Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Departamento de Computação - DC
CEP 13565-905, Rod. Washington Luiz, s/n, São Carlos, SP

Programação Dinâmica - Parte 2

Prof. Dr. Alan Demétrius Baria Valejo

CCO-00.2.01 - Projeto e Análise de Algoritmos (*Design And Analysis Of Algorithms*)
1001525 - Projeto e Análise de Algoritmos - Turma A

Roteiro

- Problema do troco

- Problema do troco ou *coin change problem*
  - **Dado o sistema monetário brasileiro *S* com um conjunto de moedas pré-definidas**
  - **Objetivo: qual é a menor quantidade de moedas para retornar um troco *c*?**
    - Ou seja, consiste em **encontrar a combinação com menor número de moedas** cuja soma seja igual a uma quantia determinada, a partir de uma lista de moedas válidas que possuem disponibilidade infinita.

S = {100, 50, 25, 10, 5, 1} e c = 147

Restrição quanto ao número de moedas R = {1, 1, 1, 1, 100, 100} e c = 187

- Caso especial do Problema da Mochila
  - No caso da mochila, busca-se a alocação de objetos que maximiza o valor de uma mochila com uma restrição de peso, dados os pesos e valores de cada objeto
  - O problema do troco seria o da mochila "ao contrário": dado um valor fixo para a mochila, encontrar a combinação de objetos com menor peso que fornece esse valor.

A **solução gulosa** funciona para um conjunto de moedas específica, mas falha para moedas arbitrária.

A **<u>solução gulosa</u>** funciona para um conjunto de moedas específica, mas falha para moedas arbitrária.

O método guloso funciona bem quando estamos usando moedas dos EUA, mas suponha que sua empresa decide implantar suas máquinas de venda automática na Elbonia do Sul onde, além das habituais moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos dos EUA, também tem uma moeda de 21 centavos. Neste exemplo, o nosso método guloso não consegue encontrar a solução ideal para o troco de 63 centavos. Com a adição da moeda de 21 centavos o método guloso ainda encontra a solução com seis moedas. No entanto, a resposta ótima seria três moedas de 21 centavos.

- Mas será que a versão gananciosa sempre é a melhor?
  - No caso da lista de moedas válidas no Brasil, ilustrada anteriormente, a versão gananciosa funciona
  - Mas em outros casos, por exemplo, um sistema fictício com apenas três tipos de moedas: 1 centavo, 7 centavos e 10 centavos e um troco de c=14
  - Outro caso, tendo apenas três tipos de moedas: 1 centavo, 3 centavos e 4 centavos e um troco de c=6

S = {10, 7, 1}
C = 14 – 10 => 4
C = 4 – 1 => 3
C = 3 – 1 => 2
C = 2 – 1 => 1
C = 1 – 1 => 0
T = {10, 1, 1, 1, 1}
Porém, a resposta ótimo é T = {7, 7}

S = {4, 3, 1}
C = 6 – 4 => 2
C = 2 – 1 => 1
C = 1 – 1 => 0
T = {4, 1, 1}
Porém, a resposta ótimo é T = {3, 3}

- Para resolver esse problema com programação dinâmica temos que transformar o problema em uma recorrência
- Em seguida, resolvemos utilizando uma estratégia
  - *bottom-up*, ou seja, sem recursão
  - *top-down*, ou seja, com recursão

- Para resolver esse problema com programação dinâmica temos que transformar o problema em uma recorrência
- Em seguida, resolvemos utilizando uma estratégia
  - *bottom-up*, ou seja, sem recursão
  - *top-down*, ou seja, com recursão

- Suponha um conjunto de moedas M

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}, \forall\, m_i \in \mathbb{N}$$

- Para resolver esse problema com programação dinâmica temos que transformar o problema em uma recorrência
- Em seguida, resolvemos utilizando uma estratégia
  - *bottom-up*, ou seja, sem recursão
  - *top-down*, ou seja, com recursão

- Suponha um conjunto de moedas M

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}, \forall\, m_i \in \mathbb{N}$$

- Suponha que $t(n)$ seja o meu troco ótimo
- Suponha agora que m_i é uma moeda que compõe uma sub-solução ótima $t(p)$
- Logo,

- Para resolver esse problema com programação dinâmica temos que transformar o problema em uma recorrência
- Em seguida, resolvemos utilizando uma estratégia
  - *bottom-up*, ou seja, sem recursão
  - *top-down*, ou seja, com recursão

- Suponha um conjunto de moedas M

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}, \forall\, m_i \in \mathbb{N}$$

- Suponha que $t(n)$ seja o meu troco ótimo
- Suponha agora que m_i é uma moeda que compõe uma sub-solução ótima $t(p)$
- Logo,

$$t(p) = (1 + t(p - m_i), m_i)$$

$$t(p) = (1 + t(p - m_i), m_i)$$

$$t(p) = (\underbrace{1}_{\text{1 moeda}} + \underbrace{t(p - m_i)}_{\text{subproblema}}, \underbrace{m_i}_{\text{moeda selecionada}})$$

Então, $t(p)$ é formado pela moeda m_i mais a solução do subproblema $t(p - m_i)$

$$t(p) = (1 + t(p - m_i), m_i)$$

1 moeda

subproblema

moeda selecionada

Então, $t(p)$ é formado pela moeda m_i mais a solução do subproblema $t(p - m_i)$

$$t(p) = (1 + t(p - m_i), m_i)$$

1 moeda

subproblema

moeda selecionada

$$M = \{1, 2, 5\}$$

$$p = 10$$

$$m_i = 5$$

$$t(p) = 1 + t(10 - 5) = 1 + t(5)$$

$$t(p) = (1 + t(5), m_i)$$

Fórmula global

$$t(n)\begin{cases}1 + min_{i:m_i \leq n} t(n - m_i) & \text{se } n > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Fórmula compacta para um troco p qualquer

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Não pegar a moeda m_i e passar para a próxima moeda m_{i+1}

Pegar a moeda m_i

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$

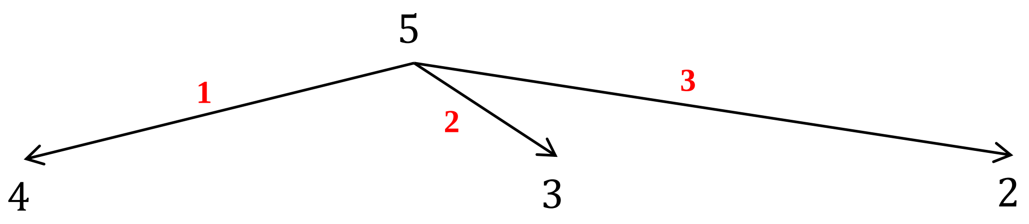
$M = \{1,2,3\}$

5

$n = 5$

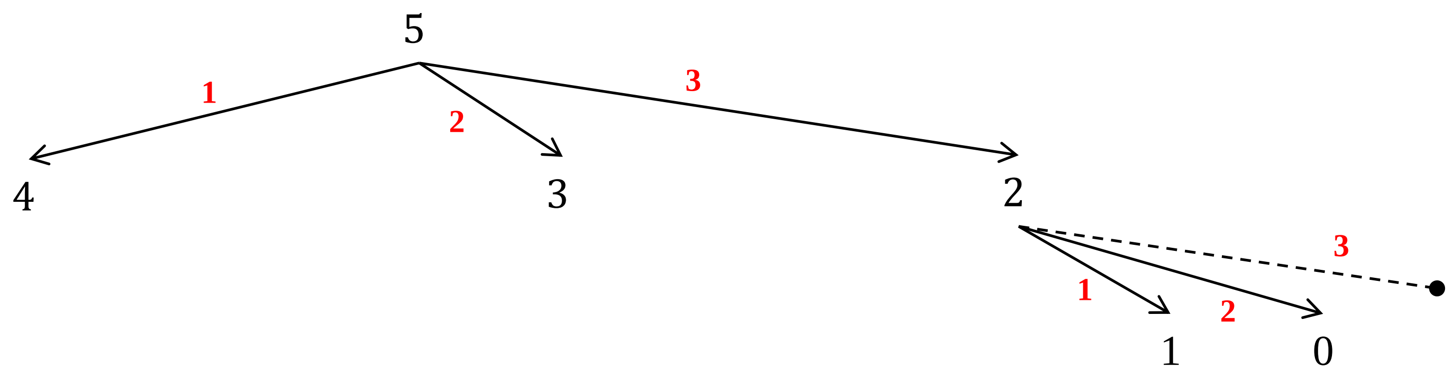
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



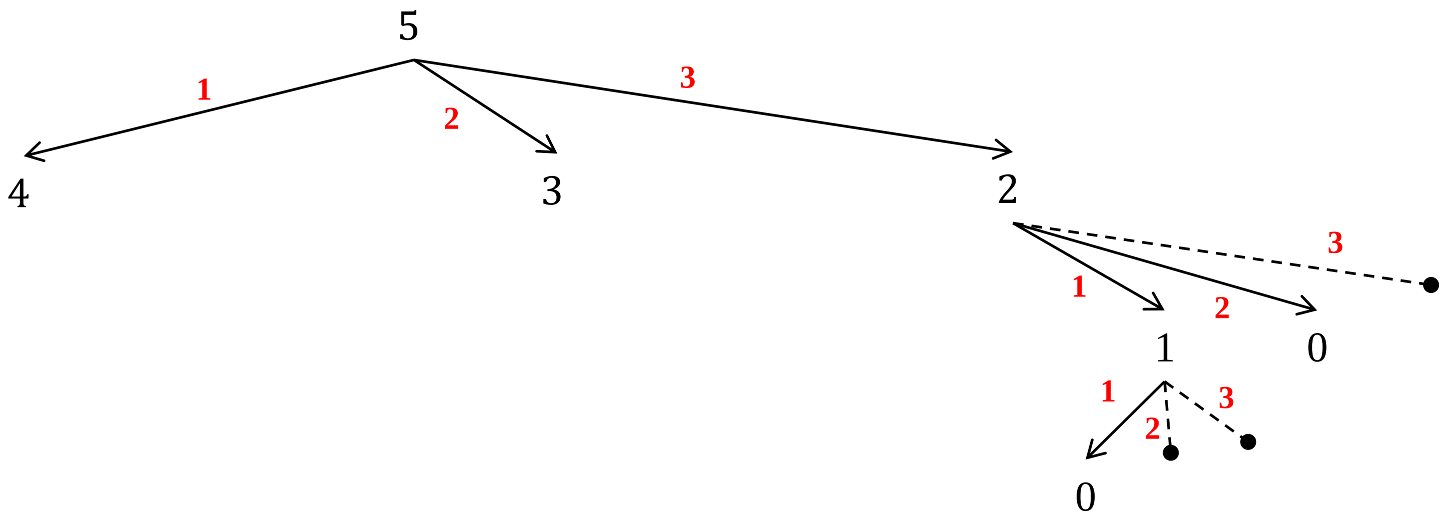
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



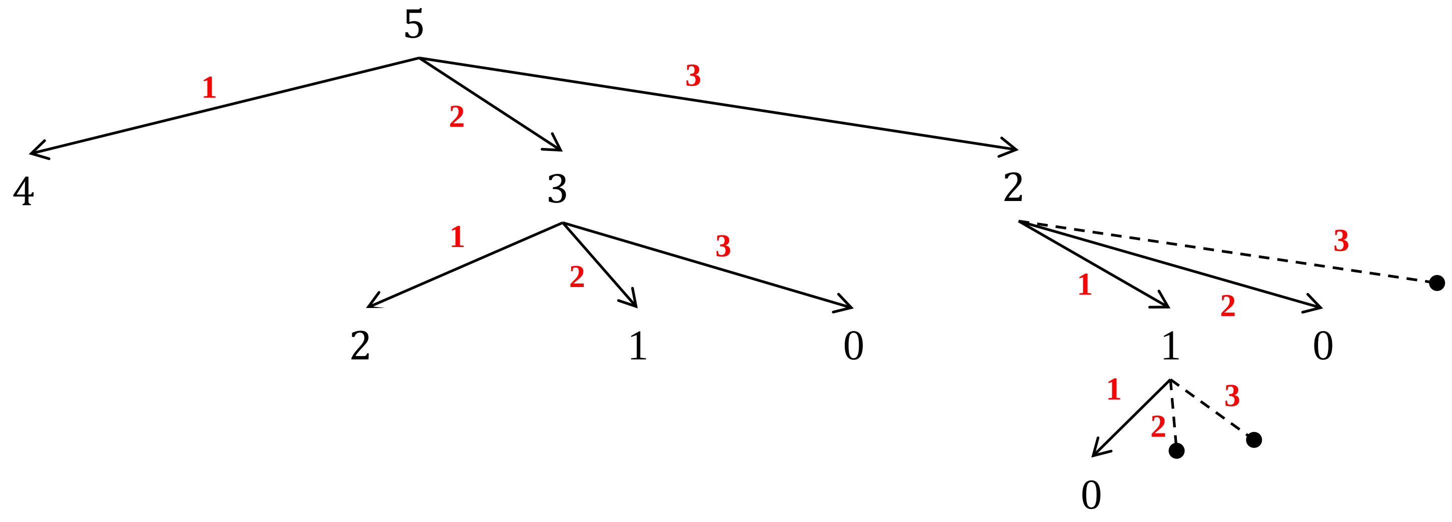
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



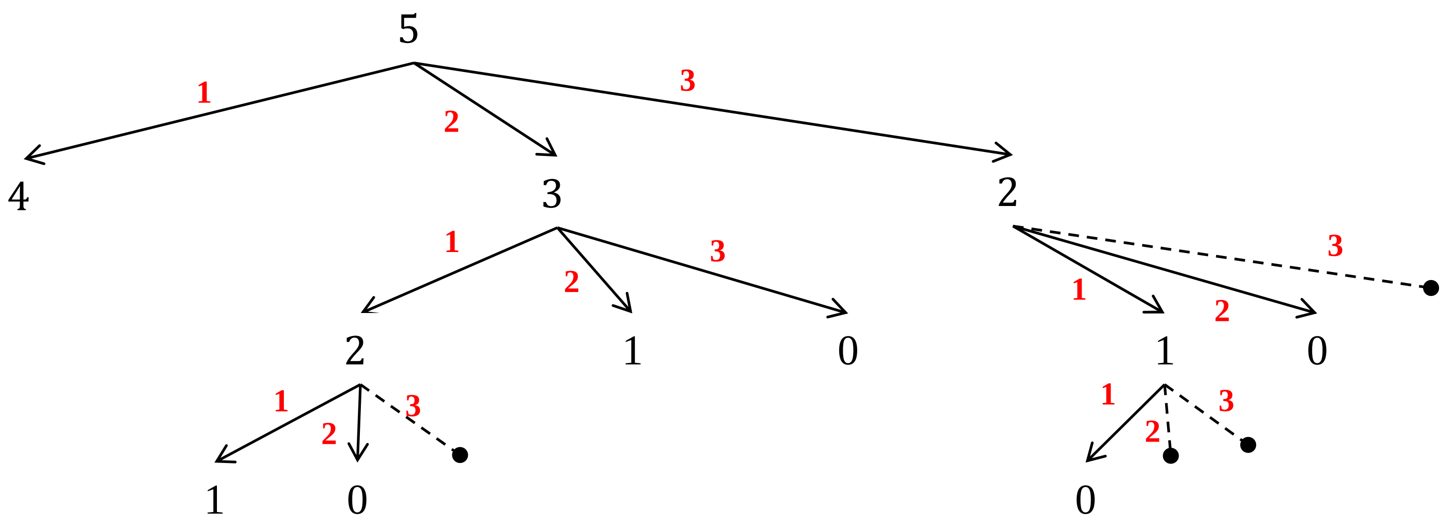
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



