Plan miasta

PREOI 2025 Kod zadania: **plm**
Dzień 2 – 26 stycznia 2025

Wprowadzenie

Przypomnienie. Dwukolorowaniem grafu nazywamy przypisanie wierzchołkom jednego z dwóch kolorów tak aby nie istniała krawędź między wierzchołkami tego samego koloru.

Przypomnienie. Drzewem dfs nazywamy graf utworzony przez krawędzie i wierzchołki odwiedzone przez algorytm dfs. Utożsamiamy typy towarów w sklepach z kolorem bloku, a mapę Bajtocji z grafem.

Obserwacja 1

Zauważmy, że dla każdego wierzchołka xor odległości do wierzchołków dwóch kolorów upraszcza się do odległości do najbliższego sklepu rodzaju innego niż kolor obecnego wierzchołka. Jest tak dla tego, że $x \oplus 0 = x$.

Podzadanie 1 ($n \leq 16$)

Zauważmy, że możliwych wyjść programu jest 2^n. Możemy się więc przejść po wszystkich możliwych przypisaniach rodzaju towaru do sklepów. Przed tym policzmy odległości pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków dowolnym ze znanych nam algorytmów. Następnie dla każdego przypisania możemy przejść się po wszystkich parach wierzchołków o różnych typach i obliczyć poziom niewygody każdego bloku, a następnie miasta. Osiągamy w ten sposób złożoność czasową $\Theta(2^n \cdot n^2)$. Aby uniknąć skomplikowanych operacji bitowych zalecamy użyć metody std::bitset<N>::to_string().

Obserwacja 2

Zauważmy, że jeżeli jesteśmy w stanie dwukolorować wejściowy graf, to na pewno jest to jedno z optymalnych rozwiązań. Wiemy, że długości krawędzi grafie są dodatnie, zatem dla każdego wierzchołka najbliższym do niego wierzchołkiem jest jeden z jego bezpośrednich sąsiadów. Dla dwukolorowania każdy sąsiad wierzchołka jest innego koloru niż ten wierzchołek więc najbliższy wierzchołek innego koloru jest tak na prawdę najbliższym wierzchołkiem.

Podzadanie 2 (ścieżka)

Dwukolorowanie ścieżki tego typu jest wyjątkowo łatwe, wystarczy parzystym numerom wierzchołków przypisać inny kolor niż nieparzystym.

Podzadanie 3 (drzewo)

Dwukolorowanie grafu możemy przeprowadzić standardowym algorytmem dfs. Jest to równoważne przypisaniu wierzchołkom o parzystych głębokościach innego koloru niż tym o nieparzystych.

Podzadanie 4 ($c_i = 1$)

Zauważmy, że wystarczy, że co najmniej jeden z sąsiadów każdego z wierzchołków jest innego koloru niż on sam, gdyż osiągniemy wtedy najmniejszą możliwą odpowiedź, czyli 1. Możemy to zagwarantować puszczając dfs i przypisując kolejnym wierzchołkom inny kolor niż poprzedniemu. To rozwiązuje zadanie gdyż dla każdego wierzchołka zachodzi, w drzewie dfs:

1. jest korzeniem, a wtedy każdy kolejny będzie miał inny kolor.
2. ma ojca, ale wtedy ojciec ma inny kolor niż syn.

Rozwiązanie wzorcowe

Niewygoda miasta jest niewątpliwie nie mniejsza niż największa waga wśród krawędzi o najmniejszej wadze dla jednego z końców tej krawędzi. Formalnie możemy zapisać to jako: $\max_{v \in 1 \ldots n} \min_{w \in 1, \ldots, v-1, v+1, \ldots, n} dist(v, w)$. Pokażę, że możemy osiągnąć dokładnie taką niewygodę. W tym celu usuńmy wszystkie krawędzie mniejsze niż oczekiwany wynik. Powstały graf co prawda nie musi być spójny ale wiemy, że każda spójna jest rozmiaru co najmniej 2, gdyż dla każdego wierzchołka co najmniej jedna z jego krawędzi z wejściowego grafu pozostała w zmienionym grafie. Zastosujemy teraz rozumowanie z poprzedniego podzadania, dla każdej spójnej z osobna. Osiągniemy w ten sposób pewne pokolorowanie grafu, którego każdy wierzchołek ma sąsiada innego koloru. W szczególności waga krawędzi do tego sąsiada jest mniejsza niż oczekiwany wynik. To kończy rozwiązanie zadania.