ESERCIZI STATISTICA

By Edoardo

VARIABILI DISCRETE

① Sia X una variabile aleatoria discreta con la seguente distribuzione

$$P(X=k) = \begin{cases} 2/10 & k=-2 \\ 3/10 & k=-1 \\ 1/10 & k=0 \\ \frac{1}{10} & k=1 \\ 3/10 & k=2 \end{cases}$$

a) Calcolare $P(X\geq 1)$ e $P(X=1 \mid x\geq 0)$

$$P(X\geq 1) = P(X=1) + P(x=2) = 1/10 + 3/10 = 4/10$$

$$P(x=1 \mid x\geq 1) = \boxed{P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = \frac{P(x=1 \cap x\geq 0)}{P(x\geq 0)} = \frac{P(x=1)}{P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}}$$

b) Calcolare media e varianza di x

$$EX \boxed{= \sum_k k\, p(X=k)} = (-2)\frac{2}{10} + (-1)\frac{3}{10} + 0\left(\frac{1}{10}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 2\cdot\frac{3}{10} = \dots$$

Varianza $= \operatorname{Var} X = E(X-EX)^2$ oppure $\boxed{E(x^2) - (EX)^2}$

$$E(x^2) = \sum_k k^2\, p(X=k) = (-2)^2\,\frac{2}{10} + (-1)^2\,\frac{3}{10} + 0\,\frac{1}{10} + 1^2\,\frac{1}{10} + 2^2\,\frac{3}{10}$$

c) Calcolare il valore atteso di $Y = e^X$

$$\boxed{Y = g(X) \qquad EY = \sum_k g(k)\, P(X=k)}$$

$$Ee^X = \sum_k e^k\, P(X=k) = e^{-2}\,\frac{2}{10} + e^{-1}\,\frac{3}{10} + e^0\,\frac{1}{10} + e^1\,\frac{1}{10} + e^2\,\frac{3}{10}$$

d) Trovare la distribuzione di $Y = X^2$

$x = \pm 2, \pm 1, 0 \implies Y = 0, 1, 4$ Possibili valori di Y

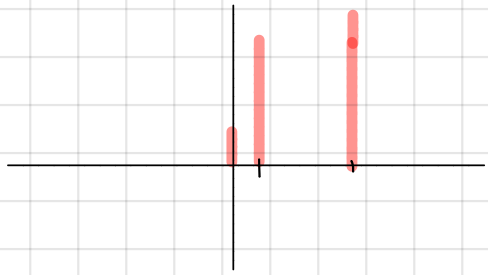
$$P(Y=4) = P(X=2 \cup X=-2) = P(x=2) + P(x=-2) = \frac{5}{10}$$

perché disgiunti

$$P(Y=1) = P(x=1) + P(x=-1) = \frac{4}{10}$$

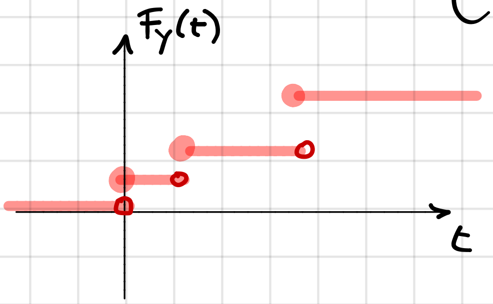
$$P(Y=0) = P(x=0) = \frac{1}{10}$$

$$P(Y=k)=\begin{cases} 1/10 & k=0 \\ 4/10 & k=1 \\ 5/10 & k=2 \end{cases} \Big\} \text{ distribuzione}$$



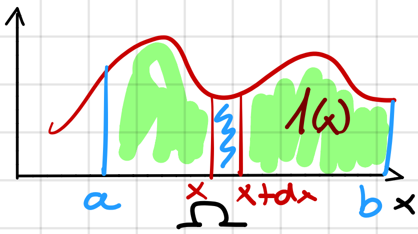
e) Trovare la funzione di ripartizione di Y

$$\boxed{F_Y(t)=P(Y\le t)} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/10 & 0<t<1 \\ 1/10+4/10 & 1<t<4 \\ 1 & t>4 \end{cases}$$



Solo variabili discrete hanno dei salti nel grafico della funzione di ripartizione
Continua da destra

VARIABILI CONTINUE



Assumono un continuum di valori
$\forall c \quad P(X=c)=0$

$f(x)$ = densità di probabilità

$$P(x<X<x+dx) = f(x)\,dx$$

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

È ovvio che $\int f(x)\,dx = \mathbb{R} = P(X=\mathbb{R}) = 1$

X è una variabile aleatoria continua con la seguente densità:

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a) Calcola la $P(0{,}5<X<1{,}5)$

$$\int_{0,5}^{1,5} f(x)\,dx = \int_{0,5}^{1} \tfrac{1}{2}\,dx + \int_{1}^{1,5} (2-x)\,dx$$

b) Funzione di ripartizione

$$F_X(t)=P(X\le t) = \begin{cases} 0 & t<0 & 0 \\ \int_0^t \tfrac{1}{2}\,dx & 0\le t<1 & \tfrac{1}{2}t \\ \int_0^1 \tfrac{1}{2}\,dx + \int_1^t (2-x)\,dx & 1\le t<2 & -\tfrac{1}{2}t^2+2t-1 \\ 1 & t>2 & 1 \end{cases}$$

Il grafico di $F_Y(t)$ sarà una linea continua perché la variabile è continua.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}F_X(t) = f(t)}$$

$$P(0{,}5 < X < 1{,}5) = P(X < 1{,}5) - P(X < 0{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5)$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

c) Media e Varianza

$$EX = \int_0^2 x f(x)\,dx = \sum_k k\,P(X=k) = \int_0^1 x \cdot \tfrac{1}{2}\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx$$

