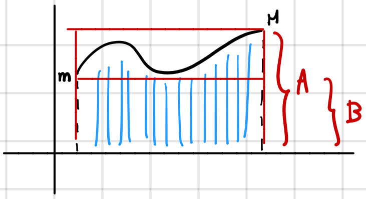
# ANALISI

Secondo Parte

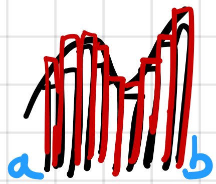
By Edoardo

# CALCOLO INTEGRALE

## Integrali Definiti




$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata
l'area è maggiore di B e minore di A




$m = \inf(f) \quad M = \sup(f) \longrightarrow m(b-a) \leq Area \leq M(b-a)$

Posso però suddividere l'intervallo $(a,b)$ in tanti piccoli intervalli per costruire delle approssimazioni

$P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$ partizione di $(a,b)$ se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$m_i = \inf(f)$ in $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad M_i = \sup(f)$ in $[x_{i-1}, x_i]$

l'area totale è la somma di tutte le aree dei "rettangolini" di area $(x_i - x_{i-1})m_i$ e $(x_i - x_{i-1})M_i$

$s(f,P) =$ somme inferiori $= \sum m_i (x_i - x_{i-1})$

$S(f,P) =$ somme superiori $= \sum M_i (x_i - x_{i-1})$

Se $s(f) = S(f)$ allora diremo che $f$ è integrabile in $(a,b)$ e $I = \int_a^b f(x)dx$

### TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua (e quindi integrabile). Allora $\exists\, c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Tale quantità è detta media di $f$ in $[a,b]$

dim.

- $f$ continua $\longrightarrow f$ integrabile
- dal teorema di Weierstrass $\exists$ min e Max di $f$ in $[a,b]$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

Utilizzando la monotonia dell'integrale:

$m(b-a) \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a) \iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \iff m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

quindi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ è compreso tra minimo e massimo di $f(x)$ in $[a,b]$. Dal teorema dei valori intermedi $\exists\, c$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

### TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (RIEMANN, TORRICELLI)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua e definita la funzione $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (funzione integrale)

allora $f$ è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

dim.

$x \in (a,b)$

$\int_a^x + \int_x^{x+h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)dt\right.$

Teorema media integrale con $a = x$ e $b = x+h \longrightarrow \exists\, c_h \in (x, x+h)$ t.c. $f(c_h) = \frac{1}{\cancel{x}+h-\cancel{x}}\int_x^{x+h} f(t)dt$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(c_h)$

Osservo che poiché $x \leq c_h \leq x+h$, per $h \to 0$ $c_h \to x$ quindi dalla continuità di $f$: $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h) = f(x)$

cioè $F$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$

Una funzione $G$ si dice primitiva di $f$ se $G'(x) = f(x)$ (in particolare $F$ è una primitiva di $f$)

Denotiamo con $\int f(x)dx = \{G$ t.c. $G$ è una primitiva di $f\}$ (integrale indefinito)

NB. $\int_a^b f(x)dx$ integrale definito

$\int_a^x f(t)dt$ funzione integrale

$\int f(x)dx$ integrale indefinito (insieme non vuoto)

Se $G_1$ e $G_2$ sono primitive di $f$ in $(a,b)$ allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $G_1(x) = G_2(x) + c$ cioè differiscono per una costante

Se $f$ è continua in $(a,b)$ e $G$ è una sua primitiva allora:
$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G]_a^b$$

dim.

- Se $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ allora per definizione $\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a)$ poiché $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$
- Se $G$ è un altra primitiva $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + c$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a)$

$$\left.\begin{array}{ll} \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c & r \neq 1 \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c & r = 1 \end{array}\right\} \int x^r dx = \begin{cases} \ln|x| + c & x = -1 \\ \frac{x^{r+1}}{r+1} + c & x \neq -1 \end{cases}$$

$\int \cos x = \sin x + c$

$\int \sin x = -\cos x + c$

$\int e^x = e^x + c$

$\int h'(x) = h(x) + c \Rightarrow$ A meno di una costante, derivazione e integrazione sono operazioni l'una l'inversa dell'altra

Ad ogni regola per la derivazione corrisponde una regola per l'integrazione

## INTEGRAZIONE PER PARTI

$h(x) = f(x)g(x)$ con $f$ e $g$ derivabili

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \longrightarrow$ integro $\longrightarrow \int f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = f(x)g(x)$

$\Rightarrow f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) + \int f(x)g'(x) \Leftrightarrow \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x) = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

es.

$\int x \ln(x) dx$   $f'(x)$ $g(x)$   $f(x)$ $g(x)$   $f(x)$ $g'(x)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

es

$\int x^r \ln x\, dx \qquad r \neq -1$

$= \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \int \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \int \frac{x^r}{r+1} dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{1}{r+1} \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + c$

NB. $r = 0 \rightarrow \int 1 \cdot \ln x\, dx \longrightarrow x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

es.   $f'$ $g$

$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x$ applico nuovamente $\rightarrow e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x)dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$

$\Leftrightarrow \int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow \cancel{2} \int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$

NB. devo arrivare al punto di avere lo stesso integrale ma con segno opposto

es.

$\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot \cos x\, dx = \sin x \cos x + \int \sin x \cdot \sin x\, dx$ ?

Errore: riapplico "per parti" $\rightarrow \sin x \cos x - \cos x \sin x + \int \cos x \cos x\, dx = \int \cos^2 x\, dx$ come l'inizio

Giusto: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x\, dx = \sin x \cos x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx \Leftrightarrow \cancel{2} \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + c$

## Integrazione per sostituzione (cambiamento variabile)

$\int h'(x)dx = h(x)+c$ con l'aggiunta della regola della derivazione di funzione composta

$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ derivabile e t.c. $\varphi'(x)\neq 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$h(t)=F(\varphi(t))$ con $F'(x)=f(x)$ $:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ e derivabile perché composizione di funzioni derivabili

$$h'(t)=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$\Rightarrow \int h'(t)\,dt=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

$$h(t)+c=\boxed{F(\varphi(t))+c \ = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

nel caso definito:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=[F(\varphi(t))]_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=[F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)dx}$$

In altre parole:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \to x=\varphi(t)\to \frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\Leftrightarrow dx=\varphi'(t)dt \longrightarrow \int f(x)dx=F(x)+c=F(\varphi(t))+c$$

es.

$$\int \sin(t)\cos(t)\,dt \to x=\sin t\to dx=\cos t\,dt\to\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c=\frac{\sin^2 t}{2}+c$$

es.

$$\int\frac{\sin t}{\cos t}dt=-\int\frac{-\sin t}{\cos x}\to x=\cos t\to dx=-\sin t\,dt\to-\int\frac{dx}{x}=-\ln|x|+c=-\ln|\cos t|+c$$

nel caso definito:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\to x=\varphi(t)\to dx=\varphi'(t)dt\to\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)dx \qquad \begin{cases}t=\alpha\to x=\varphi(\alpha)\\ t=\beta\to x=\varphi(\beta)\end{cases}$$

es.

$$\int_1^2 t\sqrt{t-1}\,dt\to x=\sqrt{t-1}\to t=x^2+1\to dt=2x\,dx\to\int(x^2+1)x\cdot 2x\,dx \qquad \begin{cases}t=1\to x=0\\ t=2\to x=1\end{cases}$$

$$\to\int_0^1(2x^4+2x^2)dx=2\int x^4dx+2\int x^2dx=2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}$$

es.

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt\to x=\sqrt{t}\to dx=2x\,dx\to\int e^x 2x\,dx \qquad \begin{cases}t=1\to x=1\\ t=4\to x=2\end{cases}\to\int_1^2 e^x 2x\,dx$$

$$\to\text{per parti}\to[2e^x x]_1^2-2\int_1^2 e^x dx=[2xe^x]_1^2-[2e^x]_1^2=4e^2-2e-2e^2+2e$$

NB Integrali del tipo $\int e^x x^n\,dx$ si risolvono applicando n volte l'integrazione per parti con $f'(x)=e^x$

# INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

$\int f(x)dx$ con $f(x) = p(x)/q(x)$

Ci si riconduce sempre al caso in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore

$p(x) = q(x)d(x) + r(x)$

$\Rightarrow p(x)/q(x) = d(x) + r(x)/q(x)$ con grado di $r(x)$ minore di quello di $q(x)$

es $\int \frac{x^4-2x^2+10}{x^2-3x+2}dx$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} x^4-2x^2+10 & x^2-3x+2 \\ x^4-3x^3+2x^2 & x^2+3x+5 \\ // \; 3x^3-4x^2+10 & \\ 3x^3-9x^2+6x & \\ // \; 5x^2-6x+10 & \\ 5x^2-15x+10 & \\ 9x & \end{array}$$

$\Longrightarrow \frac{x^4-2x^2+10}{x^2-3x+2} = (x^2-3x+2)(x^2+3x+5) + \frac{9x}{(x^2-3x+2)}$

$\Rightarrow \int \frac{x^4-2x^2+10}{x^2-3x+2}dx = \int (x^2+3x+5)dx + \int \frac{9x}{x^2-3x+2}dx$

## Caso particolare

grado$(p(x)) \leq 1$ e grado$(q(x)) = 2$

$q(x) = ax^2+bx+c$

1) $\Delta = b^2-4ac > 0$ e $x_1, x_2$ radici reali e distinte di $q(x)$

$p(x)/q(x) = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}$ con A e B da determinare $\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int p(x)/q(x)\,dx = \int \frac{A}{x-x_1}dx + \int \frac{B}{x-x_2}dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + c$

es.

$\int \frac{9x}{x^2-3x+2}dx \quad p(x) = 9x \quad q(x) = x^2-3x+2 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm1}{2} = < {2 \atop 1}$

$\frac{9x}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2} \longleftrightarrow \begin{cases} A+B=9 \\ -2A-B=0 \end{cases} \begin{cases} A=-9 \\ B=18 \end{cases} \rightarrow \frac{9x}{x^2-3x+2} = \frac{-9}{x-1} + \frac{18}{x-2}$

$-\int \frac{9}{x-1}dx + \int \frac{18}{x-2}dx = -9\ln|x-1| + 18\ln|x-2| + c$

$\frac{(x-x_0)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{x-x_0}$

2) $\Delta = 0 \quad x_1, x_2$ reali ma non distinte $(x_0)$

$p(x)/q(x) = A/x-x_0 + B/(x-x_0)^2 \longrightarrow \int p(x)/q(x) = \int \frac{A}{x-x_0}dx + \int \frac{B}{(x-x_0)^2}dx = A\ln|x-x_0| + B\int (x-x_0)^{-2}dx = A\ln|x-x_0| - \frac{B}{x-x_0}$

es

$\int \frac{3x}{x^2-2x+1}dx \longrightarrow x_0 = 1$

$\frac{3x}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ -A+B=0 \end{cases} \begin{cases} A=3 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{3x}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{3}{(x-1)}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx$

$= 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$

3) $\Delta < 0$ radici complesse coniugate

$p(x)/q(x) = A\,q'(x)/q(x) + B/q(x)$

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = A\int \frac{q'(x)}{q(x)} + \int \frac{B}{q(x)}dx$

$t = q(x)$, $dt = q'(x)dx$ $\longrightarrow \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|q(x)| + c$ (sostituzione)

Il secondo integrale richiede del lavoro

es.

$\int \frac{4x}{x^2-4x+13}dx \longrightarrow \Delta < 0$

$p(x)/q(x) = \frac{A(2x-4)}{x^2-4x+13} + B/x^2-4x+13 = \frac{2Ax-4A+B}{x^2-4x+13} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2A=4 \\ -4A+B=0 \end{cases} \begin{cases} A=2 \\ B=8 \end{cases} \longrightarrow 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} + 8\int \frac{1}{x^2-4x+13}$

$= 2\ln|x^2-4x+13| + 8\int \frac{1}{x^2-4x+13}dx$

$$\int\frac{1}{x^2-4x+13}\,dx$$

↳ primi due termini di un quadrato $\longrightarrow (x-c)^2=x^2-2cx+c^2$

$$\to x^2-4x+13=(x-2)^2+13-\overset{(2)^2}{4}=(x-2)^2+9=\left(1+\frac{(x-2)^2}{9}\right)9=9\left(1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{9\left(1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2\right)}dx\longrightarrow t=\frac{x-2}{3}\longrightarrow x=3t+2\to dx=3dt\to\frac{1}{\cancel{9}_3}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\cancel{3}dt=\frac13\operatorname{arctg}t+c=\frac13\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+c$$

---

es

$$\int\frac{x+2}{x^2+x-6}dx\longrightarrow x_{1,2}=2\ \wedge\ -3$$

$$\to\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{x^2+x-6}\leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\3A-2B=2\end{cases}\begin{cases}A=4/5\\B=1/5\end{cases}\longrightarrow\int\frac{x-2}{x^2+x+6}dx=\frac45\int\frac{dx}{x-2}+\frac15\int\frac{dx}{x+3}dx=\frac45\ln|x-2|+\frac15\ln|x-3|+c$$

es

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx\longrightarrow\Delta<0$$

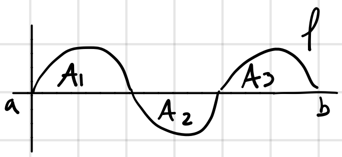
$$\Rightarrow\overset{(x+c)^2}{x^2+x}+1=\left(x+\tfrac12\right)^2+1-\tfrac14=\left(x+\tfrac12\right)^2+\tfrac34=\tfrac34\left(1+\frac{(x+1/2)^2}{3/4}\right)=\tfrac34\left(1+\left(\tfrac{2}{\sqrt3}\left(x+\tfrac12\right)\right)^2\right)$$

(A viene 0 quindi posso direttamente al secondo integrale)

$$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{dx}{\frac34\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt3}\left(x+\frac12\right)\right)^2\right)}\longrightarrow t=\tfrac{2}{\sqrt3}\left(x+\tfrac12\right)\to x=\tfrac{\sqrt3}{2}t-\tfrac12\to dx=\tfrac{\sqrt3}{2}dt\to\tfrac43\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}dt$$

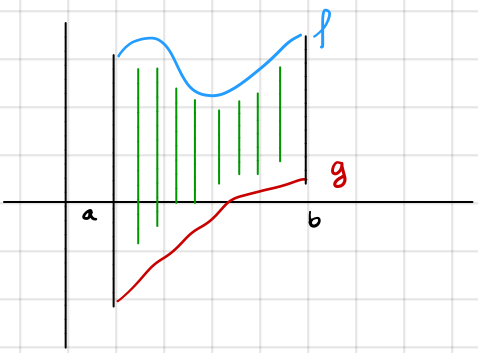
$$=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}t+c\longrightarrow\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt3}\left(x+\frac12\right)\right)+c$$

## CALCOLO DI AREE




$$\int_a^b f(x)dx=\text{area}(A_1)+\text{area}(A_2)+\text{area}(A_3)$$

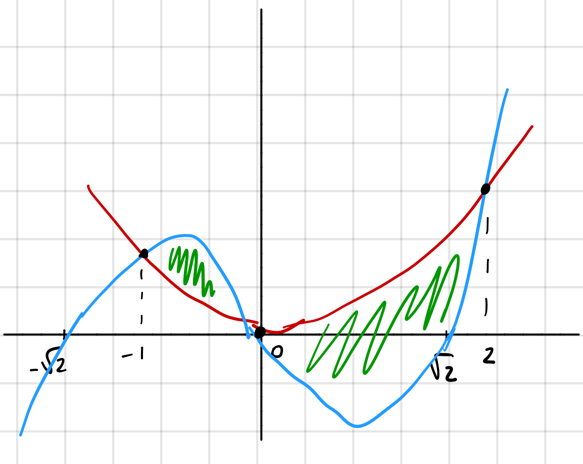
Nel caso:




$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$$

Bisogna discutere i segni poiché le due funzioni potrebbero intersecarsi.

es. Calcolare l'area tra $f(x)=x^3-2x$ e $g(x)=x^2$




Trovo i punti di intersezione:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-2x=x^2\Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0$$

$$x^2-x-2=0\Leftrightarrow x_{1,2}=2\ \wedge\ -1$$

$$\int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(x^2-x^3+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^2=-\frac14-\frac13+1+\frac83-\frac{16}{4}+4$$

# Esercizi

1) $\int (x^2+2x+e^x)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+e^x$

2) $\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \int f'(x)\cdot g(x) \to$ per parti $\to = x\arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \to t = 1-x^2 \to dt = -2x dx$

$\to \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \to \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}}{1/2} = \sqrt{t}+c \to \sqrt{1-x^2}+c \Rightarrow x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+c$

3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} \to t = x^4 \to dt = 4x^3 dx \to \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + c = \frac{1}{4}\arcsin x^4 + c$

4) $\int x^5 e^{x^2}dx \to t = x^2 \to dt = 2x dx \to \frac{1}{2}\int t^2 e^t dt \to$ per parti $\to \frac{1}{2}t^2e^t - \frac{1}{2}\int 2t e^t dt \to$ per parti $\to \frac{1}{2}t^2e^t - e^t t + \int e^t dt$

$= \frac{t^2e^t}{2} - e^t t + e^t + c = \frac{x^4e^{x^2}}{2} - e^{x^2}x^2 + e^{x^2}+c$

5) $\int_{-1/2}^{1/2} t^2 \arctg|t|dt$ Se il dominio di integrazione è simmetrico rispetto l'origine, cioè del tipo $[-a,a]$ allora si ha:

- se $f$ è pari, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- se $f$ è dispari, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Nel nostro caso l'argomento dell'integrale è una funzione pari: $2\int_0^{1/2} t^2 \arctg|t| dt = 2\int_0^{1/2} t^2 \arctg t \, dt \to$ per parti $\to$

Il modulo lo possiamo togliere perché il dominio è sempre positivo ora $[0, 1/2]$

$\to \left[2\frac{t^3}{3}\arctg t\right]_0^{1/2} - \frac{2}{3}\int_0^{1/2} t^3 \frac{1}{1+t^2}$ → funzione razionale con grado num > grado den.