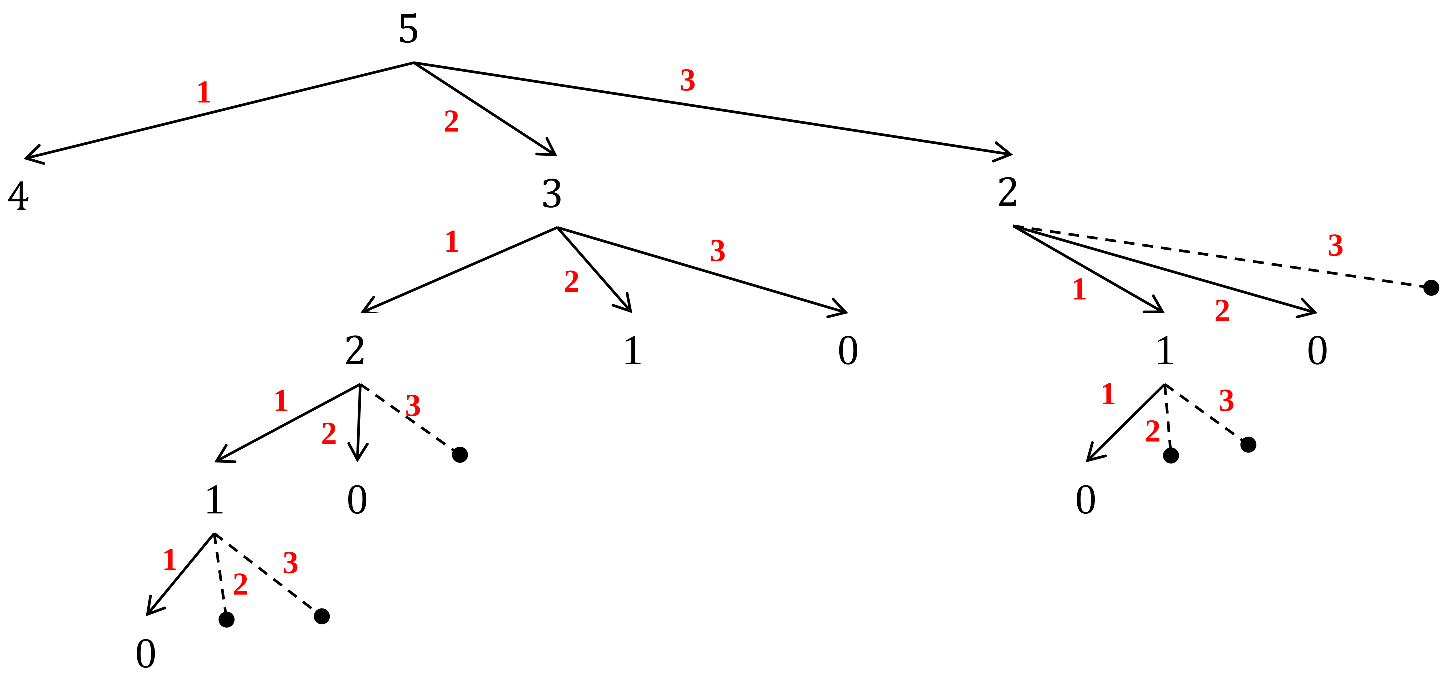
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



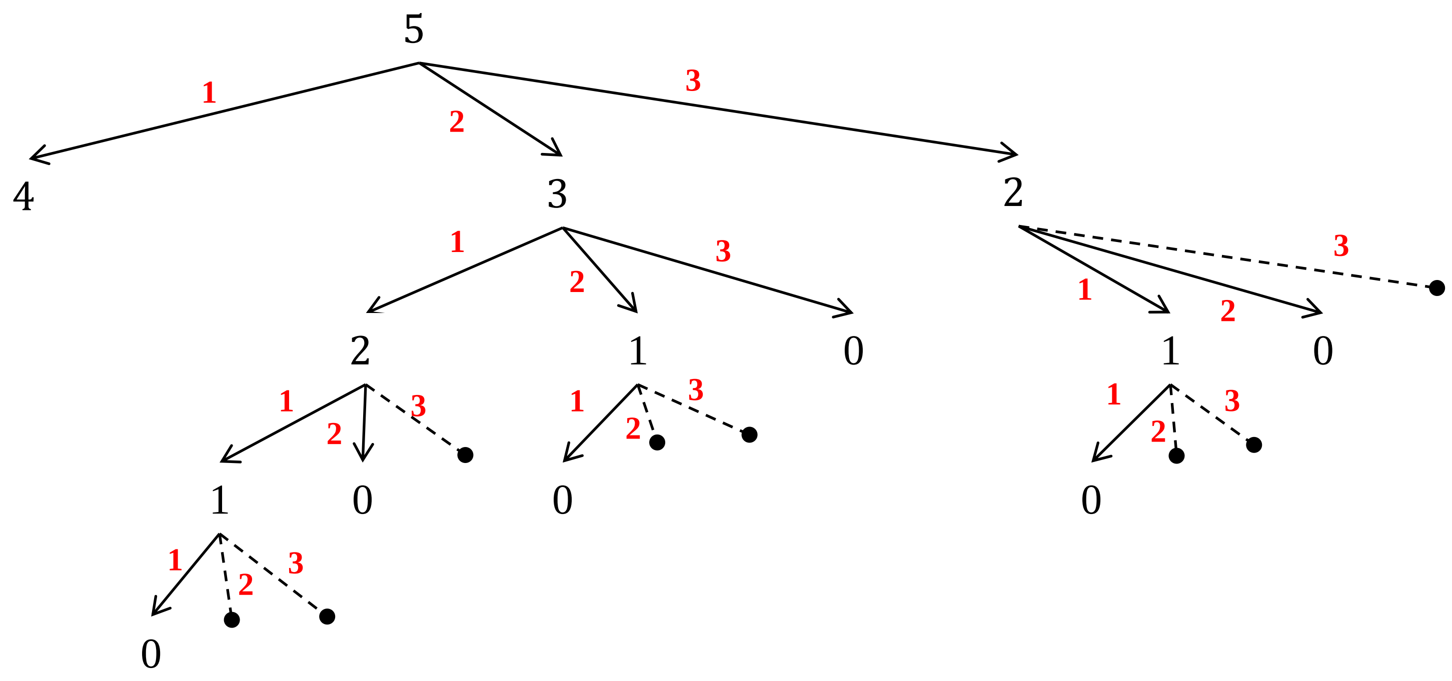
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



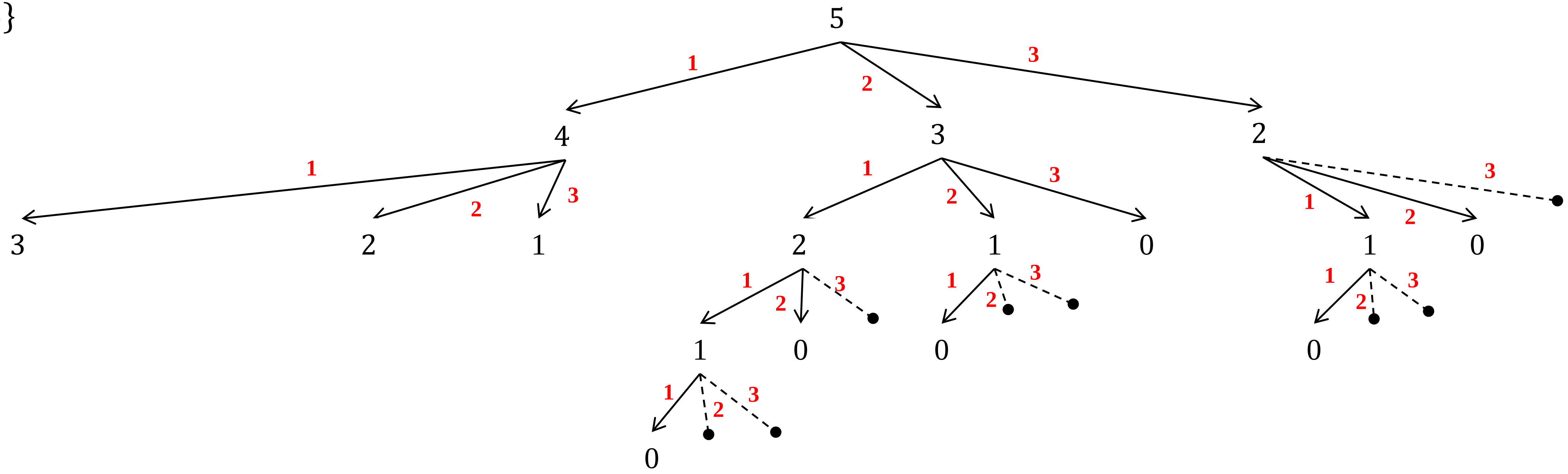
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



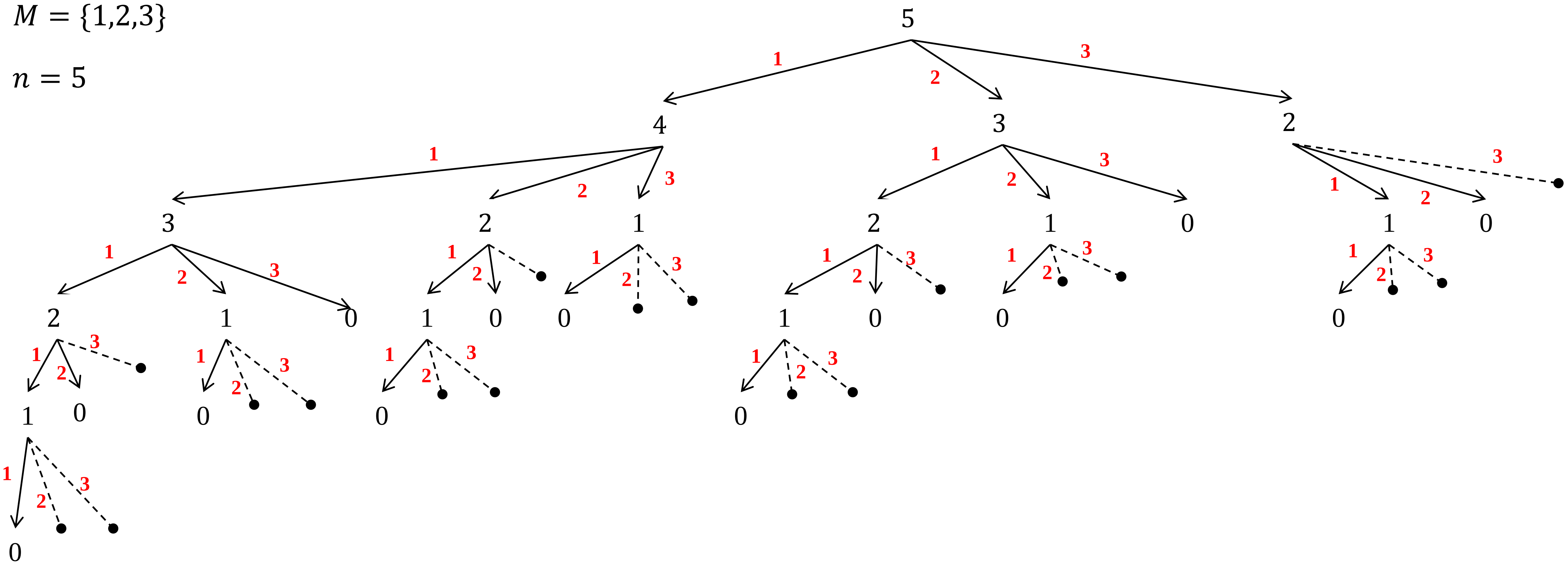
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



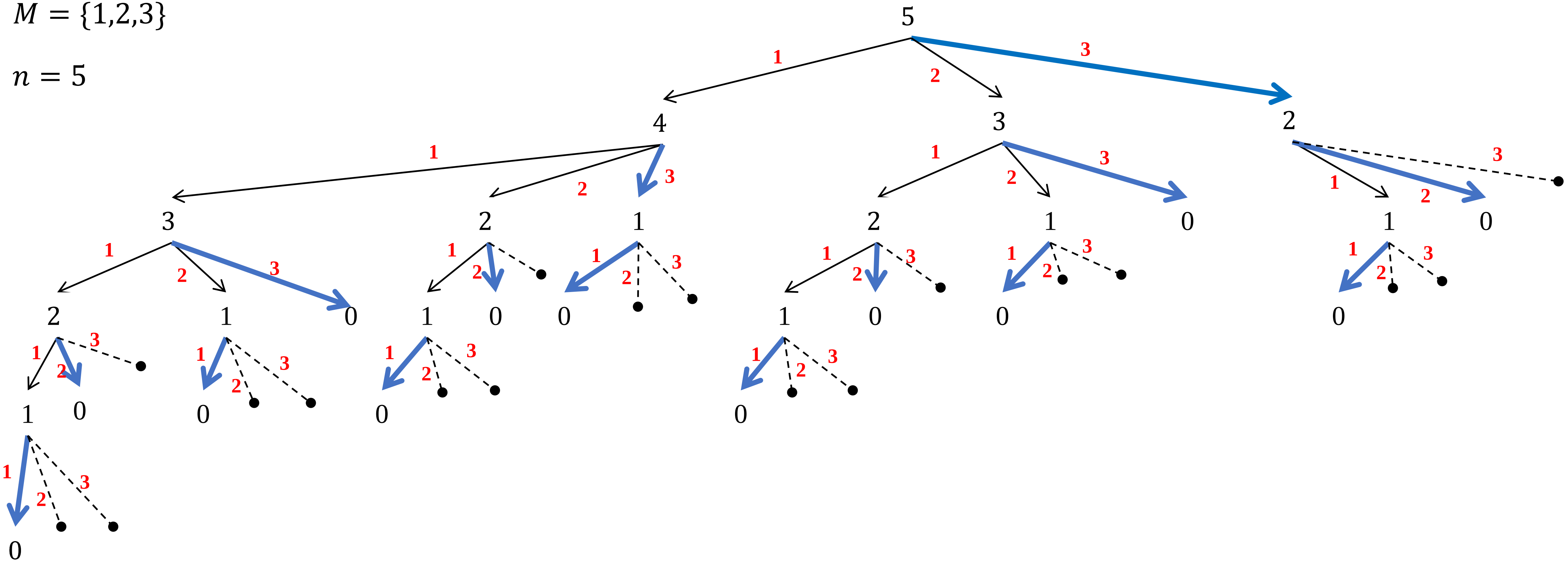
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