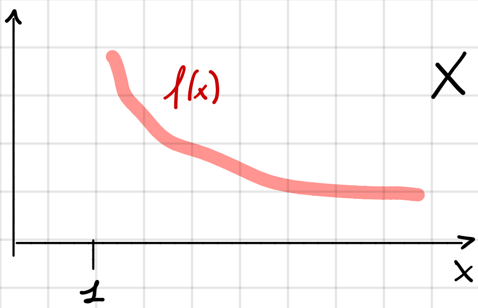
$E(X^2)$ = momento secondo $= \int_0^2 x^2 (f(x))\,dx = \int_0^1 x^2 \tfrac{1}{2}\,dx + \int_1^2 x^2(2-x)\,dx$

$$\boxed{Var\,X = E(X^2) - (EX)^2}$$

Sia X una variabile aleatoria con f. ripartizione

$$F_X(t) = P(X \le t) = \begin{cases} 1 - 1/t & t \ge 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases} \qquad (X \text{ è continua})$$

$$\text{Densità} = f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \ge 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$



X assume valori $[1, \infty)$

a) Calcolare $P(X > 2 \mid X < 3)$

$$= \frac{P(X>2 \cap X<3)}{P(X<3)} = \frac{P(2<X<3)}{P(X<3)} = \frac{F(3)-F(2)}{F(3)} = \frac{1 - 1/3 - (1 - 1/2)}{1 - 1/3}$$

oppure

$$= \frac{P(2<X<3)}{P(X<3)} = \frac{\int_2^3 1/x^2\,dx}{\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx}$$

b) Trovare la distribuzione di $Y=\ln X$

$X\in(1,\infty) \Rightarrow Y=\ln X \in (0,\infty)$

abbiamo scaricato il problema su X

$F_Y(t)=P(Y<t)=\begin{cases}0 & t<0\\ ? & t>0\end{cases} \Rightarrow P(Y<t)=P(\ln X<t)=P(X<e^t)$

$= F_X(e^t) = 1-\frac{1}{e^t}$ $\qquad \int_1^{e^t} 1/x^2\,dx$

derivo e trovo la densità

$f_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{e^t} & t\geq 0\end{cases}$

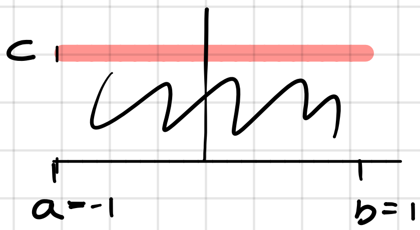
Sia X una variabile continua con distribuzione uniforme in $[-1,1]$

a) Trovare densità e f. rip. di X

b) Trovare densità e f. rip. di $Y=x^2$

Uniforme - densità costante (in $[-1,1]$

$f_X(t)$



$(b-a)c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{2}$

$f(x)=\begin{cases}1/2 & -1<x<1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$ $\qquad F_X(t)=P(X\leq t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ \frac{t+1}{2} & -1<t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$

$X\in[-1,1]$ $\quad Y=x^2\in(0,1)$

$F_Y(t)=P(Y\leq t)=\begin{cases}0 & t<0\\ ? & 0<t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$

$? \Rightarrow P(Y<t)=P(X^2<t)=P(-\sqrt{t}<X<+\sqrt{t})=$

$=① = F_X(\sqrt{t})-F_X(-\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{t}+1}{2}-\frac{-\sqrt{t}+1}{2}=\sqrt{t}$

$=② = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(x) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{2}\,dx = \sqrt{t}$

Urna $\{5$ palline bionde, 10 rosse $\}$

a) Vengono estratte 5 palline con REIMMISSIONE. Calcolare la prob che le prime 3 sono bionde e le ultime rosse.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) \underset{\text{INDIP.}}{=} P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(R_4)P(R_5)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

b) Calcolare la prob. che in tutto ci siano 3 bionde e due rosse.

$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

n prove. In ogni prova la prob. di successo è p e di insuccesso è $1-p$ allora detto x il numero di successi la prob che $x=k$ $= P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

c) Estraggo 5 palline senza reimmissione. Calcolare la prob che le prime 3 sono bionde e le altre 2 rosse.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) \quad \underline{\text{NON INDIPENDENTI}}$$

$$= P(B_1)P(B_2|B_1)\,P(B_3|B_1\cap B_2)\,P(R_4|B_1\cap B_2\cap B_3)\ldots$$

$$= \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11} = 0{,}015$$

LEGGE IPERGEOMETRICA

Urna $\{b$ bionde, r rosse$\}$
Estraggo n palline in blocco ↳ EQUIVALENTEMENTE n palline senza reimmissione)

Calcolare la probabilità che di queste n k siano rosse e $n-k$ bionde.

$X = \#$ rosse su n estratte $\quad X = 0,\ldots n$

↳ la legge ipergeometrica dice che $P(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$ casi possibili $\Rightarrow$

$k = 0 \ldots n$

d) Estraggo 5 palline senza reimmissione.
Calcolare la prob che in tutto siano 3 bionde e 2 rosse

$X = \#$ rosse

$$P(X=2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10+5}{5}}$$

In uno scatolo ci sono 20 articoli di cui 4 difettosi. Viene estratto un campione di 3 articoli. Si trovi il valore atteso di articoli difettosi nel campione.

$X = \#$ difettosi su 3 $\qquad X = 0, 1, 2, 3$

Legge ipergeometrica

$$\boxed{P(X=k)} = \frac{\binom{4}{k}\binom{16}{3-k}}{\binom{20}{3}} \qquad k = 0 \dots 3$$

$$\boxed{EX} = \sum_{0}^{3} k P(X=k) = 0\, P(X=0) + P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3)$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

Probabilità che il primo successo avviene alla k esimo prova
Ogni prova ho p prob di successo e 1-k di insuccesso.