$\to$ $t^3$ diviso $t^2+1$: $t^3+t$, quoziente $t$, resto $-t$ $\to t^3 = (t^2+1)t - t \to \frac{t^3}{t^2+1} = t - \frac{t}{t^2+1} \to \int_0^{1/2} t\,dt - \int_0^{1/2}\frac{t}{t^2+1}dt$ → $x = t^2+1$ $dx = 2t\,dt$

$\to \int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x|+c \to \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+c$

$\Rightarrow \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^{1/2} \Rightarrow \left[2\frac{t^3}{3}\arctg t\right]_0^{1/2} - \frac{2}{3}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1/2} - \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^{1/2}\right) \to \dots$

6) $\int_0^3 |x-1|dx$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & se\ x \geq 1 \\ 1-x & se\ x<1\end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 = \dots$

7) $\int \cos(\ln t)dt \to x = \ln t \to t = e^x \to dt = e^x dx \to \int \cos x \cdot e^x dx$

Già fatto precedentemente (integrazione per parti due volte e poi porto il termine a sinistra): $\frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2}+c$

$= \frac{e^{\ln t}(\cos(\ln t)+\sin(\ln t))}{2}+c$

8) Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1-e^{t^2})dt}{\sin x^3} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-e^{t^2})dt}{x^3}$ ← $\sim \sin(x^3)$ $\to$ Hopital: se $f$ è continua e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ allora $F'(x) = f(x)$

$\to \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}$ ($\frac{1-e^{x^2}}{x^2} \to -1$)

9) Sia $f \in C(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$. Allora

a) $f(x) \geq 0\ \forall x \in [-1,0]$ b) $\exists c \in [-1,0]$ t.c. $f(c) = 2$ c) $\int_0^1 f^2(-t)dt = 4$ d) $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx = 4$

NB. Se $f \geq 0$ in $[a,b] \not\Leftarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \to$ a è sbagliata

NB $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \Rightarrow$ c e d sono sbagliate

La risposta giusta è b per il teorema della media integrale: se $f$ continua in $[a,b]$ allora è integrabile e $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

10) La funzione $f(x) = \int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{2} - e^{-t^2}\right)dt$ è:

a) decrescente b) crescente c) ha due punti di estremo locale d) non è derivabile

$F'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x^2}$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale $\to$ d è sbagliata

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftarrow e^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\ln 2}$ ho due punti critici $\to$ studiandoli vedremo che sono estremi locali

$\to$ c è giusta

a e b sono sbagliate perché la funzione cambia segno

# INTEGRALI IMPROPRI

Per l'integrale di Riemann abbiamo assunto a priori che:

- $f$ è limitata in $[a,b]$
- $[a,b]$ limitata

es.
$\int_0^1 1/x \, dx$ e $\int_1^\infty 1/x^2 \, dx$ non venivano presi in esame perché impropri

Sia $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ t.c. $f$ è integrabile in $[a,c]$ $\forall c \in [a,b)$.
Se $\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx = L \in \mathbb{R}$ allora $f$ si dice integrabile in senso improprio in $[a,b)$ e si pone $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$
Tale definizione include i seguenti casi:

- $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$
- Integrazione in $[a,\infty)$

Stessa cosa vale in $(a,b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$

es.
$\int_0^1 1/x^\alpha \, dx$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che se $\alpha \le 0$ $f(x)$ è limitata, continua e integrabile normalmente
Se $\alpha > 0$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^1 = \lim_{c \to 0^+}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}c^{1-\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} 1-\alpha > 0 \to \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ 1-\alpha < 0 \to \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \quad \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \to 0^+} [\ln|x|]_c^1 = \lim_{c \to 0^+}(-\ln c) = \infty$$

Riassumendo:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha \ge 1 \end{cases}$$ → Ricordare bene

es. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$

$$\lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \to \infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c \quad \alpha \ne 1 \quad = \lim_{c \to \infty}\left(\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty & 1-\alpha > 0 \to \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 1-\alpha < 0 \to \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \quad \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \to \infty} [\ln|x|]_1^c = \lim_{c \to \infty} \ln|c| = \infty$$

Riassumendo:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty & \alpha \le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$ → Ricordare bene

## CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f$ e $g$ $[a,b) \to \mathbb{R}$ t.c. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e t.c. $f$ e $g$ sono integrabili in $[a,c]$ $\forall c \in [a,b)$. Se

- $|f(x)| \le g(x)$ $\forall x \in [a,b)$
- $g$ è integrabile in senso improprio in $[a,b)$

allora $f$ è integrabile in senso improprio in $[a,b)$

es.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\text{finito}} + 2\int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

$\Rightarrow$ Per $x \in [1,\infty)$ $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Infatti $x^2 \ge x \leftrightarrow -x^2 \le -x \to e^{-x^2} \le e^{-x}$ primo condizione, "maggioro" $e^{-x^2}$ con $e^{-x}$

$\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{c \to \infty} \int_1^c e^{-x} dx = \lim_{c \to \infty} [-e^{-x}]_1^c = \lim_{c \to \infty}(-e^{-c} + e^{-1}) = e^{-1}$ secondo condizione, $g$ integrabile in senso improprio

quindi $\int_1^\infty e^{-x} dx < \infty \to \int_1^\infty e^{-x^2} dx < \infty \to \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} < \infty$

## CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ t.c.

1) $f$ e $g$ non negative

2) $f$ e $g$ integrabili in $[a,c]$ $\forall c \in [a,b)$

3) $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \neq 0$

allora $f$ è integrabile in $[a,b) \Leftrightarrow g$ è integrabile in $[a,b)$

es.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \sin(1/x)\, dx$$

Per $x \to \infty \Rightarrow 1/x \to 0 \Rightarrow \sin(1/x) \sim 1/x \Rightarrow 1/x \sin(1/x) \sim 1/x^2$

$\int_1^\infty 1/x < \infty$ (vedi casi $1/x^\alpha$) $\Rightarrow \int_1^\infty 1/x \sin(1/x) dx < \infty$

## INTEGRALI IMPROPRI E SERIE

Sia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ non negativa $\forall x \in [1, \infty)$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Definiamo $a_k = f(k)$ $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Allora $\int_1^\infty f(x)dx < \infty \Leftrightarrow \sum_1^\infty a_k < \infty$

$$\sum \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1 \\ < \infty & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

$\alpha \in (1,2)$ ??

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} < \infty & \alpha > 1 \\ \infty & a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_1^\infty \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} < \infty & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

# Esercizi

1) Calcolare $\int_0^{\infty}(x^2-x)e^{-x}\,dx$

$\lim_{c\to\infty}\int_0^c (x^2-x)e^{-x}\,dx$

Per parti ancora

$\Rightarrow \int \underbrace{(x^2-x)}_{g}\underbrace{e^{-x}}_{f'}dx \to$ per parti $\to -(x^2-x)e^{-x}+\int(2x-1)e^{-x} = -(x^2-x)e^{-x}\overbrace{-(2x-1)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx}$

$= -(x^2-x)e^{-x}-(2x-1)e^{-x}-2e^{-x}+c = e^{-x}[-x^2-x-1]+c$

$\Rightarrow \lim_{c\to\infty} e^{-c}(-c^2-c-1)-e^0(-1)+c = \lim_{c\to 0} -\frac{c^2+c+1}{e^c}+1 = 1$

2) Calcolare $\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

$=\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}\ \int\frac{1}{e^{-x}(e^{2x}+1)}dx = \int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int\frac{e^x dx}{(e^x)^2+1} \to e^x=t \to e^x dx=dt \to \int\frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t)+c$

$\Rightarrow \arctan(e^x)+c$

$\Rightarrow \lim_{c\to\infty}\arctan(e^c)-\arctan(1) = \pi/2-\pi/4 = \pi/4$

3) Studiare $\int_1^{\infty}\frac{\sin^5(1/x)}{\ln(x^2+1)-2\ln(x)}dx$

$\Rightarrow \frac{\sin(1/x)^5}{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)} = \frac{\sin(1/x)^5}{\ln(1+1/x^2)} \Rightarrow \sin(t)\sim t$ per $t\to 0$, $\ln(1+t)\sim t$ per $t\to 0 \Rightarrow t=1/x\to 0$ per $x\to\infty$

$\Rightarrow \frac{1/x^5}{1/x^2} = 1/x^3 \Rightarrow \int_1^{\infty}1/x^{\alpha}\quad \alpha>1\quad \boxed{<\infty}$

4) $\int_1^{\infty}e^{x^2}/1+e^{2x^2}\,dx$ studiare la convergenza

$= e^{x^2}/e^{2x^2}(1+\frac{1}{e^{2x^2}}) \sim e^{x^2}/e^{2x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$ poiché $\int_1^{\infty}e^{-x^2}dx<\infty \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}dx<\infty$

$\frac{1}{e^{2x^2}}\to 0$ per $x\to\infty$

5) $\int_1^{\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{x^5+\sin(e^x)}}dx$

$\Rightarrow \frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{x^5+\sin(e^x)}} = x\arctan x/\sqrt[3]{x^5}\left(1+\frac{\sin(e^x)}{x^5}\right) \sim x\pi/2\,/\,x^{5/3} = \pi/2\,\frac{1}{x^{2/3}} \to \int\frac{1}{x^{\alpha}}\quad \alpha<1\quad \boxed{=\infty}$

$\frac{\sin(e^x)}{x^5}\to 0$ per $x\to\infty$

6) Studiare la funzione $F(x)=\int_2^x\left(1-\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right)dt$ per $x\in(0,\infty)$

$f(x)=1-\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ continua in $(0,\infty)\Rightarrow F$ è derivabile e $F'(x)=1-\frac{\sin^2 x}{x^2}$

• Segno di F:

$1-\frac{\sin^2 x}{x^2}\geq 0$ perché $|\sin x|\leq|x|\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin^2 x\leq x^2 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{x^2}\leq 1 \Leftrightarrow 1-\sin^2 x/x^2\geq 0$

Poiché $f(x)\geq 0 \Rightarrow$ se $x>2$ $F(x)=\int_2^x f(t)dt\geq 0$, se $x<2$ $F(x)=-\int_x^2 f(t)dt\leq 0$, se $x=2$ $F(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}>0 & x>2\\ <0 & x<2\\ 0 & x=2\end{cases}$

$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\int_2^{\infty}f(t)dt=\int_2^{\infty}f(t)dt \to f(t)\sim 1$ per $t\to\infty$

inoltre $\int_2^{\infty}1\,dt=\infty \Rightarrow \int_2^{\infty}f(t)dt=\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}F(x)=\infty$

$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_2^x 1-\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$ Sebbene $f(t)$ non sia definita per $t=0$ può essere estesa per continuità ponendo $f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}F(x)=\int_2^0\left(1-\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)dt$

$F'(x)=f(x)=1-\frac{\sin^2 x}{x^2}\geq 0\quad \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow F$ è crescente in $(0,\infty)$

Asintoto obliquo:

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=m\\ \bullet\ \lim_{x\to\infty}[F(x)-mx]=q\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{x}=\frac{\int_2^x 1-\frac{\sin^2 t}{t^2}}{x}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Hopital $\to \lim_{x\to\infty}1-\frac{\sin^2 x}{x^2}=1=m$ ok

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

es modello di Malthus

$N(t)$ = # individui della popolazione al tempo $t$

$\lambda$ = tasso natalità

$\mu$ = tasso mortalità

$h > 0$:

$$N(t+h) - N(t) = \underbrace{\lambda \cdot h \cdot N(t)}_{\text{nati in } (t, t+h)} - \underbrace{\mu h N(t)}_{\text{morti in } (t, t+h)}$$

Dividiamo per $h$ e passiamo al $\lim_{h \to 0}$ $\Rightarrow N'(t) = (\lambda - \mu) N(t) \quad \forall t \in (0, \infty)$

Definiamo $N(0) = N_0$:

$N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$

Se $\lambda > \mu$: $\longrightarrow \infty$ per $t \to \infty$

Se $\lambda = \mu$: $N_0$

Se $\lambda < \mu$: $\longrightarrow 0$ per $t \to \infty$

es primitiva funzione

Dato $f$ continua, cerchiamo la primitiva di $f$. Quindi è equivalente a risolvere:

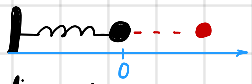
trovare $y(t)$ t.c. $y'(t) = f(t)$

Soluzione: $y(t) = \int f(t) dt$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \text{unica soluzione: } y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \longrightarrow \text{funzione integrale}$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left( \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \right) = f(t)$$

$$y(t_0) = y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} f(s)\, ds}_{0} = y_0$$

es 

corpo di massa $m$, molla di costante $k$, senza attrito

$F = m\vec{a}$

$x(t)$ = posizione corpo di massa $m$ al tempo $t$

$\vec{v}(t) = x'(t) \quad \Rightarrow F = m \cdot x''(t)$

$\vec{a}(t) = x''(t)$

legge di hook: $F = -kx(t) \Rightarrow -mx''(t) = -kx(t) \Leftrightarrow \underbrace{mx''(t) + kx(t) = 0}_{\text{funzione e sua derivata } (x'')}$

$$\left\{ \begin{array}{l} mx''(t) + kx(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \text{in più } x'(0) = v_0 \text{ perché lavoriamo con la derivata seconda} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

In generale, un'equazione differenziale ordinaria è relazione del tipo

$$F(t, y(t), y'(t) \dots y^{(n)}(t)) = 0$$

dove $t$ è la variabile indipendente $\in \mathbb{R}$, $y(t)$ è la funzione incognita, $y^{(i)}(t)$ sono le derivate di $y$,

$F: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $n$ è il grado di EDO, cioè la derivata di ordine massimo di $y(t)$

EDO in forma normale se è del tipo $y^{(n)}(t) = f(t, y(t) \dots y^{(n-1)}(t))$

Una soluzioni di una EDO è una funzione $y \in C^n(I)$ dove $I$ è un'intervallo di $\mathbb{R}$ t.c. $\forall t \in I$ $y(t)$ (con le sue derivate calcolate nel punto) soddisfa l'EDO

## PROBLEMA DI CAUCHY

Il problema di Cauchy per un edo di ordine n è dato da:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) & \text{equazione stessa} \\ y(t_0) = y_0 & \\ \vdots & \Big\} \text{ n condizioni} \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} & \end{cases}$$

dove $t_0 \in I$ è fissato e $y_i$ sono valori assegnati

Una soluzio y del problema di Cauchy è una funzione $y \in C^n(I)$ che soddisfa l'EDO $\forall t \in I$ e che soddisfa le n condizioni iniziali

• EDO del primo ordine (in forma normale)

$y'(t) = f(t, y(t))$ dove $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Il corrispondente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Il modello di Malthus era di questo tipo.

$$\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu) N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (N = y) \quad \begin{cases} y'(t) = (\lambda - \mu) y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t, y) = (\lambda - \mu) y \\ t_0 = 0 \\ y_0 = N_0 \end{cases}$$

### Esistenza Soluzione

$$PC \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

• Teorema di Peano

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e sia $(t_0, y_0) \in D$ punto fissato. Allora $\exists$ un intervallo $I$ contenente $t_0$ e $y \in C^1(I)$ soluzione del PC. ma non unica soluzione

### Unicità Soluzione

• Teorema di Cauchy - Lipschitz

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dove $D = \{(t, y)$ t.c. $|t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, $f$ continua e $\left| \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_2} \right| \leq L$ $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in D$ dove $L$ è una costante fissata

Allora $\exists$ un intervallo $I$ contenente $t_0$ e $y \in C^1(I)$ unica soluzione del PC

Se $f(t, \cdot)$ $\underbrace{\text{è derivabile rispetto } y \ \forall t \text{ fissato}}_{\text{lipschitziana}}$ e la derivata di $f(t, \cdot)$ è limitata allora la condizione è soddisfatta

Per adesso lavoreremo con EDO di primo ordine in forma normale e relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

NB. I teoremi di esistenza e unicità sono di tipo locali e non globali

es. $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$y(t) = tg(t) \rightarrow y'(t) = tg^2(t) + 1 = y^2(t) + 1$

$f(t,y) = y^2 + 1$ (non dipende da t)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ma $tg(t)$ vale solo per $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ (e non $\forall t$)

Poiché $f$ è derivabile in $y$ allora soddisfa la condizione di lipschitzianità in $y$

Esistenza GLOBALE

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $D = \underbrace{[a,b]}_{t} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{y}$, $f$ continua in $D$ t.c. $\left| \frac{f(t,y_2) - f(t,y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L$ $\forall t \in (a,b)$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

allora $\exists!$ la soluzione del problema di Cauchy $\forall t \in (a,b)$

Due classi di EDO del 1° ordine per cui possiamo calcolare esplicitamente la soluzione:

1) EDO lineari

2) EDO a variabili separabili

EDO LINEARI

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \rightarrow f(t,y) = a(t)y + b(t)$$ lineare nella variabile $y$

$a(t)$ e $b(t)$ sono detti coefficienti, $b(t)$ anche detto termine noto.

