ANALISI

Prima Parte

By Edoardo

MINORANTI, MAGGIORANTI, ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE

$A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

1) $s \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se $[a \leq s \ \forall a \in A]$
2) $s \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se $[a \geq s \ \forall a \in A]$

es. $[1,3] = \{x \in \mathbb{R} \ 1 \leq x \leq 3\}$
3 è un maggiorante $\rightarrow$ $3 \geq a \ \forall a \in [1,3]$ (come tutti i numeri ≥ 3)

es $[-1,4]$
-2 è un minorante
-1 è un minorante

es $A = \mathbb{N}$ = numeri naturali
non esistono maggioranti di A perché $\forall s \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $s < n$
$\Rightarrow$ non è limitato superiormente
zero è un minorante $\Rightarrow$ è limitato inferiormente

es
$\mathbb{Z}$ non è limitato né superiormente né inferiormente

es
$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ è limitato superiormente (zero maggiorante), ma non inferiormente.

Nel caso $A = (1,2)$, 2 oltre ad essere maggiorante è tra essi il più piccolo:
Def: $A \in \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$
1) se A è limitato superiormente, allora il più piccolo dei maggioranti di A è detto estremo superiore
2) se A è limitato inferiormente allora il più grande dei minoranti è detto estremo inferiore

$S = \sup A \Leftrightarrow \{S \geq a \ \forall a \in A \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ t.c. } S - \varepsilon < a\}$
$s = \inf A \Leftrightarrow \{s \leq a \ \forall a \in A \ \wedge \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ t.c. } s + \varepsilon > a\}$

Se A non è limitato superiormente si pone $\sup A = +\infty$
Se A non è limitato inferiormente si pone $\inf A = -\infty$

Se il sup e l'inf appartengono all'insieme (es $A = [0,1]$) allora sono chiamati anche massimo ($\max A$) e minimo ($\min A$)

NB. Se esiste un $\max A$ allora coincide con $\sup A$ (stessa cosa per $\min A$ - $\inf A$)

Esercizio

$A = \{1 - 1/n \text{ t.c. } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 \dots\}$

Maggiorante $= 1$

Tesi $1 \geq 1 - 1/n \ \forall n \neq 0 \iff 1/n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ verificata

minorante $= 0$

Tesi $1 - 1/n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \iff n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ verificata

$\sup A = 1$

Tesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } 1 - 1/n > 1 - \varepsilon$

$1 - 1/n > 1 - \varepsilon \iff \varepsilon > 1/n \iff n > 1/\varepsilon$ verificata

$\max A = 1$

Tesi $\sup A \in A \implies \sup A = \max A$

$\sup A \in A \iff \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ t.c. } 1 \leq 1 - 1/n \iff 1/n = 0$ impossibile $\implies$ non esiste massimo

$\min A = \inf A = 0$

0 è un minorante e appartiene ad $A \implies 0 = \min A = \inf A$

Teorema (completezza di $\mathbb{R}$)

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore (ed analogamente per l'estremo inferiore)

Tale proprietà non è valida per l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. (si dice non completo)

COEFFICIENTE BINOMIALE

Dati $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ si definisce coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ e rappresenta il numero di sottoinsiemi distinti k oggetti su n totali.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

BINOMIO DI NEWTON

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ allora $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Teorema principio di induzione

Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da un indice $n \in \mathbb{N}$.

1) Se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $P(n_0)$ è vera (BASE DELL'INDUZIONE
2) $P(n)$ vera $\Leftrightarrow P(n+1)$ vera $\forall n \geq n_0$ (PASSO INDUTTIVO)

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

es. $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

BASE DELL'INDUZIONE $(n=1)$: $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{n(n+1)}{2} = 1$ vera

PASSO INDUTTIVO $\sum_{1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ verificata la tesi

$$\sum_{1}^{n+1} k = \sum_{1}^{n} k + \sum_{n+1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ipotesi base induzione

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\sum_{0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$ Se $q=2 \Rightarrow$ progressione geometrica

Base induzione $n=0$

$\sum_{0}^{0} q^k = \frac{1-q}{1-q} \Leftrightarrow q^0 = 1$ vera

Passo induttivo

$\sum_{0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \sum_{0}^{n} q^k + \sum_{n+1}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

Trovare Sup, inf, Max o min di $A = \{n + 2/n, n \in \mathbb{N}\} = \{3, 3+2/3, 4+1/2\}$

Maggiorante e Sup
$\forall M \in \mathbb{R}$, $n + 2/n \geq M$ se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{Sup} A = +\infty$
Minorante: $0 \leq n + 2/n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ è limitato inferiormente
Un altro minorante è $3 = \inf A = \min A$

Dimostrare che $n^2 + n$ è pari $\forall n \geq 1$ (pari $\Leftrightarrow m = 2 \cdot k$ $\forall k \in \mathbb{N}$)
Base induzione $n=1$: $1+1=2$ vera
Passo induttivo $(n+1)^2 + n+1$ deve essere pari:
$n^2 + 1 + 2n + n + 1 = n^2 + 2n + n + 2 = \underbrace{n^2+n}_{\text{pari per ipotesi}} + \underbrace{2(n+1)}_{\text{pari per def.}} \Rightarrow$ somma di due numeri pari è pari verificata

---

Sia $A \subseteq (1,4]$. allora
a) $\inf A = 1$ ✗
b) A non ha minimo ✗
c) $\exists$ un maggiorante di A ✓
d) A è costituito da un numero finito di elementi ✗

- c è vera poichè $\forall a \in A$ $a \leq 4$ quindi 4 può essere un maggiorante
- a è falsa poichè se $A = [2,4]$ allora $A \subseteq (1,4]$ ma $\inf A = 2$
- b è falsa poichè $A = [2,4]$ ha $\min = 2$
- d è falsa poichè un intervallo è composto da un numero infinito di elementi (es $A = [2,4]$)

Sup, inf, Max e min di $A = \left\{\frac{(-1)^n}{2+n^2}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$= \left\{\frac{1}{2+n^2} \text{ se } n \text{ pari}\right\} \cup \left\{-\frac{1}{2+n^2} \text{ se } n \text{ dispari}\right\}$

NB se $A = B \cup C \Rightarrow \operatorname{Sup} A = \max(\operatorname{Sup} B, \operatorname{Sup} C)$ (idem per inf)
Poichè tutti gli elementi sono positivi nel primo sottoinsieme allora lì sarà anche il $\operatorname{Sup} A$, viceversa per $\inf A$

1) $\left\{\frac{1}{2+n^2} \text{ con } n \text{ pari}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18} \dots\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} =$ maggiorante

$\frac{1}{2+n^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 2 + n^2 \Leftrightarrow 0 \leq n^2$ verificato $\frac{1}{2}$ maggiorante $\rightarrow \max A \rightarrow \operatorname{Sup} A$

