Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Departamento de Computação - DC
CEP 13565-905, Rod. Washington Luiz, s/n, São Carlos, SP

Programação Dinâmica - Parte 3

Prof. Dr. Alan Demétrius Baria Valejo

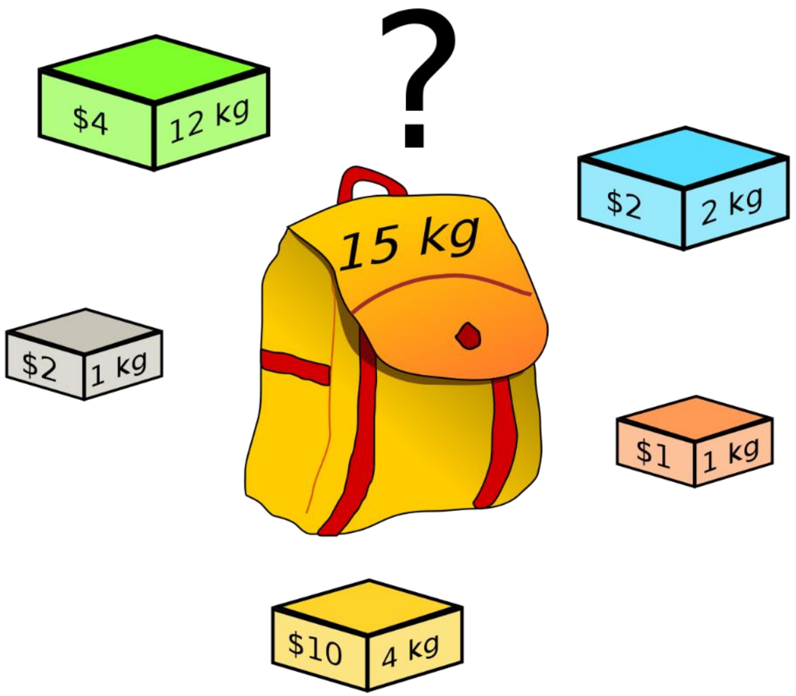
CCO-00.2.01 - Projeto e Análise de Algoritmos (*Design And Analysis Of Algorithms*)
1001525 - Projeto e Análise de Algoritmos - Turma A

Roteiro

- Mochila inteira

- Vamos voltar ao problema da mochila, mas
  - Agora não temos mais itens “fracionáveis”, só inteiros
  - Para cada item disponível, temos a opção de levá-lo ou não
  - ak.a. mochila binária

knapsack



https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_da_mochila

- Cada um dos n itens da mochila possui um ganho g_i

$$G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_i\}$$

- Cada um dos n itens da mochila possui um custo ou peso dado por alguma medida de interesse p_i

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_i\}$$

- A capacidade da mochila é dada por C e, a cada iteração, essa capacidade pode ser reduzida para C_i

- O objetivo é encontrar:

$$\hat{G} \subseteq \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_i\} \qquad \hat{P} \subseteq \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_i\}$$

- E que maximize o valor objetivo, ou seja:

$$max_{\hat{G}} \sum_{i \in \hat{G}} g_i$$

- Restrito a:

$$\sum_{i \in \hat{P}} p_i \leq C$$

- A decisão gulosa levaria a escolher o item de maior valor
- Caso "caiba na mochila", pegue-o

$C = 15$

Item	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{P}$
1	8	10
2	6	5
3	4	4
4	4	3
5	3	3

- A decisão gulosa levaria a escolher o item de maior valor
- Caso “caiba na mochila”, pegue-o

Algoritmo guloso

$C = 15$

Item	***G***	***P***
1	8	10
2	6	5
3	4	4
4	4	3
5	3	3

- A decisão gulosa levaria a escolher o item de maior valor
- Caso "caiba na mochila", pegue-o

Melhor escolha

$C = 15$

Item	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{P}$
1	8	10
2	6	5
3	4	4
4	4	3
5	3	3

- Solução usando Programação Dinâmica, duas opções:

1. Não adicionar o item corrente p_i, pois não cabe:
   - Manter a capacidade da mochila em C.

$$\hat{P} \subseteq \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{i-1}, \cancel{p_i}, p_{i+1}, \dots, p_n\} \rightarrow \hat{G} \subseteq \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_{i-1}, \cancel{g_i}, g_{i+1}, \dots, g_n\}$$

2. Adicionar o item corrente p_i, pois cabe na mochila:
   - Se o ganho não vale a pena, voltar ao passo 1;
   - Se o item cabe na mochila e ganho vale a pena:
     - Alteramos a capacidade da mochila;
     - Temos um novo ganho.

$$\hat{P} \subseteq \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n\}$$

$$C_i = C - p_i$$

- Relação de recorrência

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Relação de recorrência

Item não cabe na mochila

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Relação de recorrência

Item não cabe na mochila

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não vale a pena pegar o item

