Harcerze w Plenerze

PREOI 2025 - omówienie
Dzień 1 - 25.01.2025

Kod zadania: **har**
Limit pamięci: **512 MiB**

Omówienie

Zadanie „Harcerze w plenerze” tak naprawdę składa się z dwóch podobnych zadań: takiego, gdzie $B = 0$ (podzadania 1–4) oraz takiego, gdzie $B > 0$ (podzadania 5–7). Omówmy je po kolei.

Pierwsze zadanie (podzadania 1–4)

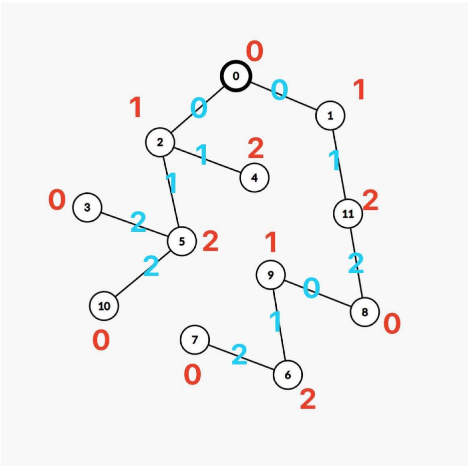
Na początku zajmijmy się przypadkami, gdzie

$$M = N - 1,$$

czyli podany w zadaniu graf szlaków i szczytó jest drzewem. Zanim jednak zajmiemy się krawędziami, policzmy głębokość każdego wierzchołka względem wierzchołka 0 — możemy to zrobić korzystając z algorytmu BFS, wywołanego w zerze. Tak naprawdę zamiast głębokości, będziemy się interesowali resztami z dzielenia głębokości przez 3.

Gdy już obliczymy te wartości, możemy przypisać krawędziom kolory w następujący sposób:

- Krawędź między wierzchołkami o głębokościach 0 i 1, malujemy kolorem 0.
- Krawędź między wierzchołkami o głębokościach 1 i 2, malujemy kolorem 1.
- Krawędź między wierzchołkami o głębokościach 2 i 0, malujemy kolorem 2.



Zauważmy, że wówczas w każdym wierzchołku, na podstawie jego krawędzi, Ala może stwierdzić, która z nich idzie „do góry” w sposób następujący:

- jeżeli z wierzchołka wychodzą krawędzie o kolorach 0 i 1, to Ala wybiera 0,
- jeżeli z wierzchołka wychodzą krawędzie o kolorach 1 i 2, to Ala wybiera 1,
- jeżeli z wierzchołka wychodzą krawędzie o kolorach 2 i 0, to Ala wybiera 2.

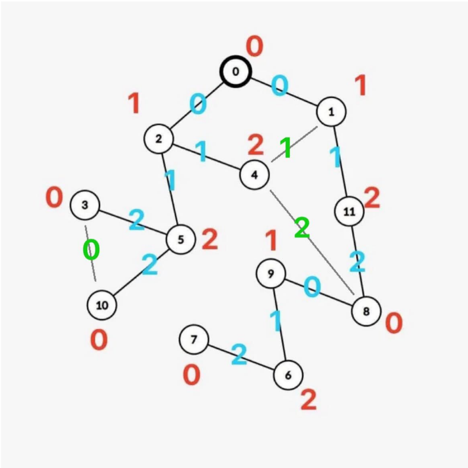
Taki wybór jest jednoznaczny i zawsze będzie prowadził o 1 poziom wyżej.

A co jeżeli

$$M > N - 1$$

, czyli graf nie jest drzewem? Zobaczmy, co wtedy da nasze podejście. Tak jak wcześniej, uruchommy algorytm BFS w wierzchołku 0 i pokolorujmy wierzchołki według głębokości. Zauważmy, żeW wszystkie krawędzie mogą łączyć wyłącznie wierzchołki na tych samych lub sąsiednich poziomach. W takiej sytuacji możemy:

- pokolorować krawędzie między wierzchołkami na tym samym poziomie ich wspólnym „resztowym" kolorem,
- pozostałe krawędzie pokolorować tak, jak w przypadku drzewa (schematem 0–1–2).