2) $\left\{\frac{-1}{2+n^2}\right.$ con n dispari $\left.\right\} = \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{27} \dots\right\} \Rightarrow -\frac{1}{3}$ minorante

$\frac{-1}{2+n^2} \geq -\frac{1}{3} \iff \frac{1}{2+n^2} \leq \frac{1}{3} \iff 2+n^2 \geq 3 \iff n^2 \geq 1 \quad \forall n$ dispari verificata

$-\frac{1}{3}$ minorante $\rightarrow -\frac{1}{3}$ min $A \Rightarrow$ inf A

Trovare inf, Sup, Max e min di $A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| < x^2\} \cup \{-1, 1\}$

$= \underbrace{\{x \in [0, \infty) : x^2 < x^2\}}_{\text{vuoto}} \cup \underbrace{\{x \in (-\infty, 0) : -x^2 < x^2\}}_{(-\infty, 0)} \cup \{-1, 1\}$

$\inf A = -\infty$

$\text{Sup}A = 1 = \text{Max}A$

Estremo inferiore di $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-2, \pi, 5, 0\}$ vale

a) $-2 - \varepsilon$ con ε molto piccolo

b) 0 ✗

c) $\nexists$ ✗

d) -2 ✓ perché $\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(0, -2) = -2$

SUCCESSIONI

Def. Una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ cioè $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$$n \to f(n) = a_n$$

es 1
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\underbrace{n \to f(n) = 1/n}$$
$$\Longleftrightarrow \{1, 1/2, 1/3 \dots\} = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es 2
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\underbrace{n \to f(n) = n^2}$$
$$\{n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es 3
$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\underbrace{n \to f(n) = (-1)^n}$$
$$\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

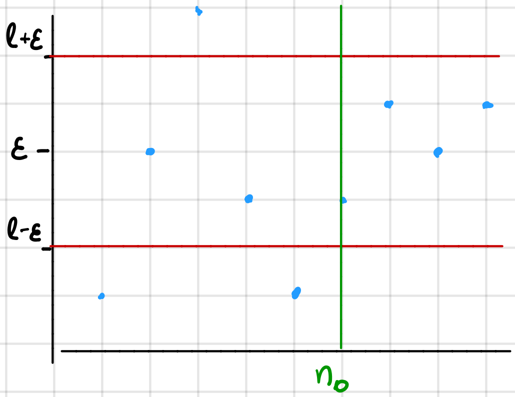
LIMITE

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che la successione converge a $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0\ |a_n - l| < \varepsilon$

In questo caso scriveremo che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ (l - limite della successione)

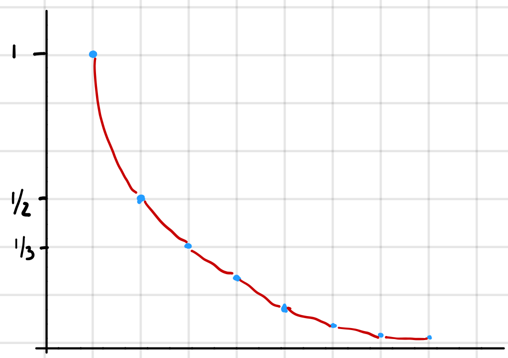
$|a_n - l| < \varepsilon$ è equivalente a dire che la distanza tra a_n e l è minore di ε

$\Longleftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$



Da n_0 tutti gli elementi della successione sono tra $l+\varepsilon$ e $l-\varepsilon$

es. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$



$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ t.c. $\forall n > n_0\ \ |1/n| < \varepsilon$

dim.

$|1/n| < \varepsilon \Longleftrightarrow 1/n < \varepsilon \Longleftrightarrow n > 1/\varepsilon$ quindi

$n_0(\varepsilon)$ è il primo numero naturale maggiore di $1/\varepsilon$ (cioè se $n > n_0(\varepsilon)$ allora $n > 1/\varepsilon$ e quindi $|1/n| < \varepsilon$)

$n > n_0 > 1/\varepsilon$

$[x]$ = parte intera di x $\qquad [x] = n$ se $n \leq x \leq n+1$

Il primo numero naturale maggiore di $1/\varepsilon$ è $[1/\varepsilon] + 1$

Si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 = n_0(M)$ t.c. $\forall n > n_0\ \ a_n > M$;
diverge a $-\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 = n_0(M)$ t.c. $\forall n > n_0\ \ a_n < M$

es. $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

dim.

$n^2 > M$

- $M \leq 0$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$
- $M > 0$ allora $n^2 > M \iff n > \sqrt{M}$

  $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$ quindi se $n > [\sqrt{M}] + 1 \Rightarrow n > \sqrt{M} \Rightarrow n^2 > M$

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge o diverge allora si dice REGOLARE altrimenti OSCILLANTE (IRREGOLARE)

Teorema unicità del limite

Se il limite di $\{a_n\}$ esiste allora è unico

dim (per assurdo): Supponiamo esistono $\ell_1 \neq \ell_2$ e la successione converga sia a ℓ_1 che $\ell_2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1 = \ell_2$

Posto $\eta = |\ell_1 - \ell_2| \neq 0$ allora consideriamo $\varepsilon = \eta/4$. Per definizione di limite:

1) $\exists\, n_0'$ t.c. $\forall n > n_0'\ \ |a_n - \ell_1| < \varepsilon$
2) $\exists\, n_0''$ t.c $\forall n > n_0''\ \ |a_n - \ell_2| < \varepsilon$

allora per $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ e per $n > n_0$ si ha:

$$\eta = |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| = |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \eta/2$$

$\Rightarrow \eta \leq \eta/2$ ↯

Successione geometrica

$\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \ q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Successione armonica

$\{n^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}\ \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\{a_n\}$ si dice **limitata** se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a \leq M\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Se $\{a_n\}$ è una successione convergente allora è anche limitata

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{CONV} \Rightarrow \text{LIMITATA} \\ \text{LIMITATA} \not\Rightarrow \text{CONV.} \end{array}}$$

dim: proviamo che $\exists M$ t.c. $a \leq M\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Prendiamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di convergenza, quindi $\exists\, n_0$ t.c. $\forall n > n_0\ \ |n_0 - \ell| < 1 \iff \ell - 1 < n_0 < \ell + 1$

Sia $M_0 = \max\{a_0, a_1 \dots a_n\}$ allora sia $M = \max\{M_0, \ell + 1\}$ si ha che $a_n \leq M\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Infatti:

1) se $n \leq n_0\ \ a_n \leq M_0 < M$
2) se $n > n_0\ \ a_n < \ell + 1 \leq M$

Si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa una proprietà definitivamente se $\exists\, n_0$ t.c. $\{a_n\}$ soddisfa la proprietà $\forall n > n_0$

es. $\{n-1000\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n > 1000\ (n_0)$, $n-1000>0$ e quindi la successione è definitivamente positiva.