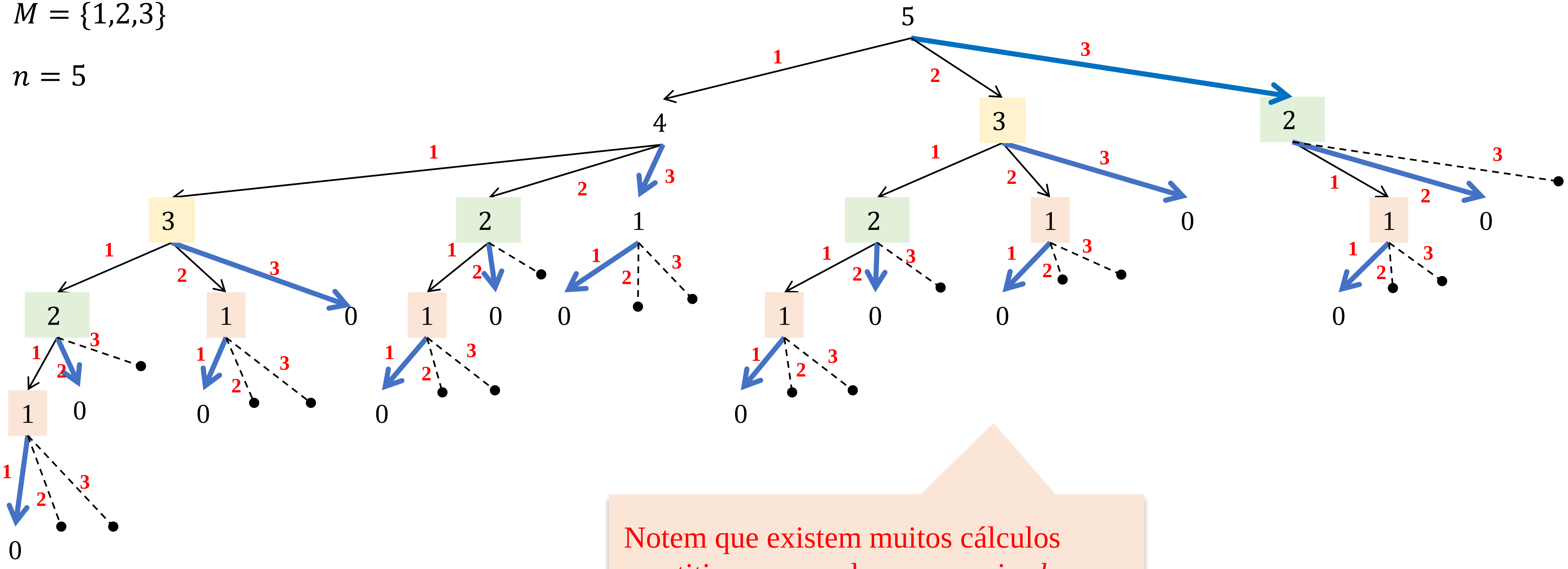
$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$


5
1
2
3
4
3
2
1
2
3
1
2
3
1
2
3
3
2
1
2
1
0
1
0
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
2
1
0
1
0
0
1
0
0
0
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
0
0
0
0
1
2
3
0

$M = \{1,2,3\}$

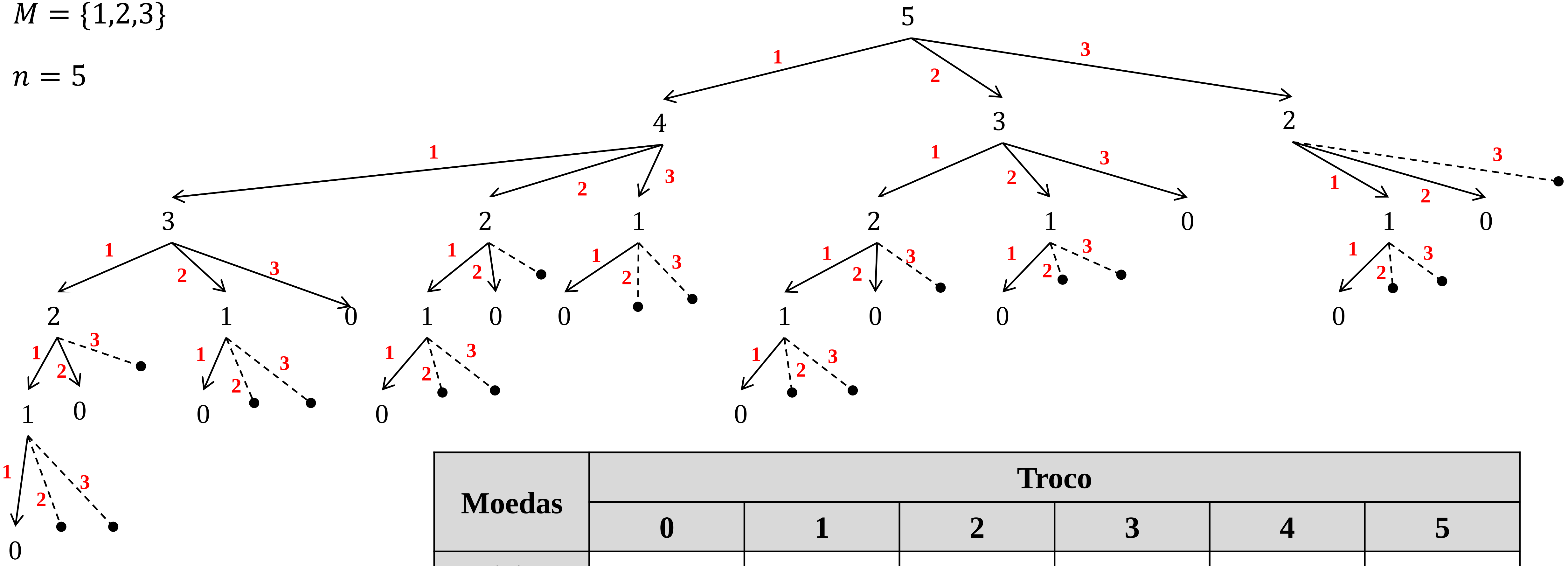
$n = 5$



Notem que existem muitos cálculos repetitivos que pode ser *memoizados*

$M = \{1,2,3\}$

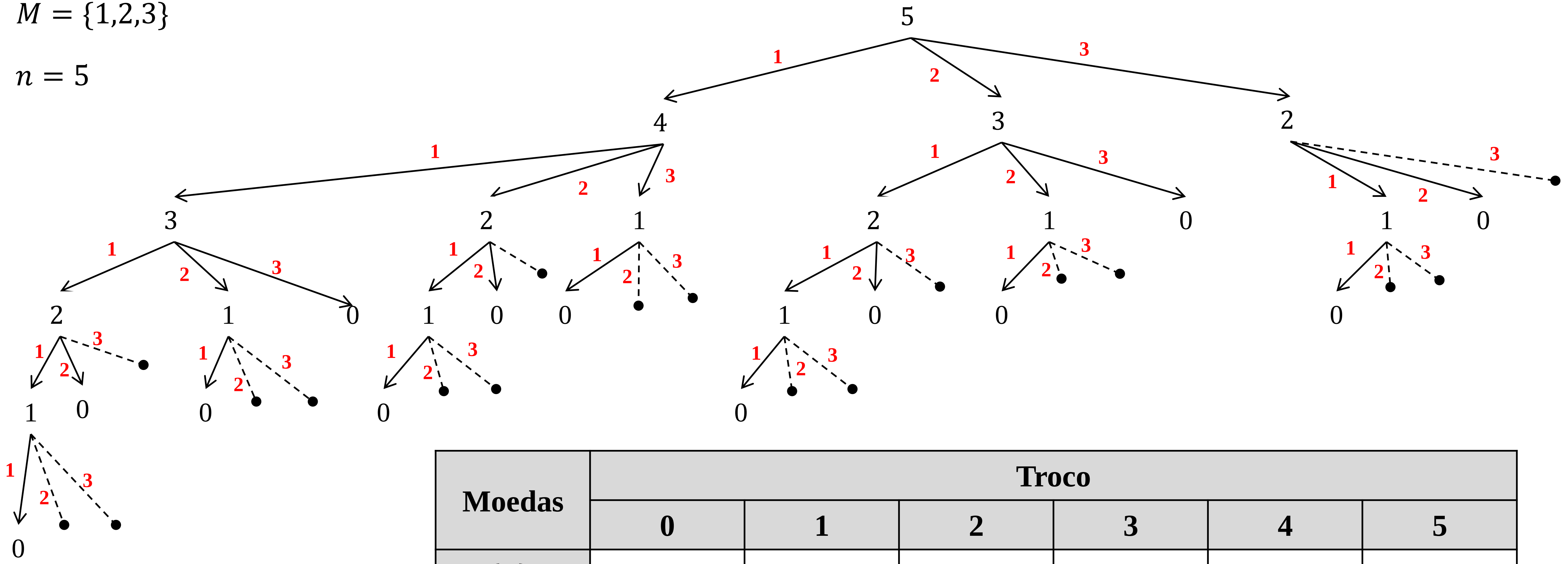
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$						
$\{\mathbf{1,2}\}$						
$\{\mathbf{1,2,3}\}$						

$M = \{1,2,3\}$

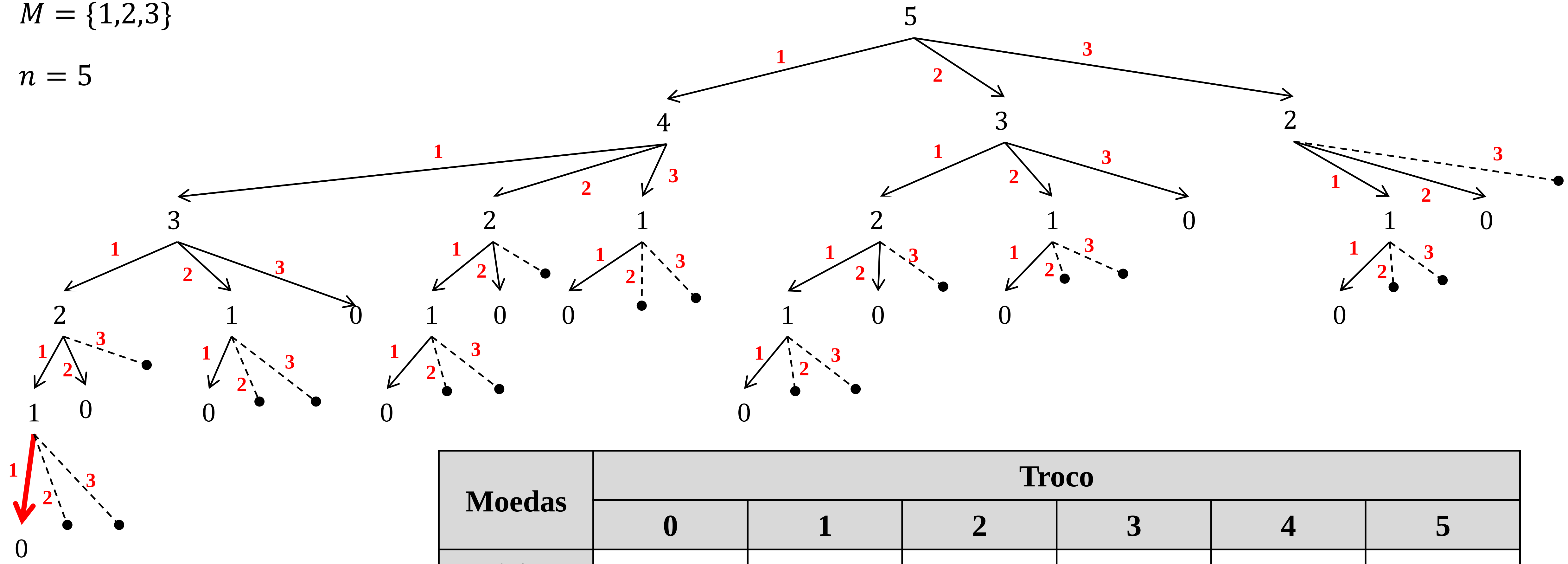
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$	0					
$\{\mathbf{1,2}\}$	0					
$\{\mathbf{1,2,3}\}$	0					

$M = \{1,2,3\}$

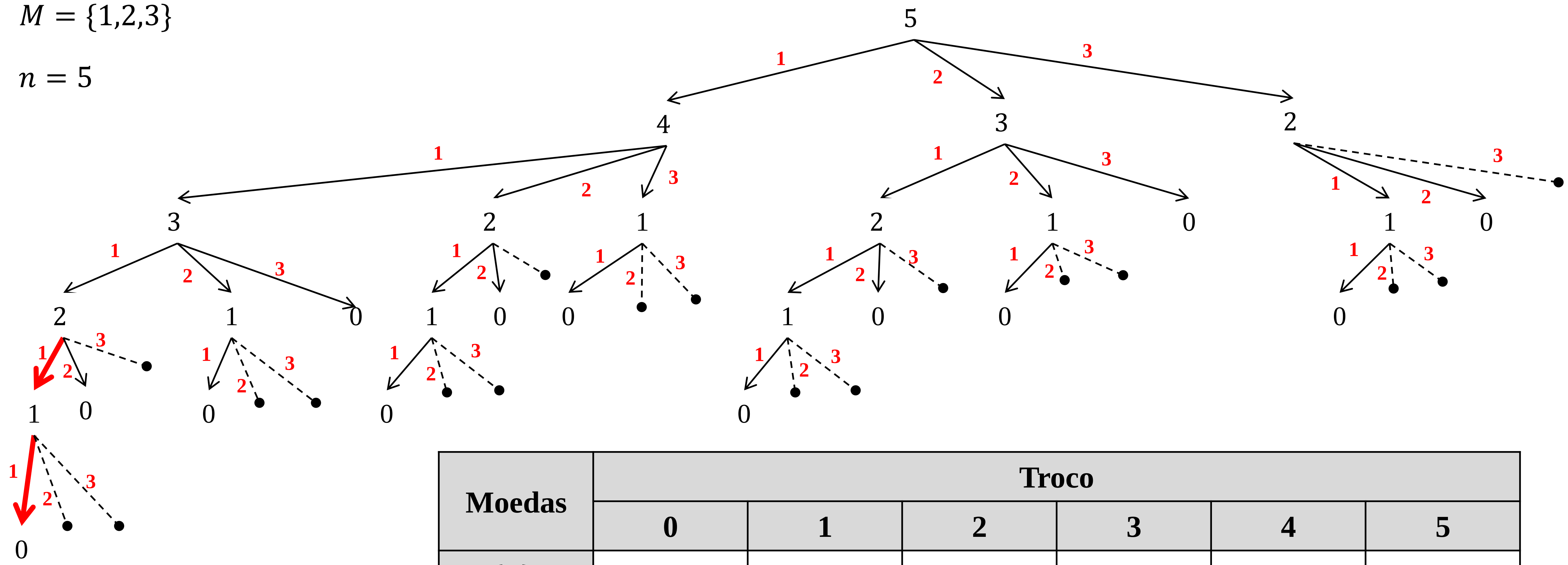
$n = 5$



Moedas	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1				
$\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$	0					
$\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$	0					