- Relação de recorrência:

Item não cabe na mochila

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não vale a pena pegar o item

Pego o item e reduzo a capacidade

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$								
	$\boldsymbol{g_1}$								
	$\boldsymbol{g_2}$								
	$\boldsymbol{g_3}$								
	$\boldsymbol{g_4}$								

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0							
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0						
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0						
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

Não é possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 > C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

Não é possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 > C$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0						
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

Usar $g_{i-1,C}$, com $g_{i-1} = g_0$ e $C = 1$

Portanto, $g_{1-1,1} = g_{0,1}$

Ou seja, vou replicar o custo da célula $g_{0,1}$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10					
	g_2	0							
	g_3	0							
	g_4	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10					
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10					
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

É possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

É possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 \leq C$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10					
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{1-1,2} = g_{0,2} = 0$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{1-1,2-2} + 10 = g_{0,0} + 10 = 0 + 10 = 10$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 7$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 7$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0							
	g_3	0							
	g_4	0							

É possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_1}$ em uma mochila de capacidade $C = 7$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0							
	$\boldsymbol{g_3}$								
	$\boldsymbol{g_4}$								

É possível, pois, $p_1 = 2$, ou seja, $p_1 \leq C$

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{1-1,7} = g_{0,7} = 0$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{1-1,7-2} + 10 = g_{0,5} + 10 = 0 + 10 = 10$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7						
	g_3	0							
	g_4	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7						
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7						
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 1$

	0	1	2					
$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0					
$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10		10	10	10
$\boldsymbol{g_2}$	0	7						
$\boldsymbol{g_3}$	0							
$\boldsymbol{g_4}$	0							

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{2-1,1} = g_{1,1} = 0$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{2-1,1-1} + 7 = g_{1,0} + 7 = 0 + 7 = 7$

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10					
	g_3	0							
	g_4	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10					
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10					
	g_3	0							
	g_4	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

		0	**1**	**2**	**3**				
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0				
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0 +	10	10	[illegible]	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10					
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{2-1,2} = g_{1,2} = 10$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{2-1,2-1} + 7 = g_{1,1} + 7 = 0 + 7 = 7$

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 2$

Ite[illegible]		0	1	2	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0 +	10	10	[illegible]	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10					
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{2-1,2} = g_{1,2} = 10$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{2-1,[illegible]-1} + 7 = g_{1,1} + 7 = 0 + 7 = 7$

Nesse caso, não escolher o item é melhor, portanto, eu descarto o item.

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17				
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 3$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17				
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 3$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ite	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17				
	$\boldsymbol{g_3}$	0							
	$\boldsymbol{g_4}$	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{2-1,3} = g_{1,3} = 10$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{2-1,3-1} + 7 = g_{1,2} + 7 = 10 + 7 = 17$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 3$

		0	1	2	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Ite	g_0	0	0	0	0	0	[illegible]	0	0
	g_1	0	0	10	10	[illegible]	10	10	10
	g_2	0	7	10	17				
	g_3	0							
	g_4	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

Princípio de otimalidade de Bellman (Richard Bellman)

Não importa como a solução $\boldsymbol{g_{1,2} = 10}$ foi composta, eu vou simplesmente usar, sem saber da onde veio essa solução.

-
-
- $C = 7$

$i-1,C$ se $C < p_i$

$g_{i-1,C-p_i} + g_i)$ caso contrário

Usar $\boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$

Escolher entre os valores

- $g_{i-1,C} = g_{2-1,3} = g_{1,3} = 10$
- $g_{i-1,C-p_i} + g_i = g_{2-1,3-1} + 7 = g_{1,2} + 7 = 10 + 7 = 17$

Quero incluir o meu item $\boldsymbol{g_2}$ em uma mochila de capacidade $C = 3$

		0	1	2	3				
Ite	g_0	0	0	0	0	0		0	0
	g_1	0	0	10 +	10		10	10	10
	g_2	0	7	10	17				
	g_3	0							
	g_4	0							

É possível, pois, $p_2 = 1$, ou seja, $p_2 \leq C$

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		$\boldsymbol{C}$							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde está a resposta?

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde está a resposta?