Se $b(t) = 0$ l'equazione si dice omogenea altrimenti non omogenea

Se $a(t)$ e $b(t)$ sono continue per $t \in (a,b)$ allora $f$ è continua in $(a,b) \times \mathbb{R}$, inoltre è derivabile rispetto $y$ con derivata limitata. Quindi se $a(t)$ e $b(t)$ sono limitate la soluzione esiste ed è unica in $(a,b)$

Ricerca soluzione:

caso 1: problema omogeneo $y'(t) = a(t)y(t)$

Se $A(t)$ è primitiva di $a(t) \Rightarrow A'(t) = a(t)$ allora le soluzioni dell'EDO sono date da:

$y(t) = c e^{A(t)}$ $c \in \mathbb{R}$

dim.

$y'(t) = C e^{A(t)} \overbrace{a(t)}^{A'(t)} \Rightarrow y(t) = C e^{A(t)}$ $(y(t) \cdot a(t))$

Se impongo $y(t_0) = y_0$ e suppongo che $A(t_0) = 0$ cioè $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, allora

$\left. \begin{array}{l} y(t_0) = C e^{A(t_0)} = C \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = y_0$

Quindi l'integrale generale dell'equazione $y'(t) = a(t)y(t)$ è dato da $y(t) = c e^{A(t)}$ con $A'(t) = a(t)$

mentre l'unica soluzione del PC associato è data da $y(t) = y_0 e^{A(t)}$ con $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$

NB. Per integrale generale di una generica EDO si intende una formula che rappresenta tutte le soluzioni del problema.

es. $\begin{cases} y'(t) = yt \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$y(t) = 1 \cdot e^{\int_0^t 1 ds} = e^t$

caso 2: problema non omogeneo $y'(t) = y(t)a(t) + b(t)$

Metodo della variazione delle costanti arbitrari

Si assume che la soluzione dell'equazione non omogenea sia del tipo:

$y(t) = c(t)\,e^{A(t)}$ con $c(t)$ funzione incognita da determinare

$\to y'(t) = c'(t)\,e^{A(t)} + c(t)\,e^{A(t)} \cdot a(t)$ -

Sostituisco nell'equazione

$$c'(t)\,e^{A(t)} + \cancel{c(t)e^{A(t)}a(t)} = a(t)\overbrace{c(t)e^{A(t)}}^{y(t)} + b(t) \Rightarrow c'(t) = e^{-A(t)}b(t)$$

$\Rightarrow c(t) = \int e^{-A(t)} b(t)\,dt + K \to$ c delle primitive, per non fare confusione

da cui:

$$y(t) = e^{A(t)}\left[K + \int e^{-A(t)} b(t)\,dt\right] \to \text{Integrale generale dell'EDO non omogenea}$$

Imponendo $y(t_0) = y_0$ allora la soluzione del PC è data da:

$$y(t) = e^{A(t)}\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\,ds\right] \text{ con } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

es.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t\,y(t) + t^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

PC $\begin{cases} f(t,y) = 2ty + t^3 \\ t_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ lineare con $a(t) = 2t$ e $b(t) = t^3$ continue in $\mathbb{R} \to$ la soluzione $y(t)$ è definita in $\mathbb{R}$

$$A(t) = \int_0^t 2s\,ds = \left[s^2\right]_0^t = t^2$$

$$y(t)\,e^{t^2}\left[1 + \underbrace{\int_0^t e^{-s^2} \cdot s^3\,ds}\right] \to r = s^2 \quad -\tfrac{1}{2}\int r e^{-r} dr = -\tfrac{1}{2} r \cdot e^{-r} - \tfrac{1}{2} e^{-r} + c = -\tfrac{1}{2} e^{-s^2}(s^2+1) + c$$

$$\Rightarrow e^{t^2}\left(1 + \left[-\tfrac{1}{2} e^{-s^2}(s^2+1)\right]_0^t\right) = e^{t^2}\left(1 - \tfrac{1}{2} e^{-t^2}(t^2+1) + \tfrac{1}{2}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$ esiste globalmente

es.

$$\begin{cases} y'(t) = \tfrac{1}{t}\,y(t) + t^3 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{\begin{cases} f(t,y) = \tfrac{1}{t}y + t^3 \\ t_0 = 1, \quad y(1) = 0 \end{cases}}^{PC}$$

$a(t) = 1/t \quad b(t) = t^3$

NB. $a(t)$ non è definita per $t = 0$ $\to$ 1) $t_0 \neq 0$ 2) la sol. è sempre definita su un intervallo temporale

Quindi devo scegliere l'intervallo che contiene $t_0$ ovvero $(0, \infty)$

$A(t) = \int_1^t \frac{1}{s}\,ds = \left[\ln|s|\right]_1^t = \ln|t| = \ln t$ perché sono nell'intervallo $(0,\infty)$

$$y(t) = e^{\ln t}\left[0 + \int_1^t e^{-\ln s} s^3\,ds\right] = t\left[\int_1^t \tfrac{1}{\cancel{s}} s^{\cancel{3}\,2}\,ds\right] = t\left[\tfrac{s^3}{3}\right]_1^t = \tfrac{t^4}{3} - \tfrac{t}{3}$$ soluzione $\forall t \in (0,\infty)$

# EDO A VARIABILI SEPARABILI

$\begin{cases} y'(t) = h(t)g(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow f(t,y) = h(t) \cdot g(y)$

Applicando i teoremi di esistenza e unicità si ha che:

1) Se $h(t)$ è continua, $g$ derivabile allora $\exists!$ $y$ soluzione locale
2) Se inoltre $g'(y)$ è limitata $\forall y \in \mathbb{R}$ allora la soluzione è globale

Ricerco soluzione:

Caso 1: $g(y_0) = 0$

La soluzione del PC è data da $\boxed{y(t) = y_0}$ $\forall t$ → Soluzione stazionaria

dim.

$y'(t) = 0 \Rightarrow 0 = g(\cancel{y_0})\, h(t) \quad \forall t$

caso 2: $g(y_0) \neq 0$

Per $t$ abbastanza vicino a $t_0$, $g(y(t)) \neq 0$ perché è continua in $t$ che non si annulla in $t = t_0$

$\Rightarrow \frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$

Integro in $(t_0, t) \rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^{t} h(s) ds$

Cambio variabile $r = y(s) \rightarrow dr = y'(s)ds$, $s = t_0 \rightarrow r = y(t_0)$, $s = t \rightarrow r = y(t)$

$\Rightarrow \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dr}{g(r)} = \int_{t_0}^{t} h(r) dr$ → formula che definisce implicitamente le soluzioni

Supponiamo che $G$ sia primitiva di $1/g(r)$ e $H$ primitiva di $h$

$G(y(t)) - G(y_0) = H(t) - H(t_0) \Rightarrow G(y(t)) = G(y_0) + H(t) - H(t_0)$ Trovare $y(t)$ è spesso complesso e quindi mi fermo al passo precedente

es

$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, t_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(t,y) = \overset{g}{y^2} \cdot \overset{h}{1} \\ h(t) = 1, g(y) = y^2 \end{cases}$

$h$ continua, $g$ derivabile $\Rightarrow \exists!$ sol. locale

1) Soluzioni Stazionarie

$g(y_0) = 0 \rightarrow y_0^2 = 0 \rightarrow y_0 = 0$

$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

2) $y(0) \neq 0$

$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{r^2} dr = \int_0^t dr \Rightarrow \left[-\frac{1}{r}\right]_{y(0)}^{y(t)} = [r]_0^t \Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1/y_0 - t}$

$\frac{1}{y_0} - t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{y_0} \begin{cases} > 0 & \text{se } y_0 > 0 \\ < 0 & \text{se } y_0 < 0 \end{cases}$

- se $y_0 > 0$ $y(t)$ è definita per $t \in (-\infty, 1/y_0)$
- se $y_0 < 0$ $y(t)$ è definita per $t \in (1/y_0, \infty)$

onde $-1$, indifferente

es. $\begin{cases} y'(t) = -1/y(t) \\ y(0)=y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(t,y) = h(t)\,g(y) = 1 \cdot -1/y \\ t(0)=0 \end{cases}$

$h$ continua, $g \in C^1((-\infty,0)\cup(0,\infty)) \longrightarrow y_0 \neq 0$

- Soluzioni Stazionarie

$g(y_0)=0 \Leftrightarrow -1/y_0 = 0$ impossibile $\longrightarrow$ nessuna soluzione stazionaria

- $-\int_{y(0)}^{y(t)} r\,dr = \int_0^t 1\,dr \Rightarrow \left[-\frac{r^2}{2}\right]_{y(0)}^{y(t)} = [r]_0^t \Rightarrow -\frac{y^2(t)}{2} + \frac{y_0^2}{2} = t \Rightarrow y(t)^2 = y_0^2 - 2t \Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{y_0^2-2t}$

Quale scelgo? In base alla condizione iniziale:

- se $y_0 > 0 \rightarrow y(t) = +\sqrt{y_0^2-2t} \rightarrow y_0^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t < y_0^2/2 \rightarrow \forall t \in (-\infty, y_0^2/2)$
- se $y_0 < 0 \rightarrow y(t) = -\sqrt{y_0^2-2t}$

## Esercizi

1) $\begin{cases} y'(t) = -\cos t \cdot y(t) + \sin t \cos t \\ y(0)=0 \end{cases}$

Edo 1° ordine in forma normale

$f(t,y) = -\cos(t)\,y + \sin t \cos t$ lineare perché $f$ dipende linearmente da $y$

$a(t) = -\cos t \quad b(t) = \sin t \cos t$ entrambe continue in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$y(t) = e^{A(t)}\left[y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s)\,ds\right]$ con $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds$

$A(t) = \int_0^t -\cos(s)\,ds = [-\sin]_0^t = -\sin t$

$\Rightarrow y(t) = e^{-\sin t}\left[0 + \int_0^t e^{\sin(s)} \cdot \sin(s)\cos(s)\,ds\right] \Rightarrow t = \sin(s) \quad dt = \cos(s)ds \Rightarrow \int e^t\, t\,dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c$

$= \sin(s)\,e^{\sin(s)} - e^{\sin(s)} + c$

$\Rightarrow e^{-\sin t}\left[e^{\sin(s)}(\sin(s) - 1)\right]_0^t = e^{-\sin t}\left[\left(e^{\sin t}(\sin t - 1)\right) + 1\right]$

2) $\begin{cases} y'(t) + 2y(t)/t = 1/t^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

$\rightarrow y'(t) = -\frac{2y(t)}{t} + 1/t^2 \longrightarrow f(t,y) = -2y/t + 1/t^2$ lineare

$a(t) = -2/t \quad b(t) = 1/t^2$ entrambe $\in C^0((-\infty,0)\cup(0,\infty))$

Poiché $t_0 = -1$ prendo $(-\infty,0) \Rightarrow \exists!\, y(t)$ in $(-\infty,0)$

perché sto nell'intervallo negativo

$y(t) = e^{A(t)}\left[y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s)\,ds\right] \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds = \int_{-1}^t -2/s\,ds = [-2\ln|s|]_{-1}^t = -2\ln|t| \rightarrow -2\ln(-t)$

$\Rightarrow e^{-2\ln(-t)}\left[2 + \int_{-1}^t e^{2\ln(-s)}\, 1/s^2\,ds\right] \rightarrow \int_{-1}^t e^{\ln(-s)^2}\, 1/s^2\,ds = \int_{-1}^t \cancel{s^2} \cdot 1/\cancel{s^2}\,ds = [s]_{-1}^t$

$e^{-\ln(-t)^2} = t^2$

$\Rightarrow \frac{1}{t^2}\left[2 + [s]_{-1}^t\right] = 1/t^2\,[t+3] = 1/t + 3/t^2 \quad \forall t \in (-\infty, 0)$

3) $\begin{cases} t(1+y(t)^2)\,y'(t) = 3 \\ y(1) = y_0 \end{cases} \longrightarrow y'(t) = \frac{3}{t(1+y(t)^2)}$ a variabili separabili $\longrightarrow \underbrace{3/t}_{h(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+y(t)^2}}_{g(y)} = f(t,y)$

$h$ continua $\forall t \neq 0$, $g$ derivabile in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, y(t)$ locale $\forall y_0 \in \mathbb{R}$

- Soluzioni Stazionarie

$g(y_0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{1+y_0^2} = 0$ impossibile

- $g(y_0) \neq 0$

$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(r)}\,dr = \int_{t_0}^t h(r)\,dr \rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} (1 + r^2)\,dr = \int_1^t 3/r\,dr \Rightarrow y(t) - y_0 + y(t)^3/3 - y_0^3/3 = \ln t^3$

$\Rightarrow y(t) + y(t)^3/3 = y_0 + y_0^3/3 + \ln(t)^3$

# EDO OMOGENEE

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ \dots \end{cases} \qquad \text{es. } y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \frac{1/y(t)}{t} \qquad f(r) = r + \frac{1}{r}$$

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \Leftrightarrow y(t) = t\,z(t) \longrightarrow y'(t) = z(t) + t\,z'(t)$$

$$\Rightarrow z(t) + t\,z'(t) = f(z(t)) \Rightarrow z'(t) = [f(z(t)) - z(t)]/t$$

es.

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \frac{t}{y(t)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \longrightarrow y'(t) = z(t) + t\,z(t)$$

$$\rightarrow z(t) + tz(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)} \longrightarrow z'(t) = \left(\cancel{z(t)} + \frac{1}{z(t)} - \cancel{z(t)}\right)\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{z(t)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} z'(t) = \overset{h}{\frac{1}{t}} \cdot \overset{g}{\frac{1}{z(t)}} \\ z(1) = y(1)/1 = 1 \end{cases}$$ a variabili separabili

$g(1) = 1/1 \neq 0$ la soluzione non è di tipo stazionario

$$\rightarrow \int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{1}{g(r)}\,dr = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \Rightarrow \int_1^{z(t)} r\,dr = \int_1^t \frac{1}{s}\,ds \longrightarrow \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{z(t)} = \left[\ln|s|\right]_1^t$$

$$\rightarrow \frac{z(t)^2}{2} - \frac{1}{2} = \ln|t| \longrightarrow z(t) = \pm\sqrt{1+\ln t^2} \longrightarrow z(t) = +\sqrt{1+\ln t^2} \text{ perché } z(t_0) = z(1) > 0$$

$$\Rightarrow y(t) = t\,z(t) = t\sqrt{1+\ln t^2}$$

Un altro tipo di EDO sono nella forma $y'(t) = f(at + by(t) + c)$

$$\rightarrow z(t) = at + by(t) + c$$

$$z'(t) = a + by'(t) \longrightarrow y'(t) = \frac{z'(t) - a}{b}$$

Sostituendo: $\frac{z'(t)-a}{b} = f(z(t)) \longrightarrow z'(t) = a + b f(z(t))$

es. $\begin{cases} y'(t) = (y(t) - t)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$f(r) = r^2 \quad at + by + c = y - t \rightarrow a = -1 \;\; b = 1 \;\; c = 0$

$z(t) = y(t) - t \rightarrow z'(t) = y'(t) - 1 \longrightarrow y'(t) = z'(t) + 1$

$\Rightarrow z'(t) + 1 = z(t)^2 \longrightarrow z'(t) = z(t)^2 - 1$ variabili separabili $g(r) = r^2 - 1 \quad h(r) = 1$

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^2 - 1 \\ z(0) = y(0) - 0 = 0 \end{cases}$$

- $g(z_0) = 0 \Longleftrightarrow 0 - 1 = 0$ impossibile (ok perché non devo avere soluzioni stazionarie)
- $\int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{g(r)}\,dr = \int_{t_0}^t h(r)\,dr = \int_0^{z(t)} \frac{1}{r^2-1}\,dr = \int_0^t dr$

$$r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1 \longrightarrow \frac{1}{r^2-1} = \frac{A}{r-1} + \frac{B}{r+1} = \frac{A(r+1)+B(r-1)}{r^2-1} = \frac{(A+B)r + (A-B)}{r^2-1} \rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \longrightarrow B = -A \longrightarrow B = -\frac{1}{2} \\ A - B = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r+1} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{r-1}\,dr - \frac{1}{2}\int\frac{1}{r+1}\,dr = \frac{1}{2}\ln|r-1| - \frac{1}{2}\ln|r+1| = \ln\left|\frac{r-1}{r+1}\right|^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left|\frac{r-1}{r+1}\right|^{1/2}\right]_0^{z(t)} = t \Rightarrow \ln\left|\frac{z(t)-1}{z(t)+1}\right|^{1/2} = t$$

Ritorno alla funzione originaria: $z(t) = y(t) - t$

$$\ln\left|\frac{y(t)-t-1}{y(t)-t+1}\right|^{1/2} = t \longrightarrow \frac{y(t)-t-1}{y(t)-t+1} = e^{2t}$$ mi fermo qua!