T = # tentativo in cui c'è il primo successo

$\boxed{P(T=k)\ ?}$

$P(T=k) = P$ il primo successo si ha alla k-esimo prova =

$= P(I_1 \cap I_2 \cap \dots S_k)$ INDIP. $= P(I_1)P(I_2)\dots P(I_{k-1})P(S_k)$

$= (1-p)^{k-1}p$

$$\boxed{P(T=k) = (1-p)^{k-1}p}$$

$$ET = \sum_1^{\infty} k P(T=k) = 1/p$$

Lancio ripetutamente dado a) Prob che 6 esce al k-esimo lancio

$$P(T=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$

b) Prob 6 esce dopo il k-esimo lancio

MODO 1:

$$P(T>k) = P(T=k+1) + P(T=k+2) + \dots = \sum_{k+1}^{\infty} P(T=J)$$

MODO 2:

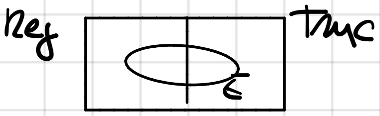
$$P(T>k) = 1 - P(T\leq k) = 1 - \sum_1^{k} P(T=J) = 1 - \sum_1^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{J-1}\frac{1}{6}$$

MODO 3:

$$P(T>k) = P(\text{nei primi } k \text{ tentativi non esce } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

Es. Sacchetto con 10 monete: 2 regolari e 8 truccate (testa con prob $\frac{2}{3}$)
Scelgo una a caso e la lancio ripetutamente.

a) Prob. testa al k-esimo tentativo



$P(\text{reg}) = \frac{2}{10} \quad P(\text{truc}) = \frac{8}{10}$

E = testa al k-esimo tentativo

$$P(E \cap \text{Reg}) + P(E \cap \text{Truc}) = P(E|\text{Reg})P(\text{reg}) + P(E|\text{Truc})P(\text{Truc})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{10}$$

Sia X una variabile aleatoria con $EX = \mu$ e $\text{Var}\,X = \sigma^2$
Trovare valore atteso e varianza di $\boxed{Y = \frac{X-\mu}{\sigma}}$

VARIABILE STANDARDIZZATA

1) Linearità EX: $E(aX+b) = aEX+b$

2) $\text{Var}(aX+b) = a^2\,\text{Var}\,X$

$$EY = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{EX}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \boxed{0}$$

$$\text{Var}\,Y = \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\text{Var}X}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = \boxed{1}$$

sempre!

$Y = aX + b$

$\text{Var}\,Y = E(Y^2) - (EY^2)$

$= E(a^2X^2 + b^2 + 2abX) - (aEX+b)^2$

$= a^2E(X^2) + b^2 + 2abEX - a^2(EX)^2 - b^2 - 2abEX = a^2(E(X^2) - (EX)^2)$

$\boxed{a^2\,\text{Var}\,X}$

Es.

X ha densità $f(x) = \begin{cases} 5\, e^{-5x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Trovare la distribuzione di $Y = e^{-X}$

X ha valori in $[0, \infty)$

$X \geq 0 \Rightarrow Y \in (0,1)$

$F_Y(t) = P(Y \leq t)$ Funzione ripartizione

$$= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 1 \\ ? & 0 < t < 1 \end{cases} \Rightarrow P(Y \leq t) = P(e^{-X} \leq t) = P(-X \leq \log t$$

$$= P(X \geq -\log t) = \int_{-\log t}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\log t}^{\infty} 5\, e^{-5x}\,dx = -e^{-5x}\Big|_{-\log t}^{\infty} = e^{5\log t} = (e^{\log t})^5 = t^5$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 1 \\ t^5 & 0 \leq t < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{densità } Y \Rightarrow f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) =$$

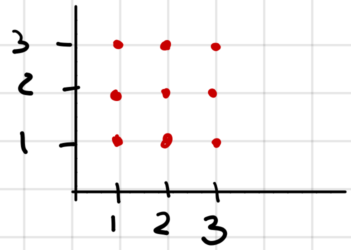
$$= \begin{cases} 5t^4 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

VARIABILI DOPPIE DISCRETE

(X, Y)

DISTRIBUZIONE CONGIUNTA

$$P_{ij} = P(X=i \cap Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{36}(i+j) & i=1 \dots 3 \quad j=1 \dots 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$y=1$	$2/36$	$3/36$	$4/36$
$y=2$	$3/36$	$4/36$	$5/36$
$y=3$	$4/36$	$5/36$	$6/36$

marginale di X

marginale di Y

a) Trovare distribuzioni marginali (solo x e solo y)

Marginale di X:

$X: 1, 2, 3$

$P(X=1) = P_{11} + P_{12} + P_{13} = 9/36$

$P(X=2) = P_{21} + P_{22} + P_{23} = 12/36$

$P(X=3) = P_{31} + P_{32} + P_{33} = 15/36$

Marginale di Y

$P(Y=1) = 9/36$

$P(Y=2) = 12/36$

$P(Y=3) = 15/36$

X e Y sono uguali per distribuzione

$X \overset{d}{=} Y$

b) X e Y sono indipendenti?

INDIPENDENZA

$$P(X=i \cap Y=j) = P(X=i)P(Y=j) \quad \forall (i,j)$$

congiunta — prodotto marginale

Provo $X=1$ e $Y=1$

congiunta $= 2/36 \neq 9/36 \cdot 9/36 \Rightarrow$ NON INDIPENDENTI

NB. Se la "matrice" ha degli zeri le variabili sono sicuramente dipendenti.

c) Trovare la distribuzione di X condizionata a $Y=1$.

$P(X=1 \mid Y=1)$
$P(X=2 \mid Y=1)$
$P(X=3 \mid Y=1)$

$$\frac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{2/36}{9/36} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

la somma delle 3 deve essere 1!

Se erano indipendenti le probabilità sono quelle delle singole celle

d) Calcolare EX, EY, $E(X+2Y)$, $E(XY)$, $E\log(X+Y)$

- $EX = 1 \cdot \frac{9}{36} + 2 \cdot \frac{12}{36} + 3 \cdot \frac{15}{36} = \frac{13}{6}$
- $EY = EX$ perché $X \overset{d}{=} Y$
- $E(X+2Y) = EX + 2EY$ poiché lineare $= \frac{13}{6} + \frac{26}{6} = \frac{39}{6}$

Se X e Y fossero indipendenti $E(XY) = EX \cdot EY$

$$Ef(X)g(Y) = Ef(X)\,Eg(Y)$$

In questo caso: $Eg(X,Y) = \sum_{i,j} g(i,j) P(X=i \cap Y=j)$

$\Rightarrow$ - $E(XY) = \sum_{i,j} i \cdot j\, P(X=i \cap Y=j) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{36} \dots$