$M = \{1,2,3\}$

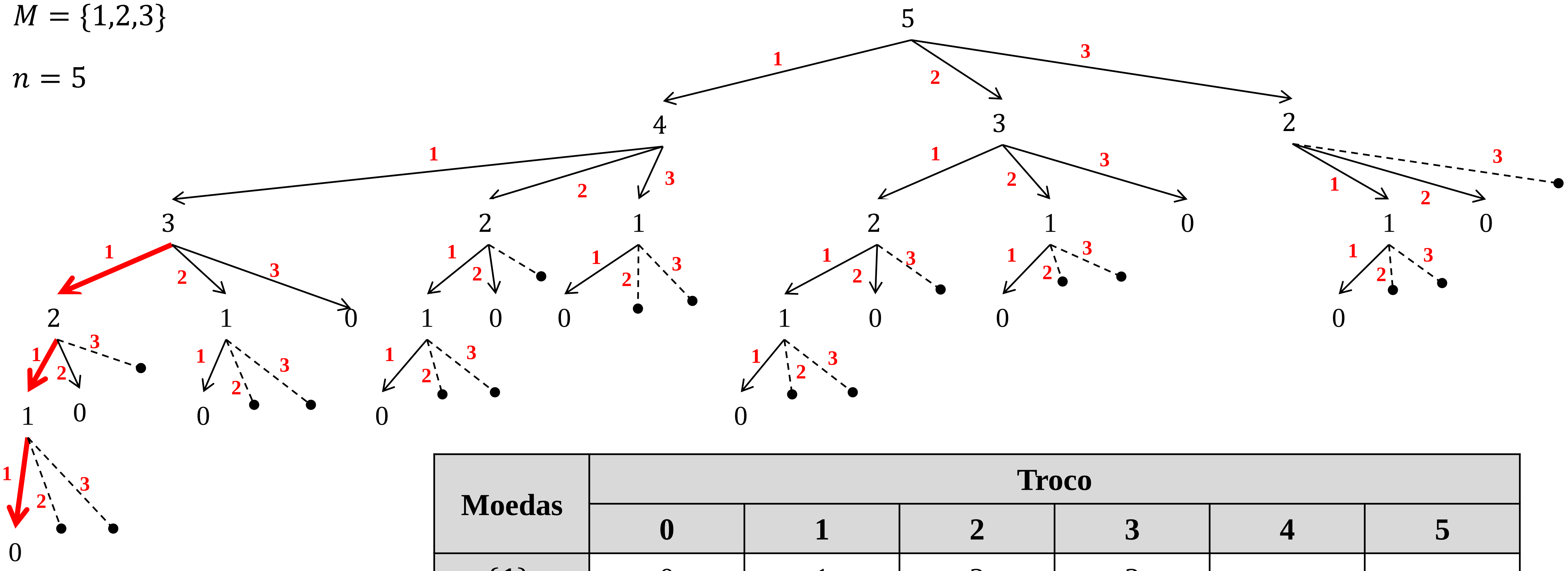
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2			
$\{\mathbf{1,2}\}$	0					
$\{\mathbf{1,2,3}\}$	0					

$M = \{1,2,3\}$

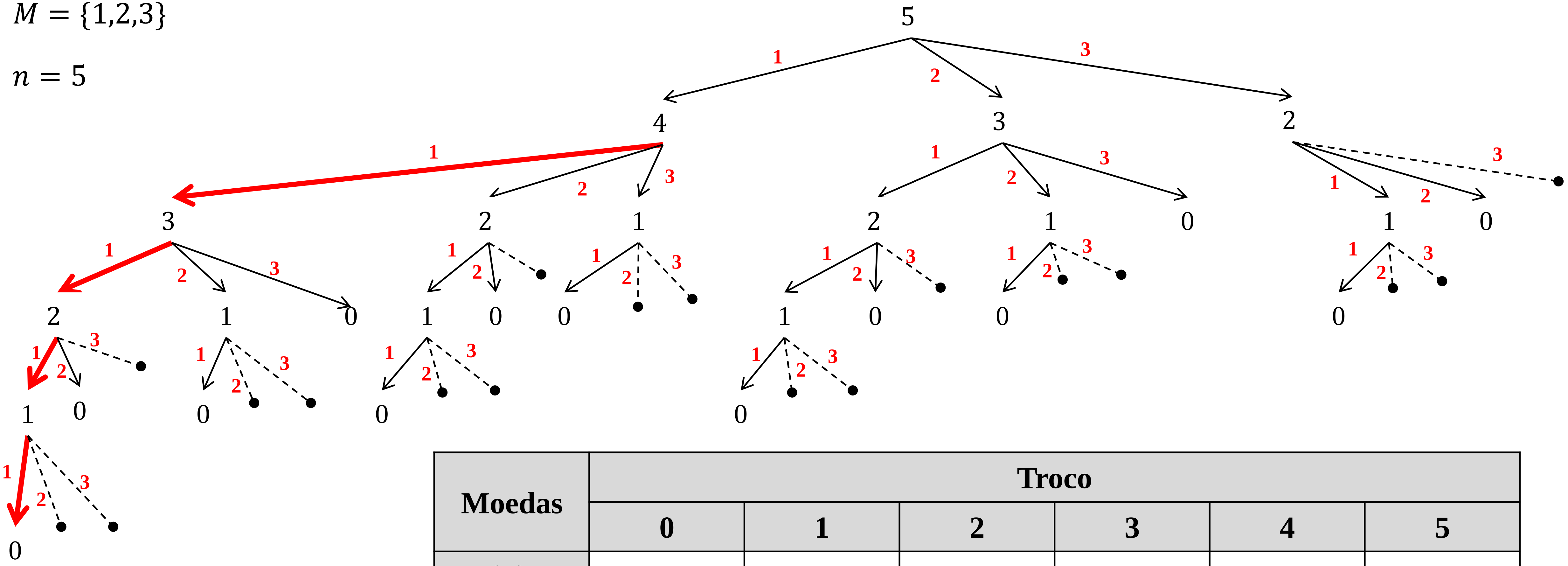
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3		
$\{\mathbf{1,2}\}$	0					
$\{\mathbf{1,2,3}\}$	0					

$M = \{1,2,3\}$

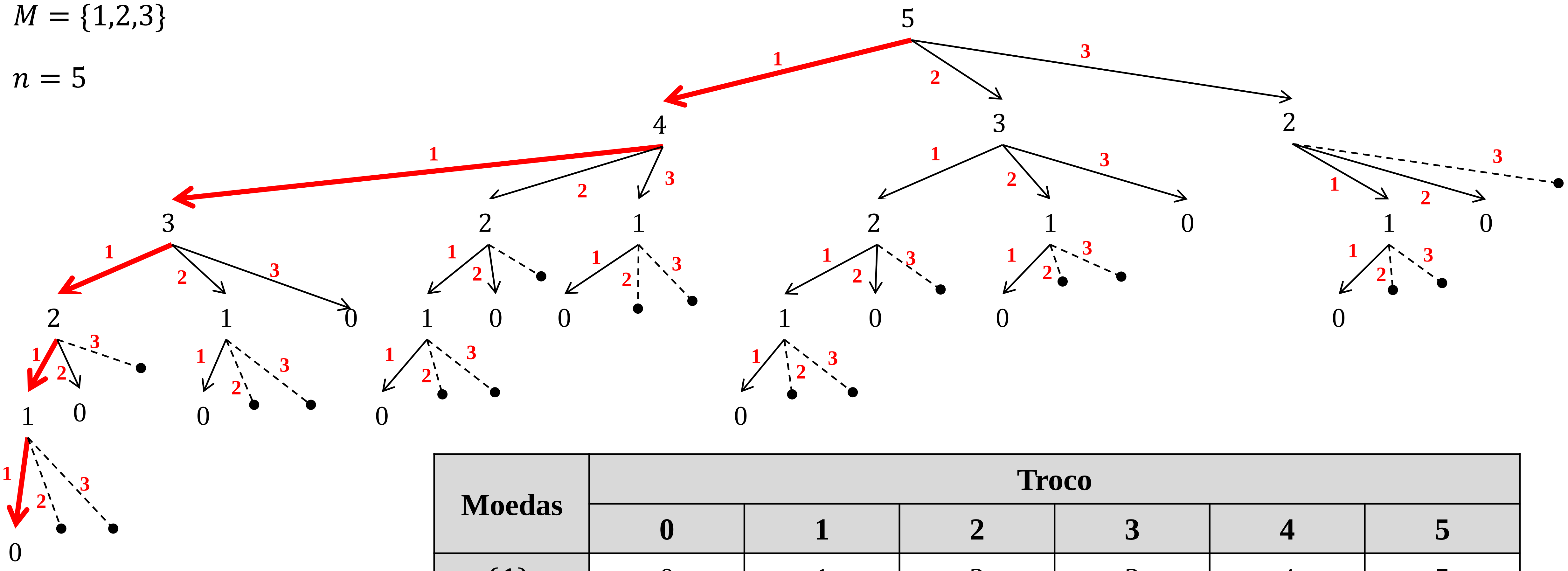
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	
$\{\mathbf{1,2}\}$	0					
$\{\mathbf{1,2,3}\}$	0					

$M = \{1,2,3\}$

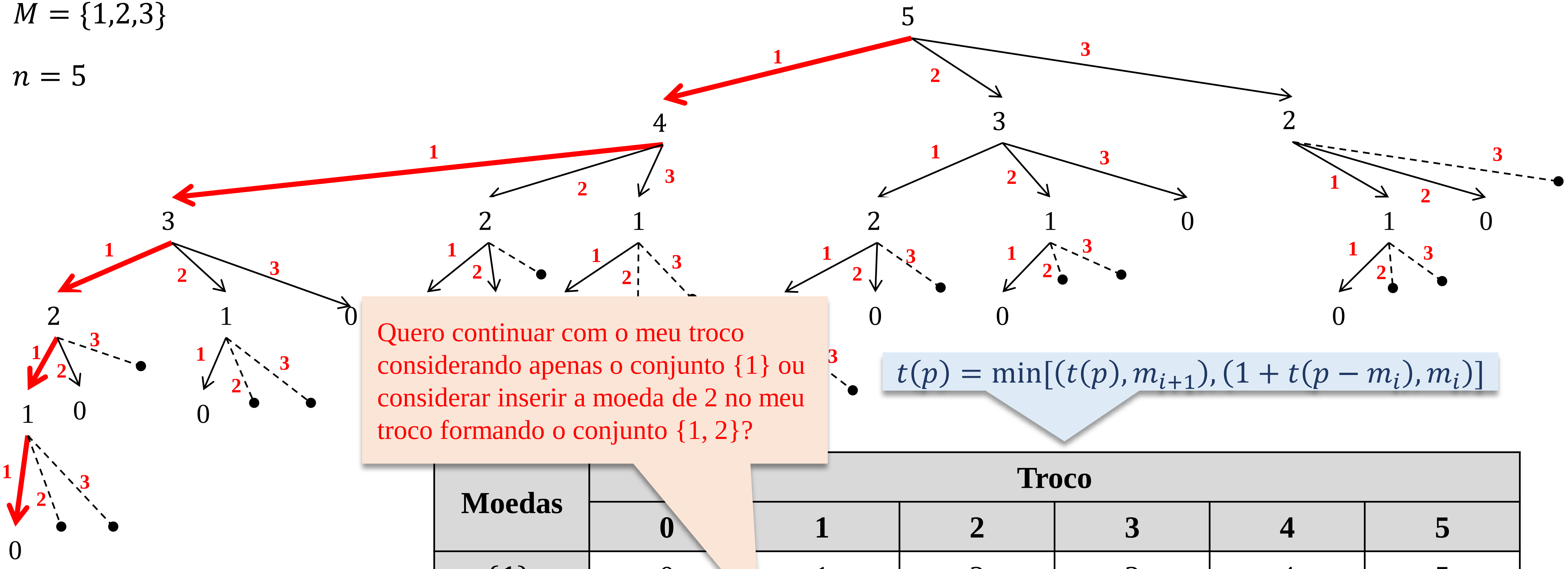
$n = 5$



Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0					
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



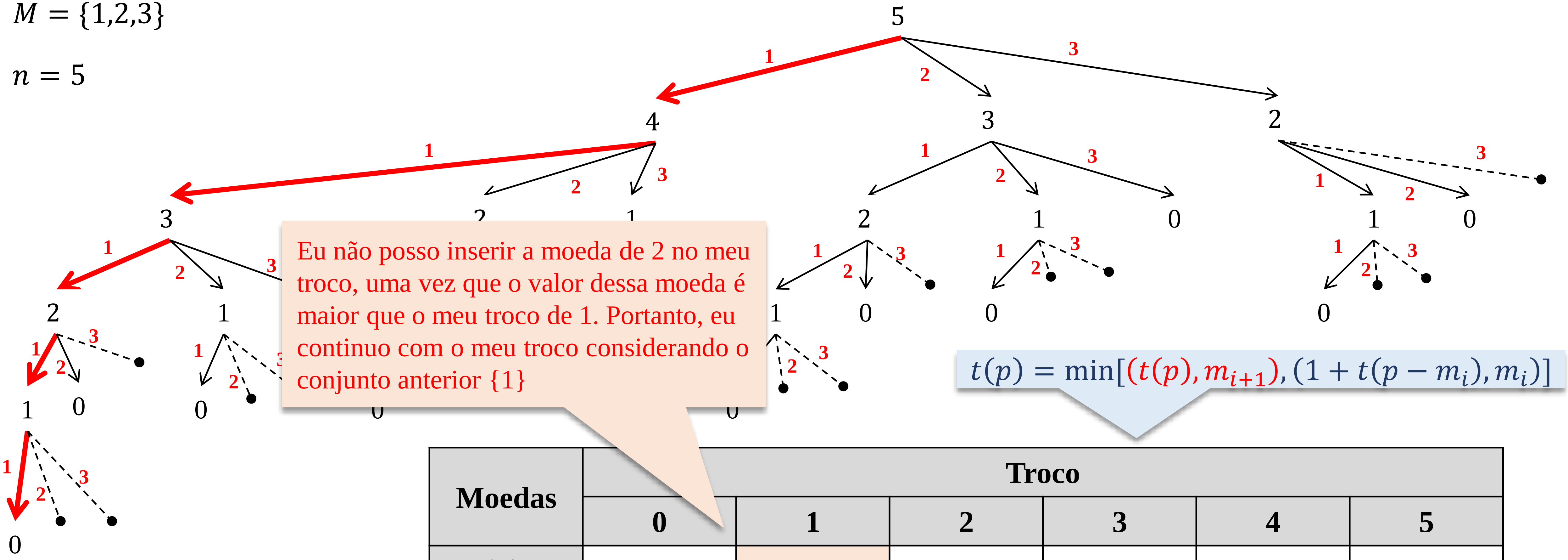
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1} ou considerar inserir a moeda de 2 no meu troco formando o conjunto {1, 2}?