EDO:

- lineari $\longrightarrow$ formula
- variabili separabili $\longrightarrow$ stazionarie e formula
- omogenee $\longrightarrow$ ricondurre a variabili separabili con $z(t) = y(t)/t$
- "altro" $\longrightarrow$ ricondurre a variabili separabili con $z(t) = at + by(t) + c$

## EDO del 2° ordine A COEFFICIENTI COSTANTI

$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t)$

es. $\begin{cases} m y''(t) + k y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \,,\ y'(t) = y_1 \end{cases}$ molla

PC

$\begin{cases} y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ $\}$ 2 condizioni iniziali

### Teorema Unicità

Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(I)$ allora $\forall\, t_0 \in I \ \exists!\, y \in C^2(I)$ sol del PC

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due soluzioni di $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ allora $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$ è ancora soluzione dello stessa equazione

NB. Data $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t)$ si definisce edo omogenea associata all'eq. precedente $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$

L'insieme delle soluzioni di una edo. omogenea: $y''(t) + a y'(t) + b y(t)$ è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$) dove il vettore nullo è $y(t) \equiv 0$ cioè la funzione identicamente nulla

### TEOREMA

1) Se $y_1$ e $y_0$ sono due soluzioni di $\overbrace{y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t)}^{(*)}$ allora la loro differenza $y_1(t) - y_2(t)$ è soluzione della edo omogenea associata $\underbrace{y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0}_{(**)}$,

2) Se $y_0(t)$ è una soluzione di $(**)$ e $\bar{y}(t)$ è soluzione di $(*)$, la loro somma è soluzione di $(*)$

3) L'integrale generale di $(*)$ è dato da:

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t)$$

dove $y_0(t)$ è l'integrale generale di $(**)$ e $\bar{y}(t)$ è una soluzione particolare di $(*)$.

NB. Integrale generale è una formula che rappresenta tutte le possibili soluzioni del problema.

Per calcolare l'integrale generale di un'eq. NON omogenea devo:

1) Trovare l'integrale generale dell'eq. omogenea
2) Una soluzione particolare dell'eq. stessa.

### 1) Eq. omogenea $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$

L'insieme delle soluzioni di $EO^{J}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Una base di questo spazio vettoriale è data dalle soluzioni dei PC

$\begin{cases} y'' + a y' + b = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} \longrightarrow y_1(t)$

e $\begin{cases} y'' + a y' + b y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y_2(t)$

base

$y_1$ e $y_2$ sono linearmente indipendenti.

Date due soluzioni $y_1$ e $y_2$ di EO si definisce WRONSKIANA associata a $y_1$ e $y_2$ la matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) $y_1$ e $y_2$ sono due soluzioni linearmente indip. di EO

b) $\det(W(t)) \neq 0 \ \forall t$

c) $\det(W(t_0)) \neq 0$ con $t_0 \in I$

Come si calcolano due soluzioni linearmente indipendenti?

Si cercano soluzioni del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinare

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \\ y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0} = 0$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ è detta eq. caratteristica associata all'eq. omogenea

- $\Delta > 0$ $\exists$ 2 soluzioni reali e distinte $\lambda_1$ e $\lambda_2$ dell'eq. caratteristica

In corrispondenza, due soluzioni dell'eq. omogenea $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

Verifichiamo che sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(W) = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}(\underbrace{\lambda_2 - \lambda_1}_{\neq 0})$$

Se $\Delta > 0$ l'integrale generale dell'eq. omogenea è dato da $y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ con $C_1$ e $C_2 \in \mathbb{R}$

es. $y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) = 0$ :

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$$

$$y_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-5t}$$

- $\Delta = 0$ $\exists$ $\lambda$ radice doppia

$y_1(t) = e^{\lambda t}$ ma manca la seconda! La costruiamo:

Metodo della variazione delle costanti

$y(t) = c e^{\lambda t} \longrightarrow y(t) = c(t) e^{\lambda t}$ c da costante diventa funzione

$$y'(t) = c'(t) e^{\lambda t} + \lambda c(t) e^{\lambda t}$$

$$y''(t) = c''(t) e^{\lambda t} + \lambda c'(t) e^{\lambda t} + \lambda c'(t) e^{\lambda t} + \lambda^2 c(t) e^{\lambda t} = c''(t) e^{\lambda t} + 2\lambda c'(t) e^{\lambda t} + \lambda^2 c(t) e^{\lambda t}$$

sostituendo nell'eq. $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ :

$$c''(t) + c'(t)\underbrace{(2\lambda + a)}_{=0 \text{ perché } \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta = 0}}{2} \Leftrightarrow 2\lambda + a = 0} + c(t)\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{=0 \text{ perché } \lambda \text{ è soluzione}} = 0$$

$\Rightarrow c''(t) = 0 \Leftrightarrow c'(t) = k_1$ (costante) $\Leftrightarrow c(t) = k_1 t + k$ (2 costanti)

Sostituendo a $y(t) = c(t) e^{\lambda t}$ :

$y(t) = (k_1 t + k_2) e^{\lambda t}$ è soluzione dell'eq. omogenea

$\rightarrow y_2(t) = t e^{\lambda t}$ con $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$ linearmente indipendente

Se $\Delta = 0$ l'integrale generale dell'eq. omogenea è dato da:

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

es.

$y''(t) - 10y'(t) + 25y(t) = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \longrightarrow \lambda = 5$

$y_0(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$

• $\Delta < 0$ eq. caratteristica ammette due radici complesse e coniugate $\alpha \pm i\beta$

$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \\ y_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array}\right\}$ sono linearmente indipendenti ma non reali

NB. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$y_1(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$

$y_2(t) = e^{\alpha t} \cdot e^{i(-\beta t)} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i\sin(-\beta t)) = e^{\alpha t}(\underset{\text{pari}}{\cos(\beta t)} - i\underset{\text{dispari}}{\sin(\beta t)})$

$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1(t) = \frac{1}{2}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ \bar{y}_2(t) = \frac{1}{2i}y_1(t) + \frac{1}{2i}y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array}\right\}$ linearmente indipendenti

Se $\Delta < 0$ l'integrale generale dell'eq. omogenea è dato da:

$$y_0(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

es. $y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$ $\quad \alpha = -1 \quad \beta = \sqrt{2}$

$y_0(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) + c_2 e^{-t}\sin(\sqrt{2}t)$

## 2) Soluzione particolare dell'eq. $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$

modo 1: metodo variazione costanti arbitrarie di Lagrange (funziona sempre, ma complesso)

modo 2: metodo di somiglianza (semplice ma il termine noto deve essere in un certo modo)

1)

l'integrale generale dell'eq. omogenea è dato da $y_0(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ con $c_1$ e $c_2 \in \mathbb{R}$ e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ linearmente indip.

$\Rightarrow$ Cerchiamo una soluzione dell'eq. non omogenea del tipo $\bar{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ con $c_1$ e $c_2$ funzioni da determinare

$$\bar{y}'(t) = \underbrace{c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t)}_{\text{impongo } = 0 \quad 1^\text{a} \text{ condizione}} + c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t)$$

$\bar{y}''(t) = c_1'y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + c_1(t)y_1''(t) + c_2 y_2''(t)$

Sostituisco nell' eq. non omogenea $\bar{y}''(t) + a\bar{y}'(t) + b\bar{y}(t) = f(t)$

$$c_1'(t)y_1'(t) + c_2'y_2'(t) + c_1(t)\overbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}^{=0 \text{ perchè } \bar{y}_1\, \bar{y}_2 \text{ soluzioni}} + c_2(t)\overbrace{(y_2'' + ay_2' + by_2)}^{=0} = f(t)$$

$\Rightarrow c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = f(t)$ seconda condizione

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

Posso vederlo come un sistema lineare (a $t$ fissato) nelle incognite $c_1'(t)$ e $c_2'(t)$ e

$$W(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}$$

poiché $y_1$ e $y_2$ sono linearmente indip. $\Longleftrightarrow \det(W)\neq 0\ \forall t$

Dalla regola di Cramer:

$$c_1'(t)\ \frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(t)\\ f(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}\det}{\det(W)} \qquad\qquad c_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & 0\\ y_1'(t) & f(t)\end{vmatrix}\det}{\det(W)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$c_1(t)=\int c_1'(t)\,dt \qquad\qquad c_2(t)=\int c_2'(t)\,dt$$

es. $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=e^{3t}/t$

$\lambda^2-6\lambda+9 \longrightarrow \lambda=3$

$y_0(t)=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}$ (1)

Metodo Lagrange: $C_1(t)e^{3t}+C_2(t)te^{3t}$

$$\begin{cases} c_1'(t)\cancel{e^{3t}}+c_2'(t)\,t\,\cancel{e^{3t}}=0\\ c_1'(t)3\cancel{e^{3t}}+c_2'(t)(\cancel{e^{3t}}+3\cancel{e^{3t}}) = \cancel{e^{3t}}/t\end{cases}$$

Cramer:

$$c_1(t)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & t\\ 1/t & 1+3t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & t\\ 3 & 1+3t\end{vmatrix}}dt=\int\frac{-1}{1}dt=-t$$

$$c_2(t)=\int\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1/t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & t\\ 3 & 1+3t\end{vmatrix}}dt=\int\frac{1/t}{1}dt=\ln|t|$$

$\rightarrow \bar{y}(t)=-te^{3t}+\ln|t|\,t\,e^{3t}$ (2)

$\rightarrow$ l'integrale generale dell'eq. non omogenea è dato da:

$$y(t)=y_0(t)+\bar{y}(t)=\overbrace{C_1e^{3t}+C_2te^{3t}}^{y_0(t)}\overbrace{-te^{3t}+\ln|t|\,t\,e^{3t}}^{\bar{y}(t)}$$

2)

Assumiamo che $f(t)$ sia del tipo $f(t)=e^{\gamma t}P_m(t)\cos(\delta t)$ oppure $f(t)=e^{\delta t}P_m(t)\sin(\delta t)$ con $\gamma$ e $\delta\in\mathbb{R}$ e $P_m$ un polinomio di grado $m$.

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t)=t^k e^{\gamma t}(Q_m(t)\cos(\gamma t)+R_m(t)\sin(\delta t))$ con $k\in\{0,1,2\}$ a seconda che $\gamma+i\delta$ non sia soluzione ($k=0$), sia soluzione semplice ($k=1$) o sia soluzione doppia dell'eq. caratteristica $\lambda^2+a\lambda+b=0$ ($k=2$), $Q_m$ e $R_m$ polinomi di grado $m$ che vengono determinati imponendo che $\bar{y}(t)$ sia soluzione

NB. Se $f(t)$ è del tipo $f(t)=e^{\gamma t}P_m(t)$ possiamo assumere $\delta=0 \longrightarrow \bar{y}(t)=t^k e^{\gamma t}Q_m(t)$

es. $y''(t)-y(t)=t^2+1$ Trovare integrale generale

$\lambda^2-1=0 \longrightarrow \lambda=\pm 1 \longrightarrow y_0(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$ (1)

$f(t)=t^2+1=e^{\gamma t}P_m(t)\cos(\delta t)$ con $\gamma=0$, $\delta=0$ e $m=2$

$\bar{y}(t)=t^kQ_m(t)$ con $k=$ molteplicità di $\gamma+i\delta$ come soluzione

$\gamma+i\delta=0 \rightarrow 0$ non è radice $\rightarrow k=0 \longrightarrow \bar{y}(t)=a_2t^2+a_1t+a_0$ con $a_i$ da determinare.

$$\left.\begin{cases}\bar{y}'=2a_2t+a_1\\ \bar{y}''=2a_2\end{cases}\right\}\text{ sostituisco nell'edo} \longrightarrow 2a_2-(a_2t^2+a_1t+a_0)=t^2+1 \rightarrow \begin{cases}-a_2=1\\ -a_1=0\\ 2a_2-a_0=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a_2=-1\\ a_1=0\\ a_0=-3\end{cases}$$

Sostituendo otteniamo $\bar{y}(t) = -t^2 - 3$

$\Rightarrow y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - t^2 - 3$

es. $y'' + 2y' = t$

$\lambda^2 + 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda+2) = 0 \longrightarrow \lambda = 0, -2$

$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$

$\gamma = 0, \delta = 0 \quad m = 1 \quad K = 1 \longrightarrow Q_1 = a_1 t + a_0$

$\longrightarrow \bar{y}(t) = t(a_1 t + a_0) = a_1 t^2 + a_0 t$

$$\left.\begin{cases} \bar{y}'(t) = 2a_1 t + a_0 \\ \bar{y}''(t) = 2a_1 \end{cases}\right\} \text{sostituisco nell'edo} \rightarrow 2a_1 + 4a_1 t + 2a_0 = t \quad \begin{cases} 4a_1 = 1 \\ 2a_1 + 2a_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1/4 \\ a_0 = -1/4 \end{cases}$$

$\bar{y}(t) = 1/4\, t^2 - 1/4\, t$

$\Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} + 1/4\, t^2 - 1/4\, t$

es $y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 2\cos(3t)$

$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2}$

$y_0(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}$

$f(t) = 2\cos(3t) = e^{\gamma t} P_m \cos(\delta t)$ con $\gamma = 0, \delta = 3 \quad m = 0 \; (P_m = 2)$, $K = 0$ perché $0 + 3i$ non è soluzione

$\bar{y}(t) = t^0 (Q_m(t)\cos(3t) + R_m \sin(3t)) = a_0 \cos(3t) + b_0 \sin(3t)$

$$\left.\begin{cases} \bar{y}'(t) = -3a_0 \sin(3t) + 3b_0 \cos(3t) \\ \bar{y}''(t) = -9a_0 \cos(3t) - 9b_0 \sin(3t) \end{cases}\right\} \rightarrow -9a_0 \cos(3t) - 9b_0 \sin(3t) - 6a_0 \sin(3t) + 6b_0 \cos(3t) - a_0 \cos(3t) - b_0 \sin(3t) = 2\cos(3t)$$

$$\begin{cases} -9a_0 + 6b_0 - a_0 = 2 & \cos(3t) \\ 9b_0 - 6a_0 - b_0 = 0 & \sin(3t) \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = -5/34 \\ b_0 = 3/34 \end{cases}$$

$\bar{y}(t) = -5/34 \cos(3t) + 3/34 \sin(3t)$

$\Rightarrow C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t} - 5/34 \cos(3t) + 3/34 \sin(3t)$

## Esercizi

1) $\begin{cases} y'(t) = \frac{t}{t^2+2} \sin^3(y(t)) \\ y(0) = 3\pi \end{cases}$

- Edo 1° ordine
- Variabili separabili : $f(t,y) = \frac{t}{t^2+2}\sin^3(y(t)) = h(t)\,g(y)$

$g(y(0)) = \sin^3(3\pi) = 0$ soluzione stazionaria $y(t) = 3\pi \ \forall t$

2) $\begin{cases} y'(t) = (t-1)(y(t)-1) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$ · 1° ordine

• sia lineare che a V.S.

