuggets durante la loro permanenza nella sequenza principale. Questo costituirebbe uno scenario probabile se la materia strana si rivelasse lo stato più stabile della materia adronica in quanto la galassia sarebbe riempita da un flusso di materia strana. Tale flusso influenzerebbe ogni oggetto con cui viene in contatto, come pianeti, nane bianche, stelle di neutroni e stelle della sequenza principale. Tuttavia, agglomerati di materia a quark strani catturati da WDs e NSs non raggiungerebbero mai il core dove il potenziale gravitazionale è maggiore, sarebbero infatti bloccati dal reticolo nei pressi della superficie a causa dell'elevata densità di energia. Se da un lato questa situazione precluderebbe la possibilità di formazione di stelle strane a partire da stelle compatte, dall'altro la situazione è diversa per le stelle della sequenza principale che sono molto più diffuse rispetto alle precedenti e sarebbero in condizione di far gravitare lo strange nugget nel core, accumulando così materia strana nel tempo fino alla dipartita della stella dalla sequenza principale. Il core accresciuto di neutroni e lo strange nugget condurrebbero alla transizione della stella di neutroni in una stella strana.



Per quanto riguarda l'origine della strange matter, ci sono diverse ipotesi che trattano della sua formazione e conseguente accrescimento da parte delle stelle secondo i meccanismi citati in precedenza. Tra le principali ipotesi abbiamo:

1. corpi primordiali di materia strana che potrebbero essersi formati quando l'universo aveva una temperatura di  $\sim 100 \text{ MeV}$ . Solo oggetti con numero barionico maggiore di  $10^{52}$  dovrebbero essere sopravvissuti all'evaporazione durante il raffreddamento dell'Universo fino a  $\sim 1 \text{ MeV}$  [20];
2. eventi esplosivi come merging di buchi neri e strange stars potrebbero essere responsabili dell'espulsione di grandi flussi di materia strana. Un limite superiore al flusso di strange nuggets cosmici può essere derivato assumendo che l'halo di materia oscura sia formato interamente da strange nuggets. Il flusso stimato sulla Terra è dell'ordine di  $10^6 A^{-1} v_{250} \rho_{24} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$ , dove  $\rho_{24} = \rho / (10^{-24} \text{ g/cm}^3)$  e  $v_{250}$  è la velocità in unità di  $250 \text{ km/s}$  [21];
3. stella neonate calde e turbolente che potrebbero emettere getti di SQM a causa dell'attrito e dell'elevata velocità di rotazione, consentendo così alla materia strana di accrescersi nell'ambiente circostante durante la vita della stella.

## 5.1 Sulla ricerca di strange dwarfs

Uno studio del 2020 [22] si è proposto l'obiettivo di cercare SDs tra le nane bianche già conosciute ed osservate prendendo in considerazione la differenza nella relazione tra massa e raggio.

Infatti, basandoci sulla correttezza dell'ipotesi di Witten sulla materia strana, potrebbero esistere intere sequenze di oggetti con core di materia a quark strani che avrebbero svariate proprietà in comune con le stelle compatte ordinarie, quali stelle di neutroni e nane bianche. Nonostante ciò, la similitudine renderebbe difficile discriminare tra le due categorie di oggetti compatti, ma la differenza potrebbe essere sondata nel confronto della relazione tra massa e raggio delle stelle conosciute con le sequenze teoriche basate su modelli di equazioni di stato che si pensa descrivano la materia al loro interno. Altre vie per evidenziare le differenze potrebbero essere lo studio dei rate di raffreddamento, massa massima e pattern di onde gravitazionali.