Proprietà limiti

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\quad \lim_{n\to\infty} b_n = m$ $\quad \ell, m \in \mathbb{R}$

1) $\lim_{n\to\infty} a \pm b_n = \ell \pm m$ Il limite di una somma è la somma dei limiti

2) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \ell \cdot m$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = \ell / m \quad m \neq 0$

4) $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \ell^m \quad \ell > 0$

5) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$

Forme Determinate

1) $\ell \pm \infty = \pm\infty$

2) $\pm\infty \pm\infty = \pm\infty$

3) $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$

4) $\pm\infty \mp \infty = -\infty$

5) $\ell \cdot \pm\infty = \pm\infty$ se $\ell > 0$

6) $\ell \cdot \pm\infty = \mp\infty$ se $\ell < 0$

7) $\ell / \pm\infty = 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{R}$

8) $q^{+\infty} = \begin{cases} \infty & q>1 \\ 0 & 0<q<1 \end{cases}$

9) $q^{-\infty} = \begin{cases} 0 & q>1 \\ \infty & 0<q<1 \end{cases}$

Forme Indeterminate

Nel caso di forma indeterminata, non posso dedurre direttamente il risultato del limite delle successioni che lo compongono, ma devo trasformare il limite per portarlo a forma determinata

1) $+\infty - \infty$

2) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3) $0 \cdot \pm\infty$

4) $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$, 0^0

5) $\frac{0}{0}$, $\ell/0 \quad \forall \ell \in \mathbb{R}$

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e

1) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = 0$

Limiti Notevoli

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ 0 & |q|<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$ [n^α tende ad ∞ più velocemente]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$ //

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$ //

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$ //

ORDINE INFINITO

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(a_n)-1}{a_n^2} = -1/2$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+1/n\right)^n = e$$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$

Esercizio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+2}{n^2+n+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+3/n+2/n^3\right)}{n^2\left(1+1/n+1/n^2\right)} = \frac{n\left(1+3/n+2/n^3\right)}{1+1/n+1/n^2} = \frac{\infty}{1} = \boxed{\infty}$$

Esercizi

1) Dimostrare attraverso la definizione che $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = 1$

$\iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, n_0 = n(\varepsilon)$ t.c. $\forall n>n_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+4}-1\right|<\varepsilon$

Fisso $\varepsilon>0$

$\left|\frac{n}{n+4}-1\right|<\varepsilon \iff \left|\frac{n-n-4}{n+4}\right|<\varepsilon \iff \left|-\frac{4}{n+4}\right|<\varepsilon$

$\frac{4}{n+4}<\varepsilon \iff 4<\varepsilon(n+4)=\varepsilon n+4\varepsilon \iff \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}<n$ quindi $n_0=\left[\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right]+1$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{1-2n}$

$= -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \frac{n^3(1+1/n^3)}{n(1/n-2)} = -\infty$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2} = \sqrt{n(1+2/n)} = \overset{+\infty}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+2/n} = \infty$ (la seconda radice è analogo)

$=\infty-\infty$ razionalizzo

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\right) = \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\infty+\infty} = 0$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(1+n)^2 n^\alpha}$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$

$= \frac{\sqrt{n}(1+1/\sqrt{n})}{(n(1+1/n))^2 n^\alpha} - \frac{n^{1/2}(1+1/\sqrt{n})}{n^2 n^\alpha (1+1/n)^2} = n^{(1/2-2-\alpha)}\ \frac{(1+1/\sqrt{n})}{(1+1/n)^2} \Rightarrow n^{(-3/2-\alpha)} = \begin{cases}\infty & \text{se } -3/2>\alpha\\ 1 & \text{se } -3/2=\alpha\\ 0 & \text{se } -3/2<\alpha\end{cases}$

5) $\lim_{n\to\infty} 3^n+4^n-5^n$

$=(\infty+\infty)-\infty \to 5^n\left(\left(\tfrac{3}{5}\right)^n+\left(\tfrac{4}{5}\right)^n-1\right) = -\infty$ (0)

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-4^n}{3^n-n!}$

$\Rightarrow \frac{4^n((1/2)^n-1)}{n!\left(\frac{3^n}{n!}-1\right)} = \underset{0}{\frac{4^n}{n!}}\cdot\frac{\overset{0}{(1/2)^n}-1}{\underset{0}{\frac{3^n}{n!}}-1} = 0\cdot 1 = 0$

7) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n+2^n+n^2}{n!+\sqrt{n}+2n}$

$= \frac{n^n\left(1+\frac{2^n}{n^n}+n^2/n^n\right)}{n!\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n!}+2n/n!\right)} = \frac{n^n}{n!}\cdot 1 = \infty$ perché n^n cresce più velocemente di $n!$

8) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^n = e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ se $a_n\to\infty$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} = (1+1/n^n)^{n!\cdot n^n/n^n} = \left[\left(1+1/n^n\right)^{n^n}\right]^{n!/n^n} = [e]^0 = 1$

9) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$

$=1^\infty \Rightarrow (1+1/n)^{2n} = \left[(1+1/n)^n\right]^2 = e^2$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$

$=1^\infty \Rightarrow \left(1+\frac{n^2+n}{n^2-n+2}-1\right)^n = \left(1+\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}+n-2}{n^2-n+2}\right)^n = \left(1+\frac{2n-2}{n^2-n+2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^{n\cdot\frac{n^2-n+2}{2n-2}\cdot\frac{2n-2}{n^2-n+2}} =$

$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right)^{\frac{n^2-n+2}{2n-2}}\right]^{n\cdot\frac{2n-2}{n^2-n+2}} = e^x \ : \ x=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n}{n^2-n+2} = \frac{n^2(2-2/n)}{n^2(1-1/n+2/n^2)} = 2 \Rightarrow e^2$

11) $\lim_{n\to\infty} n\sin(1/n)$

$= n\underset{1}{\left[\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right]}\cdot 1/n = 1$

12) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(3/n)}{\sin(3/n^2)}$

$= \underset{1/2}{\frac{1-\cos(3/n)}{(3/n)^2}}\cdot(3/n)^2\cdot\underset{1}{\frac{3/n^2}{\sin(3/n^2)}}\cdot\frac{1}{3/n^2} = 1/2\cdot\frac{9/n^2}{3/n^2} = 3/2$

13) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}-1}{1/n}$

$\Rightarrow a^b = e^{b\ln(a)} = e^{\ln(a^b)} \to \underset{1}{\frac{e^{1/n\ln 2}-1}{1/n}}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 2} = \ln 2$

14) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{n}$

$=\frac{e^{n\ln 2}-1}{n}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 2} = \ln 2$ errore perché $a_n = n\ln(n)\to\infty$ e non a zero