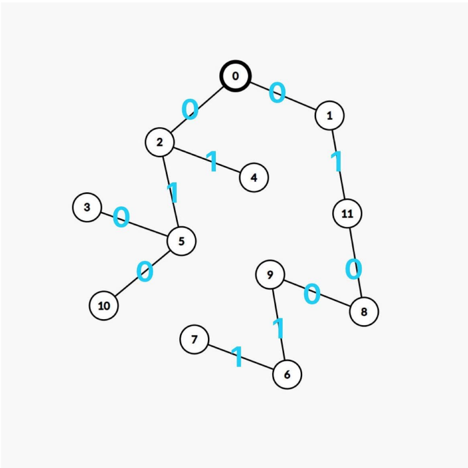
Pozostaje zauważyć, że zasady, których wcześniej używaliśmy, wciąż będą prowadziły Alę coraz wyżej, czyli dotrze ona w czasie d do wierzchołka 0.

Drugie zadanie (podzadania 5–7)

We wszystkich przypadkach w tym zadaniu mamy

$$M = N - 1,$$

zatem nie musimy martwić się krawędziami spoza drzewa. Najpierw spróbujmy naiwnie zreplikować podejście z poprzedniego zadania i zobaczmy, jakie przyniesie efekty (tylko tym razem dla 2 kolorów).



Możemy poczynić następujące obserwacje:

- Jeżeli Ala idzie w dobrym kierunku, to może dojść do wierzchołka 0 (wystarczy, że za każdym razem wybierze kolor, który ma tylko jedną przypisaną krawędź).

- Jeżeli Ala jest w liściu, to wie, w którym kierunku powinna iść (bo jest tylko jedna możliwa krawędź).
- Jeżeli Ala znajduje się w wierzchołku, który ma więcej niż dwóch synów, to również wie, w którą stronę iść (wystarczy, że wybierze kolor, który ma tylko jedną przypisaną krawędź).

A zatem jeżeli Ala zacznie swoją podróż w liściu lub w wierzchołku, który ma przynajmniej dwóch „synów", to bezproblemowo dojdzie do wierzchołka 0. Jedynym przypadkiem, w którym Ala nie wie, gdzie iść, jest sytuacja, kiedy porusza się wzdłuż ścieżki.

Mamy zatem dwie możliwości:

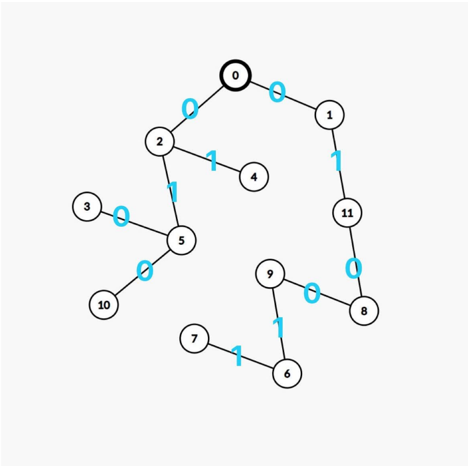
- Ala za każdym razem będzie szła ścieżką w pewną stronę, aż dojdzie do wierzchołka, z którego wie, gdzie iść (**podzadanie 5**),
- Adaś zmieni kolorowanie tak, aby Ala mogła zorientować się, w którą stronę podąża na ścieżce.

Ponieważ w **podzadaniu 7** mamy $D = 6$, to chcemy, aby Ala przeszła maksymalnie $\frac{D}{2} = 3$ minuty w jedną stronę, zanim zorientuje się, w którą stronę idzie ścieżka. Idąc 3 minuty w prawo, Ala jest w stanie zobaczyć 5 kolejnych krawędzi ścieżki. Chcemy więc, aby kolorowanie krawędzi ścieżek było takim ciągiem, aby na podstawie kolejnych pięciu elementów można było stwierdzić, w którą stronę się zmierza.

Zauważmy, że gdy będziemy indeksowali kolejne krawędzie ścieżki według reguły:

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots$$

to będzie to ciąg spełniający powyższy warunek.
Dla zobrazowania, wówczas drzewo wygląda następująco:



W ten sposób Ala zawsze zorientuje się, w którą stronę powinna iść po 3 ruchach. Wówczas będzie znajdowała się w wierzchołku oddalonym o co najwyżej $d + 3$ od korzenia. A zatem cała podróż zajmie jej co najwyżej $(d + 3) + 3 = d + B$ minut.