Równanie Kwadratowe – Omówienie

PREOI 2025 Kod zadania: **row**

Dzień 1 – 25 stycznia 2025

W celu rozwiązania zadania, kluczowe jest obserwacja, ze równanie kwadratowe postaci $x^2 + bx + c$ o pierwiastkach x_1, x_2 spełnia następującą równość:

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

z czego wprost wynika:

$$b = -(x_1 + x_2), \quad c = x_1x_2$$

oraz:

$$b + c = x_1x_2 - (x_1 + x_2).$$

Pytanie więc, o pary liczb całkowitych (x_1, x_2), dla których istnieje równanie kwadratowe spełniające warunki zadania, sprowadza się do znalezienia par liczb całkowitych (x_1, x_2), dla których zachodzi:

$$l \leq x_1x_2 - (x_1 + x_2) \leq r.$$

Przekształcając powyższą nierówność otrzymujemy:

$$\begin{gathered} l \leq x_1x_2 - (x_1 + x_2) \leq r, \\ l + 1 \leq x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \leq r + 1, \\ l + 1 \leq (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq r + 1. \end{gathered}$$

Podstawiając teraz:

$$\begin{gathered} y_1 = x_1 - 1, \\ y_2 = x_2 - 1, \\ l' = l + 1, \\ r' = r + 1, \end{gathered}$$

otrzymujemy równoważne równanie:

$$l' \leq y_1 \cdot y_2 \leq r'. \tag{1}$$

Liczba rozwiązań tego równania, jest równa liczbie par (x_1, x_2), spełniających warunki z treści zadani. Możemy teraz znaleźć liczbę tych rozwiązań, niezalezlnie dla każdego zapytania. Po pierwsze liczba rozwiązań jest nieskończona wtedy i tylko wtedy gdy $l' \leq 0 \leq r'$. W przeciwnym przypadku możemy rozważyć dwa przypadki: $l', r' < 0$ oraz $l', r' > 0$.

Na początku rozpatrzymy jednak prostszy przypadek, w którym zakładamy, że $l', r', y_1, y_2 \geq 0$. Aby nierówność mogła być spełniona to jedno z y_1, y_2 musi być mniejsze lub równe $\sqrt{r'}$. Możemy więc przeiterować się wartością y_1 od 1 do $\sqrt{r'}$ i dla każdej wartości y_1 znaleźć liczbę takich y_2, że $l' \leq y_1 \cdot y_2 \leq r'$. Konkretniej możemy zauważyć, że dla ustalonego y_1, rozpatrywana nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\frac{l'}{y_1} \leq y_2 \leq \frac{r'}{y_1},$$

co dla liczb całkowitych sprowadza się do:

$$\left\lceil \frac{l'}{y_1} \right\rceil \leq y_2 \leq \left\lfloor \frac{r'}{y_1} \right\rfloor.$$

Liczbę rozwiązań takiego równania możemy policzyć w czasie stałym. W tym miejscu pojawia drobny problem wynikający z tego, że pary (α, β) oraz (β, α) liczmy jako jedną parę. Możemy go rozwiązać w prosty sposób, wprowadzając dodatkowo ograniczenie:

$$y_1 \leq y_2.$$

Gwarantuje to, że każdą parę policzymy dokładnie raz. Liczbę możliwych y_2, spełniających układ takich dwóch równań dalej możemy rozwiązywać w czasie stałym.

Posiadamy więc algorytm o złożoności obliczeniowej $O(\sqrt{r'})$, który dla danego zapytania oblicza liczbę par (y_1, y_2), spełniających równanie (1), przy założeniu, że $0 \leq y_1, y_2$. Oznaczmy wartość takich rozwiązań przez R.

Aby znaleźć liczbę rozwiązań równanie (1) dla dwóch przypadków opisanych poniżej, będzie potrzebować jeszcze jednej wartości S, oznaczającej liczbę kwadratów całkowitych z przedziału $[l', r']$. Liczbę tą możemy w najprostszy sposób obliczyć ponownie iterując się od $i = 1$ do $\sqrt{r'}$, bezpośrednio sprawdzając czy i^2 należy do przedziału $[l', r']$.

Możemy teraz wrócić do początkowych dwóch przypadków:

- $l', r' > 0$

  W tym wypadku to liczba rozwiązań równania (1) wynosi $2 \cdot R$. Jest tak dla, dla każdego dodatniego rozwiązania (y_1, y_2), spełniającego równanie (1), istnieje dokładnie jedno rozwiązanie ujemne $(-y_1, -y_2)$, które również spełnia równanie (1)

- $l', r' < 0$

  W takim wypadku musimy najpierw obliczyć wartości R oraz S dla równania $-r' \leq y_1 \cdot y_2 \leq -l'$ (co możemy, zrobić wcześniej przedstawionym algorytmem ponieważ $-r', -l' > 0$). Następnie odpowiedzą na pytanie, o liczbę rozwiązań równania (1) będzie $2 \cdot R - S$. Będzie tak dlatego, że dla każdego rozwiązania (y_1, y_2) równania $-r' \leq y_1 \cdot y_2 \leq -l'$ będą istnieć:

  - dokładnie dwa rozwiązania: $(-y_1, y_2)$, $(y_1, -y_2)$, spełniające równanie (1), dla $y_1 \neq y_2$.
  - dokładnie jedno rozwiązanie: $(-y_1, y_2)$, spełniające równanie (1), dla $y_1 = y_2$ (ponieważ rozwiązanie $(y_1, -y_2)$ będzie tym samym rozwiązaniem).

Otrzymujemy więc algorytm o złożoności obliczeniowej $O(\sqrt{|r'|})$, który dla danego zapytania oblicza liczbę par (y_1, y_2), spełniających równanie (1). Tym samym otrzymujemy algorytm rozwiązujący zadanie o złożoności obliczeniowej:

$$O\left(\sum_{i=0}^{q} \sqrt{|r_i|}\right),$$