$\Rightarrow \infty$

CRITERIO DI CESARO

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

es. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = (n)^{1/n} = \infty^0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1$

es. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}}$ $\quad a_n = \frac{n!}{2^n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)}+1} \Big/ \frac{n!}{2^n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)}+1} \cdot \frac{2^n+1}{n!} = \frac{n+1}{2^{(n+1)}+1} (2^n+1) = \frac{n+1}{2^{(n+1)}(1+1/2^{n+1})} 2^n(1+1/2^n) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}} = \infty$

TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = m$ allora $\ell \leq m$

TEOREMA DEI CARABINIERI

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ allora $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$

es. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5+\cos(n^3)}\right)^n$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \cos(n^3) \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 5+\cos(n^3) \leq 6$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\downarrow\, 0} \leq \left(\frac{1}{5+\cos(n^3)}\right)^n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^n}_{\downarrow\, 0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5+\cos(n^3)}\right)^n = 0$$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\ell \geq 0$

Più in generale: se lo $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e se $a_n \in [\alpha, \beta] \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $\ell \in [\alpha, \beta]$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ e $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ non vale lo stesso cosa (es. $a_n = 1/n$)

$\ell/0 \quad \ell \neq 0 \Rightarrow$ forma indeterminata

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora si dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ allora si dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0^-$

es $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0^+$

es $\lim_{n\to\infty} -1/2^n = 0^-$

es $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (ma non posso dire se 0^+ o 0^-)

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $(\ell \neq 0)$ e

1) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0^+$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \ell > 0 \\ -\infty & \ell < 0 \end{cases}$

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0^-$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -\infty & \ell > 0 \\ \infty & \ell < 0 \end{cases}$

es $\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^2}{1/2^n} = 1/0^+ = \infty$ (perché $b_n = 1/2^n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice monotona
1) crescente se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n\in\mathbb{N}$
2) decrescente se $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Una successione monotona è regolare (non oscillante). In particolare
1) se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$
2) se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n\in\mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$

CONFRONTO TRA SUCCESSIONI

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dicono ASINTOTICHE se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$: $a_n \sim b_n$, $n\to\infty$

$a_n \sim b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ (il contrario non è detto)

es.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 - 3n + 2 \\ b_n = n^2 + 1 \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+2}{n^2+1} = \frac{n^2(1-3/n+2/n^2)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1}{1} = 1$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è asintotica alla sua potenza più grande

es $a_n = n^{5/2} + n^2 + n^{1/2} + 2 \sim n^{5/2}$

Sia dato l'insieme di tutte le successioni di numeri reali, allora la relazione di asintoticità è una relazione di equivalenza cioè:
1) è riflessiva: $a_n \sim a_n$ $\left(\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n} = 1\right)$
2) è simmetrica: $a_n \sim b_n \Leftrightarrow b_n \sim a_n$
3) è transitiva: $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \rightarrow a_n \sim c_n$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Se $a_n \sim a_n'$, $b_n \sim b_n'$ e $c_n \sim c_n'$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n' \cdot b_n'}{c_n'}$

es. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+1}{n^4+4n+3}$

$$\left.\begin{array}{l} n^3+2n+1 \sim n^3 \\ n^4+4n+3 \sim n^4 \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} n^3/n^4 = 0$$

Il principio di sostituzione vale solo per i prodotti e i rapporti cioè:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim a_n' \\ b_n \sim b_n' \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n'}{b_n'} \\ \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n' \cdot b_n' \end{array}$$

mentre non vale in generale per somme, differenze e potenze cioè:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim a_n' \\ b_n \sim b_n' \end{array}\right. \not\Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to\infty} a_n' \pm b_n' \\ \lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n')^{b_n} \end{array}$$

es $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{e^{1/n}-1} \cdot 1/n = \frac{1/n^2}{1/n} \cdot 1/n = 1/n^2 = 0$

perché:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 \Leftrightarrow \sin(a_n) \sim a_n \\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \Leftrightarrow e^{a_n}-1 \sim a_n \end{array}\right\} \text{dai limiti notevoli}$$

Serie Numeriche

Paradosso di Achille e la tartaruga

velocità Achille = 2 · velocità tartaruga $\quad t=0$ A T, 1

	A	T
$t=1$	1	$1+\frac{1}{2}$
$t=1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$t=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

Problema: data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cosa vuol dire $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$?

es. $\{1/2^n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \sum_0^\infty 1/2^n = ?$

Somme Parziali / Ridotte n-esime

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si definisce la successione delle somme parziali $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo:

$S_n = \sum_0^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_n$

es. data $\{1/2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

	a_n	S_n
$n=0$	1	$S_0 = \sum_0^0 1/2^k = 1$
$n=1$	$1/2$	$S_1 = 1 + 1/2$
$n=2$	$1/4$	$S_2 = 1 + 1/2 + 1/4$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_0^n a_k}_{S_n}$$

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che $\sum_0^\infty a_n$:

1) converge se $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. In questo caso $\sum_0^\infty a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ (somma della serie)
2) diverge se $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$. In questo caso $\sum_0^\infty a_n = \pm\infty$
3) è irregolare se $\lim_{n\to\infty} S_n \nexists$

Serie Geometrica

$\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (successione geometrica) $\longrightarrow \sum_0^\infty q^n$ (serie geometrica)

$\sum_0^\infty q^n = \lim_{n\to\infty} S_n \quad , S_n = \sum_0^n q^k$

$q \neq 1 \quad S_n = \sum_0^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot q^n\right) = \begin{cases} \infty & q>1 \\ \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases}$

$q = 1 \quad S_n = \sum_0^n q^k = n+1 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$

$$\Rightarrow \sum_0^\infty q^n = \begin{cases} \infty & q\geq 1 \\ \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \nexists & q\leq -1 \end{cases}$$

Serie Armonica

$\sum_{1}^{\infty} 1/n^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ generalizzata

$\boxed{\sum_{1}^{\infty} 1/n \quad \alpha = 1} = \infty$ (diverge) $\quad S_n = \sum_{1}^{n} 1/k = 1 + 1/2 \dots + \frac{1}{n}$

Serie Telescopica / di Mengoli

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

dim.

$\frac{1}{k(k+1)} = 1/k - 1/k+1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \neq 0$

$S_n = \sum_{1}^{n} (1/k - 1/k+1) = 1 - \cancel{1/2} + \cancel{1/2} - \cancel{1/3} + \cancel{1/3} \dots \cancel{1/n} - 1/n+1 = 1 - 1/n+1$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 1 - 1/n+1 = 1$

Condizione necessaria per la convergenza

Se $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

dim.

$S_n = \sum_{0}^{n} a_k = \sum_{0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n \iff a_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ quindi $\lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Per ipotesi la serie converge, quindi $\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, inoltre $\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ da cui $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Se $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$, ma non il contrario ($\not\Leftarrow$)

Condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza di $\sum_{0}^{\infty} a_n$ è che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia infinitesima

Se $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ non posso concludere che $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge

Serie a termini positivi

$\sum_{0}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad$ es. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

Per una serie a termini positivi, S_n è crescente (quindi regolare)

dim.