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	?				
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



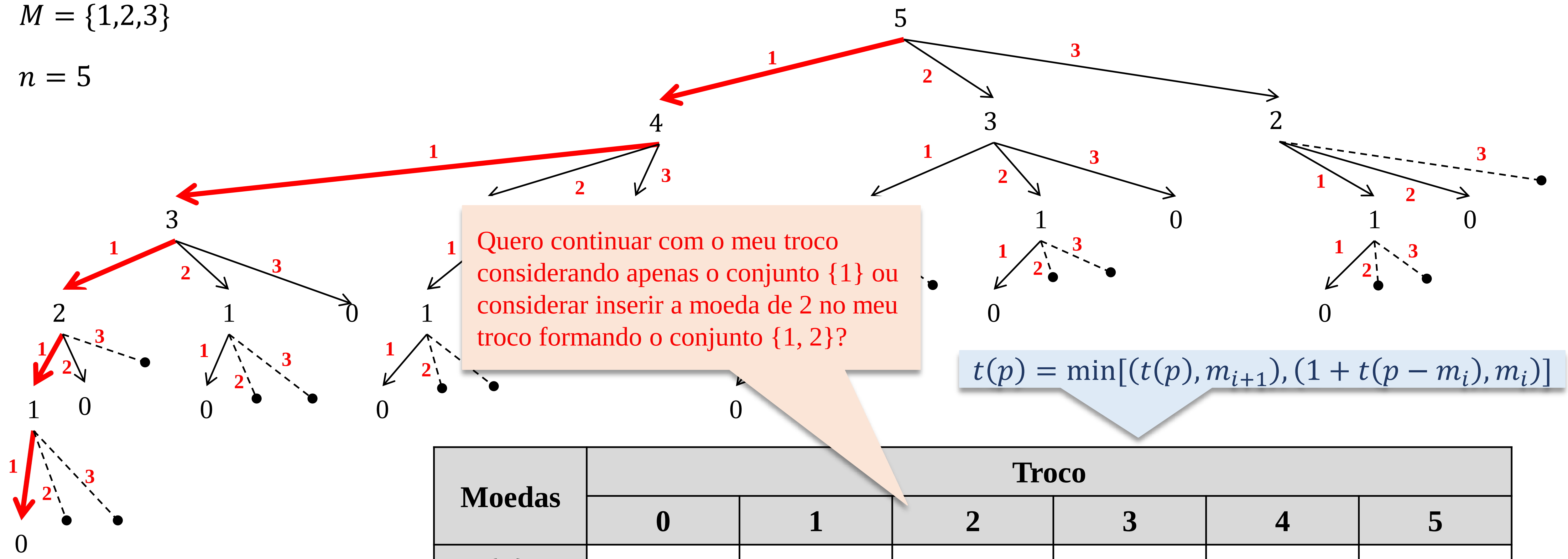
Eu não posso inserir a moeda de 2 no meu troco, uma vez que o valor dessa moeda é maior que o meu troco de 1. Portanto, eu continuo com o meu troco considerando o conjunto anterior {1}

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1 ✔	2	3	4	5
{1, 2}	0	1				
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



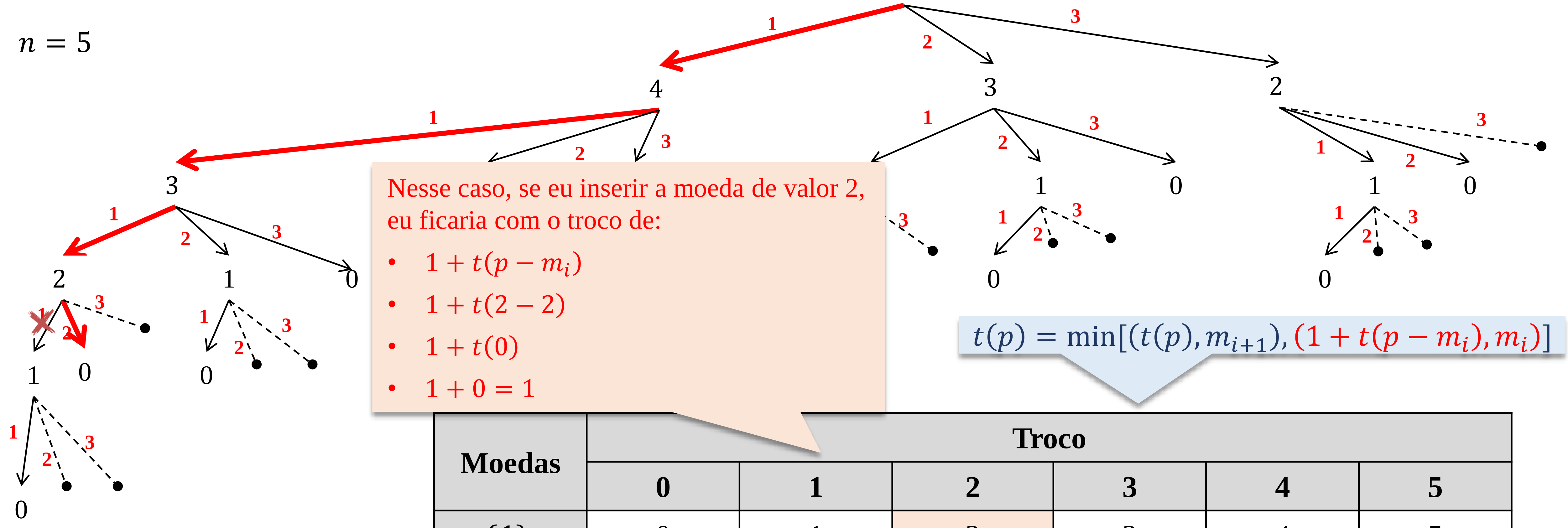
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1} ou considerar inserir a moeda de 2 no meu troco formando o conjunto {1, 2}?

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	?			
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

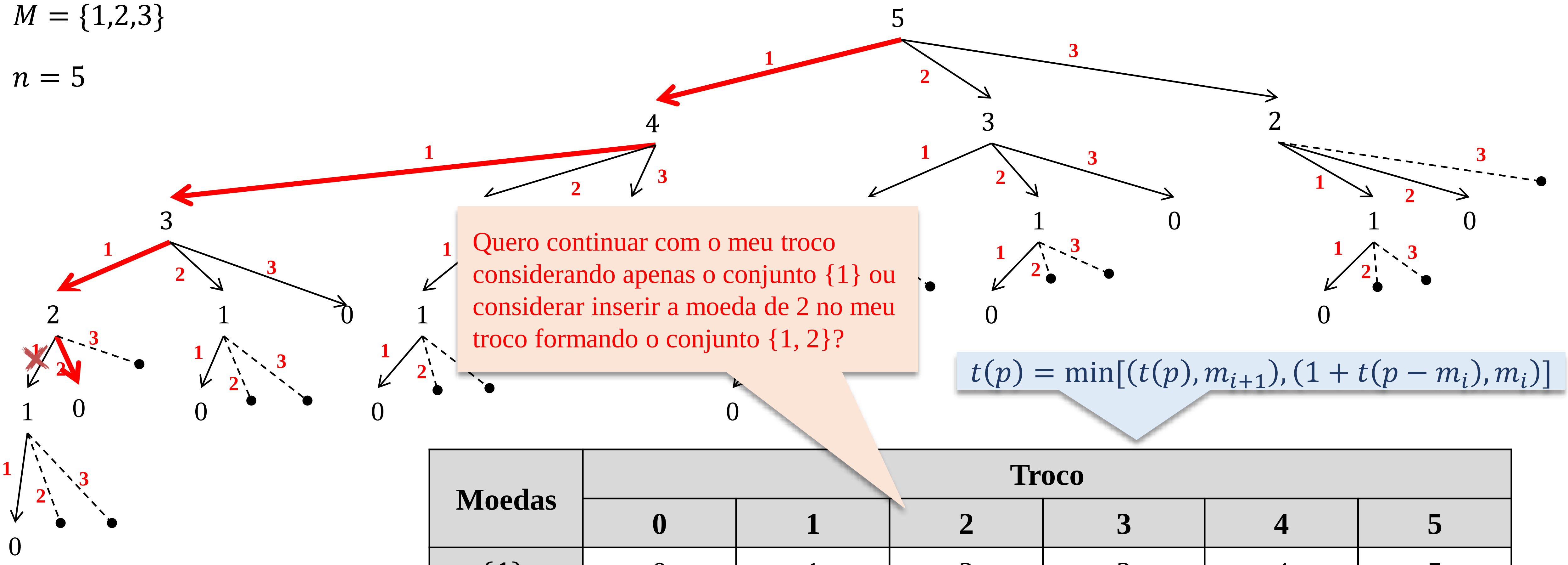
- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(2 - 2)$
- $1 + t(0)$
- $1 + 0 = 1$

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	✓ 0	1	1			
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



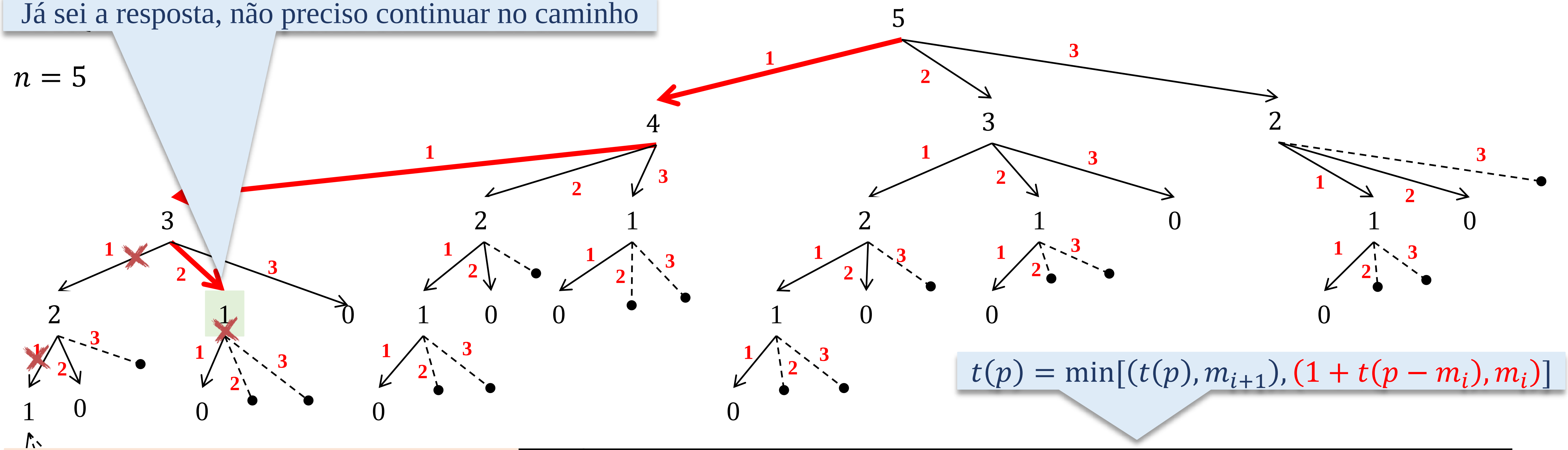
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1} ou considerar inserir a moeda de 2 no meu troco formando o conjunto {1, 2}?

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	**?**		
{1, 2, 3}	0					

Já sei a resposta, não preciso continuar no caminho

$n = 5$



$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

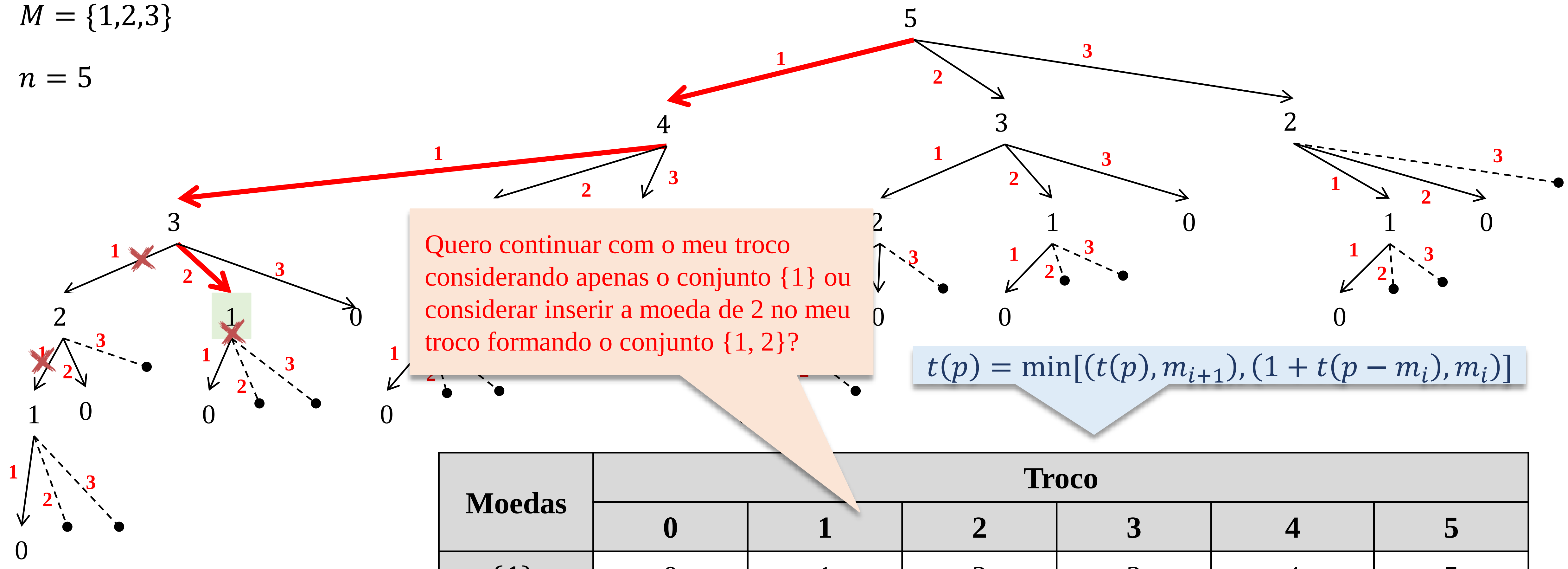
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(3 - 2)$
- $1 + t(1)$
- $1 + 1 = 2$

das	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	2		
3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



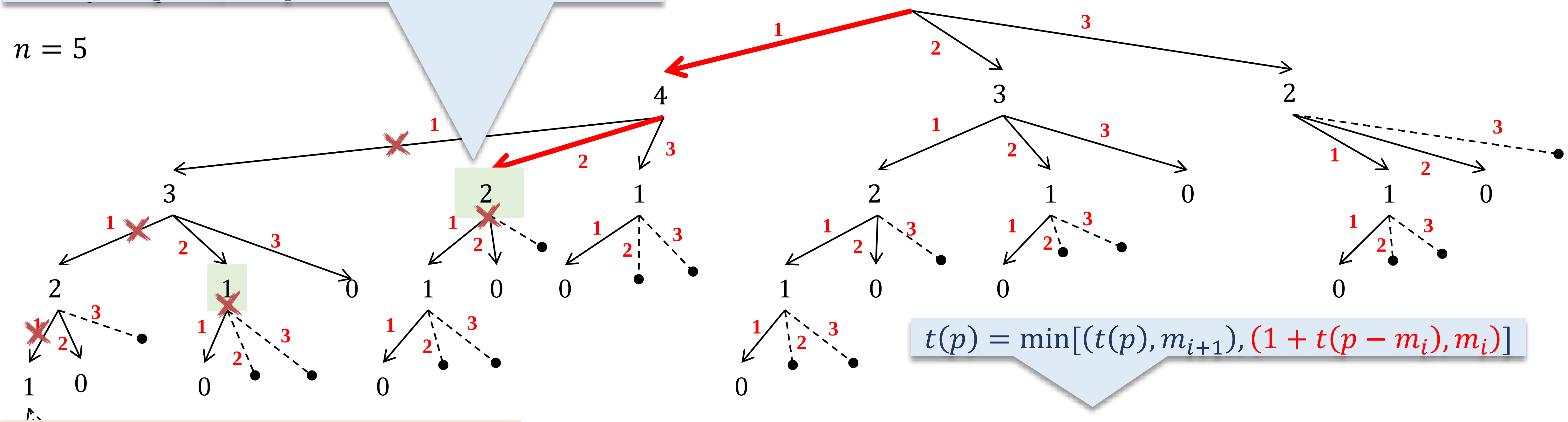
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1} ou considerar inserir a moeda de 2 no meu troco formando o conjunto {1, 2}?