Lineare: $(t-1)y(t) - (t-1) = a(t)y(t) + b(t)$

V.S. : $h(t)\cdot g(y)$ usiamo questo caso

$g(\alpha) = \alpha - 1 = 0 \rightarrow$ Se $y(0) = 1$ si ha soluzione stazionaria $y(t) = 1 \ \forall t$

$\alpha \neq 1$ :

$$\int_{\alpha}^{y(t)} \frac{1}{g(r)}dr = \int_0^t h(r)dr \Rightarrow \int_{\alpha}^{y(t)} \frac{1}{r-1}dr = \int_0^t (r-1)\,dr \rightarrow \Big[\ln|r-1|\Big]_{\alpha}^{y(t)} - \left[\frac{(r-1)^2}{2}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)-1| - \ln|\alpha-1| = \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)-1| = \ln|\alpha-1| + \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |y(t)-1| = e^{\ln|\alpha-1| + \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

Se $\alpha > 1 \rightarrow y(t) > 1 \rightarrow y(t) - 1 > 0 \Rightarrow y(t) = 1 + e^{\ln(\alpha-1)+\dots}$

Se $\alpha < 1 \rightarrow y(t) - 1 < 0 \Rightarrow y(t) = 1 - e^{\ln(1-\alpha)+\dots}$

3) Molla Vincolata

$\begin{cases} my''(t) + ky(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$y'' + \frac{k}{m}y(t) = 0$ $\quad \omega$ t.c. $\omega^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \longrightarrow$ 2° ordine, coeff. costante omogenea

$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i\omega$ radici complesse coniugate

$y_0(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ se $\alpha + i\beta$ radici del polinomio caratteristico

$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \longrightarrow y_0(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) = y(t)$

$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y'(0) = C_2\omega = 1 \rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega} \end{cases}$

L'unica soluzione è $y(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$

4) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^t$ $\quad$ 2° ordine, c. cost

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \qquad \alpha = -1 \quad \beta = 1$

$y_0(t) = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\sin(t)$

$f(t) = te^t \quad \gamma = 1 \quad \delta = 0 \quad m = 1$

$\bar{y}(t) = t^k e^t Q_m(t) \quad \gamma + i\delta = 1$ non è soluzione $\rightarrow k = 0 \rightarrow \bar{y}(t) = e^t(a_1 t + a_0)$

$\begin{cases} \bar{y}'(t) = e^t(a_1 t + a_0) + e^t a_1 \\ \bar{y}''(t) = e^t(a_1 t + a_0) + e^t a_1 + e^t a_1 \end{cases} \longrightarrow \cancel{e^t}(a_1 t + a_0) + 2a_1\cancel{e^t} + 2\cancel{e^t}(a_1 t + a_0) + 2a_1\cancel{e^t} + 2\cancel{e^t}(a_1 t + a_0) = t\,\cancel{e^t}$

$\begin{cases} 5a_1 = 1 \\ 5a_0 + 4a_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \\ a_0 = -\frac{4}{25} \end{cases} \rightarrow \bar{y}(t) = e^t\left(\frac{1}{5}t - \frac{4}{25}\right) \longrightarrow y(t) = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\sin(t) + e^t\left(\frac{1}{5}t - \frac{4}{25}\right)$

# FUNZIONI REALI IN PIÙ VARIABILI

$f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con $N \geq 2$

$\mathbb{R}^N = \overbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{n \text{ volte}} = \{(x_1 \ldots x_n) \; x_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1 \ldots N\}$ ennuple

$\mathbb{R}^2$ può essere identificato con $(x, y)$
$\mathbb{R}^3$ $(x, y, z)$
...

## Norma Vettori

$x = (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^N$, definiamo la norma di $x$:

$\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$

es. $\|x, y\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Proprietà:**

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^N$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ ($x$ e $y$ vettori non componenti di vettori)

NB Per $N = 1$ $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$

Dal punto di vista geometrico, $\|x\|$ è la lunghezza del vettore che congiunge il punto di coordinate $x_i$ all'origine

A partire dalla norma posso definire la distanza tra due vettori/punti $x, y \in \mathbb{R}^N$ nel seguente modo:

$$d(x, y) := \|x - y\| = \left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

**Proprietà:**

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$

Consideriamo $f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

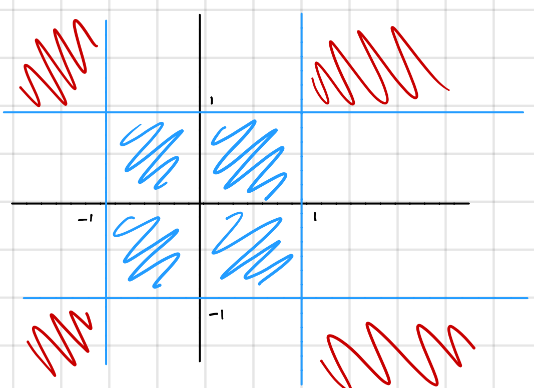
$(x, y, z) \to f(x, y, z) = e^{xy} + z z^2$

es. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \to 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow \forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1\}$

es. $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$ :

$(1 - x^2)(1 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \to x \in [-1, 1] \\ 1 - y^2 \geq 0 \to y \in [-1, 1] \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 1 - x^2 \leq 0 \longrightarrow x \leq -1 \wedge x \geq 1 \\ 1 - y^2 \leq 0 \longrightarrow y \leq -1 \wedge y \geq 1 \end{cases}$

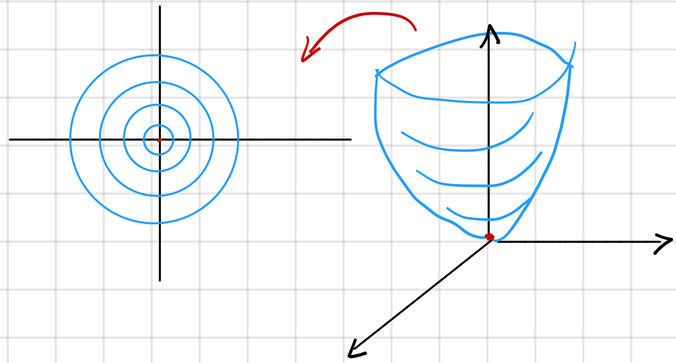


## CURVE DI LIVELLO

Dato $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ si definisce curva di livello $c$ di $f$ l'insieme $\Gamma_c = \{x \in D : f(x) = c\} \subseteq \mathbb{R}^N$

es $f(x,y) = x^2 + y^2$

- $c < 0$ $\quad \Gamma_c = \{(x,y) : x^2+y^2 = c\} = \emptyset$
- $c = 0$ $\quad \Gamma_0 = (0,0)$
- $c > 0$ $\quad \Gamma_c =$ circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$



## LIMITI IN $\mathbb{R}^N$

In $\mathbb{R}$ la definizione di limite si basa su:

- la nozione di limite per le successioni
- la nozione di punto di accumulazione

Data una successione $\{x_n\}_n$ con $x_n \in \mathbb{R}^N$ e $\ell \in \mathbb{R}^N$ diremo che $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ se $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \ell\| = 0$

$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \ell\| = 0 \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^i - \ell^i = 0 \quad \forall i = 1 \dots N$

es. $x_n = (1/n, 1 + 1/n^2, e^{-n}) \in \mathbb{R}^3$

$\lim_{n\to\infty} (1/n, 1 + 1/n^2, e^{-n}) = (0, 1, 0)$

3 limiti separati

Dato $D \subseteq \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ allora $x_0$ si dice di accumulazione per $D$ se $\exists \{x_n\}$ t.c.

1) $x_n \in D$
2) $x_n \neq x_0$
3) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se $\forall \{x_n\}$ t.c. $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $\overbrace{\lim_{n\to\infty} x_n = x_n}^{\text{vettori}}$ allora $\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell}_{\text{numeri reali}}$

La definizione di limite soddisfa le stesse proprietà di $\mathbb{R}$

1) unicità
2) Operazioni sui limiti
3) Funzioni composte

ecc.

## CALCOLO DEI LIMITI

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} = D \Rightarrow (0,0)$ è punto di accumulazione

Mi restringo a considerare il limite lungo una retta $y = mx$ passante per l'origine

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$

il limite dipende da $m$ e quindi dalla retta scelta per tendere all'origine e quindi il limite non esiste

Quindi condizione necessaria affinché $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esista è che esista $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ indipendente da $m \in \mathbb{R}$ !!!

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}(m^2+x^2)} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

se invece $y = x^2$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = 1/2$

Poiché il limite lungo le rette e lungo la parabola sono differenti il limite non esiste

Nel caso di pto $\neq (0,0)$ bisogno studiare il limite lungo il fascio di rette passante per tale punto:
- $(0,0) \longrightarrow y = mx$
- $(x_0, y_0) \longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$

Per dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ non esiste è sufficiente trovare due curve passanti per $(0,0)$ e t.c. i limiti della restrizione della funzione a queste curve siano diversi (rette e parabola per esempio)

## Criterio Esistenza del Limite

$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = x/y \end{cases}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

1) $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \ell \quad \forall m \in \mathbb{R}$
2) $|f(x,y) - \ell| = |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| \leq g(\rho)$ con $g$ t.c. $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$

Se riesco a verificare ciò il limite esiste (devo trovare $g$)

es $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 m}{x^2(1+m^2)} = 0 = \ell$
- $|f(x,y) - \ell| = \left|\frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\right| = \left|\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right| = \underbrace{\rho}_{\rho}\underbrace{\cos^2\theta}_{\leq 1}\underbrace{|\sin\theta|}_{\leq 1} \leq \rho \; (= g(\rho) \text{ t.c. } \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0)$

$\Rightarrow$ il limite esiste ed è uguale a $0$

Nel caso $(x_0, y_0)$ prendo coordinate polari centrate nel punto:

$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow |f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) - \ell| \leq g(\rho)$

es. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(y^2x^2)}{x^2+y^2}$

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4m^2)}{x^2(1+m^2)} \sim \frac{m^2x^4}{x^2(1+m^2)} = 0$

2) $\frac{\sin(\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\rho^2(\cancel{\cos^2\theta+\sin^2\theta})} \leq 1/\rho^2$ ma $\lim_{\rho\to 0} g(\rho) \neq 0$

$\leq \frac{\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{\rho^2} \leq \rho^2$

## CONTINUITÀ

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D$ allora $f$ si dice continua in $x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f$ si dice continua in $D$ se è continua in $x_0$ $\forall x_0 \in D$

Se $x_0$ è un punto isolato di $D$ allora $f$ si considera continua in $x_0$

Proprietà:

1) Se $f$ e $g$ sono continue allora $f \pm g$, $f \cdot g$, $f/g$ $(g \neq 0)$ sono continue
2) Composizione di funzioni continue è continua

# DERIVATA IN $\mathbb{R}^n$

Dato l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ il punto $x_0$ si dice interno se $\exists\, r>0$ t.c. $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \; \|x - x_0\| < r\} \subseteq D$
$B_r(x_0)$ è l'insieme dei punti che hanno distanza da $x_0$ minore di $r$ (lo chiamiamo intorno di $x_0$ di raggio $r$)

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0$ interno a $D$ allora $f$ si dice derivabile parzialmente rispetto alla variabile indipendente $x_i$ se $\exists$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0^1, x_0^2 \dots x_0^i + h, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, x_0^2 \dots x_0^i \dots x_0^n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Per $n=2$ $f$ si dice derivabile parzialmente rispetto $x$ se $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ e derivabile parzialmente rispetto $y$ se $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$

es. $f(x,y) = x^3y + 3x^2y^2 + x + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 + 1$ (vedo $y$ come costante)
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 6x^2y + 2y$ (vedo $x$ come costante)
} Derivate parziali

es. $f(x,y) = e^{x^2y + 3x}$
$\partial f / \partial x\,(x,y) = e^{x^2y+3x}(2xy+3)$ $\quad \partial f/\partial y\,(x,y) = e^{x^2y+3x}(x^2)$

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ interno, $f$ è derivabile in $x_0$ se $\exists\, \partial f/\partial x_i (x_0)$ $\forall i$ (esistono tutte le $n$ derivate parziali)
Se $f$ è derivabile in $x_0$ si può definire il gradiente di $f$ per in $x_0$: $Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists \to f$ non continua in $(0,0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0$
} derivabile

quindi $f$ è derivabile in $(0,0)$ (con $Df(0,0) = (0,0)$) ma $f$ non è continua in $(0,0)$
In $\mathbb{R}$ derivabilità $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ continuità
In $\mathbb{R}^n$ derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità

## APPROSSIMAZIONE LINEARE

(in $\mathbb{R}$)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ allora le seguenti proprietà sono equivalenti:
1) $f$ derivabile in $x_0$
2) $\exists\, A \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + O(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D$ interno. Allora $f$ si dice differenziabile in $x_0$ se $\exists\, A \in \mathbb{R}^n$ t.c.
$f(x) = \underline{f(x_0) + A \cdot (x - x_0)} + O(\|x - x_0\|)$ ($\cdot$ prodotto scalare tra vettori)
↳ funzione lineare che rappresenta un iperpiano

Se $f$ è differenziabile in $x_0$ allora $f$ è anche derivabile in $x_0$ e $A = Df(x_0)$
differenziabilità $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ derivabilità

Se $f$ è differenziabile in $x_0$ allora è anche continua in $x_0$

differenziabilità $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ continuità

In $\mathbb{R}$ differenziabilità e derivabilità sono equivalenti

Se $f$ è differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora $\exists!$ il piano che localmente ha un unico punto di intersezione con il grafico di $f$ in $(x_0, f(x_0))$

Tale piano è detto piano tangente ed ha eq. $z = f(x_0) + Df(x_0)\cdot(x-x_0)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

$f$ differenziabile in $x_0$ se $f(x) = f(x_0) + Df(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - Df(x_0)\cdot(x-x_0) = o(\|x-x_0\|)$

($f = o(g)$ per $x\to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$)

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)-Df(x_0)\cdot(x-x_0)]/\|x-x_0\| = 0$

Se $f: D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno, $\exists\, r>0$ t.c. $f$ è derivabile in $B_r(x_0)$ e le derivate parziali sono continue in $B_r(x_0)$ allora $f$ è differenziabile in $x_0$

es

$f(x,y) = e^{xy} + x^2y$ :

$\partial f/\partial x\,(x,y) = e^{xy} + 2xy \qquad \partial f/\partial y\,(x,y) = e^{xy}\cdot x + x^2$

$\forall\, xy \in \mathbb{R}^2$

entrambe sono continue in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Derivate parziali continue in un intorno del punto}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{DIFFERENZIABILITÀ}}$

$\boxed{\text{CONTINUITÀ}} \qquad \not\Leftrightarrow \qquad \boxed{\text{DERIVABILITÀ}}$

## DERIVATE DIREZIONALI

$f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ interno, $v\in\mathbb{R}^n$ t.c. $\|v\|=1$ (versore) allora $f$ si dice derivabile in $x_0$ nella direzione $v$ se esiste

$\lim_{h\to0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) =$ derivata direzionale di $f$ nella direzione $v$

## TEOREMA DEL GRADIENTE

Sia $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ interno e $f$ differenziabile in $x_0$ allora $\forall v\in\mathbb{R}^n$ t.c. $\|v\|=1$ $f$ ammette derivata direzionale nella direzione $v$ e la derivata direzionale in $x_0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0)\cdot v$

CONSEGUENZE:

prodotto scalare, $\alpha$ compreso tra i due

$\max_{v\in\mathbb{R}^n \text{ t.c. } \|v\|=1} \left\{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right\} = \max_{\dots}\{Df(x_0)\cdot v\} = \max\{\|Df(x_0)\|\,\cancel{\|v\|}^{\,1}\cos(\alpha)\} \Rightarrow$ massimo per $\alpha=0$

Se $\alpha=0$ $v$ e $Df(x_0)$ sono paralleli e concordi $\Rightarrow [v = Df(x_0)/\|Df(x_0)\|] \rightarrow$ per tale valore è massimo, cioè $Df(x_0)$ punta nella direzione di massima crescita di $f$.

## DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$f(x,y) = \sin(x^2y) + 4x^3y^2$

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos(x^2y)\,2xy + 12x^2y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \cos(x^2y)\,x^2 + 8x^3y \end{aligned}\right\}$ derivate prime

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x^2y)\,4x^2y^2 + \cos(x^2y)\,2y + 24xy^2 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -\sin(x^2y)\,2x^3y + \cos(x^2y)\cdot 2x + 24x^2y \end{aligned}\right\}$ derivate seconde parziali della prima derivata parziale

$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = -\sin(x^2y)\,2x^3y + \cos(x^2y)\,2x + 24x^2y \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin(x^2y)\,x^4 + 8x^3 \end{aligned}\right\}$ derivate seconde parziali della seconda derivata prima

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno se $\exists\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$ la funzione si dice derivabile due volte rispetto $x_i$ e $x_j$ nel punto $x_0$ e si pone $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

## TEOREMA DI SCHWARZ

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno se $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y)$ e sono continue in $x_0$ allora $\frac{\partial f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x\, \partial y}(x_0)$

Sia $f$ derivabile due volte in $x_0$ (cioè $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\ \forall i,j \in \{1 \dots n\}$) allora si definisce matrice Hessiana di $f$ in $x_0$:

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- matrice $N \times N$
- simmetrica (uguale alla trasposta)

## Esercizi

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$

– limite lungo rette: $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2-x^2}{m^2x^2+x^2} = \frac{m^2-1}{m^2+1}$ dipende da $m \Rightarrow \nexists$ limite

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$

– $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2(m^2x^2-x^2)}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m(m^2-1)x^4}{x^2(1+m^2)} = 0$

— stimo in coordinate polari: $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| = \left|\frac{2\rho^2\cos\theta\sin\theta(\rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\right| = |2\rho^2 \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\le 1}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)| = 2\rho^2 |\sin^2\theta - \cos^2\theta|$

$|\sin^2\theta - \cos^2\theta| \le |\sin^2\theta| + |-\cos^2\theta| = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \le 2\rho^2 (= g(\rho)) \to 0$ per $\rho \to 0^+) \Rightarrow \exists$ limite $= 0$

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x e^{y/x}$

$f(x,y) = x e^{y/x}$ $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$

– $\lim_{x\to 0} x e^{mx/x} = x e^m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

– $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| = \rho\cos\theta \cdot e^{\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}} = |\rho \underbrace{\cos\theta}_{\le 1} e^{\tan\theta}| \le \rho e^{\tan\theta}$ difficile da stimare quindi torno al limite:

Trovo un'altra curva che passa per il polo $\neq$ dalle rette (es. $y = \sqrt{x}$)

$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} x e^{\sqrt{x}/x} = \underset{0}{x} \underset{\infty}{e^{1/\sqrt{x}}} = \infty \Rightarrow$ limiti diversi $\Rightarrow \nexists$ limite

4) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ in $(0,0)$

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ deve essere uguale al punto $(0)$:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx^2)}{mx} \sim \frac{mx^2}{mx} = x \to 0$ ok
- $\left|\frac{\sin(\rho^2\cos\theta\sin\theta)}{\rho\sin\theta}\right|$: $\sin t \le t \Rightarrow \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\rho}\cancel{\sin}} \le \rho \;(\to 0$ per $\rho \to 0)$ ok

$\Rightarrow$ continua

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \frac{\sin(0\cdot h)/h - 0}{h} = 0$

$\Rightarrow$ Derivabile in $(0,0)$ e $Df(0,0) = (0,0)$

3) $\lim_{(x,y)\to \text{polo}} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|}$ deve essere uguale a $0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(xy)}{y} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \,?$$

$F(x,y) = \frac{\sin(x,y)}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

$\lim_{x\to 0} F(x,mx) = \frac{\sin(mx^2)}{mx\sqrt{x^2(m^2+1)}} = \frac{\cancel{m}x^2}{\cancel{m}x \cdot |x|\sqrt{1+m^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+m^2}}$ $\nexists$ limite $\Rightarrow$ non differenziabile

5) Verificare se $f(x,y) = |x|\ln(1+y)$ è differenziabile in $(0,0)$

$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}$ t.c. $y > -1\}$ comprende l'origine $\to$ ok

Per $x \neq 0$ $f(x,y)$ è una funzione regolare

– Derivabilità in $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|\ln(1) - 0}{h} = 0$ NB ho applicato la formula intera perché $|x|$ non è derivabile in $0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{|x|}{1+y} = 0$

– Verifico differenziabilità $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{|x|\ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad = F(x,y)$

- $\lim_{x\to 0} F(x,mx) = \frac{|x|\ln(1+mx)}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} \sim \frac{\cancel{|x|}\, mx}{\cancel{|x|}\sqrt{1+m^2}} = 0$ ok (lungo le rette)
- $|F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| = \frac{\rho|\cos\theta|\,|\ln(1+\rho\sin\theta)|}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} - 0 = |\underbrace{\cos\theta}_{\le 1}|\,|\ln(1+\rho\sin\theta)| \Rightarrow \ln(1+t) \le t \Rightarrow \le \rho|\underbrace{\sin\theta}_{\le 1}| \le \rho \to 0$ per $\rho \to 0^+$ ok

$f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$

6) Sia $f(x,y) = x^y$: calcolare gradiente, eq. del piano tangente in $P_0(e,1)$, derivata direzionale in $P_0$ nella direzione $v(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, la direzione di massima crescita in $P_0$ e $\max_{\|v\|=1} \left\{\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)\right\}$

$f(x,y) = e^{y\ln(x)} \to Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x > 0\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot y/x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{y\ln(x)} \cdot \ln(x) \Rightarrow Df(x,y) = \{e^{y\ln(x)} y/x,\; e^{y\ln(x)}\ln(x)\}$ ①

$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ formula del piano tangente

$\Rightarrow e^{\overset{1 = \ln(e)}{1}} + e \cdot 1/e (x-x_0) + e \cdot \overset{1}{\ln(e)} (y-y_0) = e + (x-e) + e(y-1)$ ②

gradiente

$f$ è differenziabile perché $\exists$ deriv. parz. e sono continue

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = Df(P_0)\cdot v$ (teorema del gradiente) $\Rightarrow \|v\| = 1 \to \frac{\partial f}{\partial v}(e,1) = Df(e,1)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (1, e)\cdot(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{e}{\sqrt{2}}$ ③

La direzione di massima crescita in $P_0$ è la direzione del versore $v$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial v}(P_0)$ è massimo

$V_{max} = \frac{Df(P_0)}{\|Df(P_0)\|} = \frac{Df(e,1)}{\|Df(e,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}, \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}\right)$ 4

$Df(P_0) \cdot \frac{Df(P_0)}{\|Df(P_0)\|} = \|Df(P_0)\|$

Il massimo al variare di $v$ delle derivate direzionali è uguale alla norma $\|Df(P_0)\| = \sqrt{1+e^2}$ 5

## ESTREMI DI FUNZIONI A PIÙ VARIABILI

Dato $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ allora $x_0 \in D$ si dice

1) punto di massimo locale se $\exists\, r>0$ t.c. $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0) \cap D$
2) punto di minimo locale se $\exists\, r>0$ t.c. $f(x) \ge f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0) \cap D$

} estremi (massimo o minimo) locale

In $\mathbb{R}$ per i punti di estremo locale abbiamo trovato
1) Cond. Necessarie $\rightarrow$ Teo Fermat
2) Cond. Sufficienti $\rightarrow$ Studio segno derivata prima vicino $x_0$ o studio di derivate di ordine superiore in $x_0$

## TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno un punto di estremo locale e $f$ differenziabile in $x_0$. Allora $Df(x_0) = 0$ ovvero tutte le derivate parziali in $x_0$ si annullano
1) Vale solo per punti interni
2) Se $Df(x_0) = 0$ allora $x_0$ è detto punto critico

punto estremo locale interno $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Punto critico (es. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $(0,0)$ punto critico, ma non estremo locale)

## CONDIZIONI SUFFICIENTI

$f \in C^2(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ è un punto critico e $f''(x_0) \neq 0$ allora
1) se $f''(x_0) > 0$ $x_0$ è un punto di minimo locale
2) se $f''(x_0) < 0$ $x_0$ è un punto di massimo locale

} in $\mathbb{R}$

Se $f$ è derivabile due volte si può definire la sua matrice Hessiana $Hf(x_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \dots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \dots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{bmatrix}$ (simmetrica)

Sia $A$ una matrice simmetrica $N \times N$ allora
1) $A$ si dice definita positiva se $x^T A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$
2) $A$ si dice definita negativa se $x^T A x < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$
3) $A$ si dice indefinita se $\exists\, x_1\, x_2$ vettori $\in \mathbb{R}^n$ t.c. $x_1^T A x_1 < 0$ e $x_2^T A x_2 > 0$
4) $A$ si dice semidefinita positiva (negativa) se $x^T A x \ge 0$ $(x^T A x \le 0)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ interno e punto critico (cioè $Df(x_0) = 0$). Supponiamo che $f \in C^2(D)$, allora se la matrice hessiana nel punto $x_0$ è definita positiva allora $x_0$ è un punto di minimo locale, se è definita negativa allora $x_0$ è un punto di massimo locale, se è indefinita allora $x_0$ non è un punto di estremo locale ($x_0$ è detto punto di sella), se è semidefinita positiva o negativa non si può concludere nulla sulla natura di $x_0$

Se $A$ è simmetrica ho tutti autovalori reali e
- è definita positiva $\Leftrightarrow$ autovalori $> 0$
- è definita negativa $\Leftrightarrow$ autovalori $< 0$
- è indefinita $\Leftrightarrow$ autovalori $\gtrless 0$

## CRITERIO DI HURWITZ

$A$ matrice, allora si definiscono minori principali di $A$ le matrici $k\times k$ $A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$ $k = 1 \dots N$

Sia $A$ matrice simmetrica, allora

- $A$ è definita positiva $\Leftrightarrow \det(A_k) > 0 \ \forall k = 1 \dots N$
- $A$ è definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \det(A_k) > 0 \ \forall k = 1 \dots N$

Nel caso $N = 2$ in particolare, sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0)$ punto critico

- se $\det[Hf(x_0,y_0)] > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ allora $(x_0,y_0)$ è un punto di minimo locale
- se $\det[Hf(x_0,y_0)] > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ allora $(x_0,y_0)$ è un punto di massimo locale
- se $\det[Hf(x_0,y_0)] < 0$ $(x_0,y_0)$ è un punto di sella
- se $\det[Hf(x_0,y_0)] = 0$ non posso concludere nulla

es $f(x,y) = x^2 - y^2$

$Df(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

derivata rispetto x di 2x

derivata rispetto y di 2x

derivata rispetto x di −2y

derivata rispetto y di −2y

$\det(Hf(0,0)) = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ punto di sella

es. $f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1$ Trovare i punti critici e classificarli

$Df(x,y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 12y^2 - 24y)$

$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x(y-1) = 0 \\ \dots \end{cases} \longrightarrow x = 0,\ y = 1$

① $\begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y(y-2) = 0 \longrightarrow y = 0,\ y = 2$ $\qquad P_0(0,0) \quad P_1(0,2)$

② $\begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 + 12y^2 - 24y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{cases} \longrightarrow x = \pm 2 \qquad P_2(2,1) \quad P_3(-2,1)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 24y - 24 \end{bmatrix}$

$\det[Hf(P_0)] = \det\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix} > 0$ e $f_{xx}(P_0) = -6 < 0 \Rightarrow P_0$ massimo locale

$\det[Hf(P_1)] = \det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} > 0$ e $f_{xx}(P_1) = 6 > 0 \Rightarrow P_1$ minimo locale

$\det[Hf(P_2)] = \det\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow P_2$ è un punto di sella

$\det[Hf(P_3)] = \det\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow P_3$ è un punto di sella

es $f(x,y) = y^3x + y^2 - x^2$. Trovare e classificare punti critici

$Df(x,y) = (y^3 - 2x, 3y^2x + 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^3 - 2x = 0 \\ 3y^2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^3/2 \\ y(3yx + 2) = 0 \end{cases} \longrightarrow y = 0$ e $3yx + 2 = 0$

① $\begin{cases} y = 0 \\ x = y^3/2 = 0 \end{cases}$ $P_0(0,0)$ $\longrightarrow$

② $\begin{cases} 3yx + 2 = 0 \\ x = y^3/2 \end{cases} \longrightarrow \frac{3}{2}y^4 + 2 = 0$ impossibile

$Hf = \begin{bmatrix} -2 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6yx + 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \det[Hf(P_0)] = \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} < 0 \rightarrow P_0$ punto di sella es $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + z$ Trovare e classificare punti critici

$Df(x,y) = (4x^3 - 4(x-y),\ 4y^3 + 4(x-y)) = (0,0)$

$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$ → sommo le due equazioni $\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 - 4(x-y) = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow y^3 = -x^3 \longrightarrow x = -y$

$4y^3 + 4(-y-y) = 0 \rightarrow 4y^3 - 8y = 0 \rightarrow y(y^2-2) = 0$

$\rightarrow y = 0$ e $y = \pm\sqrt{2}$

1) $y = 0 \rightarrow P_0(0,0)$

2) $y = \sqrt{2} \rightarrow P_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3) $y = -\sqrt{2} \rightarrow P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$

$\det[Hf(P_0)] = \det\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$ Non posso concludere nulla su $P_0$

$\det[Hf(P_1)] = \det\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} > 0$ e $f_{xx}(P_1) > 0 \rightarrow P_1$ minimo locale

$\det[Hf(P_2)] = \det\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} > 0$ e $f_{xx}(P_2) > 0 \rightarrow P_2$ minimo locale

es $f(x,y) = x^2 - \sin y$ Studiare i punti critici

$Df(x,y) = (2x, -\cos y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0, \pi/2 + k\pi)$ infiniti punti critici

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sin y \end{bmatrix}$

$\det[Hf(x,y)] = 2\sin y \rightarrow \begin{cases} 2 & \text{se } (x,y) = (0, \pi/2 + 2k\pi) \\ -2 & \text{se } (x,y) = (0, 3\pi/2 + 2k\pi) \end{cases}$

Se $P = (0, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ allora il $\det[Hf(P)]$ è $< 0 \rightarrow P$ è un punto di sella

Se $P = (0, \pi/2 + 2k\pi)$ il $\det[Hf(P)]$ è $> 0$ e $f_{xx}(P) > 0 \rightarrow P$ è un minimo locale

es. $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$

$Df(x,y,z) = (6x - 2z + 2,\ 4y + 2,\ 2z - 2x) = (0,0,0)$

$\begin{cases} 6x - 2z + 2 = 0 \longrightarrow 4x + 2 = 0 \longrightarrow x = -1/2 \\ 4y + 2 = 0 \rightarrow y = -1/2 \\ 2z - 2x = 0 \rightarrow z = x \rightarrow z = -1/2 \end{cases}$ $P(-1/2, -1/2, -1/2)$

$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = Hf(-1/2, -1/2, -1/2)$

criterio di Hurwitz:

$\det(H_1) = \det[6] = 6$

$\det(H_2) = \det\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 24$

$\det(H_3) = \det[Hf] = 6 \cdot 8 + 8 \cdot -2 = 32$

I det sono tutti positivi $\longrightarrow P$ è un minimo locale

es. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $P = (0,0)$ punto critico per $f$. Allora

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ ×

2) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\|v\| = 1$ ✓

3) $\det[Hf(P)] \neq 0$ ×

4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) > 0$ ×

Il punto critico non da informazioni sulle derivate seconde quindi 1 e 4 si possono scartare

Dal teorema del gradiente la risposta esatta è la 2 es. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in P. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?