- $E\log(X+Y) = \sum_{i,j} \log(i+j) P(X=i \cap Y=j) = \log(1+1) \cdot \frac{2}{36} \dots$

e) Trovare la distribuzione di $Z = |X-Y|$

che valori assume Z? $\Rightarrow Z = 0, 1, 2$

$$\left.\begin{aligned} P(Z=0) &= P_{11} + P_{22} + P_{33} = \frac{12}{36} = 1/3 \\ P(Z=1) &= P_{12} + P_{21} + P_{32} + P_{23} = \frac{16}{36} \\ P(Z=2) &= P_{31} + P_{13} = 8/36 \end{aligned}\right\} \text{la somma è } 1$$

ES 2

X e Y indipendenti

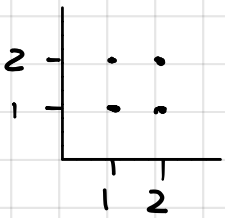
$P(X=1) = P(X=2) = 1/2$
$P(Y=1) = 1/3 \quad P(Y=2) = 2/3$

a) Calcolare $E(XY)$
b) Trovare la distribuzione di $Z = XY$

a) X e Y indip. $\Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY$

$EX = 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 = 3/2$
$EY = 1 \cdot 1/3 + 2 \cdot 2/3 = 5/3$ $\Rightarrow E(XY) = 5/2$

b) Trovo la congiunta: se sono indipendenti la congiunta $P(X=i \cap Y=j)$
$= P(X=i)P(Y=j) \ \forall i,j$



$\Rightarrow$

	x=1	x=2
y=1	1/6	1/6
y=2	1/3	1/3

$P_{11} = P(X=1)P(Y=1) = 1/6$
$P_{12} = P(X=1)P(Y=2) = 1/3$
$P_{21} = P(X=2)P(Y=1) = 1/6$
$P_{22} = P(X=2)P(Y=2) = 1/3$

$Z = 1, 2, 4$

$P(Z=1) = P(X=1, Y=1) = 1/6$
$P(Z=2) = P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) = 1/3 + 1/6 = \frac{1}{2}$
$P(Z=4) = P(X=2, Y=2) = 1/3$

$$P(Z=k) = \begin{cases} 1/6 & k=1 \\ 1/2 & k=2 \\ 1/3 & k=4 \end{cases}$$

ES 3

Viene lanciato un dado regolare. Se l'esito del lancio è X, viene lanciata X volte una moneta regolare.
Sia Y il numero di volte che esce testa.
Trovare la distribuzione di X, Y e la distribuzione congiunta di (XY)

Si capisce subito che X e Y sono DIPENDENTI LOGICAMENTE per costruzione

$X = 1 \dots 6$

$$P(X=i) = \begin{cases} 1/6 & i = 1 \dots 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Troviamo la distribuzione di Y condizionata ad un certo valore del dado ovvero $X=i$

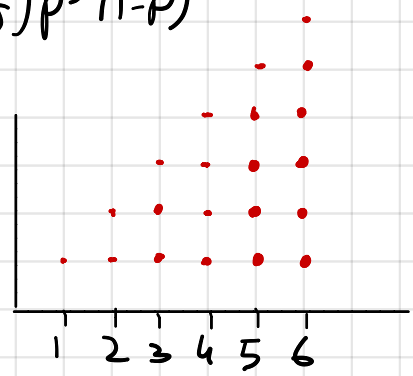
$$P(Y=j \mid X=i) = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{(i-j)}$$

legge binomiale: i tentativi $p = 1/2$ prob di successo ad ogni tentativo

$$P(Y=j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{(n-j)}$$

$$P_{ij} = P(X=i \cap Y=j) = P(Y=j \mid X=i)\, P(X=i)$$

$$= \begin{cases} \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{(i-j)}\left(\frac{1}{6}\right) & i = 1 \dots 6 \quad j = 0 \dots i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

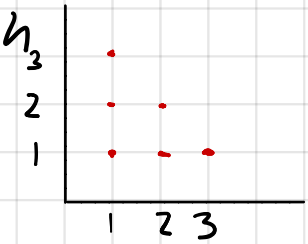


$\boxed{\text{MARGINALE } Y:}$

$Y = 0 \dots 6$

$$P(Y=j) = \sum_{riga} P_{ij} = \sum_{i=j}^{6} P_{ij} = \sum_{i=j}^{6} \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{(i-j)}\left(\frac{1}{6}\right)$$

ES 4



Sia (X,Y) uniformemente distribuita sui punti in figura. Trovare la congiunta, le marginali e la distribuzione di Y condizionata a $X=2$.

Sono 6 punti con la stessa probabilità $p = 1/6$

Congiunta $P_{ij} = \begin{cases} 1/6 & \text{se } (i,j) \text{ è uno dei punti} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$\boxed{\text{Marginale } X}$ $X = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{aligned} P(X=1) &= 3/6 \\ P(X=2) &= 2/6 \\ P(X=3) &= 1/6 \end{aligned}\right\} \text{Sommo "colonne" grafico}$$

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
$Y=2$	$1/6$	$1/6$	0
$Y=3$	$1/6$	0	0

$\boxed{\text{Marginale } Y}$ $Y = 1, 2, 3$

$$\left.\begin{aligned} P(Y=1) &= 3/6 \\ P(Y=2) &= 2/6 \\ P(Y=3) &= 1/6 \end{aligned}\right\} \text{Sommo "righe" grafico}$$

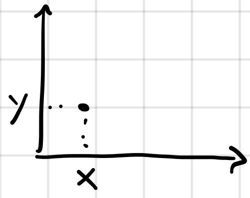
Distribuzione $Y \mid X=2$

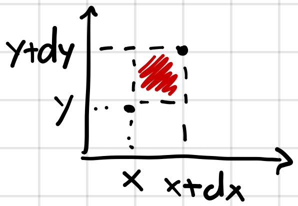
$$\left.\begin{aligned} P(Y=1 \mid X=2) &= \frac{P_{12}}{P(X=2)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} \\ P(Y=2 \mid X=2) &= \frac{P_{22}}{P(X=2)} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{UNIFORME}$$

Urna A (2 rosse, 4 nere)
Urna B (2 nere)
Prendo due palline in blocco da A e le metto in B
Estraggo due palline da B con reimmissione.
Sia X il # rosse estratte da A e Y # rosse estratte da B.
1) Trovare la distribuzione di X, Y e congiunta di XY
2) Calcolare la covarianza tra X e Y e il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$.