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
def knapSack(C, P, G):
    K = [[0 for x in range(C + 1)] for x in range(len(V) + 1)]

    for i in range(len(G) + 1):
            gi, pi = G[i-1], P[i-1]
            for c in range(C + 1):
                    if i == 0 or c == 0:
                            K[i][c] = 0
                    elif pi > c:
                            K[i][c] = K[i-1][c]
                    else:
                            K[i][c] = max(K[i-1][c], K[i-1][c-pi] + gi)
    return(K)
```

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
def knapSack(C, P, G):
    K = [[0 for x in range(C + 1)] for x in range(len(V) + 1)]

    for i in range(len(G) + 1):
            gi, pi = G[i-1], P[i-1]
            for c in range(C + 1):
                    if i == 0 or c == 0:
                            K[i][c] = 0
                    elif pi > c:
                            K[i][c] = K[i-1][c]
                    else:
                            K[i][c] = max(K[i-1][c], K[i-1][c-pi] + gi)
    return(K)
```

Gambiarra nos índices para ficar o mais parecido com a recorrência

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
def knapSack(C, P, G):
    K = [[0 for x in range(C + 1)] for x in range(len(V) + 1)]

    for i in range(len(G) + 1):
            gi, pi = G[i-1], P[i-1]
            for c in range(C + 1):
                    if i == 0 or c == 0:
                            K[i][c] = 0
                    elif pi > c:
                            K[i][c] = K[i-1][c]
                    else:
                            K[i][c] = max(K[i-1][c], K[i-1][c-pi] + gi)
    return(K)
```

Complexidade?

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
def knapSack(C, P, G):
    K = [[0 for x in range(C + 1)] for x in range(len(V) + 1)]

    for i in range(len(G) + 1):
            gi, pi = G[i-1], P[i-1]
            for c in range(C + 1):
                    if i == 0 or c == 0:
                            K[i][c] = 0
                    elif pi > c:
                            K[i][c] = K[i-1][c]
                    else:
                            K[i][c] = max(K[i-1][c], K[i-1][c-pi] + gi)
    return(K)
```

Versão recursiva?

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

```
def knapSack(C, P, G, n):

    if n == 0 or C == 0:
        return(0)

    gi, pi = G[n-1], P[n-1]

    if pi > C:
        return(knapSack(C, P, G, n-1))

    else:
        return(max(knapSack(C, P, G, n-1), knapSack(C-pi, P, G, n-1) + gi))
```

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como encontrar os itens adicionados na mochila?

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como encontrar os itens adicionados na mochila?

Andar de trás para frente!

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{$
- $C =$

$$\begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \ldots_{1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O valor 34 pode ter vindo de dois lugares

- $v_{i-1,C} = v_{4-1,7} = v_{3,7} = 32$
- $v_{i-1,C-s_i} + v_i = v_{4-1,7-5} + 24 = v_{1,2} + 24 = 10 + 24 = 34$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10 +	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{$
- $C = $

$g_{i-1,C}$ se $C < p_i$

$_{1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$ caso contrário

O valor 34 pode ter vindo de dois lugares

- $v_{i-1,C} = v_{4-1,7} = v_{3,7} = 32$
- $v_{i-1,C-s_i} + v_i = v_{4-1,7-5} + 24 = v_{1,2} + 24 = 10 + 24 = 34$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10 +	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10 +	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $s_i = 6$, ou seja, $s_i > C$, necessariamente, eu reutilizei o item anterior

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, \cancel{25}, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, \cancel{25}, 24\}$
- $P = \{$
- $C =$

$g_{i-1,C}$ se $C < p_i$

$_{1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$ caso contrário

O valor 10 pode ter vindo de dois lugares

- $v_{i-1,C} = v_{2-1,2} = v_{1,2} = 10$
- $v_{i-1,C-s_i} + v_i = v_{2-1,2-1} + 7 = v_{1,1} + 7 = 0 + 7 = 7$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0 +	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{\cancel{10}, \cancel{7}, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0 +	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{$
- $C =$

O valor 10 pode ter vindo de dois lugares

- $v_{i-1,C} = v_{1-1,2} = v_{0,2} = 0$
- $v_{i-1,C-s_i} + v_i = v_{1-1,2-2} + 10 = v_{0,0} + 10 = 0 + 10 = 10$

$g_{i-1,C}$ se $C < p_i$

${}_{1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i)$ caso contrário

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	g_0	0	0 +	0	0	0	0	0	0
	g_1	0	0	10	10	10	10	10	10
	g_2	0	7	10	17	17	17	17	17
	g_3	0	7	10	17	17	17	25	32
	g_4	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0 +	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- $G = \{10, 7, 25, 24\}$
- $P = \{2, 1, 6, 5\}$
- $C = 7$

$$g_{i,C} = \begin{cases} g_{i-1,C} & \text{se } C < p_i \\ \boldsymbol{max}(g_{i-1,C}, g_{i-1,C-p_i} + g_i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

		C							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Item	$\boldsymbol{g_0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\boldsymbol{g_1}$	0	0	10	10	10	10	10	10
	$\boldsymbol{g_2}$	0	7	10	17	17	17	17	17
	$\boldsymbol{g_3}$	0	7	10	17	17	17	25	32
	$\boldsymbol{g_4}$	0	7	10	17	17	24	31	34

- Problemas P, NP, NP-Completo e NP-Difícil

Obrigado

<u>Dúvidas</u>

Email: alanvalejo@ufscar.br

Acessar o fórum no Moodle