Nell'ambito delle nane bianche, lo studio sopracitato ha identificato otto candidati con masse comprese nel range  $\sim 0.02 - 0.12 M_{\odot}$  e raggio distribuito entro  $\sim 9,000 - 15,000 \text{ km}$ . Gli otto oggetti sono *SDSSJ165143.45 + 364647.6*, *LSPMJ0815+1633*, *LP240-30*, *BD+205125B*, *LP462-12*, *WDJ1257+5428*, *2MASSJ13453297 + 4200437* e *SDSSJ085557.46 + 053524.5*. I dati riguardanti queste stelle compatte provengono dal Montreal White Dwarfs Database (MWDD) [23]. Nel database, 55900 oggetti sono catalogati come nane bianche e solo per 39041 di questi sono disponibili i parametri di gravità superficiale ( $g$ ) e massa gravitazionale ( $M$ ). Da questi due parametri è possibile derivare facilmente

il raggio come:

$$R = \left( \frac{GM}{g} \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Riportando i punti nel diagramma  $M(R)$ , la maggior parte di questi è consistente con la teoria delle nane bianche. Alcune configurazioni eccedono la massa limite di Chandrasekhar di  $1.44 M_{\odot}$  mentre altre hanno raggi superiori alla media. Questi fenomeni possono essere spiegati dalle diverse composizioni di materia al loro interno, o da forti campi magnetici e velocità di rotazione elevate.

Come è stato descritto in precedenza, le SDs sarebbero composte da materia a quark strani nel core, materia nucleare ordinaria nella crosta e la loro densità centrale  $\rho_{cen}$  può raggiungere valori dell'ordine di  $\sim 4 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ . In genere, per la materia nucleare interna alla crosta la massima densità deve essere minore di della densità di neutron drip  $\epsilon_{drip}$ . A questo punto ci si ripropone di verificare la validità della candidatura delle possibili nane bianche come SDs realizzando un grafico e comparando la loro posizione rispetto alle sequenze di strange dwarfs costruite tramite le equazioni di stato con discontinuità tra core e crosta nucleare. Gli oggetti in questione possiedono masse nel range  $0.02 - 0.12 M_{\odot}$  e il loro raggio spazia tra  $9,000 - 15,000 \text{ km}$ , sono quindi stelle troppo compatte rispetto ai valori ordinari delle nane bianche. Nel grafico in 5.1, i punti blu indicano la posizione nel diagramma massa-raggio delle ipotetiche SDs. Si può notare che effettivamente questi otto candidati deviano fortemente dalla sequenza delle nane bianche segnata in rosso e anch'essa riportata nel grafico. Sono quindi meglio descritte dalle nuove sequenze di SDs studiate fino a questo punto della trattazione. Ciò è validato pure da sequenze di nane bianche composte da  $^4\text{He}$  o  $^{12}\text{C}$  in quanto cadono in range di massa e raggio superiori alla sequenza dell'equazione di stato BPS usata per confrontare i dati delle SDs candidate.

Ponendo in risalto altre caratteristiche delle candidate, dai dati si osservano temperature e masse particolarmente basse. Di solito la loro temperatura è rilevata come inferiore a  $13,000 \text{ K}$  e le masse spaziano nel range  $0.02 - 0.12 M_{\odot}$ . Diversi studi nell'ambito delle nane bianche hanno suggerito che per stelle con masse inferiori a  $0.45 M_{\odot}$  sarebbe impossibile diventare nane bianche entro l'età dell'Universo. Tuttavia, l'appartenenza ad un sistema binario renderebbe possibile la perdita di massa da parte della stella progenitrice attraverso interazioni binarie. Infatti, l'opinione è supportata da osservazioni di nane bianche a massa ridotta e appartenenti a sistemi binari di stelle di neutroni e pulsar. Per quanto concerne la bassa temperatura, ulteriori studi [24] hanno suggerito che queste condizioni estreme potrebbero essere raggiunte a causa dell'influenza di detriti rocciosi. Nonostante ciò, le SDs indicate in 5.1 non appartengono a sistemi binari. Le basse temperature si potrebbero quindi spiegare per via dell'effetto del core di materia a quark strani al loro interno. Infatti, oggetti di materia strana dovrebbero raffreddarsi più velocemente in modo tale che la temperatura della superficie del core sia minore rispetto a quella della materia adronica nella crosta nucleare. Nello specifico, solo una stella delle otto protagoniste dello studio è

accompagnata da una stella della sequenza principale; nessun indizio a supporto dell'esistenza di una stella compagna per quanto riguarda le rimanenti stelle.