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	?	
{1, 2, 3}	0					

Já sei a resposta, não preciso continuar no caminho

$n = 5$



$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

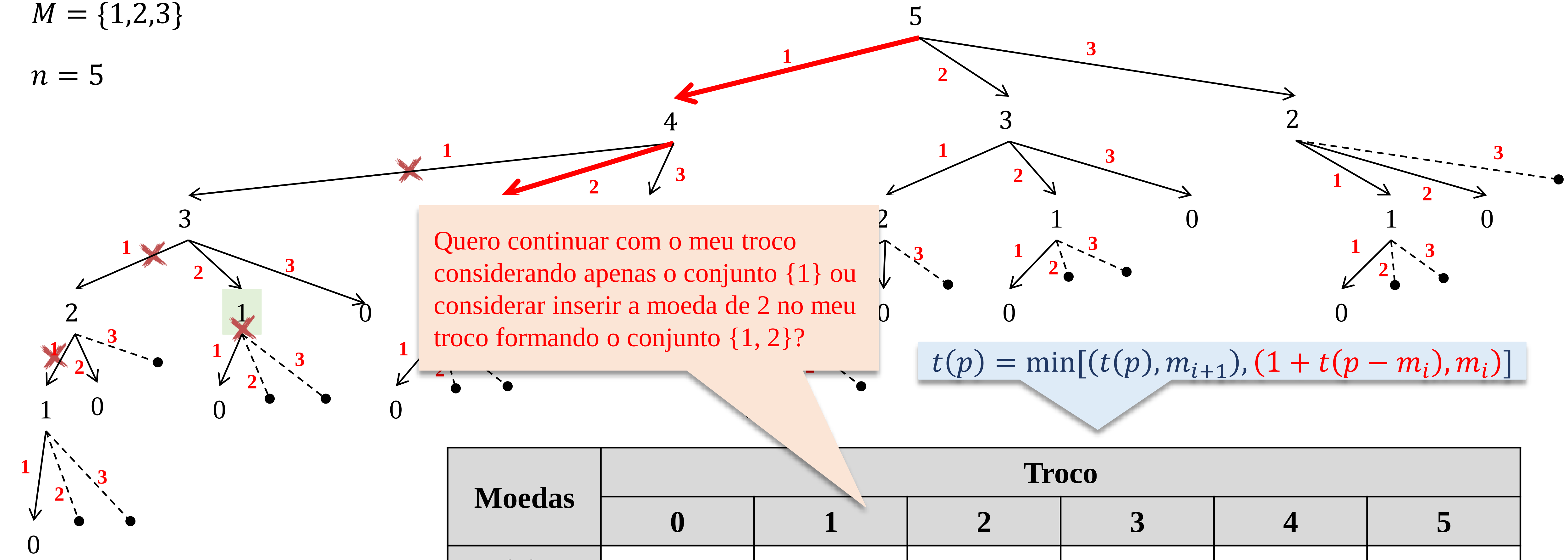
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(4 - 2)$
- $1 + t(2)$
- $1 + 1 = 2$

das	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	2	2	
, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$

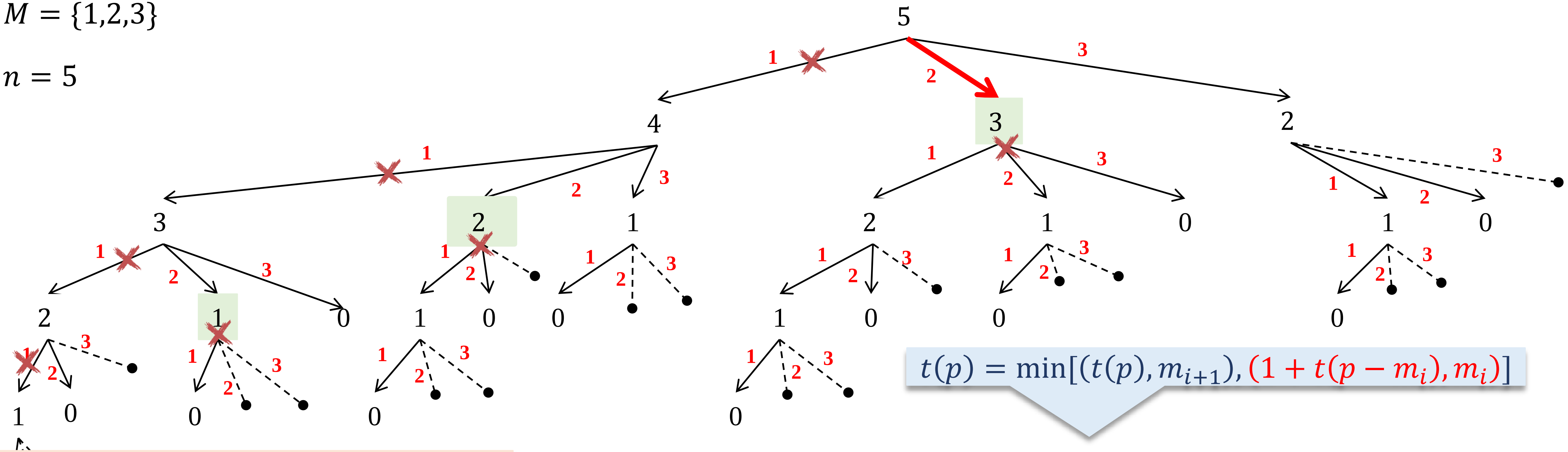


$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	**?**
{1, 2, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

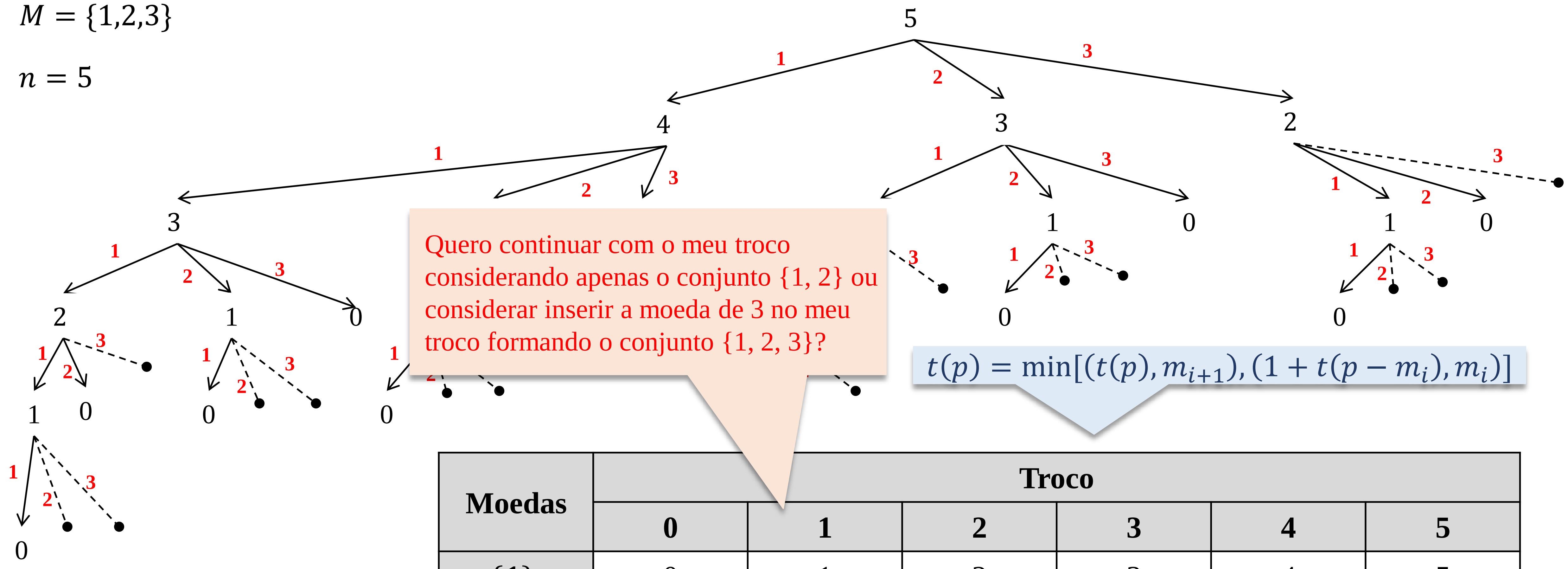
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(5 - 2)$
- $1 + t(3)$
- $1 + 2 = 3$

das	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	✔ 2	2	3
, 3}	0					

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



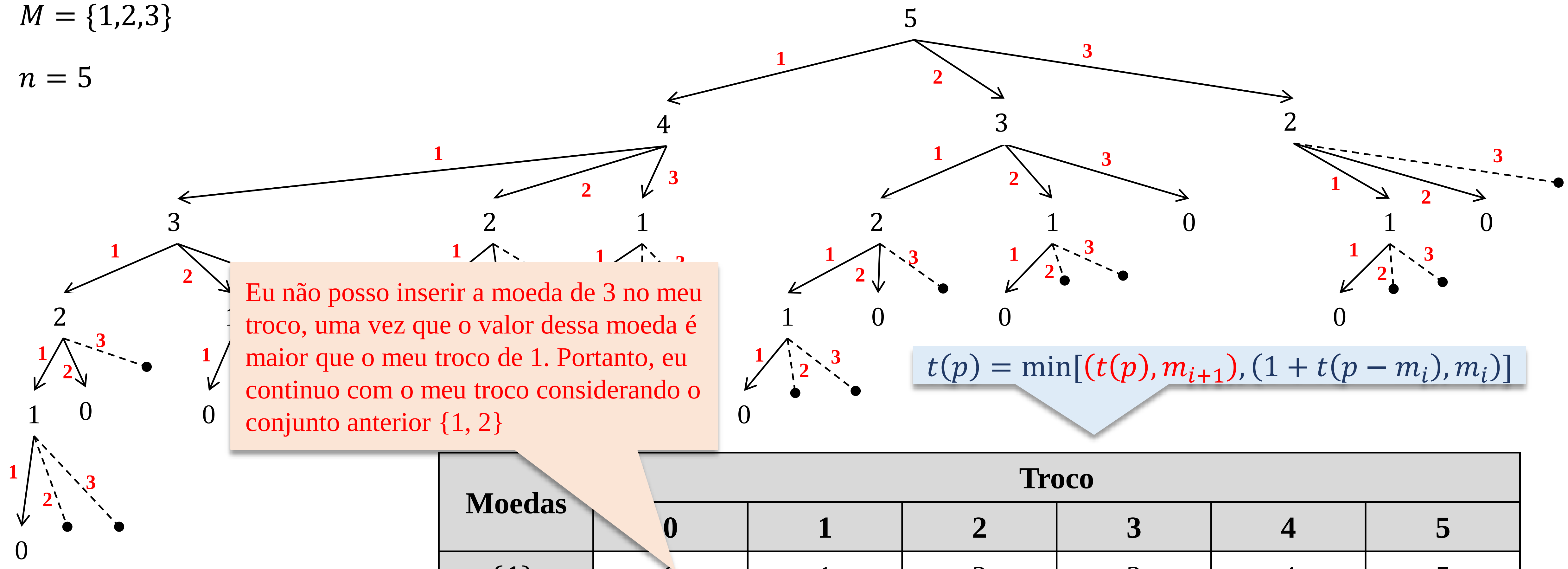
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1, 2} ou considerar inserir a moeda de 3 no meu troco formando o conjunto {1, 2, 3}?

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	?				

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



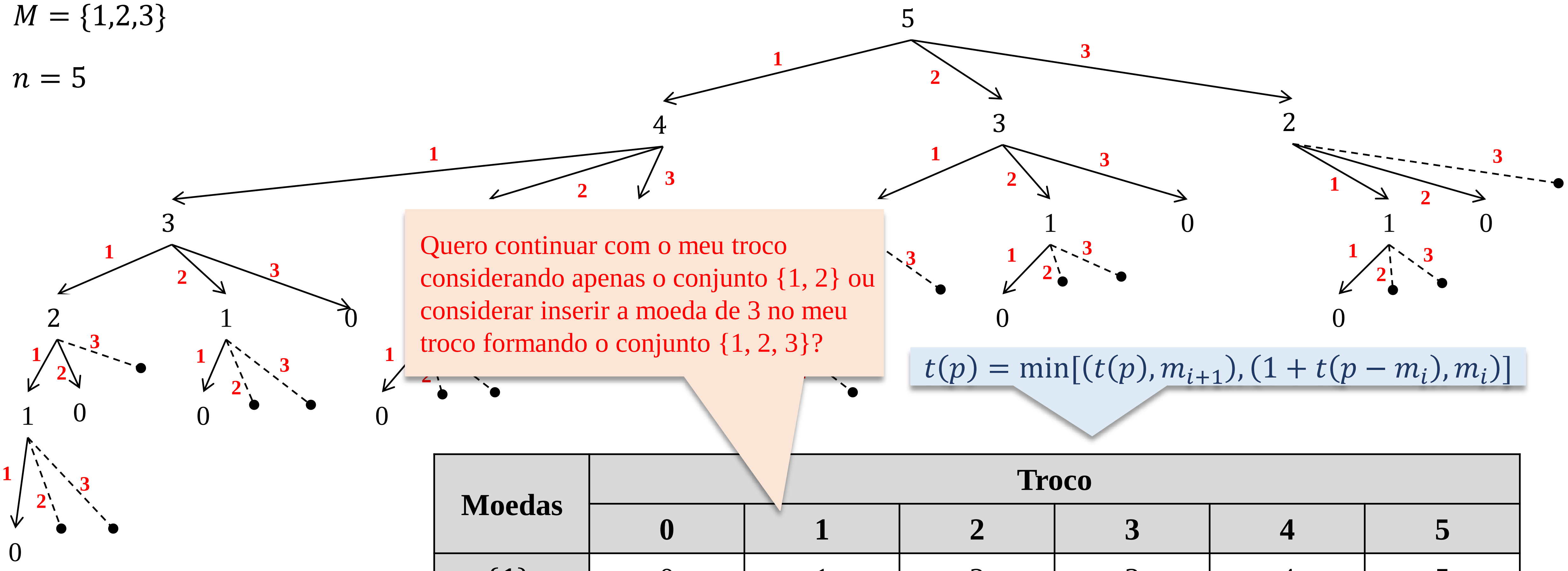
Eu não posso inserir a moeda de 3 no meu troco, uma vez que o valor dessa moeda é maior que o meu troco de 1. Portanto, eu continuo com o meu troco considerando o conjunto anterior {1, 2}

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1 ✓	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1				

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



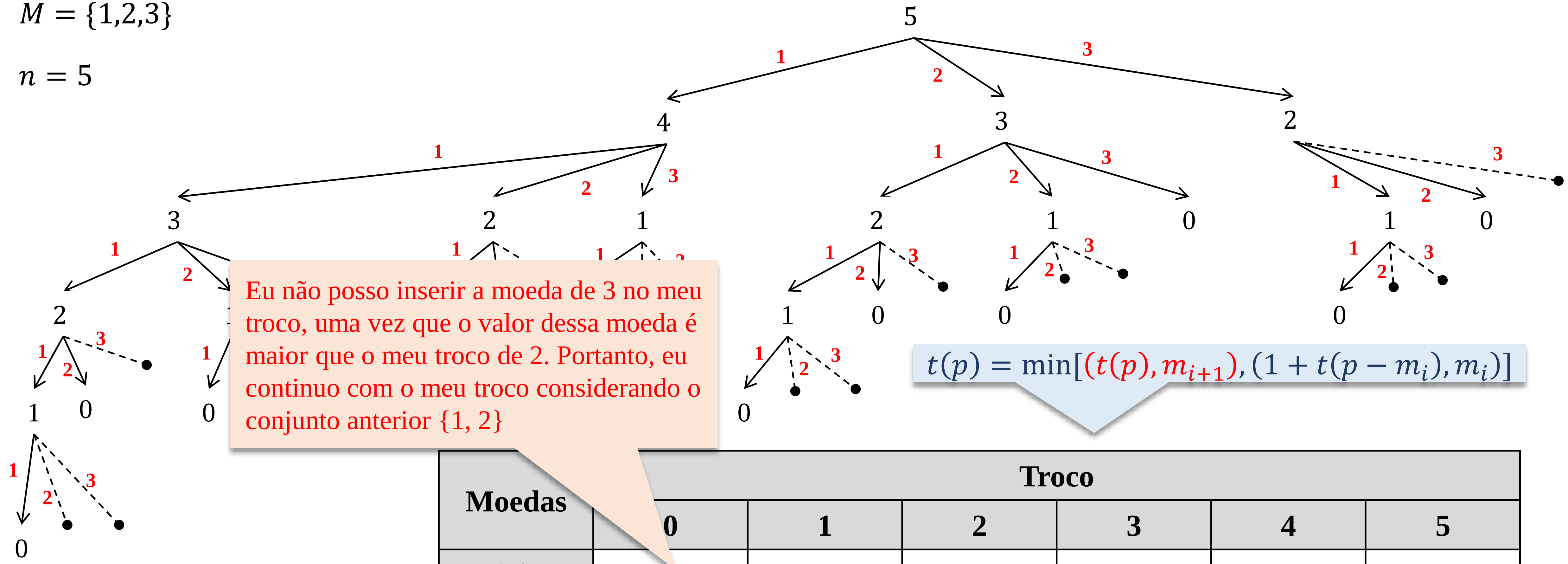
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1, 2} ou considerar inserir a moeda de 3 no meu troco formando o conjunto {1, 2, 3}?

