Lot – omówienie

PREOI 2025
Dzień 4 – 28 stycznia 2025

Kod zadania: **lot**
Limit pamięci:

XIV LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE im. Stanisława Staszica WARSZAWA

Podzadanie 1 – graf jest ścieżką

Podzadanie to można rozwiązać na wiele sposobów. Przedstawimy tu rozwiązanie, nieco bardziej skomplikowane niż alternatywy, ale pomocne do zrozumienia pozostałych podzadań.

Obserwacja 1: Zawsze będzie istnieć optymalna podróż Bajtka, która wygląda następująco:

- Faza wznoszenia, w której leci cały czas do góry.
- Faza środkowej, w której przez maksymalnie jedną jednostkę czasu leci na tej samej wysokości.
- Faza opadania, w które leci cały czas w dół.

Istotnie dla dowolnego lotu Bajtka, zawsze możemy "podwyższyćódpowiednie fragmenty lotu, tak aby doprowadzić go do powyższej postaci. Możemy zatem rozpatrywać tylko loty tej postaci.

Obserwacja 2: Faza opadania wygląda tak samo jak faza wznoszenia w sytuacji, w której Bajtek leciał by z miasta n do miasta 1 (w przeciwnym kierunku niż w zadaniu).

Obserwacja 3: W optymalnej podróży faza wznoszenia i opadania będzie trwać dokładnie tyle samo, jako że będzie ona trwać dokładnie tyle, na jaką maksymalną wysokość wzbił się Bajtek.

Możemy zatem symulować lot Bajtka w obie strony: raz lecąc z miasta 1 do n, raz lecąć z miasta n do 1, w obu przypadkach cały czas zwiększając wysokość lotu. Miejsce w którym obie trasy sie przetną będzie miejscem, w którym w opymalnej trasie Bajtek zakonczył by fazę wznoszenie i rozpoczął fazę opadania.

Podzadanie 2 – $n, a \leq 2000$, $m \leq 4000$

W tym pozadaniu możemy skonstruować na podstawie grafu podanego na wejściu, graf warstwowy, w którym numer warstwy oznacza wysokość lotu Bajtka. Krawędziami w tym grafie będą wszystkie możliwe przeloty Bajtka w pojedynczej jednostce czasu. Wiadomo, że maksymalną liczbą warstw będzie $\max a_i$, zatem cały graf będzie wielkości $O((n+m) \cdot \max a_i)$. Możemy zatem zastosować algorytm BFS, który w czasie $O((n+m) \cdot \max a_i)$ znajdzie najkrótszą ścieżkę z miasta 1 na wysokości 0 do miasta n na wysokości 0.

Podzadanie 3 – $n \leq 2000$, $m \leq 4000$

Rozwiązanie tego podzadania możemy zrealizować bardzo podobnie co podzadania 1. W tym celu możemy rozpatrzeć wszystkie możliwych miejscach występowania fazy środkowej. Następnie możemy algorytmem Dijkstra znaleźć najszybsze fazy wznoszenia z miasta 1 oraz z miasta n do wybranego miejsca fazy środkowej. Dla każdego wybranego miejsca środkowego, takiego, że faza wznoszenia i opadania okazała się tej samej długości możemy zsumować czas fazy wznoszenia, fazy środkowej oraz fazy opadania, aby uzyskać najkrótszy możliwy czas lotu, dla danego miejsca środkowego. Wybierając minimalną w tych wartości uzyskujemy odpowiedź na problem z zadania.

Możemy to rozwiązanie dalej uprościć. Zauważmy, że rozpatrując miejsca fazy środkowej należało by rozpatrywać za równo wierzchołki jak i krawędzie (zależnie od tego, czy faza środkowa jest długości 0 czy 1). Można jednak ten problem obejść i rozpatrywać tylko wierzchołki (lub tylko krawędzie), i pozwalać na różnicę 1 długości fazy wnoszącej i odpadającej, odpowiednio obliczając sumaryczny czas lotu. Idąc tą ideą o krok dalej możemy pozwalać na dowolną różnicę długości fazy wnoszenia i opadania, jeśli ponownie odpowiednio obliczymy sumaryczny czas lotu (w praktyce dodamy czas niezbędny na wyrównanie wysokości lotu do różnicy nie większej niż 1).

Podzadanie 4 – brak dodatkowych ograniczeń

Rozwiązanie tego podzadania jest bardzo podobne do rozwiązania podzadania 3. Możemy zauważyć, że zamiast liczyć najkrótsze ścieżki niezależnie dla każdego rozpatrywanego miejsca fazy środkowej, możemy raz przy użyciu algorytmu Dijkstry obliczyć najkrótsze fazy wznoszenia z miasta 1 oraz z miasta n do każdego wierzchołka w grafie, a następnie dla każdego wierzchołka obliczyć sumaryczny czas lotu.

Następnie ponownie rozpatrujemy każde możliwe miejsce fazy środkowej, ale tym razem dla każdego miejsca fazy środkowej mamy już obliczone najkrotsze ścieżki, zatem cały algorytm działa w czasie $O((n + m) \cdot \log(n + m))$.