1) $f$ è continua in P
2) $f$ è derivabile in P
3) $\exists$ il piano tangente al grafico di $f$ in P
4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ ×

Differenziabilità $\Longrightarrow$ continuità e derivabilità $\to$ 1 e 2 corrette
Differenziabilità sottintende l'esistenza del piano tangente $\to$ 3 corretta
La differenziabilità implica l'esistenza delle derivate prime ma non quelle seconde $\to$ 4 errata

## FUNZIONI VETTORIALI

Una funzione a valori vettoriali è una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con $N, M \in \mathbb{N} \geq 1$

es. $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x,y) \to (x^2y, e^{xy}, y)$

$f_1\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to (x^2y)$
$f_2\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to (e^{xy})$
$f_3\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \to (y)$

Per definire una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è necessario definire M funzioni da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (componenti)

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$
$x \in \mathbb{R}^N \to f(x) = (f_1(x) \dots f_M(x))$

Il dominio di $f$ è dato dall'intersezione dei domini delle sue componenti $\bigcap_1^M Df_i$

Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ punto di accumulazione per D. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ove $\ell \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad \forall i = 1 \dots N$

- $f$ è continua in $x_0 \in D \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ cioè $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = f_i(x_0)$ cioè $f$ è continua in $x_0 \leftrightarrow f_i$ è continua in $x_0\ \forall i = 1 \dots M$
- $f$ è derivabile in $x_0 \leftrightarrow f_i$ è derivabile in $x_0\ \forall i = 1 \dots M$, in questo caso possiamo definire la sua matrice Jacobiana in $x_0$

$$Jf(x_0)_{M \times N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

- $f$ è differenziabile in $x_0 \longleftrightarrow f_i$ è differenziabile in $x_0\ \forall i = 1 \dots M$

condizione diff.: $f_i(x) = f_i(x_0) + Df_i(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \forall i = 1 \dots M$

↳ notazione matriciale:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_M(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + Jf(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$

## TEOREMA DELLA CATENA

Sia $f\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ differenziabile in $x_0$ e $g\ \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ differenziabile in $y_0 = f(x_0)$. Allora $h = g \circ f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ è differenziabile in $x_0$ e vale la regola della catena:

$Jh(x_0) = Jg(y_0) \cdot Jf(x_0) = Jg(f(x_0))\, Jf(x_0)$

es $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to f(x,y) = (xy, 2, e^{x+y})$ $\quad g\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ (u,v,w) \to f(u,v,w) = (u^2 v, w^2)$

1) Calcolare $Jf(x,y)$ e $Jg(u,v,w)$

2) Calcolare $h = g \circ f$ e $Jh(x,y)$

3) Verificare la regola della catena

$$\underset{3\times 2}{Jf(x,y)} = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{Jg(u,v,w)} = \begin{bmatrix} 2uv & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{bmatrix}$$ 1

$h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = g\left(xy, 2, e^{x+y}\right) = \left(x^2y^2 \cdot 2, (e^{x+y})^2\right) = \left(2x^2y^2, e^{2(x+y)}\right)$$ 2

$$\underset{2\times 2}{Jh(x,y)} = \begin{bmatrix} 4xy^2 & 4x^2y \\ 2e^{2(x+y)} & 2e^{2(x+y)} \end{bmatrix}$$

3

$$Jg(u,v,w)\Big|_{(u,v,w)=f(x,y)=(xy,2,e^{x+y})} \cdot Jf(x,y) = Jh(x,y)$$

$$\begin{bmatrix} 2uv & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\overset{u}{xy}\cdot\overset{v}{2} & \overset{u^2}{x^2y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\overset{w}{e^{x+y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4xy^2 & 4x^2y \\ 2e^{2(x+y)} & 2e^{2(x+y)} \end{bmatrix}$$

## TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ $(n=N)$ si dice una trasformazione di coordinate

es $f\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$x \in \mathbb{R}^N \to y = Ax$ $\quad$ con $A$ matrice data $N\times N$

$f(x) = Ax$ è invertibile $\leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ t.c. $f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(y) = A^{-1}y$ con $A^{-1}$ matrice inversa di $A$

Data una trasformazione $f\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ sotto quali condizioni si può definire la trasformazione inversa $f^{-1}\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ t.c. $f^{-1}(f(x)) = x$ ?

$f\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ si dice trasformazione regolare se $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $\det[Jf(x)] \neq 0$ eccetto al più qualche punto.

$f \in C^1(\mathbb{R}^N) \longleftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ è continua $\forall i = 1 \dots N\ \forall j = 1 \dots N$

"eccetto al più qualche punto" vuol dire a meno di un insieme di "misura" nulla. Per esempio in $\mathbb{R}^2$, insiemi di misura nulla sono i punti e le curve (ovvero elementi di dimensione più bassa dell'insieme di riferimento)

## INVERTIBILITÀ LOCALE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ regolare, $x_0$ interno a $D$ t.c. $\det[Jf(x_0)] \neq 0$ (punto non singolare). Allora $\exists$ $U$ contenente $x_0$ e $V$ contenente $y_0 = f(x_0)$ tale che $f$ è invertibile da $U$ in $V$ cioè $\exists$ $f^{-1}\ V \to U$ tale che $f^{-1}(f(x)) = x\ \forall x \in U$, $f^{-1}$ è una trasformazione regolare in $V$ e

$$Jf^{-1}(y) = \left(Jf(x)\right)^{-1}\Big|_{x=f^{-1}(y)}$$

es $y = Ax \longleftrightarrow x = A^{-1}y$

$f\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots a_{1N}x_N \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 \dots + a_{NN}x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix}$$

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ & \ddots & & \\ a_{N1} & \dots & & a_{NN} \end{bmatrix} = A$$

$\det[Jf(x_0)] \neq 0 \longleftrightarrow \det A \neq 0$ $\quad$ le condizioni di invertibilità locale si riducono alla non singolarità di $A$

es. (coordinate polari)

$f\ [0,\infty]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$(\rho,\theta)\to f(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$

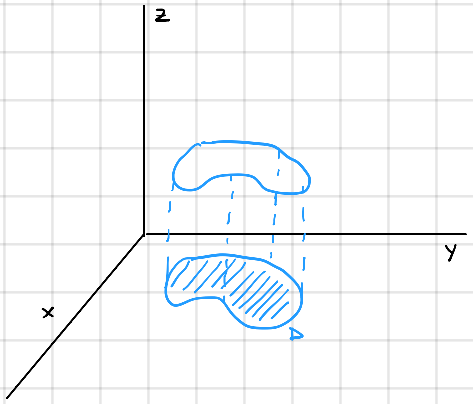
$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$Jf(\rho,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{bmatrix}$

$\det[Jf(\rho,\theta)]=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho\ =0 \longleftrightarrow \rho=0$ (punti singolari)

## INTEGRALI DOPPI

$f\ D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con $D$ e $f$ limitati



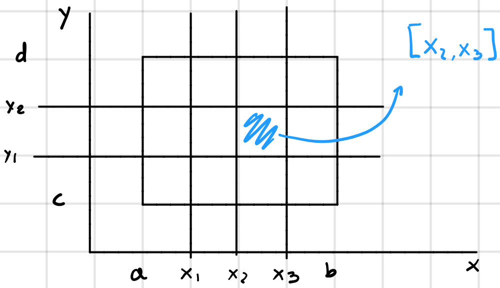

Calcoleremo il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ compreso tra $D$ e il grafico di $f$

$D\subseteq\mathbb{R}^2$ si dice limitato se $\exists\, r>0$ t.c. $D\subseteq B_R(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.c. $\sqrt{x^2-y^2}\leq R\}$

$f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ si dice limitata se $\exists\, m,M\in\mathbb{R}$ t.c $m\leq f(x)\leq M\quad\forall x\in D$

1) $D=[a,b]\times[c,d]$ = rettangolo

Data una partizione $P_x=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ e $P_y=\{c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d\}$ si definisce una partizione di $[a,b]\times[c,d]$ ponendo $P=P_x\times P_y$ $=\{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ con $i=1\ldots n$ e $j=1\ldots m$




$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\quad m_{ij}=\inf\{f(x,y):(x,y)\in R_{ij}\}\quad M_{ij}=\sup\{f(x,y):(x,y)\in R_{ij}\}\quad |R_{ij}|=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})\quad$ [area $R_{ij}$]

somme inferiori $=s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}|R_{ij}|$

somme superiori $=S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}|R_{ij}|$

Una funzione $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ove $D$ è un rettangolo e $f$ limitata si dice integrabile se $\inf\{S(f,P): P$ partizioni di $D\}=\sup\{s(f,P): P$ partizioni di $D\}\Rightarrow\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Inoltre porremo volume $=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

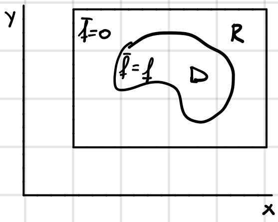
$f(x,y)=\text{cost}\quad\forall(x,y)\in D\to\iint_D c\,dx\,dy=(b-a)(d-c)c$

Limitata $\not\Rightarrow$ Integrabile

2) D limitato

Data $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e un rettangolo R contenente D allora denotiamo con $\bar{f}: R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $D \subseteq R$, $f$ si dice integrabile in D se $\bar{f}$ è integrabile in R e $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R \bar{f}(x,y)\,dxdy$




## Misura di un Insieme


Definiamo $f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in D$

$\iint_D 1\,dxdy = Vol(V) = area(D) \cdot 1$

$\Rightarrow$ Dato un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, se $f(x,y) = 1 \; \forall (x,y) \in D$ è integrabile in D allo si dice che D è misurabile e si definisce la misura di D: $|D| = \iint_D 1\,dxdy$

Proprietà:

1) $f, g$ integrabili in D, $\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R} \to \alpha f + \beta g$ è integrabile su D e $\iint_D \alpha f + \beta g\,dxdy = \alpha \iint_D f\,dxdy + \beta \iint_D g\,dxdy$

2) $f, g$ integrabili in D e $f(x,y) \leq g(x,y) \; \forall (x,y) \in D$ allora $\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D g(x,y)\,dxdy$. In particolare $\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

3) Se $|D| = 0 \to \iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$

4) Se $D = D_1 \cup D_2$ e $|D_1 \cap D_2| = 0 \to \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

Problemi: come stabiliamo se una funzione $f$ è integrabile su un dominio D? 1

Come si calcola un integrale doppio? 2

## TEOREMA DI FUBINI - TONELLI

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

1) Y semplice se $\exists\, g_1\, g_2$ continue $: [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

2) X semplice se $\exists\, h_1\, h_2$ continue: $[c,d] \to \mathbb{R}$ t.c. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(x)\}$

3) semplice se è X e/o Y semplice

4) regolare se è unione di un numero finito di domini semplici

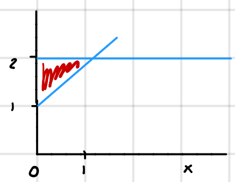
Sia $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $f$ continua e D è semplice, allora $f$ è integrabile in D e valgono le seguenti formule di riduzione:

1) se D è Y semplice
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

2) se D è X semplice
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Il teorema vale se D è regolare per la proprietà di additività (4)

es. $\iint_D 2x^2y\,dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \in [0,1],\ x+1 \leq y \leq 2\}$




D è un dominio y semplice $g_1(x) = x+1$ e $g_2(x) = 2$, $[a,b] = [0,1]$

(y semplice poiché i lati paralleli della figura D sono paralleli all'asse y: $h_1(y) = 0$ e $h_2(y) = 1$)

(può essere visto anche come x semplice in questo caso particolare $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ y \in [1,2] \ 0 \leq x \leq y-1\}$)

$\Rightarrow$ (Y semplice)

$$\iint_D 2x^2y\,dxdy = \int_0^1 \left( \int_{x+1}^2 2x^2y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[ 2x^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{x+1}^2 dx = \int_0^1 4x^2 - x^2(x+1)^2\,dx = \int_0^1 4x^2 - x^4 - 2x^3 - x^2\,dx = \left[ \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ ($x$ semplice)

$$\iint_D 2x^2y\,dx\,dy = \int_1^2\left(\int_0^{y-1} 2x^2y\,dx\right)dy = \dots$$

ovviamente dovrà venire lo stesso risultato

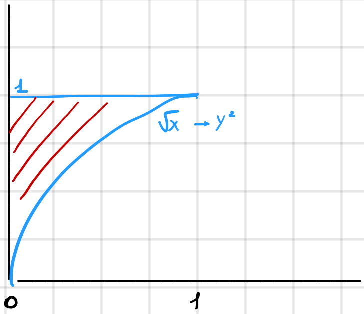
Se $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$ (come il caso precedente) e $D=[a,b]\times[c,d]$ = rettangolo

$D$ ($y$ semplice) $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; x\in[a,b] \;\; c\le y\le d\} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\,dy\,dx = \int_a^b f_1(x)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy$

porto fuori perché non dipende da $y$ — porto fuori perché non dip. da $x$

es

$$\iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; x\in[0,1] \;\; \sqrt{x}\le y\le 1\}$$




$$\iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)\,dy\,dx$$

NB $\sin(y^3)$ non può essere integrato elementarmente!

posso a $x$ semplice $\rightarrow D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; y\in[0,1] \;\; 0\le x\le y^2\}$

$$\iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{y^2} \sin y^3\,dx\,dy = \int_0^1 \sin(y^3)\cdot[x]_0^{y^2} = \int_0^1 y^2\sin y^3\,dy \Rightarrow t=y^3,\; dt=3y^2dy$$

ora è una costante rispetto $x$ e porto fuori

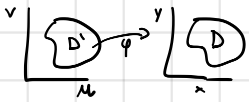
$$= \tfrac{1}{3}\int_0^1 3y^2\sin(y^3)\,dy = \tfrac{1}{3}\int_0^1 \sin t\,dt = \tfrac{1}{3}[-\cos t]_0^1 = (-\cos 1 + 1)\cdot\tfrac{1}{3}$$

## CAMBIAMENTO DI VARIABILE

Sia $f\; D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ integrabile e sia $\varphi\;\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una trasformazione regolare di coordinate tale che $\varphi(D')=D$. Allora vale

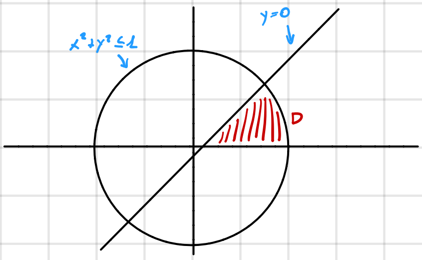
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v))\cdot|\det[J\varphi(u,v)]|\,du\,dv$$

$$\begin{cases} x=\varphi_1(u,v)\\ y=\varphi_2(u,v)\end{cases}$$



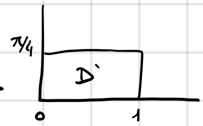

$$J\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2(u,v)}{\partial v}\end{bmatrix}$$

es. $\iint_D xy\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\; x^2+y^2\le 1 \;\; 0\le y\le x\}$




Utilizzo la trasformazione delle coordinate polari $\varphi = \begin{cases} x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

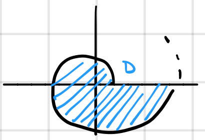
$D'=\{(\rho,\theta) \;\; \underbrace{\rho^2\le 1}_{x^2+y^2\le 1} \Leftrightarrow 0\le\rho\le 1 \;\; 0\le\theta\le\pi/4\} = [0,1]\times[0,\pi/4] \longrightarrow$




$$\det[J\varphi(\rho,\theta)] = \rho \longrightarrow \iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D'} \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \iint_{D'}\rho^3\cdot\cos\theta\sin\theta\,d\rho\,d\theta \rightarrow \int_0^1\rho^3\,d\rho\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

es Calcolare l'area contenuta all'interno della spirale di Archimede



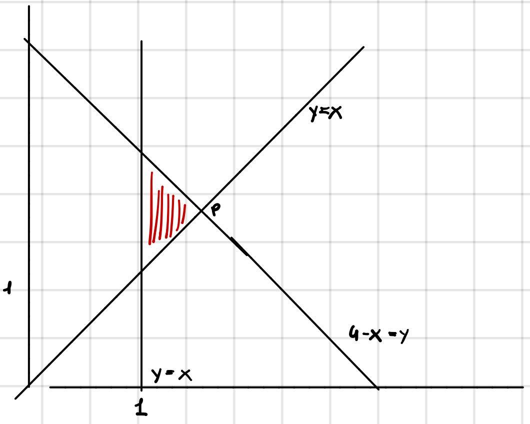

$$|D| = \iint_D 1\,dx\,dy$$

Eq. polare: $\rho=\theta$

$D'=\{(\rho,\theta) \;\; \theta\in[0,2\pi] \;\; 0\le\rho\le\theta\}$ $\rho$ semplice

$$|D| = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{D'} 1\,\underbrace{\rho}_{\det J\varphi}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^\theta \rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\theta^2}{2}\,d\theta = \frac{8\pi^3}{6}$$

Disegnare la regione piana definita dalle rette $y=x$ , $x=1$ e $y=4-x$ e calcolare $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$



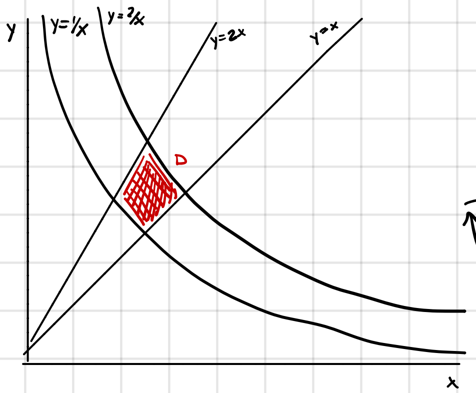

Y semplice perchè 2 lati paralleli ad y (in questo caso non vale x semplice)

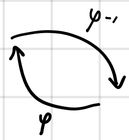
$$P = \begin{cases} y=4-x \\ y=x \end{cases} \rightarrow y=2 \quad x=2$$

$$D = \{(x,y) \quad x[1,2] \quad x \le y \le 4-x\}$$

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_1^2\int_x^{4-x} \cos(x+y)\,dydx = \int_1^2 \left[\sin(x+y)\right]_x^{4-x} dx = \int_1^2 [\sin(4)-\sin(2x)]dx$$
$$= [\sin(4)x]_1^2 + \left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_1^2 = \dots$$

$\iint_D (x+y)\,dxdy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c } 1\le xy\le 2 \,,\, 1\le y/x \le 2 \,,\, x,y>0\}$