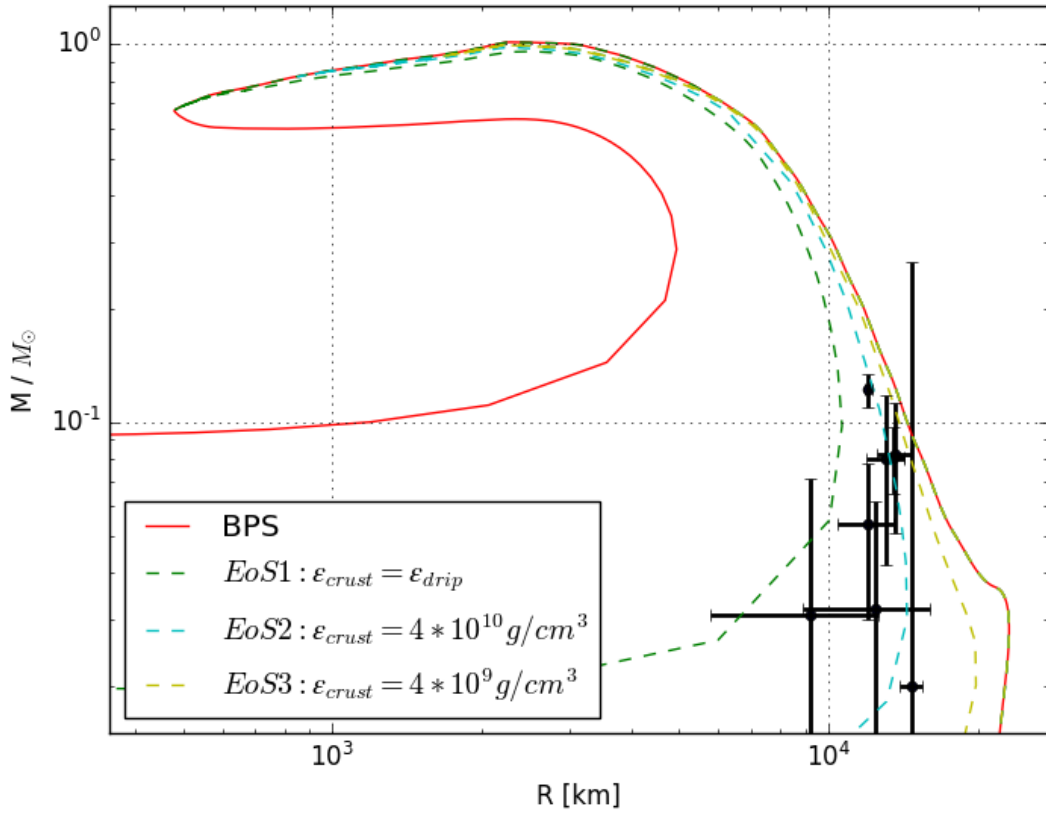


Figura 5.1: Ingrandimento di una regione del diagramma M-R in cui sono riportate le sequenze di stelle con core a quark strani ottenute dalle EoS con  $\epsilon_{crust} = \epsilon_{drip}$ ,  $4 \cdot 10^{10} \text{ g/cm}^3$ ,  $4 \cdot 10^9 \text{ g/cm}^3$ , insieme alla sequenza di stelle gravitazionalmente legate ricavate con l'equazione di stato BPS. Nella figura, i punti rappresentano le candidate strange dwarfs insieme alle barre di errore su raggio e massa per le singole configurazioni.