$S_{n+1} = \sum_{0}^{n+1} a_k = \sum_{0}^{n} a_k + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ (perché $a_{n+1} \geq 0$) $\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Condizioni sufficienti per la convergenza:

1) Criterio del confronto
2) Criterio del confronto asintotico
3) Criterio della radice
4) Criterio del rapporto

1) CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ due serie a termini positivi t.c. $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora:

a) Se $\sum_0^\infty a_n = +\infty$ allora $\sum_0^\infty b_n = \infty$

b) Se $\sum_0^\infty b_n < \infty$ allora $\sum_0^\infty a_n < \infty$

$a_n \leq b_n \Rightarrow \infty = \sum_0^\infty a_n \leq \sum_0^\infty b_n$

$a_n \leq b_n \Rightarrow \sum_0^\infty a_n \leq \sum_0^\infty b_n < \infty$

es.

$\sum_0^\infty 1/n!$ C.N. $\lim_{n\to\infty} 1/n! = 0$

$n! = 1 \cdot \overbrace{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}^{n-1} \geq 2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \Rightarrow 1/n! \leq 2/2^n$ inoltre $2\sum_0^\infty 1/2^n < \infty$ (converge, serie geo. $q = 1/2$)

$\Rightarrow$ C. confronto (b) $\Rightarrow \sum_0^\infty 1/n! < \infty$

2) CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ due serie a termini positivi allora:

a) se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \ell \neq 0$ allora $\sum_0^\infty a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_0^\infty b_n < \infty$ (anche verso la divergenza) $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \text{ se } a_n \sim b_n\right)$

b) se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ e $\sum_0^\infty b_n < \infty \Rightarrow \sum_0^\infty a_n < \infty$ (e $\sum_0^\infty a_n = \infty \rightarrow \sum_0^\infty b_n = \infty$)

es. $\sum_1^\infty 1/n^2 < \infty$

$a_n = 1/n^2 \quad b_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \left(\sum_1^\infty b_n = 1\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = 1 \Rightarrow$ C.C. asintotico $\Rightarrow \sum_1^\infty 1/n^2 < \infty$

$\sum_1^\infty 1/n = \infty$, $\sum_1^\infty 1/n^2 < \infty \rightarrow \sum_1^\infty 1/n^\alpha = ?$

se $\alpha < 1$ $\quad n^\alpha < n \Rightarrow 1/n < 1/n^\alpha$, poiché $\sum_1^\infty 1/n^\alpha = \infty \rightarrow$ c. confronto $\Rightarrow \sum_1^\infty 1/n^\alpha = \infty$

se $\alpha \geq 2$ $\quad n^\alpha > n^2 \Rightarrow 1/n^\alpha < 1/n^2$, poiché $\sum_1^\infty 1/n^2 < \infty \Rightarrow$ c. confronto $\Rightarrow \sum_1^\infty 1/n^\alpha < \infty$

$$\sum_1^\infty 1/n^\alpha \begin{cases} < \infty & \alpha > 1 \\ = \infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

es. $\sum_1^\infty 1/n \cdot \sin(1/n)$ (serie a termini positivi)

$1/n \cdot \sin(1/n) \sim 1/n \cdot 1/n = 1/n^2$ per definizione $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1/n \cdot \sin(1/n)}{1/n^2} = 1$

Poiché $\sum_1^\infty 1/n^2$ $(\alpha = 2) < \infty$ per il confronto asintotico $\Rightarrow \sum_1^\infty 1/n \sin(1/n) < \infty$

3) CRITERIO DELLA RADICE

Data $\sum_0^\infty a_n$ a termini positivi t.c. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ allora:

a) se $\ell > 1$ la serie diverge

b) se $\ell < 1$ la serie converge

c) se $\ell = 1$ non posso dire nulla

4) CRITERIO DEL RAPPORTO

Data $\sum_0^\infty a_n$ a termini positivi t.c. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ allora:

a) se $\ell > 1$ la serie diverge

b) se $\ell < 1$ la serie converge

c) se $\ell = 1$ non posso dire nulla

es $\sum_{0}^{\infty} \frac{q^n}{n^n}$ $\quad q>0$

$q^n/n^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^n} = 0$ (c. necessaria)
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q^n/n^n} = q/n = 0 < 1 \rightarrow$ la serie converge (c. radice)

es. $\sum_{0}^{\infty} q^n/n!$ $\quad q>0$

$q^n/n! > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} q^n/n! = 0$ (c. necessaria)
$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} = 0 < 1 \rightarrow$ la serie converge (c. rapporto)

Serie a segni alterni (di tipo Leibniz)

$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$, $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ es $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Criterio di Leibniz

Sia $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n a_n$ t.c.
1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2) $a_n > a_{n+1}$ definitivamente
allora la serie converge

es. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$a_n = 1/n^\alpha$: $\lim_{n\to\infty} 1/n^\alpha = 0 \ \forall \alpha > 0$
$a_n > a_{n+1} \rightarrow 1/n^\alpha > 1/(n+1)^\alpha \rightarrow (n+1)^\alpha > n^\alpha \ \forall n$ se $\alpha > 0$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 0$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} 1/n^\alpha$ converge per $\alpha > 1$

Serie di tipo generale

Si dice che la $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge Assolutamente se converge la serie $\sum_{0}^{\infty} |a_n|$
Se $\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge
Convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza
$\not\Leftarrow$

$\sum_{0}^{\infty} |a_n|$ è una serie a termini positivi e quindi posso applicare i relativi criteri

Per le serie a termini positivi, convergenza e convergenza assoluta coincidono

Esercizi

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+n^2+2}$

conf. asintotico $\frac{n^2}{n^4+n^2+2} \sim \frac{n^2}{n^4} = 1/n^2$

$\sum_1^{\infty} 1/n^2$ converge $\Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{n^2}{n^4+n^2+2}$ converge

2) $\sum_1^{\infty} \frac{n+\ln(n)}{n^3+2n^2+\sin(n)}$

$\frac{n+\ln(n)}{n^3+2n^2+\sin(n)} \sim \frac{n}{n^3} = 1/n^2 \longrightarrow \sum_1^{\infty} \frac{n+\ln(n)}{n^3+2n^2+\sin(n)}$ converge

3) $\sum_1^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

$a_n = \ln(n)/n^3$ trovo una $\sum b_n$ che converge t.c. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ per applicare il punto 2 del confronto asintotico

$\Rightarrow b_n = 1/n^2 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(n)/n = 0 \longrightarrow \sum_1^{\infty} a_n$ converge

4) $\sum_1^{\infty} \ln(n)/n^2$

$b_n = 1/n^{3/2} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \frac{\ln(n)}{n^{1/2}} = 0 \longrightarrow \sum_1^{\infty} a_n$ converge