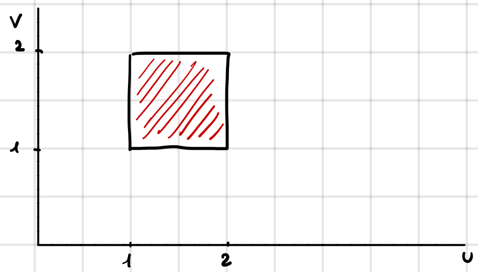




$1\le xy \rightarrow 1=xy \rightarrow y=1/x$

$2=xy \rightarrow y=2/x$

$1\le y/x \rightarrow 1=y/x \rightarrow x=y$

$2=y/x \rightarrow y=2x$




$D' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \quad 1\le u\le 2 \,,\, 1\le v\le 2\}$ con $u=xy$ e $v=y/x$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v))\cdot \det[J\varphi(u,v)]\,du\,dv$$

Devo trovare $\varphi_1$ e $\varphi_2$ t.c $x=\varphi_1(u,v)$ e $y=\varphi_2(u,v)$ (trasformazione)

Noi abbiamo l'inversa:

$$\varphi^{-1}\begin{cases} u=xy \\ v=y/x \end{cases} \longrightarrow \varphi\begin{cases} uv=y^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{uv} \rightarrow y=\sqrt{uv} \text{ perchè } y>0 \\ \frac{u}{v}=x^2 \rightarrow x=\sqrt{u/v} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\sqrt{u/v} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$$

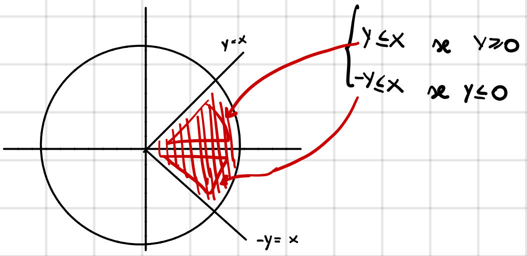
$$J\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v^{3/2}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix} \longrightarrow \det[J\varphi(u,v)] = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$$

$$\Rightarrow \iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_{D'} \left(\sqrt{u/v} + \sqrt{uv}\right)\cdot \frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$\rightarrow D' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \quad v\in[1,2] \quad 1\le u\le 2\}$ (scelta indifferente)

$$\Rightarrow \int_1^2\int_1^2 \left(\sqrt{u/v}+\sqrt{uv}\right)\frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_1^2\int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\,du\,dv = \int_1^2 \left[\frac{1}{2v^{3/2}}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 dv = \int_1^2 \frac{1}{v^{3/2}}\left(\frac{2^{3/2}}{3}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3\sqrt{v}}\left(2^{3/2}-1\right)\Big]\,dv =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right)\left[-\frac{2}{\sqrt{v}} + 2\sqrt{v}\right]_1^2 = \dots$$

$\iint_D y^3\,dx\,dy \quad D=\{(x,y) \quad x^2+y^2\le 1 \quad |y|\le x\}$



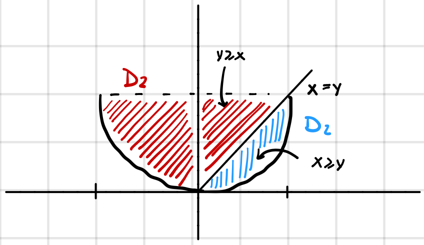

$D'=\{(\rho,\theta) \quad \theta\in[-\pi/4,\pi/4] \quad \rho\le 1\}$

$\iint_D y^3\,dx\,dy = \iint_{D'} \rho^3 \sin^3\theta \cdot \underbrace{\rho}_{\det J\varphi[x,y]}\,d\rho\,d\theta$

$= \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3\theta\,d\theta$

$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta \xrightarrow[dt=-\sin t\,dt]{t=\cos t} \int t^2-1\,dt = \frac{t^3}{3}-t \rightarrow \frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta$

$\rightarrow \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \dots$




$\iint_D |y-x|\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\in[-1,1] \quad x^2\le y\le 1\}$

$|y-x| = \begin{cases} y-x & \text{se } y-x\ge 0 \rightarrow y\ge x \\ x-y & \text{se } y-x\le 0 \rightarrow y\le x \end{cases}$

$\iint_D |y-x|\,dx\,dy = \iint_{D_1}(y-x)\,dx\,dy + \iint_{D_2}(x-y)\,dx\,dy$

• $\iint_{D_2}(x-y)\,dx\,dy \qquad D_2=\{(x,y) \quad x\in[0,1] \quad x^2\le y\le x\}$ y semplice

$= \int_0^1\int_{x^2}^{x}(x-y)\,dy\,dy = \int_0^1 \left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 x^2-\frac{x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{2}\,dx = \dots$

• $\iint_{D_1}(y-x)\,dx\,dy \qquad D_1=\{(x,y) \quad y\in[0,1] \quad -\sqrt{y}\le x\le y\}$ x semplice

$\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{y} y-x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[yx-\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{y} dy = \int_0^1 \left(y^2-\frac{y^2}{2}+y^{3/2}+\frac{y}{2}\right) dy = \dots$

## CENNI SUGLI INTEGRALI TRIPLI

$f: D\subseteq\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f$ limitata in $D$, $D$ è limitata ($\exists R>0$ t.c. $D\subseteq B(0,R)$)

1) $f:[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ "parallelepipedo"

2) $f: D\subseteq\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, dato $P$ parallelepipedo t.c. $D\subseteq P$ $\quad \bar{f}(x,y,z) \begin{cases} f(x,y,z) & (x,y,z)\in D \\ 0 & (x,y,z)\in P\setminus D \end{cases}$

$f$ si dice integrabile in $D$ se $\bar{f}$ è integrabile in $P$ e si pone $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_P \bar{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$|D| = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$ = misura / volume di $D$

### Teorema Fubini – Torelli

① Integrazione per fili

② Integrazione per strati

Un dominio $D\subseteq\mathbb{R}^3$ si definisce z semplice se $\exists$ $g_1, g_2 : E\in\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ continue t.c. $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad (x,y)\in E \quad g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$ (faccia parallela all'asse z)

① $f: D\subseteq\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ continua e $D$ semplice allora $f$ è integrabile in $D$ e valgono le formule di riduzione

se $D$ è z semplice $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_E\left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy$ (analogamente per gli altri casi es

Calcolare $\iiint_D z\,dxdydz$ $\quad D=\{(x,y,z)\ \ \overbrace{x^2+y^2\le 1}^{E}\ \ 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ z semplice

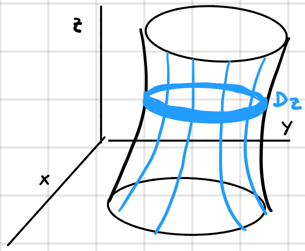
$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_E \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,dxdy = \iint_E \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \iint_E \frac{(1-\sqrt{x^2+y^2})^2}{2}\,dxdy$$

$$E=\{(x,y)\ \ x^2+y^2\le 1\} \to E'=\{(\rho,\theta)\ \ \rho\in[0,1]\ \ \theta\in[0,2\pi]\}=[0,1]\times[0,2\pi]$$

$$\to \iint_{E'} \frac{(1-\rho)^2}{2}\cdot\rho\,d\rho d\theta = \int_0^1 \frac{(1-\rho)^2}{2}\rho\,d\rho\cdot\int_0^{2\pi}1\,d\theta = \dots$$

(2) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \ z\in[a,b]\ \ (x,y)\in D_z\}$ $\quad D_z$ - strato che dipende da zeta

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b\left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right]dz$$




es

$\iiint_D x^2+y^2\,dxdydz$ $\quad D=\{(x,y,z)\ \ z\in[0,1]\ \ \overbrace{x^2+y^2\le z^2}^{D_z}\}$

$$\to \int_0^1\left(\iint_{D_z} x^2+y^2\,dxdy\right]dz$$

$$D'_z=\{(\rho,\theta)\ \ \rho\in[0,z]\ \ \theta\in[0,2\pi]\}$$

$$\to \int_0^1\left[\iint_{D'_z}\rho^2\cdot\rho\,d\rho d\theta\right]dz = \int_0^1\left[\int_0^z\rho^3\,d\rho\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\right]dz = \int_0^1\frac{z^4}{2}\pi\,dz = \pi/2\cdot\frac{1}{5}=\pi/10$$

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$f: D\in\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ integrabile e $\varphi\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è una trasformazione regolare di coordinate t.c. $\varphi(D')=D$, allora

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{D'} f(\varphi(u,v,w))\,|\det[J\varphi(u,v,w)]|\,dudvdw$$

# Compito 2009 Maggio

## D1

1) Definizione di limite per una successione
2) Fare un esempio di una successione oscillante non limitata

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0\ |a_n - \ell| < \varepsilon$

2) $(-1)^n$ oscillante ma limitata $\longrightarrow$ $(-2)^n$ $\begin{cases} 2^n & \text{se pari} \\ -2^n & \text{se dispari} \end{cases}$ oscillante e non limitata

## D2

1) Definizione di derivata direzionale per una funzione $f\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
2) Enunciare teorema del gradiente

1) $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}$ $\forall\ v \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\|v\| = 1$

2) $f\ D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x \in D$ interno e $f$ differenziabile in $x$, allo $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x) \cdot v$ $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|v\| = 1$

## E1

Sia $f\ [0,1) \to \mathbb{R}$ continua e sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ $\forall x \in [0,1)$. Allora

a) se $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \infty$ allora $f \sim \frac{1}{1-x}$ $x \to 1^-$ b) se $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \ell$ allora $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell$ ($\ell$ inteso come finito)

c) se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell$ allora $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \ell$ d) nessuna delle precedenti

ⓐ No : $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \infty$ se $\alpha \geq 1$ $\longrightarrow$ non possiamo sapere quale $\alpha$ $\longrightarrow$ $\frac{1}{(1-x)^\alpha}$

ⓑ No : $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \leq \infty$ $\alpha < 1$ $\longrightarrow$ $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}$ $\alpha < 1$

ⓒ Sì : se $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell \Rightarrow f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ \ell & x = 1 \end{cases}$ (cioè se il limite $\exists$ finito allora $f$ può essere estesa ad una funzione continua in $[0,1]$ e quindi $F$ è definita in $[0,1]$)

## E2

Siano $a_n, b_n, c_n$ tre successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$. Quale delle seguenti non è corretta?

a) Se $a_n, c_n$ convergono allora $b_n$ converge b) Se $a_n, c_n$ sono infinitesime allora $b_n$ è infinitesima

c) Se $a_n$ diverge a $\infty$ allora $b_n$ diverge a $\infty$ d) Se $c_n$ diverge a $-\infty$ allora $b_n$ diverge a $-\infty$

ⓐ non è vero poiché deve essere specificato che convergono allo stesso limite es. $-2 \leq (-1)^n \leq 2$

## E3

Sia $a_n$ una successione non limitata t.c. $0 < a_n < a_{n+2}$. Allora:

a) $\sum_1^\infty (-1)^n / a_n$ converge b) $\exists\ M > 0$ t.c. $\forall n > M\ a_n > 1$

c) $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall M > 0\ \exists\ n > M$ t.c. $a_n > \varepsilon$ d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0$ t.c. $\forall n > M\ a_n > \varepsilon$

ⓑ indica che $a_n$ è definitivamente $> 1$, ⓓ indica che $\lim_{n\to a_n} a_n = \infty$ ($a_n$ diverge)

$a_n \leq a_{n+2}$ indica che è monotona per $n$ pari e dispari ma non insieme

$a_n = \begin{cases} 1/2 + 1/n & n \text{ pari} \\ n & n \text{ disp.} \end{cases}$ non soddisfa ⓐ, ⓑ, ⓓ $\longrightarrow$ ⓒ è quella giusta

## ES4

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} \cdot \sin(x-2)$$

$\sin(x-2) \sim x-2$ (se argomento $\to 0$) $\Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^{\cancel{3}\,2}} \cancel{(x-2)}$

$t = \frac{1}{x-2} \longrightarrow \frac{1}{0^-} = -\infty$ per $x \to 2^-$

$\Rightarrow \lim_{t\to -\infty} e^t \cdot t^2 = 0 \cdot \infty$ ma $e^t \to 0$ più rapidamente $\Rightarrow 0$

## ES5

Trovare punti critici di $f(x,y) = -2 + x^3 - 4xy + 4y^2$ e classificarli

$Df(x,y) = (3x^2 - 4y,\ -4x + 8y)$

$\begin{cases} 3x^2 - 4y = 0 & \to 3x^2 - 2x = 0 \\ -x + 2y = 0 & \to x = 2y \end{cases}$ $\longrightarrow x(3x-2) = 0$ $\quad P_1 \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$ $P_2 \begin{pmatrix} x = 2/3 \\ y = 1/3 \end{pmatrix}$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \det < 0 \Rightarrow$ punto di sella $\quad Hf(2/3, 1/3) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \det > 0$

$\left\{ \begin{array}{l} f_{xx}(2/3, 1/3) = 4 > 0 \\ \det > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ minimo locale

**ES6** Calcolo se converge l'integrale improprio $\int_0^{\infty} \frac{\arctg(x)}{1+x^2}\,dx$

Per definizione se esiste vale $\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\arctg x}{1+x^2}\,dx \to t = \arctg(x) \quad dt = 1/1-x^2 \to \lim_{c\to\infty} \int_0^{\arctg(c)} t\,dt = \lim_{c\to\infty} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\arctg(c)} = \lim_{c\to\infty} \frac{\arctg^2(c)}{2}$

Per $c\to\infty$ $\arctg(c) \to \pi/2 \Rightarrow = 1/2 \cdot (\pi/2)^2 = \frac{\pi^2}{8}$

## Compito 2009 Settembre

**D1**

a) Dare la definizione di continuità per una funzione $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

b) Verificare se $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$ è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

a) $f$ è continua in $x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

b) Poiché lo zero è escluso, $|x|$, $1/x$, $-x$ sono funzioni continue quindi la funzione è continua

**D2** a) Dare la definizione di differenziabilità per $f\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ in $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

b) Calcolare l'eq. del piano tangente a $f(x,y) = e^{\sin x\cdot\cos y}$ in $(0,0)$

$A = Df(x_0,y_0)$ = gradiente

a) $f$ è differenziabile in $(x_0,y_0)$ se $\exists\, A\in\mathbb{R}^2$ t.c. $f(x,y) = f(x_0,y_0) + A\cdot(x-x_0, y-y_0) + o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|)$

b) $z = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$

$Df(x_0,y_0) = (e^{\sin x\cos y}\cos x\cos y,\ e^{\sin x\cos y} - \sin x\sin y) = (1, 0)$

$\to z = 1 + (1,0)\cdot(x,y) = 1+x$

**E1** $f\in C^1([0,1])$ t.c. $f(0)=0$ e $f(1)=2$. Allora

a) $f$ è invertibile b) $f$ è concava c) $f'(0)\geq 0$ d) $\exists\, x\in[0,1]$ t.c. $f'(x)=2$

a) No perché per essere invertibile deve essere monotona e nessuno ce lo garantisce

b) No perché non sappiamo che forma ha a priori

c) No perché può crescere e decrescere

d) Sì per teorema di Lagrange $f(b)-f(a) = f'(x)(b-a) \to f(1)-f(0) = f'(x) = 2$

**E2** Il polinomio di Taylor di $f(x) = x^x$ in $x_0=1$ di ordine 2 è dato da:

a) $(x^x-1)^2$ c) $2-(x-1)-(x-1)^2$

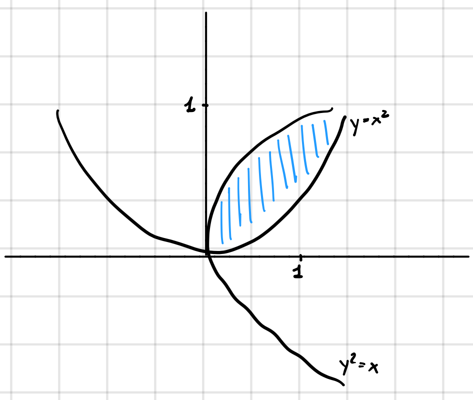
b) $(1-x+x^2)$ d) non si può calcolare

$f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ regolare e definita in $(0,\infty) \to$ Taylor si può calcolare $\to$ d) errata

a) No perché non è un polinomio

$f(x_0)$ deve coincidere con il primo membro dello sviluppo $\to f(x_0) = 1 \to$ b) giusta c) errata

**E6** Sia D il dominio limitato dalle parabole $y=x^2$ e $y^2=x$. Disegnare il dominio e calcolare $\iint_D xy\,dxdy$




$D = \{(x,y)\ \ x\in[0,1]\ \ x^2\leq y\leq\sqrt{x}\}$ y semplice

$\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dydx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = 1/6 - 1/12$