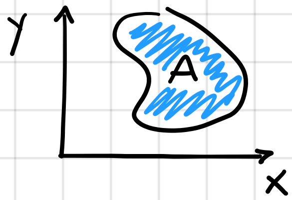
VARIABILI DOPPIE CONTINUE

(X, Y) continua doppia $\quad P(X=x \cap Y=y)=0$





$$P(x<X<x+dx \cap y<Y<y+dy)=$$
$$=\underbrace{f(x,y)}_{\text{densità congiunta}}dx\,dy$$

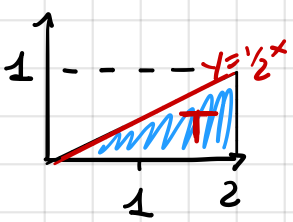


$$P((X,Y)\in A)=\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$$P((X,Y)\in \mathbb{R}^2)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

ES. Sia (X,Y) una variabile doppia con densità

$f(x,y)=\begin{cases}1/x & (x,y)\in T\\ 0 & (x,y)\notin T\end{cases}$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$ $(2,0)$ $(2,1)$



a) Dimostrare che f è davvero una densità di prob.

$f(x,y)=1/x\geq 0$ (I° quadrante)

$$\boxed{\iint_T f(x,y)\,dx\,dy=1}$$

$$\int_0^2 dx\int_0^{\frac{1}{2}x}dy\,\frac{1}{x}=\int_0^2 dx\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{2}x=\int_0^2\frac{1}{2}\,dx=\boxed{1}\quad \text{OK!}$$

b) Trovare le densità marginali di X e Y

Marginale X) $\quad X\in(0,2)$

$$f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{2}x}f(x,y)\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{1}{x}\,dy=\frac{1}{x}\,\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1/2 & x\in(0,2)\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Marginale di Y | $x \in (0,1)$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int_{2y}^{2} 1/x \, dx = \ln x \Big|_{2y}^{2} = \ln \frac{2}{2y} = -\ln y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & y \in (0,1) \\ 0 & \text{oltrove} \end{cases}$$

c) X e Y sono indipendenti?

Il supporto deve essere ortogonale → Matrice senza zeri ortogonale agli assi

&

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \quad \forall\, (x,y)$$

Il supporto è triangolare ⇒ NO INDIP.

d) Calcolare la covarianza tra x e y.

$$\text{cov}(x,y) = E(xy) - EX\,EY$$

$$EX = \int_0^2 x\, f_X(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \tfrac{1}{2}\,dx = 1$$

$$EY = \int_0^1 y\, f_Y(y)\,dy = -\int_0^1 y \ln y\,dy = \frac{1}{4}$$

$$E\,g(x,y) = \iint_T g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(xy) = \iint_T xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} dy \; xy\, \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(x,y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Se due variabili sono indipendenti $\Rightarrow cov(x,y)=0$

Passaggi logici

1) X, Y indip $\Rightarrow E(xy) = E x \, E y$
2) Non vale il contrario!

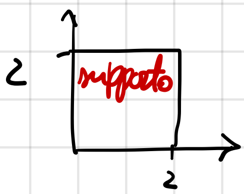
e) Trovare la densità di x condizionata a $Y=y$

Il supporto della x si stringe:

$$f_x(x \mid Y=y) = \begin{cases} ? & 2y < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/x}{-\ln y} = \boxed{-\frac{1}{x \ln y}}$$

Es. Siano X e Y indip.
$X \sim$ Uniforme $(0,2)$, mentre Y ha densità $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} y^2 & y \in (0,2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

a) Trovare la densità congiunta.

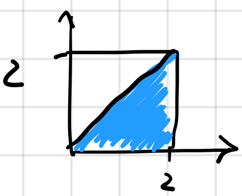


Indipendenti $\Rightarrow f(x,y) = f_x(x) \, f_y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} y^2$

Uniforme $\left(\frac{1}{A-B}\right) = \left(\frac{1}{2-0}\right)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{16} y^2 & x \in (0,2) \quad y \in (0,2) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) Calcolare la probabilità che $y < x$

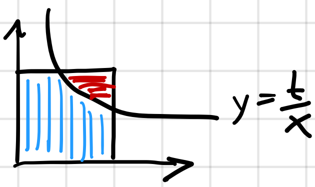


$$P(Y<X) = \iint_{\text{Regione } Y<X} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \; \frac{3}{16} y^2 = \frac{1}{4}$$

c) Trovare la distribuzione di $Z = XY$

$Z \in (0,4)$

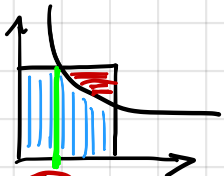
$$f_Z(t) = P(Z \le t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ ? & 0<t<4 \\ 1 & t \ge 4 \end{cases} \Rightarrow P(Z \le t) = P(XY \le t) =$$



$$= \iint_{\text{Regione } xy \le t} f(x,y)\,dx\,dy = P\left(y \le \frac{t}{x}\right) =$$

$$= 1 - P\left(y \ge \frac{t}{x}\right) = 1 - \iint f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$$

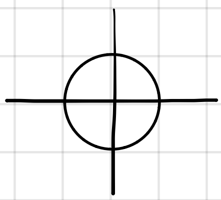
$\Rightarrow$



x $\begin{cases} y=2 \\ y=\frac{t}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=t/2 \end{cases}$ $\Rightarrow 1-\int_{t/2}^{2} dx \int_{t/x}^{2} dy \ \frac{3}{16}y^2 = \boxed{\frac{3}{16}t - \frac{1}{128}t^3}$

Es. Sia (X,Y) uniformemente distribuita sul cerchio di centro l'origine e raggio R

a) Trovare la densità congiunta



$$f(x,y)=\frac{1}{\text{Area}}=\frac{1}{\pi R^2}=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2} & (x,y)\in \text{cerchio} \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

b) Trovare la distribuzione di prob. della distanza di un punto (X,Y) dall'origine.