# Capitolo 6

## Conclusioni

La pressione raggiunta nel core delle stelle di neutroni potrebbe frantumare neutroni, protoni e altri componenti adroniche nei loro quark costituenti, creando così uno stato della materia conosciuto come materia a quark. Lo studio di configurazioni stellari caratterizzate da un core di materia a quark strani e crosta di materia adronica ha portato a costruire sequenze stellari simili a quelle ottenibili con nane bianche e stelle di neutroni. Affinché possa formarsi il core è necessario considerare densità interne alla crosta nucleare minori della densità di neutron drip  $\epsilon_{drip}$ , e si possono individuare due famiglie di sequenze stellari strane in base al range in cui varia tale densità: la prima presenta una discontinuità di configurazioni instabili tra nane bianche ordinarie e strange dwarfs stabili, la seconda passa direttamente alle *SDs* stabili. Il problema riguardante lo studio delle regioni stabili ed instabili nel caso di stelle con core a materia strana si complica, e per via della discontinuità in determinate zone nel diagramma  $M - R$  è difficile l'applicazione degli ordinari metodi per individuare l'instabilità. Nonostante ciò, tali metodi possono essere sfruttati in maniera simile e la conferma viene dalla costruzione di sequenze in cui non viene fissata la densità interna alla crosta, bensì la massa barionica del core al variare della differente equazione di stato usata per costruire la stella. Una caratteristica fondamentale delle strange dwarfs è la loro vicinanza in massa e raggio alle nane bianche insieme alla loro possibile esistenza a pressioni e densità che invece condurrebbero una nana bianca al collasso. La diretta conseguenza è che diventa fondamentale riprendere in mano i dati che si conoscono delle nane bianche finora registrate ed osservare come si posizionano nel diagramma massa-raggio.

Come colonna portante della trattazione si ha la materia a quark strani che compone il core di queste stelle e che secondo vari modelli teorici è ipotizzata come il vero stato fondamentale della materia. Un ruolo rilevante lo gioca la ricerca di sistemi stabili o quasi-stabili di materia strana su categorie come strange nuggets nei raggi cosmici, campioni di materia strana in materia ordinaria e collisioni negli acceleratori. Infatti, a comprova si ha l'osservazione di nane bianche con masse anomale per la loro categoria e che sarebbero meglio spiegate se composte da un core di materia a quark strana.

In aggiunta, le sequenze di strange stars forniscono argomenti teorici per supporre l'esistenza di strange MACHOS, ovvero configurazioni stellari con masse simili a quelle di nane brune o di pianeti ordinari, ma con raggio drammaticamente diverso. Infatti, la massa delle strange stars più leggere può addirittura essere  $10^{-2}$  volte inferiore rispetto a quella delle stelle di neutroni più leggere. Riferendosi alla figura 4.5, la massa della SSs più leggera costruita con *EoS1* è  $\sim 0.019 M_{\odot}$ , o circa 19 masse di Giove. La massa diminuisce di due ordini di grandezza usando *EoS4*, quindi diminuendo  $\epsilon_{crust}$  di tre ordini di grandezza. Se in numero abbondante, questi oggetti potrebbero costituire un possibile candidato per ricerche di microlensing gravitazionale riguardanti corpi oscuri con masse nel range da  $10^{-6}$  a  $10^2 M_{\odot}$ .

Così come per le nane bianche, anche per le stelle di neutroni esistono delle anomalie incompatibili con la teoria. Un esempio evidente emerge dallo studio [25] dello spettro di una millisecond pulsar, *SAX J1808.4–3658*, durante l'ultima emissione di raggi X nell'Aprile 2015. Le osservazioni hanno condotto ad un valore bassissimo della massa della pulsar nel range  $0.5 \div 0.8 M_{\odot}$ . Questo range di massa per una stella di neutroni è inaccettabile e può far emergere dubbi tanto sulla correttezza della stima dei valori osservati, quanto sulla natura dell'oggetto in questione che potrebbe infatti rientrare nello schema della materia strana.

Problemi di questa sorta nella descrizione di configurazioni stellari apparentemente ordinarie possono essere colti solo un segno positivo di qualcosa che ancora non abbiamo ben compreso ma che si avvicina a nuove teorie che hanno la possibilità di essere confermate.

# Appendice

Di seguito è riportato il codice Python che è stato usato per costruire le sequenze di stelle con core a materia strana una volta fissata l'equazione di stato. L'utilità del codice è la presenza di un algoritmo che permette di regolare il numero di step radiali nell'integrazione per configurazione stellare, ottimizzando così il tempo di esecuzione. Inoltre, così come può essere usato per equazioni di stato ordinarie, lo stesso discorso si avvale per equazioni di stato che presentano una discontinuità netta nella densità di energia tra due fasi al variare della pressione.

```
1 import math
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.interpolate import interp1d
5 from scipy import interpolate
6 from scipy.special import logsumexp
7
8
9 #constants
10 pi = np.pi
11 msun=1.48
12
13
14 #initial conditions
15 psurf = 1.e-30
16 r0 = 1.e-4
17 dr = 0.0000001
18 nstep = 2000000
19
20
21 #inizialization
22 sol = []
23 for i in range(nstep):
24     sol.append([r0, 0, 0])
25 data = np.loadtxt("eos_datas.txt")
26 P = data[:,0] #pressure (in km-2)
27 E = data[:,1] #energy density (in km-2)
28 N = data[:,2] #baryonic density (in fm-3)
29 F = interpolate.interp1d(P,E,fill_value="extrapolate")
30 B = interpolate.interp1d(P,N*10**(54),fill_value="extrapolate")
31
32
33
```