5) $\sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

serie a termini positivi, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (CN)

c. Rapporto: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} = 1/e < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

6) $\sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$ $[\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}] \longrightarrow \sum a_n$ converge

7) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{e^n - n^e}$

$\frac{1}{e^n-n^e} \sim 1/e^n$ ($1/e^n$ "geometrica" vince su $1/n^e$ "armonica")

$\sum_1^{\infty} 1/e^n$ = serie geometrica $= (1/e)^n$ con $q = 1/e \longrightarrow$ converge $\longrightarrow \sum a_n$ converge

8) $\sum_1^{\infty} \frac{n!+2}{(n+2)!}$

$\frac{n!+2}{(n+2)!} \sim \frac{n!}{n!(n+1)(n+2)} \sim 1/n^2$ $\quad \sum 1/n^2$ converge $\longrightarrow \sum a_n$ converge

9) $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

Serie di Leibniz: conv. assoluta e non

a) $\sum_1^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right| = \sum_1^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

Poiché $\sum \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum 1/n = \infty \Rightarrow \sum \frac{\ln(n)}{n} = \infty$ (c. confronto) $\Rightarrow \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ non converge assolutamente

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ verificata

$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)\ln(n) > \ln(n+1)\, n \Longleftrightarrow \ln(n^{n+1}) > \ln((n+1)^n) \Longleftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \Longleftrightarrow n^n \cdot n > (n+1)^n$

$\Longleftrightarrow n > \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (1+1/n)^n$ verificata per $n \geq 3$ (definitivamente)

$\Rightarrow$ la serie converge

10) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot 1/n! = \infty \cdot 0$

Per risolvere considero la serie associata $\sum_1^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$: se converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (c. rapporto) $= \frac{(n+1)^{(n+1)}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n+1} = (1+1/n)^n \cdot \frac{1}{n+1} = e \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

NUMERI COMPLESSI

$x^2+1=0$ impossibile in $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}=\{(a,b),\ a,b\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$

Somma: $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$
Prodotto: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$

Proprietà:
1) $\exists$ elemento neutro per la somma $(0,0)$
2) $\exists$ elemento neutro per il prodotto $(1,0)$
3) $\exists$ opposto per ogni coppia: $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$
4) $\exists$ inverso per ogni coppia $\neq(0,0)$: $(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ è il campo dei numeri complessi

Identificando $(a,0)$ con il reale "a" e osservando che le operazioni di somma e prodotto si riducono a quelle sui numeri reali posso identificare $\mathbb{C}_0=\{(a,0)\ a\in\mathbb{R}\}$ con $\mathbb{R}$ e scrivere (impropriamente) $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ (perché $\mathbb{C}_0\subseteq\mathbb{C}$)

Osserviamo che $(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)$ e denoto $(0,1)$ con il simbolo "i" e identifico $(a,0)$ e $(b,0)$ con i numeri reali a e b $\Rightarrow$ $\boxed{a+ib}$ con $a,b\in\mathbb{R}$

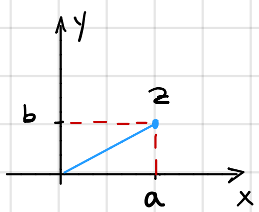
$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$ cioè $\boxed{i^2=-1}$

Dati $z,w\in\mathbb{C}$, $z=a+ib$ e $w=c+id$
$z+w=(a+c)+i(b+d)$
$z\cdot w=(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+cbi+adi=ac-bd+i(ad+cb)$

a è detta parte reale $(Re(z))$
b è detta parte immaginaria $(Im(z))$
i è detta unità immaginaria

es. $z=1-3i$ $\quad Re(z)=1\quad Im(z)=-3$
$z=5$ $\quad Re(z)=5\quad Im(z)=0$
$z=2i$ $\quad Re(z)=0\quad Im(z)=2$ immaginario puro

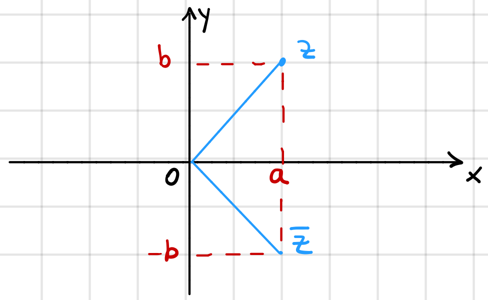
Nel piano di Gauss $a=x$ e $b=y$



COMPLESSO CONIUGATO

Dato $z = a + ib$ si definisce coniugato di z il numero complesso $\bar{z} = a - ib$
cioè $Re(z) = Re(\bar{z})$ mentre $Im(\bar{z}) = -Im(z)$

Proprietà:



1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
2) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$
4) $\bar{\bar{z}} = z$ (coniugato due volte)
5) Se $z = a + ib$ allora $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

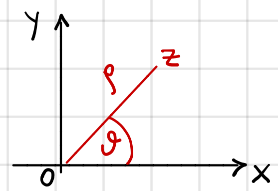
MODULO (complesso)

Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il modulo di z è il numero reale $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
Sul piano di gauss rappresenta la lunghezza del segmento "$\overline{0z}$"

Proprietà:

1) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2) $|z| = |-z|$
3) $|z+w| \leq |z| + |w|$ disuguaglianza triangolare
4) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Rappresentazione Trigonometrica (coordinate polari)



$\rho \in [0, +\infty)$ $\quad \vartheta \in [0, 2\pi] \rightarrow$ qualsiasi intervallo 2π

ρ (rho) = lunghezza segmento che unisce il punto all'origine
ϑ (theta) = angolo tra ρ e l'asse delle x (in radianti)
All'origine corrispondono le coppie $(0, \vartheta)$ $\forall \vartheta \in [0, 2\pi]$

Cartesiane → Polari
$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$
$\tan\vartheta = b/a$

Polari → Cartesiane
$a = \rho\cos\vartheta$
$b = \rho\sin\vartheta$

$z = a + ib = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta = \boxed{\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$ rappresentazione trigonometrica

N.B. $\rho = |z|$, $\vartheta = arg(z)$ (argomento)

Formule di De Moivre

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$
$z_1/z_2 = \rho_1/\rho_2(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

In particolare se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Formule di Eulero

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}, \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}}$

$\boxed{e^{i\pi} = -1 \rightarrow e^{i\pi}+1=0}$

RADICI IN $\mathbb{C}$

Dato $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N} \neq 0$ allora $z \in \mathbb{C}$ si dice radice n-esima di w se $z^n = w$

Dato $w \in \mathbb{C}$ $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e dato $m \in \mathbb{N} \neq 0$ allora esistono n radici complesse distinte z_k.
In particolare $z_k = r(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ con $r = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ $(k=0,\dots n-1)$

$\sqrt{-1}$

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi \quad (\rho = 1, \theta = \pi)$

$z_k = \rho^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\right) \quad k=0,1$