$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ $\quad Z\in(0,R)$

$$F_Z(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ ? & 0\le t<R \\ 1 & t\ge R\end{cases}$$

$0\le t<R$

$$P(Z\le t)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\le t\right)=\iint_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{raggio } t}} f(x,x)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{raggio } t}} dx\,dy=$$

$$\frac{\pi t^2}{\pi R^2}=\frac{t^2}{R^2}$$

$$P(A) = \frac{NB, BN, NR, RN}{RB, BR, NR, RN, NB, BN} = \frac{\frac{8}{25}}{\frac{8}{25} + \frac{8}{25}} = 0,5$$

Esame giugno 2016

1)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-\cancel{1}-k+\cancel{1})!}$$

$$(k-1)! = \frac{k!}{k}$$

$$(n-1-k)! = \frac{(n-k)!}{(n-k)}$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k)}{n \cdot k!(n-k)!} + \frac{n!k}{nk!(n-k)!} = \cancel{\frac{n!\,n}{n\,k!(n-k)!}}$$

$\Rightarrow$ Combinazioni semplici = numero di raggruppamenti di $k<n$ elementi che differiscono dagli altri per almeno relativo un elemento

Il numero di combinazioni di k elementi su n è uguale al numero di combinazioni di k elementi su n-1 + il numero di combinazioni di k-1 elementi su n-1

2) Dati $X_1 \dots X_n$ v.a. i.i.d e Y la loro somma se n è molto grande Y può considerarsi normale con media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$

Es 1

5 su 21

1) reinserimento 2) non reinserimento
a) contiene a b) solo vocali c) sia amore

$$1)a)\ P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^5$$

$$b)\ \left(\frac{5}{21}\right)^5$$

$$c)\ \left(\frac{1}{21}\right)^5$$

2) a) Estrazione Senza Reimmissione $\Rightarrow$ legge ipergeometrica

$$P(X=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{20}{4}}{\binom{21}{5}}$$

$$b)\ P(X=5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{16}{0}}{\binom{21}{5}} = 1/\binom{21}{5}$$ ipergeometrica

$$c)\ P(a)P(m|a)P(o|m)P(r|o)P(E|R) = 1/21 \cdot 1/20 \cdot 1/19 \cdot 1/18 \cdot 1/17$$

Es 2

a) (X,Y)

$P_{1,1} = P_{1,0} = P_{0,0} = P_{-1,1} = 1/10$

$P_{0,1} = P_{-1,0} = 3/10$

$P_{i,j} = P(X=i, Y=j)$

$$P(X=1) = \sum_j (X=1, Y=y_j) = 2/10$$

$P(X=0) = 4/10$

$P(X=-1) = 4/10$

$P(Y=1) = 5/10$ $\quad P(Y=0) = 5/10$

b) Non sono indipendenti perché $P(-1,0) \neq P(X=-1)P(Y=0)$

c) $Z = X^2$

$$\begin{cases} Z=0 = P(X=0) = 4/10 \\ Z=1 = P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = 3/5 \end{cases}$$

d) Distribuzione $XY = Z$

$P(Z=1) = 1/10 \rightarrow P_{1,1} = 1/10$
$P(Z=-1) = 1/10 \rightarrow P_{(-1,1)} = 1/10$
$P(Z=0) = 8/10 \rightarrow \sum p$ con almeno un elemento $=0$

e) $Cov(X,Y)$

$E[X] = \frac{2}{10} - 4/10 = -2/10$

$E[Y] = 5/10 = 1/2$

$E[XY] = 0 \quad \Rightarrow 0(y) \cdot -1(x) \cdot 3/10 + 0(y) \cdot 0(x) \cdot 1/10 \dots$

$Cov(X,Y) = 0 - 1/2 \cdot (-2/10) = +1/10$

Es 3

a) $n = 50$

$P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - \left(Z \leqslant \frac{60 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

$\mu = 1/3 + 2/3 - 1$

$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$1 - \left(Z \leq \frac{10}{\sqrt{50 \cdot 2/3}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{3})$

b) Vedi appunti intervallo confidenza.

Esame aprile 2016

ES 1

4 r 4b 2n con reimmissione

a) (rn bn rb) x 2

$\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{25}\quad\times 2=\frac{16}{25}=0{,}64$

b) almeno una n

nr rn nn nb bn

$\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)\times 4+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{25}=0.36$

c) $P(n|\text{diversi})=\frac{nr\ rn\ br\ rb}{16/25}=\frac{4\cdot\frac{2}{25}}{16/25}=\left[\frac{1}{2}\right]$

Esame febbraio 2016

Es 2

$X\in(0,2)$
$Y\in(-1,1)$

a) $f(x,y)=\begin{cases}1/4 & 0<x<2,\ -1<y<1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

c) $f(x)=\int_{-1}^{1}1/4\,dy=1/4\cdot 2=1/2$

$f(y)=\int_{0}^{2}1/x\,dx=1/4\cdot 2=1/2$

$f(x)f(y)=f(x,y)\Rightarrow$ indipendenti

Es3

a) $E[X] = \frac{6232,4}{150} = 41,55$

$S^2(x) = \frac{1}{149} \cdot 402703 - 150(41,55)^2 = 964,81$

b) $\begin{cases} H_0 : \mu = 45.25 \\ H_1 : \mu < 45.25 \end{cases}$

$t = \frac{41,55 - 45.25}{31.06/12.24} = -1.4591$

Esame gennaio 2016

Es1

$P(E) = P_1 \cup (P_5 \cap (P_3 \cup P_4)) = P_1 \cup (P_5 \cap P_3) \cup (P_5 \cap P_4) = P_1 + P(P_5 \cap P_3) +$

$P(P_5 \cap P_4) - P(P_1 \cap P_5 \cap P_3) - P(P_1 \cap P_5 \cap P_4) - P(P_5 \cap P_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5)$