---

```

34 #functions
35 def f(r, m1, p1):
36     if p1>0:
37         f1 = 4*pi*r**2*F(p1) #dmdr
38         f2 = -(F(p1)+p1)*((m1)+4*(p1)*pi*pow(r,3))/(r**2*(1-2*(m1)/r)) #dpdr
39         f3 = 4*pi*pow((1-(2*m1)/r)),-1/2)*pow(r,2)*B(p1) #dndr
40         fa = np.array([f1,f2,f3])
41     else:
42         fa = np.array([0,0,0])
43     return fa
44
45 def step(r, m1, p1):
46     f1 = 4*pi*r**2*F(p1) #dmdr
47     f2 = -(F(p1)+p1)*((m1)+4*(p1)*pi*pow(r,3))/(r**2*(1-2*(m1)/r)) #dpdr
48     step= abs(0.23*((1/m1)*f1-(1/p1)*f2)**(-1)) #dr
49     return step
50
51 def equationsolve(pc1):
52     x=[r0,0,pc1,B(pc1)]
53     i=0
54     l=0
55     acore=0
56     rcore=0
57     while x[2]>=psurf:
58         k1=f(x[0], x[1], x[2])
59         if i>0:
60             dr=step(x[0], x[1], x[2])
61         else:
62             dr=0.000000001
63         k2=f(x[0]+dr/2, x[1]+dr*k1[0]/2, x[2]+dr*k1[1]/2)
64         if k2[1]==0:
65             break
66         k3 = f(x[0]+dr/2, x[1]+dr*k2[0]/2, x[2]+dr*k2[1]/2)
67         if k3[1]==0:
68             break
69         k4=f(x[0]+dr, x[1]+dr*k3[0], x[2]+dr*k3[1])
70         if k4[1]==0:
71             break
72         x[0]=x[0]+dr
73         x[1]=x[1]+(k1[0]+2*k2[0]+2*k3[0]+k4[0])*dr/6
74         x[2]=x[2]+(k1[1]+2*k2[1]+2*k3[1]+k4[1])*dr/6
75         x[3]=x[3]+(k1[2]+2*k2[2]+2*k3[2]+k4[2])*dr/6
76         if l==0:
77             if pc1>=pcrit:
78                 #pcrit=pressure associated to energy density discontinuity in eos
79                 if x[2]<=pcrit:
80                     l=1
81                     acore=x[3]
82                     rcore=x[0]
83             sol[i]=[x[0], x[1], x[2], x[3]]
84             i=i+1
85         radius = sol[i-1][0]
86         mass = sol[i-1][1]
87         press = sol[i-1][2]

```

```

88     barmass = sol[i-1][3]
89     out = np.array([radius, mass/msun, press, barmass, acore, rcore])
90     return out
91
92
93 #data acquisition
94 rv = []
95 mv1 = []
96 press = []
97 dens = []
98 bar = []
99 coc = []
100 ragcore = []
101
102 N=23000
103 for j in range(N):
104     press1=6.e-22+10**(-23+0.001*j)
105     print(j)
106     output = equationsolve(press1)
107     rv.append(output[0]) #radius (in km)
108     mv1.append(output[1]) #gravitational mass (in msun)
109     press.append(press1) #central pressure (in km-2)
110     dens.append(F(press1)) #central energy density (in km-2)
111     bar.append(output[3]) #baryonic mass
112     coc.append(output[4]) #baryonic core mass
113     ragcore.append(output[5]) #gravitational core mass (in msun)
114
115 plt.grid('on')
116 plt.xscale("log")
117 plt.xlabel("R [km]")
118 plt.ylabel("M / $M_{\odot}$")
119 plt.plot(rv, mv1)
120 print("I'll be back")
121 plt.legend()
122 plt.show()
123
124 file = open("datas.txt", "w")
125 for i in range(len(rv)):
126     file.write(str(rv[i]) + " " + str(mv1[i]) + " " + str(press[i]) + " " +
127               str(dens[i]) + " " + str(bar[i]) + " " + str(coc[i]) + " " + str(ragcore[i]) + "\n")
127 file.close()

