Zjazd

PREOI 2025 Kod zadania: **zja**
Dzień 2 – 26 stycznia 2025

Dana jest plansza n na m ($nm \leq 50\,000$). Policz, ile istnieje podplansz, w których istnieje malejąca ścieżka odwiedzająca wszystkie pola.

Rozwiązanie

W zadaniach, gdzie należy zliczyć ilość obiektów spełniających pewną własność, dobrym pomysłem jest próba wymyślenia jakiegoś prostego warunku, który jest równoważny tej własności.

Rozważmy graf, którego wierzchołki to pola planszy. Dodajmy krawędź między sąsiadującymi polami, skierowaną z pola o większej wartości do pola o mniejszej wartości. Otrzymany graf opisuje wszystkie dozwolone ruchy. Łatwo też zobaczyć, że jest on acykliczny, ponieważ krawędzie prowadzą tylko do pól o mniejszej wartości.

Kiedy istnieje ścieżka odwiedzająca wszystkie pola? Zauważmy, że możemy jednoznacznie wyznaczyć pole początkowe, ponieważ musi to być pole o największej wartości. Ponadto, dla każdego pola możemy jednoznacznie wyznaczyć następne pole w szukanej ścieżce, gdyż musi być to sąsiad o największej wartości. Usuńmy wszystkie nieprzydatne krawędzie. Wystarczy więc sprawdzić, czy pozostałe krawędzie tworzą ścieżkę, na przykład przez przejście nią.

Podzadanie 2

Powyższe obserwacje pozwalają nam na proste rozwiązanie w złożoności $\mathcal{O}(n^3m^3)$. Wystarczy przeiterować się po wszystkich podplanszach, których jest n^2m^2, i dla każdej z nich w złożoności $\mathcal{O}(nm)$ sprawdzić, czy istnieje ścieżka.

Podzadanie 4

Zauważmy, że graf złożony z pozostałych krawędzi jest ścieżką wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden wierzchołek bez krawędzi wchodzących, a do każdego innego wchodzi dokładnie jedna.

Chcemy zatem umieć szybko zliczać, ile jest wierzchołków bez krawędzi wchodzących oraz z dokładnie jedną krawędzią wchodzącą. Zauważmy, że krawędzie wchodzące do jakiegoś wierzchołka zależą tylko od pól odległych o co najwyżej 2. Jest zatem 3^4 możliwości, ponieważ w każdym z 4 kierunków brzeg podplanszy może być odległy o 0, 1 lub co najmniej 2.

Dla każdej z tych możliwości możemy utworzyć sumę prefiksową 2D zliczającą, ile jest wierzchołków, które mają ilość krawędzi wchodzących różną od 1. Cała podplansza jest poprawna jeżeli istnieje dokładnie jeden taki wierzchołek.

Pozwala to nam rozwiązać zadanie w złożoności $\mathcal{O}(n^2m^2)$.

Podzadanie 5

Spróbujmy ustalić dolny oraz górny brzeg podplanszy i zliczyć, ile jest dobrych podplansz o takich brzegach w $\mathcal{O}(m)$. Rozważmy pewien poziomy przedział $[l, r]$. Zauważmy, że używając sum prefiksowych z podzadania 4, ilość wierzchołków o stopniu wejściowym różnym od 1 możemy przedstawić jako sumę paru składników zależących od l lub r. Ponieważ żaden składnik nie zależy od l i r na raz, możemy je pogrupować.

Niech y_r oznacza składniki zależne od r, a x_l składniki zależne od l. Dobierając odpowiednio znaki, ilość wierzchołków o stopniu wejścia różnym od 1 na przedziale $[l, r]$ przedstawić można jako $y_r - x_l$. Zatem przedział $[l, r]$ jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy $y_r - x_l = 1$. Ilość takich przedziałów można łatwo zliczyć w $\mathcal{O}(m)$.

Otrzymaliśmy rozwiązanie w złożoności $\mathcal{O}(n^2m)$. Widać, że jeżeli $n > m$ możemy obrócić planszę o 90 stopni, uzyskując złożoność $\mathcal{O}(nm^2)$. Zatem sumarycznie otrzymujemy złożoność $\mathcal{O}(nm\sqrt{nm})$ (bo $\min(n, m) \leq \sqrt{nm}$).