$= P_1 + P_5 P_3 + P_5 P_4 - P_1 P_5 P_3 - P_1 P_5 P_4 - P_5 P_3 P_4 + P_1 P_3 P_4 P_5$

Es2

$Z = Y - X$

$-1 < X < 1$

$0 < Y < 1$

X	Y	Z
-1	0	1
1	0	-1
0	1	1

$-1 < Z < 1$

$f(z) = \begin{cases} 1 & z > 1 \\ 0 & z < 1 \\ ? & -1 < z < 1 \end{cases} \Rightarrow$

Esame Maggio 2015

1) $H_0 : \mu = 500$ $\quad$ 1%

$H_1 : \mu \leq 500$

$S^2 = \frac{1}{n-1} \quad 9841173.7 - 246016 \quad =$

Esame Maggio 2015

1) Con Reimmissione:

a)
$P(\text{una } A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 = \left(\frac{20}{21}\right)^5$

b)
$P(5 \text{ vocali}) = P(X=5) = \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0 = \left(\frac{5}{21}\right)^5$

c) $\left(\frac{1}{21}\right)^5$ perchè tutti indipendenti avendo la reimmissione

Senza Reimmissione:

a) $P(X=1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{20}{4}}{\binom{21}{5}} = \binom{20}{4} \Big/ \binom{21}{5}$

b) $P(X=5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{16}{0}}{\binom{21}{5}} = 1 \Big/ \binom{21}{5}$

c) $P(\text{amore}) = P(A) \cdot P(M|A) P(O|M) P(R|O) P(E|R) = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{17}$

2) $P_{1,1} = P_{1,0} = P_{0,0} = P_{-1,1} = 1/10$
$P_{0,1} = P_{-1,0} = 3/10$

a) $P(X=1) = 2/10 \quad P(X=-1) = 4/10 \quad P(X=0) = 4/10$
$P(Y=0) = 5/10 \quad P(Y=1) = 5/10$

b) $P_{0,1} = 3/10 \neq P(X=0)P(Y=1) = 4/10 \cdot 5/10 = \frac{20}{100}$ sono dipendenti

c) $Z = X^2$

X	Z
1	1
0	0
-1	1

$P(Z=0) = P(X=0) = 4/10$

$P(Z=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{6}{10}$

d) $Z = XY$

$P(Z=-1) = P_{-1,1} = 1/10$
$P(Z=1) = P_{1,1} = 1/10$

$P(Z=0) = 1 - 2/10 = 8/10$

Usiamo le $P_{x,y}$ perchè dipendenti

e) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = (-1/10 + 1/10) - (2/10 - 4/10)(5/10) =$
$= 0 - (-2/10)(5/10) = \frac{1}{10}$

3) a) $P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=1/3$

$n=50$

$$P(\bar{X}>60)=1-P(\bar{X}<60)=1-P\left(Z<\frac{60-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-P\left(Z<\frac{60-50}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{2/3}}\right)=1-\Phi(\sqrt{3})$$

$$\sigma^2=E[X^2]-E[X]^2=\ 5/3\quad -1\ =2/3$$

$$1-\Phi\sqrt{3}=0{,}0418$$

b) $\sigma=0.5$

$n=5$

1.05 , 1.00 , 1.20 , 1.10 , 1.10

$$\left(\bar{X}\pm z_{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(1.09\pm z_{0.025}\frac{0{,}5}{\sqrt{5}}\right)$$

Teoria

1)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=\frac{n!}{n}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-k)}{(n-k)!}+\frac{n!}{n}\cdot\frac{k}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}$$

$$=\frac{n!\,(n-k)+n!\,k}{n\,k!\,(n-k)!}=\frac{n!\,(n-\cancel{k+k})}{\cancel{n}\,k!\,(n-k)!}=\text{Verificata}$$

Il numero di combinazioni di k elementi su n è uguale al numero di combinazioni di k elementi su $n-1$ + il numero di combinazioni di $k-1$ elementi su $n-1$

2) Date $X_1 \dots X_n$ v.a.i.i.d. e Y v.a. $=X_i+\dots+X_n$ per n molto grande Y è una normale con media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$

Esame Aprile 2016

1) a) $P(\text{diverse}) = 2[P(R|B) + P(R|N) + P(B|N)] = 2\left(\frac{16}{100} + \frac{8}{100} + \frac{8}{100}\right) = \frac{64}{100} = 0.64$

b) $1 - P(X=0)$ con $p = 2/10$

$$1 - \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = 1 \cdot (1-p)^2 = 0.36$$

c) $$P(n|d) = \frac{P(n \cap d)}{P(d)} = \frac{2 \cdot 2/10 \cdot (1 - 2/10)}{0.64} = 0{,}5$$

2) a) L'integrale nel suo dominio deve essere $= 1$

$$\Rightarrow \int_0^c \int_0^x 1/x \, dy\, dx = 1$$

$$1 = \int_0^c 1/x \int_0^x dy\, dx = \int_0^c dx = x \Big|_0^c = c - 0 = c$$

b) $$f(x) = \int_0^x 1/x \, dy = 1/x \; y \Big|_0^x = 1 \qquad 0 < x < 1$$

$$f(y) = \int_y^1 1/x \, dx = \log|x| \Big|_y^1 = \log 1 - \log y = \log(1/y)$$

3) $H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu < 10$

$\bar{X} = 7.8 \qquad S^2 = \frac{1240}{20} - 7.8 = 54.2 \qquad S^2 = \frac{1240 - 60.84}{19} = 1.2211$

$S = 1.1$

$$t = \frac{(7.8 - 10)\sqrt{20}}{1.1} = -8.9 < -t_{0.01,19} \Rightarrow H_1 \text{ è accettata}$$

Teoria

1) $P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$

DIMOSTRAZIONE:

$P(|X - \mu| \geq r) = P((X-\mu)^2 \geq r^2)$

$(X - \mu)^2$ è sicuramente positiva $\Rightarrow$ Markov:

$$P((X-\mu)^2 \geq r^2) \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{r^2} = \frac{\sigma^2}{r^2}$$

2) $P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

La v.a di Poisson esprime la probabilità che in un intervallo di tempo si verifichino n eventi successivi sapendo che in media se ne verificano λ