```



# Ringraziamenti

Questo spazio dovrebbe essere dedicato ai ringraziamenti delle persone più vicine e che mi hanno supportato durante il percorso. Nonostante ciò, voglio dedicare le prossime righe a diversi ringraziamenti che non hanno motivazioni particolari e in cui realtà, finzione e leggenda si mescolano tra loro. Chi sa, capirà.

In primis, vorrei ringraziare Luca Albieri, Mario Ferrari, Nicola Porta e Macchia, quattro mentori importantissimi che ho avuto l'onore di conoscere nei miei 21 anni di vita. Insieme ai mentori è doveroso dare spazio alla famiglia: grazie alla famiglia.

In secundis, vorrei ringraziare coloro che mi hanno sempre supportato ogni volta che ho chiesto aiuto, quindi grazie Piede di Mayo. Sicuramente non starei scrivendo queste parole senza il supporto economico del mio team preferito, perciò Grazie per i soldi. Doveroso ringraziare le persone che hanno orbitato attorno a questi centri di gravità, come le due L o, per essere inclusivi, tutte le persone con cui ho perso i contatti.

In terzo luogo, ringrazio ovviamente i compagni (importante distinzione da colleghi) di Università.

Infine, ci terrei a ringraziare il mio relatore Giuseppe Pagliara per la sua guida ed estrema disponibilità mostrata negli ultimi mesi.

# Bibliografia

- [1] A. R. Bodmer. «Collapsed Nuclei». In: *Phys. Rev. D* 4 (6 set. 1971), pp. 1601–1606. DOI: [10.1103/PhysRevD.4.1601](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.4.1601). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.4.1601>.
- [2] Hidezumi Terazawa. «Are Super-Hypernuclei Found in Cosmic Rays?» In: *Journal of the Physical Society of Japan* 60.6 (1991), pp. 1848–1851. DOI: [10.1143/JPSJ.60.1848](https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.1848). eprint: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.1848>. URL: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.1848>.
- [3] Charles Alcock, Edward Farhi e Angela Olinto. «Strange Stars». In: 310 (nov. 1986), p. 261. DOI: [10.1086/164679](https://doi.org/10.1086/164679).
- [4] Ch. Kettner et al. «Structure and stability of strange and charm stars at finite temperatures». In: *Phys. Rev. D* 51 (4 feb. 1995), pp. 1440–1457. DOI: [10.1103/PhysRevD.51.1440](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.1440). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.1440>.
- [5] Ren-xin Xu e Guo-jun Qiao. «Electric Character of Strange Stars». In: *Chinese Physics Letters* 16.10 (ott. 1999), pp. 778–780. DOI: [10.1088/0256-307x/16/10/028](https://doi.org/10.1088/0256-307x/16/10/028). URL: <https://doi.org/10.1088/0256-307x/16/10/028>.
- [6] Gordon Baym, Christopher Pethick e Peter Sutherland. «The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models». In: 170 (dic. 1971), p. 299. DOI: [10.1086/151216](https://doi.org/10.1086/151216).
- [7] A. Chodos et al. «New extended model of hadrons». In: *Phys. Rev. D* 9 (12 giu. 1974), pp. 3471–3495. DOI: [10.1103/PhysRevD.9.3471](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.9.3471). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3471>.
- [8] A. Chodos et al. «Baryon structure in the bag theory». In: *Phys. Rev. D* 10 (8 ott. 1974), pp. 2599–2604. DOI: [10.1103/PhysRevD.10.2599](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2599). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2599>.
- [9] Edward Farhi e R. L. Jaffe. «Strange matter». In: *Phys. Rev. D* 30 (11 dic. 1984), pp. 2379–2390. DOI: [10.1103/PhysRevD.30.2379](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.30.2379). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.2379>.
- [10] Stuart L. Shapiro e Saul A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars : the physics of compact objects*. 1983.