$z_0 = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i1 = i$

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{2}\right) = -i$

Le radici complesse di grado 2 di -1 sono $\pm i \Rightarrow i^2 = (-i)^2 = -1$

Le radici n-esime di un numero complesso sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\rho^{1/n}$ dove ρ è il modulo di z

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Data l'equazione algebrica $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots + a_1 z + a_0 = 0$ dove $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$ allora essa ammette n soluzioni nel campo complesso $\mathbb{C}$ (contate con la propria molteplicità)

es $z^2(z+1) = 0$

0 è una radice di molteplicità 2

Esercizi

1) Scrivere in forma algebrica e trigonometrica z^6 e z^{22} dove $z=\frac{1+i}{2-2i}$

$\frac{1+i}{2-2i} = \frac{1}{2}\,\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{2}\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1}{4}(1+2i-1) = \frac{i}{2}$

$|i/2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0+(1/2)^2} = 1/2 \rightarrow \cos\theta = a/\rho = 0 \quad \sin\theta = b/\rho = \frac{1/2}{1/2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$i/2 = \frac{1}{2}(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)$

$z^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{64}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = \frac{1}{64}(\cos(\pi+2\pi) + i\sin(\pi+2\pi)) = \frac{1}{64}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{1}{64}$

$z^{22} = \left(\frac{1}{2}\right)^{22}(\cos(11\pi) + i\sin(11\pi)) = \frac{1}{2^{22}}(\cos(\pi+5\cdot 2\pi) + i\sin(\pi+5\cdot 2\pi)) = -\frac{1}{2^{22}}$

2) Calcolare le radici quadrate di $z = 1-\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\theta = a/2 = 1/2 \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = -\pi/3 \vee \frac{5\pi}{3}$

$z = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}/2\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}/2\right)\right) \quad (k=0) \quad = \sqrt{2}(\cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,1/2\right) = -\sqrt{3}/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)/2\right) + i\sin\left(\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)/2\right)\right) \quad (k=1) \quad = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i/2\right) = \sqrt{3}/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$

$z_1 = -z_0$ sempre vero per radici quadrate

3) Trovare le radici quarte di $z=-4$

$|z| = \rho = 4 \qquad \theta = \pi$

$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_0 = \sqrt[4]{4}\,(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2\right) = 1+i$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}\right) = -1+i$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+4\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\right) = -1-i$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+6\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}\right) = 1-i$

4) $i\,Re(z) + z^2 = |z|^2 - 1$

$z = x+iy \Rightarrow ix + (x+iy)^2 = x^2+y^2-1 \rightarrow ix + x^2 + 2ixy - y^2 = x^2+y^2-1 \Rightarrow ix + 2ixy - 2y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \overbrace{-2y^2+1}^{Re} + i\,\overbrace{(x+2xy)}^{Im} = 0$

$\begin{cases} -2y^2+1=0 \Leftrightarrow y^2 = 1/2 \Leftrightarrow y = \pm 1/\sqrt{2} \\ x+2xy=0 \Leftrightarrow x(1+2y)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad y=-1/2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \pm 1/\sqrt{2} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\pm 1/\sqrt{2} \\ y = -1/2 \end{cases}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\boxed{z = \pm i/\sqrt{2}}$ incompatibili

5) $(\bar{z})^4 = |z|$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \quad [\cos\theta = \cos(-\theta),\ \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$(\bar{z})^4 = \rho^4[\cos(-4\theta) + i\sin(-4\theta))$

$|z| = \rho = \rho(\cos(0) + i\sin(0))$

$\rho^4(\cos(-4\theta) + i\sin(-4\theta)) = \rho(\cos(0) + i\sin(0))$ Due numeri complessi sono uguali se hanno stesso modulo e stesso argomento:

$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ -4\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z} \qquad \begin{cases} \rho(\rho^3-1) = 0 \\ \theta = \frac{-2k\pi}{4} = -\frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad \rho = 0 \vee \rho = 1 \quad k\in\mathbb{Z}$

k	ϑ
0	0
1	$-\pi/3$
2	$-\pi$
3	$-3\pi/2$
4	-2π

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\rho = 0 \rightarrow z = 0$

$\rho = 1 \rightarrow z_0 = (\cos(0) + i\sin(0)) = 1$

$z_1 = (\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = -i$

$z_2 = (\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -1$

$z_3 = (\cos(-3\pi/2) + i\sin(-3\pi/2)) = i$

6) $z|z| - 2z + i = 0$

$z = x + iy$

$(x+iy)\cdot\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2yi + i = 0$

$x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2yi + i = 0 \Rightarrow x(\sqrt{x^2+y^2} - 2) + i(y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1) = 0$

$\begin{cases} x(\sqrt{x^2+y^2}) = 0 \\ y\sqrt{x^2+y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad x = 0 \lor \sqrt{x^2+y^2} = 2$

① $\begin{cases} x = 0 \\ y\sqrt{y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y|y| - 2y + 1 = 0$

(1A) $\begin{cases} x = 0 \quad y \geq 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \quad y \geq 0 \\ (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}$

(1B) $\begin{cases} x = 0 \quad y < 0 \\ -y^2 - 2y + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \quad y < 0 \\ y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} z = i \\ z = (-1-\sqrt{2})i \end{array}}$

② $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ 2y - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ impossibile

FUNZIONI REALI

$f \quad X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

X dominio

$f(x) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ t.c. } f(x) = y\}$

$G(f)$ = grafico di $f = \{(x,y) \; x \in X \; y = f(x)\} = \mathbb{R}^2$

Date $f \; X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g \; Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora si definiscono per $Z = X \cap Y$:

1) $f \pm g \quad Z \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2) $f \cdot g$ t.c. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
3) Posto $Z_0 = \{x \in Z \;\; g(x) \neq 0\}$ f/g t.c. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

es $h(x) = x + \sin(x) \Rightarrow f(x) = x$, $g(x) = \sin(x) \Rightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

es. $h(x) = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} \; \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow Z = \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0, \infty)$

Date $f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$ e $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiamo la funzione composta $h = g \circ f : X \to \mathbb{R}$ t.c. $h(x) = g(f(x))$

NB. devo avere che $f(x) \in Y$ affinché possa calcolare $g(f(x))$

es. $f(x) = \sin x \qquad x \in \mathbb{R}$
$g(y) = \sqrt{y} \qquad y \in [0, \infty)$

$h = g \circ f = g(f(x))$ devo avere che $f(x) \subseteq [0, \infty)$ ma $\sin x$ assume anche valori negativi

$\to$ quindi devo considerare come dominio di f il sottinsieme $X = \{x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \geq 0\}$