3) P-dei-dati è il livello di significatività critico per cui $\forall \alpha < pdd$ l'ipotesi nulla è accettata

$$pdd = \Phi\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

Giugno 2014

Es. 1

Riconosciuta Spam con probabilità p
Errore riconoscimento con probabilità q
È spam con probabilità 0.2

a) È spam $= 0.2\,(S)$ Non è spam $= 0.8\,(\bar{S})$

E = rilevamento spam $\rightarrow P(E|S) = p \quad P(E|\bar{S}) = q$

$E = p \cdot 0.2 + q \cdot 0.8$ per la legge di disintegrazione

c) $P(S|\bar{E}) = \dfrac{P(S)\,P(\bar{E}|S)}{P(\bar{E})}$

$P(\bar{E}|S) = 1 - P(E|S) = 1 - p$

$$\boxed{\frac{0.2 - 0.2p}{1 - 0.2p - 0.8q}}$$

Es. 3

$\sigma = 0.5 \qquad \bar{x} = 35$

a) la distribuzione approssimata della media campionaria è $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

b) $\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96$

Febbraio 2015

1) n componenti con probabilità p

a) $P(x \geq \frac{n}{2}) = P(x=\frac{n}{2}) + P(x=\frac{n}{2}+1) + \dots P(x=n) = \sum_{k=n/2}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

b) 1 componente $\binom{1}{1} p (1-p)^0 = p = 0.5$

2 componenti $\binom{2}{1} p (1-p) + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = 1/2 + 1/4 = 3/4 = 0.75$

3 componenti $\binom{3}{2} p^2 (1-p) + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 = 3p^3 + p^3 = \frac{3}{8} + 1/8 = 4/8 = 0.5$

4 componenti $\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0 = 6p^4 + 4p^4 + p^4 = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + 1/16 =$

$= \frac{11}{16} = 0.687$

2)

a) $0.51 + c + 0.2 + 0.46 = 1 \Rightarrow c = 1 - 0.51 - 0.02 - 0.46 = 0.1$

b) $E[x] = \sum x \cdot P_x = 0(0.51 + 0.01) + 1(0.02 \cdot 0.46) = 0.48$

c) $E[Y] = \sum y P_y = 0(0.51 + 0.02) + 1(0.01 + 0.46) = 0.47$

d) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[XY] = 0.46 \rightarrow Cov(X,Y) = 0.46 - 0.2256 = 0.2344$

e) $F(x,y) = F(x)F(y) \rightarrow 0.46 \stackrel{?}{=} 0.48 \cdot 0.47$ NO

ma anche perché la covarianza non è nulla

f) $P(Y=1) = 0.47$

g) $P(Y=1 \mid X=1) = \dfrac{P(Y=1 \cap P(x=1)}{P(x=1)} = \dfrac{0.46}{0.48} = 0.9583$

Maggio 2015

1)

a) $P(X=1) = \dfrac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 1/18$

b) $P(X=0) = \binom{100}{0}(1/18)^0 (1 - 1/18)^{100} = \left(\frac{17}{18}\right)^{100}$

c) $P(101 \mid \text{No } 100) = \dfrac{P(101 \cap \text{No } 100)}{P(\text{No } 100)} = \dfrac{1/18 \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^{100}}{\left(\frac{17}{18}\right)^{100}} = 1/18$

d) $1 - P(X=0) = 1 - \binom{100}{0} p^0 (1-p)^{100} = 1 - (1 - 1/18)^{100} = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{100}$

3)

$\bar{X} = 19840.02/40 = 496$

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\dfrac{9841173.7 - 40 \cdot 496^2}{39}} = 3.7$

$\dfrac{496 - 500}{3.7/6.32} = -6.89 < -t_{0.01,39} = -2.426$

Giugno 2015

1) a) esp $= \lambda e^{-\lambda x}$

$$P(T \geq 60) = P(T \geq 60 | S_1) + P(T \geq 60 | S_2) + P(T \geq 60 | S_3)$$

$P(S_i) = 1/3$

$$P(T \geq 60) = 1/3 \int_{60}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx + 1/3 \int_{60}^{\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx + 1/3 \int_{60}^{\infty} \lambda_3 e^{-\lambda_3 x} dx$$

b) $$P(S_1 | T \geq 60) = \frac{P(T \geq 60 | S_1) P(S_1)}{P(T \geq 60)} = \frac{1/3 \cdot \int_{60}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx}{P(T \geq 60)}$$

3)

a) $$S^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{3866 - 100 \cdot 30.25}{99} = \frac{3866 - 3025}{99} = 8.49$$

b) $H_0 : \mu_0 = 6.3$

$H_1 : \mu \leq 6.3$

$$\frac{\bar{x} - 6.3}{\sqrt{8.49} / \sqrt{100}} < -1.66 \Rightarrow \frac{5.5 - 6.3}{0.29} = -2.7 < -1.66$$

Markov:

$$P(x \geq a) \leq \frac{E[x]}{a}$$

dim.

$$E[x] = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^a x f(x) dx + \int_a^\infty x f(x) dx$$

$$\geq \int_a^\infty x f(x) dx \geq \int_a^\infty a f(x) dx = a P(x \geq a) = P(x \geq a) \leq \frac{E[x]}{a}$$

Chebishev:

$$P(|x - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

dim.

$$|x - \mu| \geq r \Longleftrightarrow (x - \mu)^2 \geq r^2$$

$$\Rightarrow \text{Markov con } a = r^2 \Rightarrow P((x-\mu)^2 \geq r^2) \leq \frac{E[(x-\mu)^2]}{r^2} = \frac{\sigma^2}{r^2}$$

Legge debole dei grandi numeri:

$$P\left(\left|\frac{x + \ldots x_n}{x} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad n \to \infty$$

$$P(\ldots) > \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$\mu = 21\,s$

$t = 2.145$

$n = 15$

$\bar{x} = \frac{311.3}{15} = 20.75$

$s^2 = \frac{\sum x^2 - 6.458{,}4375}{14} = \frac{6848{,}77 - 6458{,}4375}{14} = 27$

$s = \sqrt{27} = 5.26$

$H_0 : \mu = 21 \quad H_1 : \mu \neq 21$

$T = \left| \frac{20.75 - 21}{5.26 / \sqrt{15}} \right| =$

$|-0{,}18| > t \Rightarrow 0{,}18 > t$