- [11] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff. «On Massive Neutron Cores». In: *Phys. Rev.* 55 (4 feb. 1939), pp. 374–381. DOI: [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>.
- [12] Richard C. Tolman. «Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid». In: *Phys. Rev.* 55 (4 feb. 1939), pp. 364–373. DOI: [10.1103/PhysRev.55.364](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>.
- [13] James M. Bardeen, Kip S. Thorne e David W. Meltzer. «A Catalogue of Methods for Studying the Normal Modes of Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models». In: 145 (ago. 1966), p. 505. DOI: [10.1086/148791](https://doi.org/10.1086/148791).
- [14] S. Chandrasekhar. «The Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity.» In: 140 (ago. 1964), p. 417. DOI: [10.1086/147938](https://doi.org/10.1086/147938).
- [15] N. K. Glendenning. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. 1997, pp. 37–39.
- [16] N. K. Glendenning, Ch. Kettner e F. Weber. «From Strange Stars to Strange Dwarfs». In: 450 (set. 1995), p. 253. DOI: [10.1086/176136](https://doi.org/10.1086/176136).
- [17] Mark G. Alford, Steven P. Harris e Pratik S. Sachdeva. «On the Stability of Strange Dwarf Hybrid Stars». In: *The Astrophysical Journal* 847.2 (set. 2017), p. 109. DOI: [10.3847/1538-4357/aa8509](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa8509). URL: <https://doi.org/10.3847/2F1538-4357/2Faa8509>.
- [18] John L. Friedman, James R. Ipser e Leonard Parker. «Rapidly rotating neutron star models». In: *The Astrophysical Journal* 304 (1986), pp. 115–139.
- [19] N. K. Glendenning. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. 1997.
- [20] Charles Alcock e Edward Farhi. «The Evaporation of Strange Matter in the Early Universe». In: *Phys. Rev. D* 32 (1985), p. 1273. DOI: [10.1103/PhysRevD.32.1273](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.32.1273).
- [21] Jes Madsen. «Physics and astrophysics of strange quark matter». In: *Hadrons in Dense Matter and Hadrosynthesis*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 162–203. DOI: [10.1007/bfb0107314](https://doi.org/10.1007/bfb0107314). URL: <https://doi.org/10.1007/2Fbfb0107314>.
- [22] Abudushataer Kuerban et al. *Searching for Strange Quark Matter Objects Among White Dwarfs*. 2020. DOI: [10.48550/ARXIV.2012.05748](https://doi.org/10.48550/ARXIV.2012.05748). URL: <https://arxiv.org/abs/2012.05748>.
- [23] P. Dufour et al. *The Montreal White Dwarf Database: a Tool for the Community*. 2016. DOI: [10.48550/ARXIV.1610.00986](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1610.00986). URL: <https://arxiv.org/abs/1610.00986>.

- 
- [24] S. Blouin et al. «A New Generation of Cool White Dwarf Atmosphere Models. IV. Revisiting the Spectral Evolution of Cool White Dwarfs». In: 878.1, 63 (giu. 2019), p. 63. DOI: [10.3847/1538-4357/ab1f82](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab1f82). arXiv: [1905.02174](https://arxiv.org/abs/1905.02174) [[astro-ph.SR](#)].
- [25] T. Di Salvo et al. «NuSTAR and XMM-Newton broad-band spectrum of SAX J1808.4-3658 during its latest outburst in 2015». In: 483.1 (feb. 2019), pp. 767–779. DOI: [10.1093/mnras/sty2974](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2974). arXiv: [1811.00940](https://arxiv.org/abs/1811.00940) [[astro-ph.HE](#)].
- [26] F. Weber. «Strange quark matter and compact stars». In: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 54.1 (mar. 2005), pp. 193–288. DOI: [10.1016/j.ppnp.2004.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2004.07.001). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.ppnp.2004.07.001>.

