Politechnika Warszawska

Wydział Fizyki

Kryptografia i bezpieczeństwo informacji dla fizyków

Sprawozdanie z zadania nr. 5 na temat:

Kryptografia krzywych eliptycznych

Data wykonania zadania w laboratorium: 19.11.2019r.

Wykonali:

Maciej Czarnecki

Denys Morokov

Fizyka techniczna II stopień, 2 rok

1. Wstęp

1.1. Cel: celem zadania jest napisanie prostego programu szyfrującego zawartość przy użyciu krzywych eliptycznych z użyciem wybranej biblioteki kryptograficznej. Program ma umożliwiać ustawienie własnych parametrów dla EC. Należy ustawić parametry inne niż domyślne dla biblioteki ale prawidłowe dla EC.

1.2. Wykorzystana technologia: skrypt został zaimplementowany w Python.

2. Opracowanie wyników

Podczas wykonania zadania znaleziono w literaturze i opracowano kilka skryptów do kryptografii na krzywych eliptycznych.

2.1. Krótki wstęp o krzywych eliptycznych

Krzywe eliptyczne – to zbiór punktów opisanych równaniem

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

gdzie

$$4a^3 + 27b^2 \neq 0$$

warunek konieczny, aby wykluczyć specjalne krzywe.

Parametry zakresu

Algorytmy krzywej eliptycznej będą działać w cyklicznej podgrupie krzywej eliptycznej na polu skończonym. Dlatego algorytmy będą wymagały następujących parametrów:

1. Proste ***p*** określenie rozmiaru końcowego pola.
2. Współczynniki ***a*** i ***b*** równania krzywej eliptycznej.
3. Punkt bazowy ***G*** generujący podgrupę.
4. Kolejność ***n*** podgrup.
5. Kofaktor ***h*** podgrupy.

Kryptografia na krzywych eliptycznych

- Klucz prywatny – jest losową całkowitą liczbą ***d*** z zakresu {1, …., n -1}, gdzie n – rząd podgrupy.
- Klucz publiczny – jest punktem ***H = dG*** (G – punkt bazowy podgrupy, „generator")

Jeśli znamy ***d i G*** (wraz z innymi parametrami krzywej), to znalezienie H jest „łatwe”. Ale jeśli znamy ***H i G***, to znalezienie klucza prywatnego jest „trudnym” zadaniem, ponieważ wymaga rozwiązania dyskretnego logarytmu.

ECDH (Elliptic curve Diffie-Hellman)

Ten algorytm jest raczej ***protokołem uzgadniania kluczy*** (protokół kryptograficzny, dzięki któremu dwie (lub więcej) stron może uzgodnić klucz w taki sposób, że obie mają wpływ na rezultat). Zasadniczo oznacza to, że ECDH określa (do pewnego stopnia) kolejność generowania i wymiany kluczy. Możemy sami wybrać metodę szyfrowania danych przy użyciu takich kluczy.

Działa następująco: mamy dwie strony, Alicja i Bob, którzy wymieniają między sobą informację w ten sposób, że trzecia osoba może przechwycić tę informację, ale nie może odszyfrować.

1. Najpierw Alicja i Bob generują własne prywatne i publiczne klucze.

Klucze Alicji: $\mathbf{d_a}$ – prywatny, $\mathbf{H_a = d_a G}$ – publiczny.

Klucze Boba: $\mathbf{d_b}$ – prywatny, $\mathbf{H_d = d_b G}$ – publiczny.

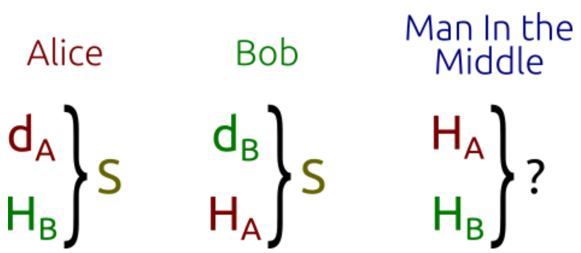
Ale, wykorzystują te same parametry zakresu wspominane wcześniej.

2. Wymieniają między sobą klucze publiczne H_a i H_b w sposób niezabezpieczony.

Trzecia osoba (Man In The Middle) przechwytuje H_a i H_b, ale nie jest w stanie określić d_a i d_b, ponieważ musi rozwiązać problem logarytmu dyskretnego.

3. Alicja oblicza $\mathbf{S = d_a H_b}$ (wykorzystując własny klucz prywatny i publiczny Boba), a Bob oblicza $\mathbf{S = d_b H_a}$. S jest ten sam dla Boba i Alicji, ponieważ:

$$S = d_A H_B = d_A(d_B G) = d_B(d_A G) = d_B H_A$$



Po otrzymaniu wspólnego tajnego klucza Alice i Bob mogą wymieniać dane za pomocą szyfrowania symetrycznego.

ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm)

Algorytm jest wykorzystywany do podpisu cyfrowego.

Alicja chce podpisać wiadomość za pomocą swojego klucza prywatnego (**d_a**), a Bob chce zweryfikować podpis za pomocą klucza publicznego Alicji (**H_a**). Nikt oprócz Alicji nie powinien być w stanie tworzyć prawidłowych podpisów. Każdy powinien mieć możliwość weryfikacji podpisów. Alicja i Bob wykorzystują te same parametry zakresu.

ECDSA działa z haszem wiadomości, a nie z samą wiadomością. Wybór funkcji skrótu pozostaje po naszej stronie, ale oczywiście musimy wybrać funkcję skrótu kryptograficznego. Skrót wiadomości musi zostać obcięty, aby długość skrótu była taka sama, jak długość bitu **n** (rząd podgrupy). Skrócony skrót jest liczbą całkowitą i będzie oznaczony jako **z**.

Algorytm podpisu wiadomości/dokumentu przez Alicję jest następujący:

1. Wybieram losową liczbę **k** z zakresu $\{1,\ldots,n-1\}$.
2. Obliczamy punkt **$P = kG$**.
3. Obliczamy liczbę **$r = x_P \bmod n$**. Jeżeli $r = 0$, to wybieramy inną liczbę k i powtarzamy kroki.
4. Obliczamy **$s = k^{-1}(z+rd_a) \bmod n$**. Jeżeli $s = 0$, to wybieramy inna liczbę k i powtarzamy kroki.

(r, s) – jest podpisem.

Czyli, Alicja podpisuje hasz (dokument) **z** za pomocą prywatnego klucza **d_a** i losowego **k**. Bob weryfikuje podpis wiadomości za pomocą klucza publicznego Alicji **H_a**.

Działa dany algorytm jedynie, jeżeli **n** jest liczbą pierwszą.

Dlaczego EC są bezpieczniejsze od innych szyfrów kryptograficznych

Problem logarytmu dyskretnego.

Jeśli znamy **P i Q**, to ile powinno wynosić **k**, żeby **$Q = kP$**. ECC jest interesujące pod tym względem, że obecnie problem dyskretnego logarytmu dla krzywych eliptycznych wydaje się „bardziej skomplikowany” w porównaniu z innymi podobnymi zadaniami stosowanymi w kryptografii. Oznacza to, że potrzebujemy mniej bitów dla **k**, aby całość mogła uzyskać taki sam poziom ochrony, jak w innych kryptosystemach.

Dobrze to pokazuje tabela poniżej, która porównuje rozmiar klucza RSA z rozmiarem klucza EC (w bitach), tabela udostępniona przez NIST.

Tabela 1. Porównanie rozmiarów kluczy.

Rozmiar klucza RSA [bit]	**Rozmiar klucza EC [bit]**
1024	160
2048	224
3072	256
7680	384
15360	521

Jak widać, nie ma liniowej zależności między rozmiarem klucza RSA a kluczem EC (innymi słowy: jeśli podwoimy rozmiar klucza RSA, nie będziemy musieli podwajać rozmiaru klucza EC). Tabela mówi nam, że EC nie tylko zużywa mniej pamięci, ale także generowanie kluczy z logowaniem w niej jest znacznie szybsze.

2.2. Uzyskane wyniki.

zad5_own_parameters_ec.py, parameters.xml – stworzony skrypt do generacji kluczy publiczny i prywatnych z możliwością ustawienia własnych parametrów dla krzywej eliptycznej. Wykorzystano bibliotekę *fastecdsa*, ale niestety zawiera błąd związany z zamianą typu wprowadzonych parametrów do wymaganych przez funkcję tworzącą krzywą eliptyczną.

zad5_cryptography_signature.py, settings.xml – skrypt, który wykorzystuje bibliotekę *cryptography* do tworzenia krzywej eliptycznej o określonej nazwie (nazwa jest podawana w settings.xml), następnie podpisuje wiadomość.

zad5_ecdh_literature.py – skrypt pobrany ze strony źródła [5] do realizacji algorytmu ECDH opisanego powyżej.

zad5_ecdsa_literature.py - skrypt pobrany ze strony źródła [5] do realizacji algorytmu podpisu cyfrowego ECDSA opisanego powyżej.

3. Podsumowanie

Zaimplementowano skrypt do podpisu wiadomości dla wybranej EC, opisano w skrócie zasadę działania kryptografii krzywych eliptycznych (algorytmy ECDH i ECDSA).

4. Źródła

1. https://pl.wikipedia.org/wiki/Kryptografia_krzywych_eliptycznych
2. https://pl.wikipedia.org/wiki/Protok%C3%B3%C5%82_uzgadniania_kluczy
3. https://habr.com/ru/post/335906/
4. https://andrea.corbellini.name/2015/05/17/elliptic-curve-cryptography-a-gentle-introduction/
5. https://github.com/andreacorbellini/ecc