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	**?**			

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



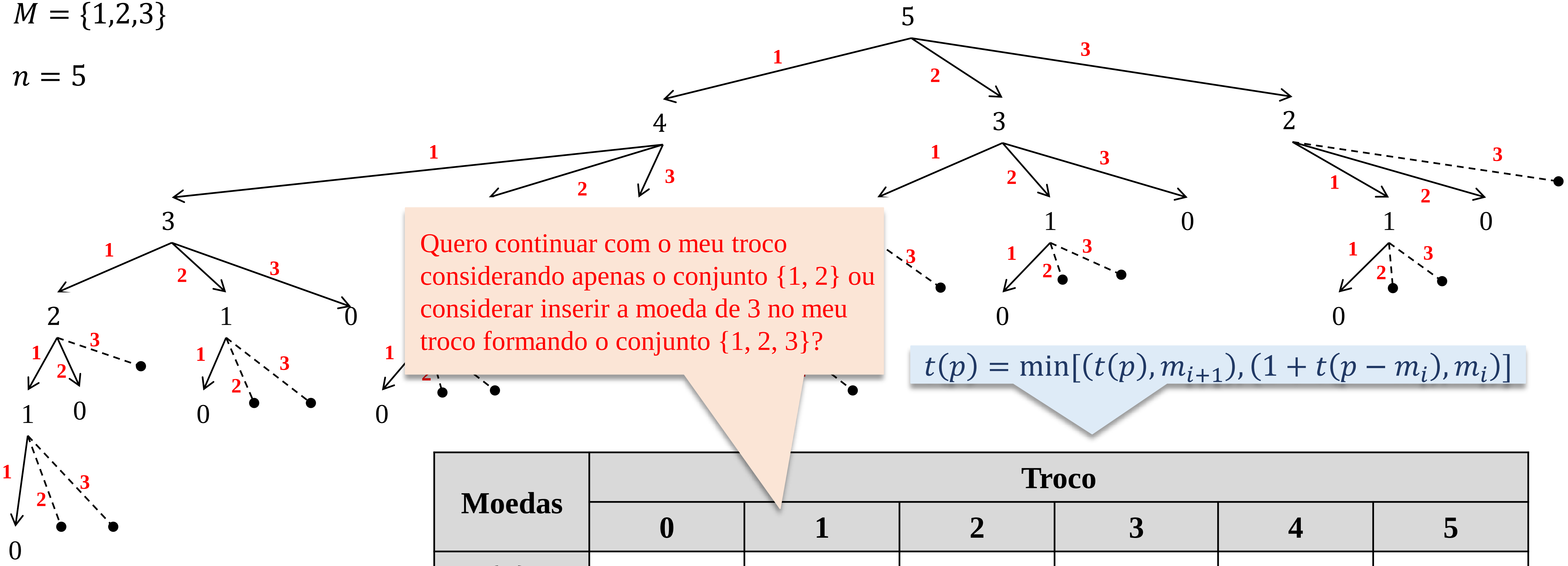
Eu não posso inserir a moeda de 3 no meu troco, uma vez que o valor dessa moeda é maior que o meu troco de 2. Portanto, eu continuo com o meu troco considerando o conjunto anterior {1, 2}

$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1 ✓	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	1			

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



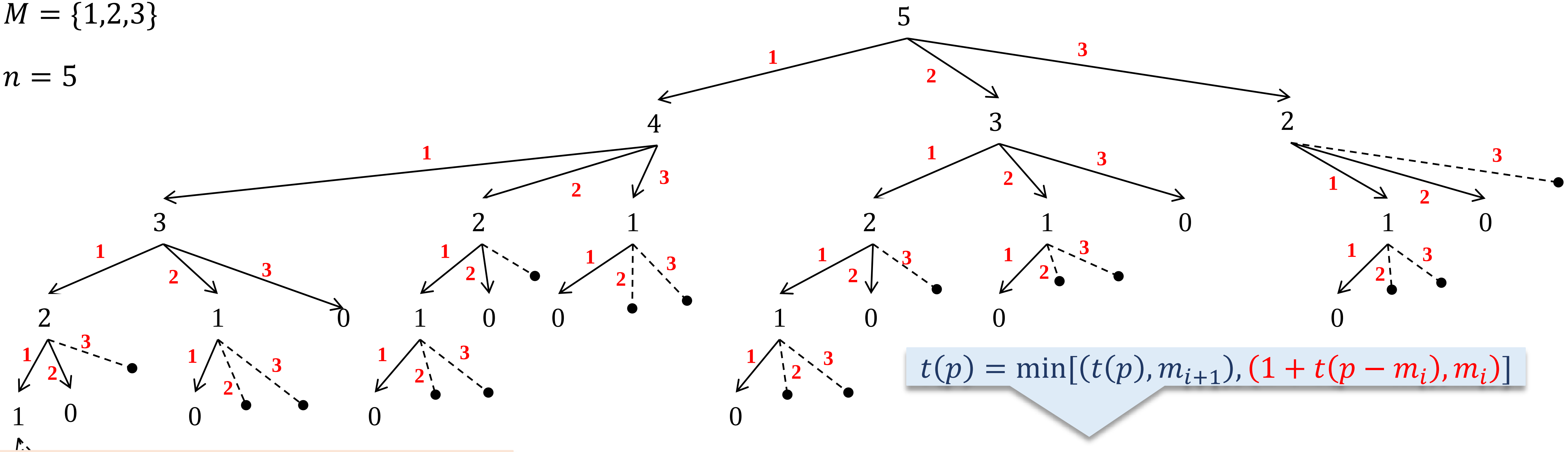
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1, 2} ou considerar inserir a moeda de 3 no meu troco formando o conjunto {1, 2, 3}?

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	1	**?**		

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

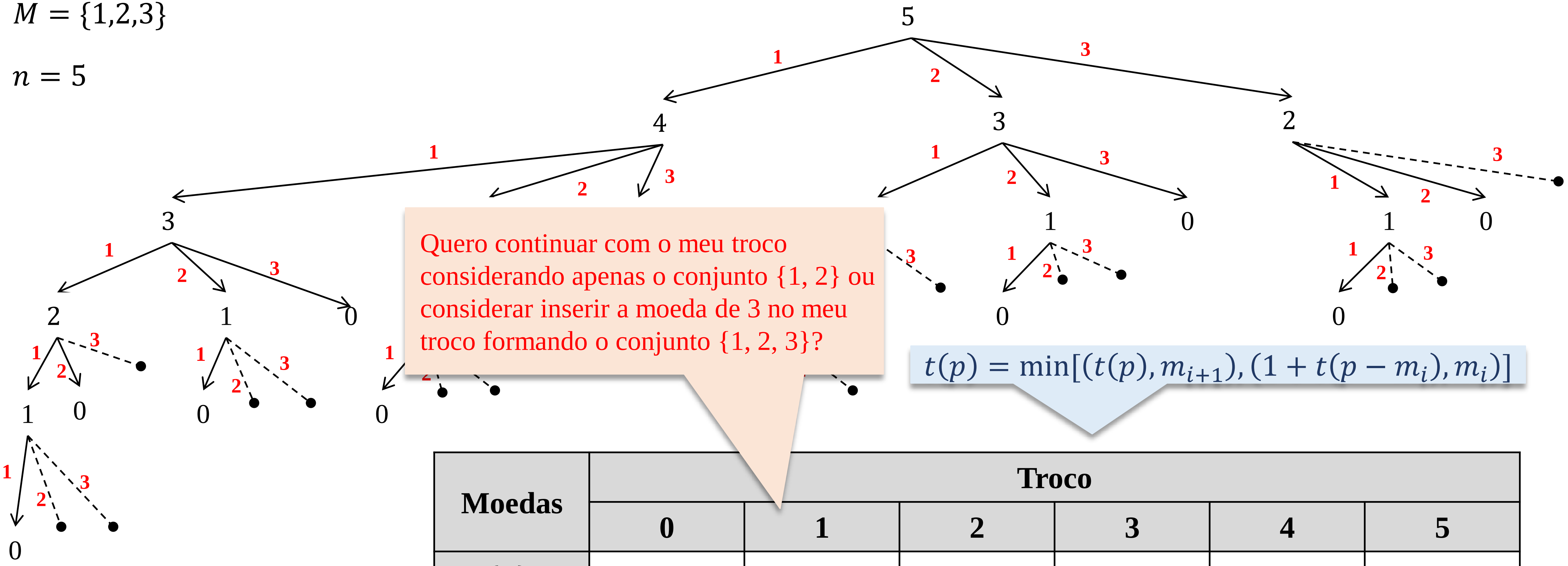
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(3 - 3)$
- $1 + t(3)$
- $1 + 0 = 1$

das	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	2	2	3
, 3}	0	1	1	1		

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



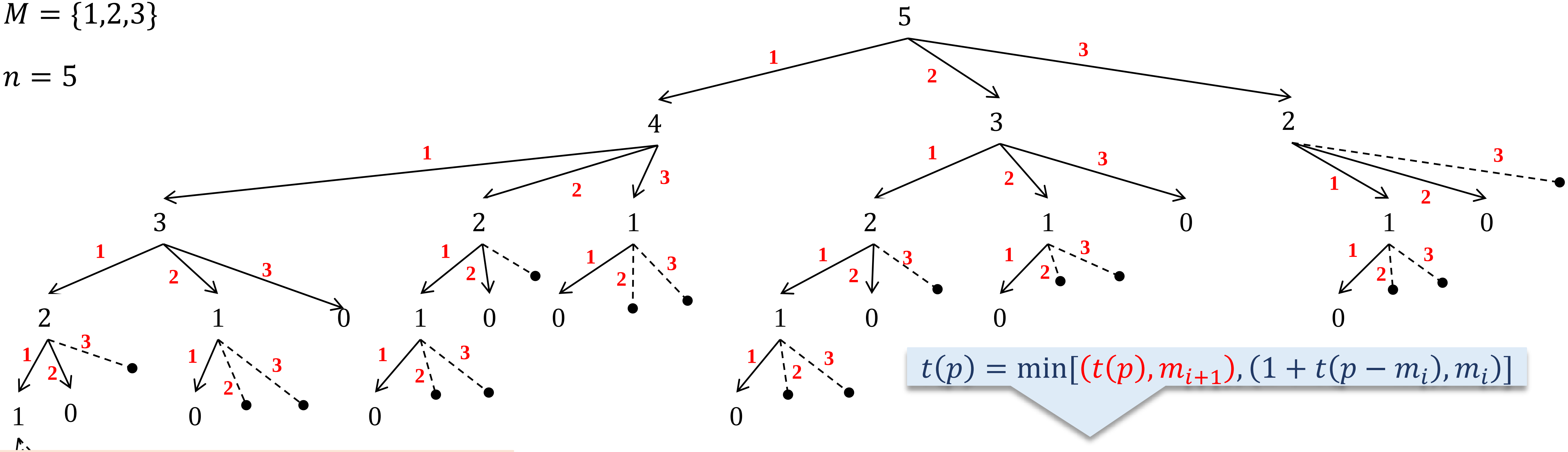
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1, 2} ou considerar inserir a moeda de 3 no meu troco formando o conjunto {1, 2, 3}?

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	1	1	?	

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

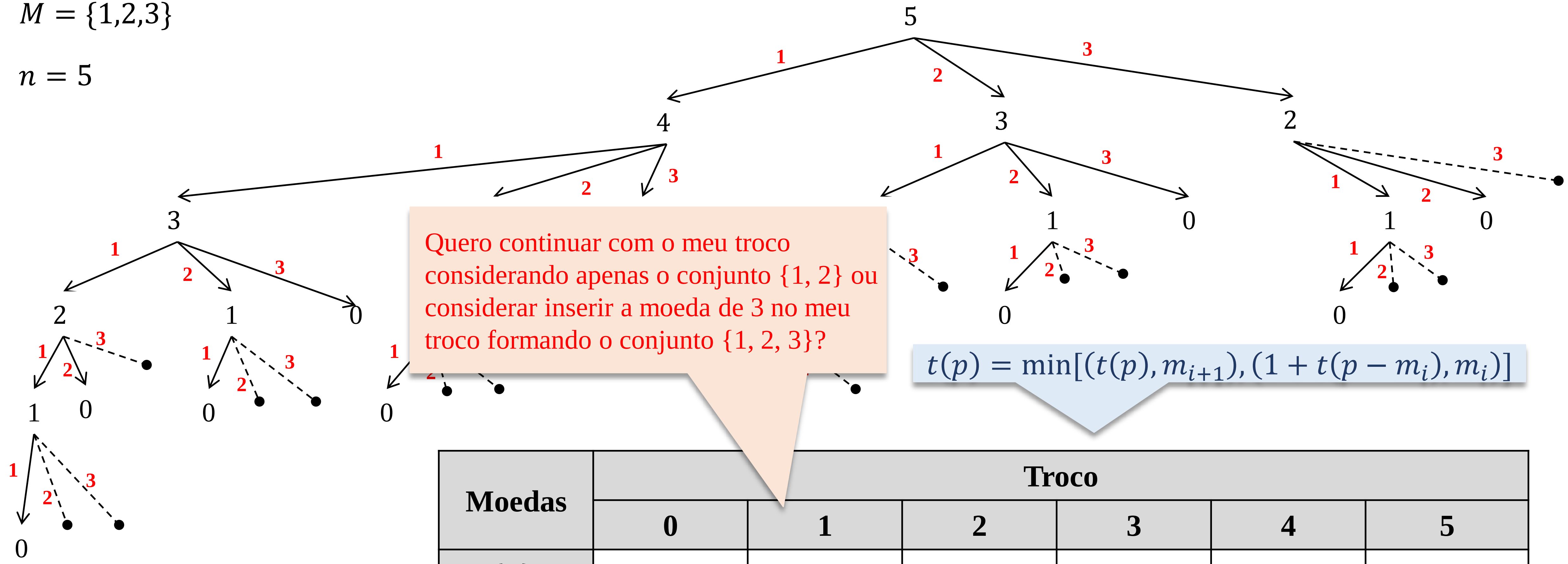
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(4 - 3)$
- $1 + t(1)$
- $1 + 1 = 2$

das	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	2	2 ✓	3
, 3}	0	✗ 1	1	1	2	

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



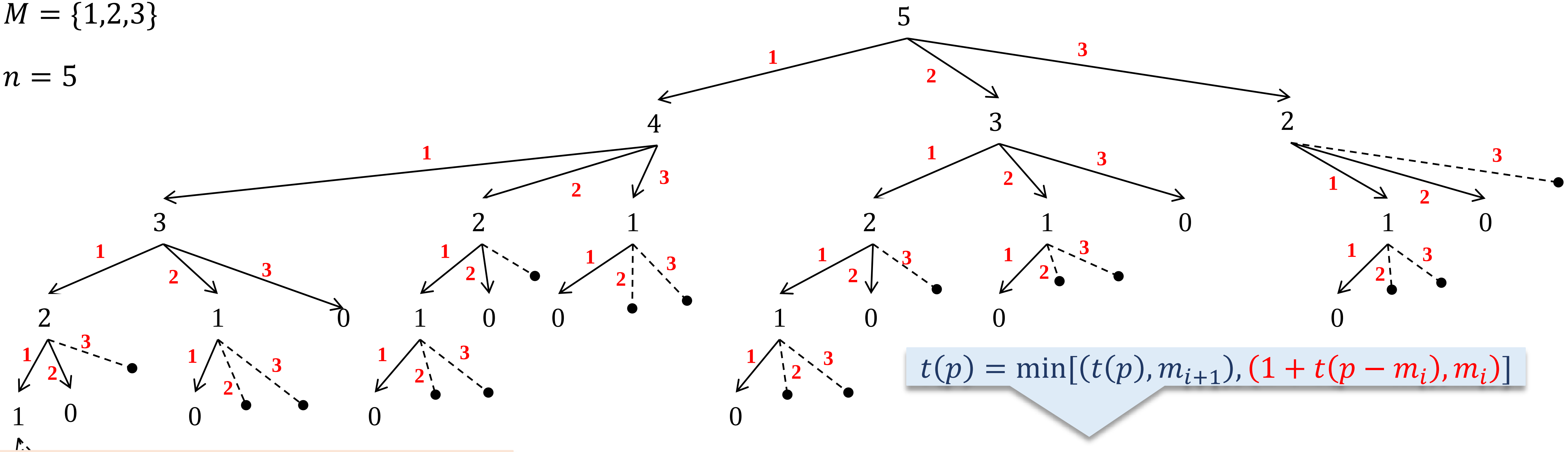
Quero continuar com o meu troco considerando apenas o conjunto {1, 2} ou considerar inserir a moeda de 3 no meu troco formando o conjunto {1, 2, 3}?

$$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$$

Moedas	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	1	1	2	**?**

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



$t(p) = \min[(t(p), m_{i+1}), (1 + t(p - m_i), m_i)]$

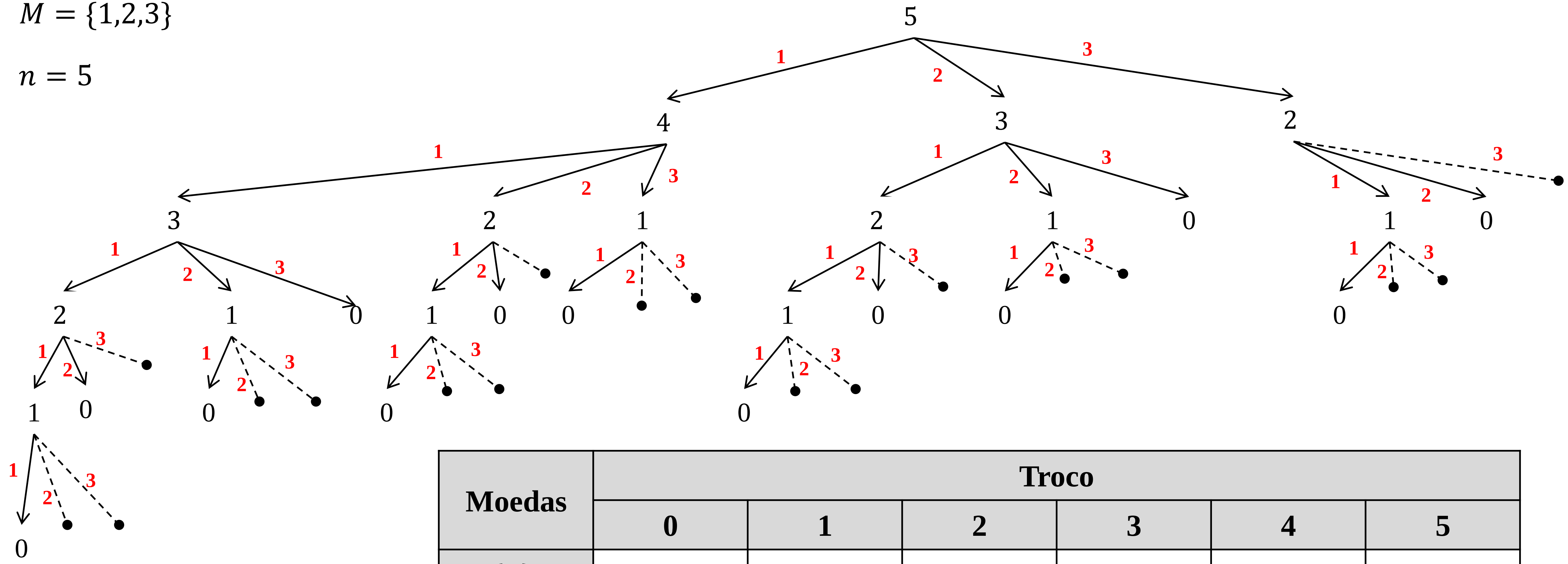
Nesse caso, se eu inserir a moeda de valor 2, eu ficaria com o troco de:

- $1 + t(p - m_i)$
- $1 + t(5 - 3)$
- $1 + t(2)$
- $1 + 1 = 2$

das	**Troco**					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
}	0	1	2	3	4	5
	0	1	1	2	2	3
, 3}	0	1	1	1	2	2

$M = \{1,2,3\}$

$n = 5$



Moedas	Troco					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
{1}	0	1	2	3	4	5
{1, 2}	0	1	1	2	2	3
{1, 2, 3}	0	1	1	1	Resposta	2

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

Vetor *dp*

M	**Troco**											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{1}												

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0											

$M = \{1,2,5\}$

$\{\color{red}{1}\color{black},2,5\}$

$n = 11$

M	**Troco**											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1										

$1 - 1 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2									

$1 - 1 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1	2	3								

$1 - 1 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1	2	3	4							

$1 - 1 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	5						

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

$\uparrow$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	5	6					

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	5	6	7				

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$7 - 1 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 6 = 7$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1	2	3	4	5	6	7	8			

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$7 - 1 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 6 = 7$

$8 - 1 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 7 = 8$

$M = \{1,2,5\}$

$\{\color{red}{1}\color{black},2,5\}$ $\uparrow$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$7 - 1 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 6 = 7$

$8 - 1 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 7 = 8$

$9 - 1 = 8$
$1 + dp[8] = 1 + 8 = 9$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{1}\}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$7 - 1 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 6 = 7$

$8 - 1 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 7 = 8$

$9 - 1 = 8$
$1 + dp[8] = 1 + 8 = 9$

$10 - 1 = 9$
$1 + dp[9] = 1 + 9 = 10$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$1 - 1 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$2 - 1 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$3 - 1 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 2 = 3$

$4 - 1 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 3 = 4$

$5 - 1 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 4 = 5$

$6 - 1 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 5 = 6$

$7 - 1 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 6 = 7$

$8 - 1 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 7 = 8$

$9 - 1 = 8$
$1 + dp[8] = 1 + 8 = 9$

$10 - 1 = 9$
$1 + dp[9] = 1 + 9 = 10$

$11 - 1 = 10$
$1 + dp[10] = 1 + 10 = 11$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**1**}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Não posso escolher a moeda de valor 2, uma vez que ela é maior que o troco atual de 0

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Não posso escolher a moeda de valor 2, uma vez que ela é maior que o troco atual de 1

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	{2,1}	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tenho que escolher entre o troco anterior que é 2 ou o novo troco considerando a utilização da moeda de 2

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	{3,2}	4	5	6	7	8	9	10	11

Tenho que escolher entre o troco anterior que é 3 ou o novo troco considerando a utilização da moeda de 2

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	4	5	6	7	8	9	10	11

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	{4,2}	5	6	7	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	2	5	6	7	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	5	6	7	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

Princípio de otimalidade de Bellman (Richard Bellman)

Não importa como a solução $dp[2]$ foi composta, eu vou simplesmente usar, sem saber da onde veio essa solução.

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	2	{5,3}	6	7	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	6	7	8	9	10	11

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	{6,3}	7	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$6 - 2 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	7	8	9	10	11

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	{7,4}	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$7 - 2 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$5 - 2 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$6 - 2 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	4	8	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$7 - 2 = 5$

$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$6 - 2 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	2	3	3	4	{8,4}	9	10	11

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$7 - 2 = 5$

$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$8 - 2 = 6$

$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$M = \{1,2,5\}$

$\{1,2,5\}$

$n = 11$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	9	10	11

$4 - 2 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$7 - 2 = 5$

$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$2 - 2 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$5 - 2 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$8 - 2 = 6$

$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$3 - 2 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$6 - 2 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**2**}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	{9,5}	10	11

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$7 - 2 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$8 - 2 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$9 - 2 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 4 = 5$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

$\uparrow$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	10	11

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$7 - 2 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$8 - 2 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$9 - 2 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 4 = 5$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	11

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$7 - 2 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$8 - 2 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$9 - 2 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 4 = 5$

$10 - 2 = 8$
$1 + dp[8] = 1 + 4 = 5$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{2}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

$2 - 2 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$3 - 2 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$4 - 2 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 2 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 2 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$7 - 2 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 3 = 4$

$8 - 2 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 3 = 4$

$9 - 2 = 7$
$1 + dp[7] = 1 + 4 = 5$

$10 - 2 = 8$
$1 + dp[8] = 1 + 4 = 5$

$11 - 2 = 9$
$1 + dp[9] = 1 + 5 = 6$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**5**}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Não posso escolher a moeda de valor 5, uma vez que ela é maior que o troco atual de 0

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**5**}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Não posso escolher a moeda de valor 5, uma vez que ela é maior que o troco atual de 1

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**5**}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Não posso escolher a moeda de valor 5, uma vez que ela é maior que o troco atual de 2

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**5**}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Não posso escolher a moeda de valor 5, uma vez que ela é maior que o troco atual de 3

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Não posso escolher a moeda de valor 5, uma vez que ela é maior que o troco atual de 4

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	{3,1}	3	4	4	5	5	6

Tenho que escolher entre o troco anterior que é 3 ou o novo troco considerando a utilização da moeda de 5

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	3	4	4	5	5	6

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{**5**}	0	1	1	2	2	1	{3,2}	4	4	5	5	6

Tenho que escolher entre o troco anterior que é 3 ou o novo troco considerando a utilização da moeda de 5

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{\mathbf{5}\}$	0	1	1	2	2	1	2	4	4	5	5	6

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	{4,2}	4	5	5	6

$7 - 5 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 5 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	4	5	5	6

$7 - 5 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 5 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	{4,3}	5	5	6

$7 - 5 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$8 - 5 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	3	5	5	6

$7 - 5 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$8 - 5 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	3	{5,3}	5	6

$7 - 5 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$8 - 5 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$9 - 5 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	3	3	5	6

$7 - 5 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$8 - 5 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$9 - 5 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	3	3	2	6

$5 - 5 = 0$

$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$

$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$7 - 5 = 2$

$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$8 - 5 = 3$

$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$9 - 5 = 4$

$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$10 - 5 = 5$

$1 + dp[5] = 1 + 1 = 2$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

$\{1,2,5\}$

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
$\{5\}$	0	1	1	2	2	1	2	2	3	3	2	3

$5 - 5 = 0$
$1 + dp[0] = 1 + 0 = 1$

$6 - 5 = 1$
$1 + dp[1] = 1 + 1 = 2$

$7 - 5 = 2$
$1 + dp[2] = 1 + 1 = 2$

$8 - 5 = 3$
$1 + dp[3] = 1 + 2 = 3$

$9 - 5 = 4$
$1 + dp[4] = 1 + 2 = 3$

$10 - 5 = 5$
$1 + dp[5] = 1 + 1 = 2$

$11 - 5 = 6$
$1 + dp[6] = 1 + 2 = 3$

$M = \{1,2,5\}$

$n = 11$

{1,2,5}

M	Troco											
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
{5}	0	1	1	2	2	1	2	2	3	3	2	3

```python
def coinChange(coins, amount):

    dp = [amount + 1] * (amount + 1)
    dp[0] = 0

    for c in coins:
        for a in range(1, amount + 1):
            if a - c >= 0:
                dp[a] = min(dp[a], 1 + dp[a - c])

   return(dp[amount]) if dp[amount] != amount + 1 else -1
```

```python
def coinChange(coins, amount):

    dp = [amount + 1] * (amount + 1)
    dp[0] = 0

    for c in coins:
        for a in range(1, amount + 1):
            if a - c >= 0:
                dp[a] = min(dp[a], 1 + dp[a - c])

    return(dp[amount]) if dp[amount] != amount + 1 else -1
```

Qual a complexidade?

```python
def coinChange(coins, amount):

    dp = [amount + 1] * (amount + 1)
    dp[0] = 0

    for c in coins:
        for a in range(1, amount + 1):
            if a - c >= 0:
                dp[a] = min(dp[a], 1 + dp[a - c])

    return(dp[amount]) if dp[amount] != amount + 1 else -1
```

Pensar em uma solução *top-down*!

```
dp = [0] * (amount + 1)
def coinChange(amount):

    if amount == 0:
        return(0);

    if dp[amount] != 0:
        return(dp[amount])

    best = float('inf')
    for i in coins:
        if i <= amount:
            best = min(best, 1 + coinChange(amount - i))

    dp[amount] = best
    return(dp[amount])
```

```
dp = [0] * (amount + 1)
def coinChange(amount):

    if amount == 0:
        return(0);

    if dp[amount] != 0:
        return(dp[amount])

    best = float('inf')
    for i in coins:
        if i <= amount:
            best = min(best, 1 + coinChange(amount - i))

    dp[amount] = best
    return(dp[amount])
```

Cadê a iteração sobre o troco?

```
dp = [0] * (amount + 1)
def coinChange(amount):

    if amount == 0:
        return(0);

    if dp[amount] != 0:
        return(dp[amount])

    best = float('inf')
    for i in coins:
        if i <= amount:
            best = min(best, 1 + coinChange(amount - i))

    dp[amount] = best
    return(dp[amount])
```

Essa iteração é realizada pela própria recursão (`amount - i`)

Cadê a iteração sobre o troco?

Próxima aula

- Programação Dinâmica – Parte 3

Obrigado

<u>Dúvidas</u>

Email: alanvalejo@ufscar.br

Acessar o fórum no Moodle