In generale $g \circ f \neq f \circ g$ (non commutativo)

es. $f(x) = |x| \quad g(x) = \sin x$

$g \circ f = \sin|x| \Rightarrow (g \circ f)(\frac{3\pi}{2}) = \sin|\frac{3}{2}\pi| = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$f \circ g = |\sin x| \qquad (f \circ g)(\frac{3\pi}{2}) = |\sin \frac{3\pi}{2}| = |-1| = 1$

Funzione inversa

$f: X \to Y$ si dice:

1) INIETTIVA se $x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
2) SURIETTIVA se $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$
3) BIETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva, ovvero $\forall y \in Y \; \exists! \; x \in X$ t.c. $f(x) = y$

Graficamente:

1) f è iniettiva se una retta orizzontale incontra il grafico in al più un punto
2) f è suriettiva se una retta orizzontale (che interseca il codominio) incontra il grafico in almeno un punto
3) f è biettiva se una retta orizzontale (che interseca il codominio) incontra il grafico in esattamente un punto

$f: X \to Y$ è biettiva $\Leftrightarrow$ esiste $g: Y \to X$ t.c. verifichi
1) $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
2) $f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y$

$g = f^{-1}$ si dice funzione inversa di f

$$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

NB. $(x,y) \in G(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y,x) \in G(f^{-1})$ (x e y sono invertite)
(x,y) e (y,x) sono simmetriche rispetto la bisettrice $y = x$

Il grafico di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$

es. $f: [0, \infty) \to [0, \infty]$
$x \to f(x) = x^2$

$f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$
$y \to f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = x$
$f(f^{-1}(y)) = (f^{-1}(y))^2 = y$
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Proprietà:
una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice
1) LIMITATA superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in X$
2) limitata inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \quad \forall x \in X$
3) limitata se $\exists m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in X$

In ① è equivalente dire che M è un maggiorante di $f(x) = \{y \in \mathbb{R} \ \ y = f(x)\}$
In ② m è un minorante

es. $f(x) = x^2$ limitata inferiormente, ma non superiormente (0 e ∞)
$f(x) = x^3$ non è limitata né superiormente né inferiormente (∞ e $-\infty$)
$f(x) = \sin x$ è limitata (± 1)

una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice:
1) PARI se $\forall x \in X$ t.c. $-x \in X$ si ha $f(x) = f(-x)$
2) DISPARI se $\forall x \in X$ t.c. $-x \in X$ si ha $f(x) = -f(x)$

es. $f(x) = x^n \quad x \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$
Se n pari x^n pari $\to x^2 = (-x^2)$ pari
Se n dispari x^n dispari $\to (-x)^3 = -x^3$ dispari

NB.

$f \cdot g$	P	D
P	P	D
D	D	P

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto l'asse y
Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto l'origine

una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice
1) MONOTONA crescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 \neq x_2$, $x_1 \leq x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$
2) monotona decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 \neq x_2$, $x_1 \leq x_2$ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$
3) strettamente crescente (decrescente) se $\forall x_1, x_2 \in X$ t.c $x_1 \neq x_2$ $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_1))$

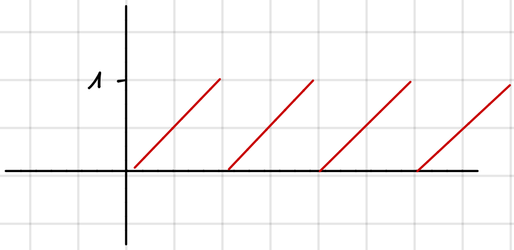
Se f è crescente e decrescente allora necessariamente $f(x) = c$ (costante) $\forall x \in X$ $c \in \mathbb{R}$

una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice PERIODICA se $\exists T > 0$ t.c. $\forall x \in X$ per cui $x + T \in X$ si ha $f(x+T) = f(x)$;
si definisce periodo di f il più piccolo $T > 0$ per cui vale tale proprietà.
In generale $f(x) = f(x + kT)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Sia f periodica di periodo T, allora il grafico di f in un intervallo del tipo $[kT, (k+1)T]$ è identico al grafico nell'intervallo di riferimento $[0, T$

Parte intera di x

es. $f = x - [x]$ Mantissa $\to$ $T = 1$



Funzioni Elementari

1) Polinomi

$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 = \sum_0^n a_k x^k$ ove $a \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$, n è il grado del polinomio

2) Funzioni Razionali

$f(x) = P(x)/q(x)$ ove p e q sono due polinomi
$X \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$
il grado di f = grado (p) − grado(q)

3) Radici

$x^n = \begin{cases} n \text{ pari: biettiva da } [0,\infty] \text{ in } [0,\infty] \\ n \text{ dispari: biettiva da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R} \end{cases}$

$f^{-1}(x)$ = funzione inversa di $f(x) = x^n = \sqrt[n]{x}$ $\begin{cases} n \text{ pari: è definita da } [0,\infty] \text{ in } [0,\infty] \\ n \text{ dispari: è definita da } \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{R} \end{cases}$

4) Potenze reali ed esponenziali

$x^n = x \cdot x \cdot \ldots x$ (n volte), $2^\pi = ?$
Problema: Definire a^r per $a, r \in \mathbb{R}$
a) $r \in \mathbb{N} \to a^r = a \cdot \ldots \cdot a$ (r volte) $\forall a \in \mathbb{R}$
b) $r = p/q \in \mathbb{Q}$ $q \neq 0 \to a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ ben definita $\forall r \in \mathbb{Q}$ se $a > 0$
c) $r = p,\alpha_1\alpha_2 \ldots \in \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{Z}$ $\alpha_i \in \{0 \ldots 9\}$ NB. $a > 1, r > 0$ (analogo per $r < 0$ e $a \in (0,1)$)
Costruisco una successione di numeri naturali che approssima r: $r_n = p,\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n$
es. $\pi = 3.1418$
$r_0 = 3.1$
$r_1 = 3.14$
$r_2 = 3.141$

- $r_n \in \mathbb{Q}\ \forall n$
- $\{r_n\}$ è crescente
- $\{r_n\}$ è limitata $\quad p \le r_n \le p+1$
- $\lim_{n\to\infty} r_n = r$

$\Big\}$ converge

pos n

$$0 \le r - r_n = 0,000\ldots 0 d_{n+1} d_{n+2} \le 0,00\ldots 1 000\ldots = 1/10^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r - r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = r$$

Definisco la successione $\{a^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$:

- la successione è ben definita poiché $r_n \in \mathbb{Q}$ (NB. $a>0$) (vedi punto 2)
- $\{a^{r_n}\}$ è crescente poiché $\{r_n\}$ è crescente e $a>1$ (se $0<a<1$ sarebbe decrescente)
- $a^p \le a^{r_n} \le a^{p+1}$ poiché $p \le r_n \le p$ (e $a>1$)

Dalla regolarità delle successioni monotone $\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Per definizione si pone che $a^r := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$

Si può dimostrare che se $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = r$ con $\{r_n\}_n, \{s_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$ allora $a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$

Poiché le proprietà

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$

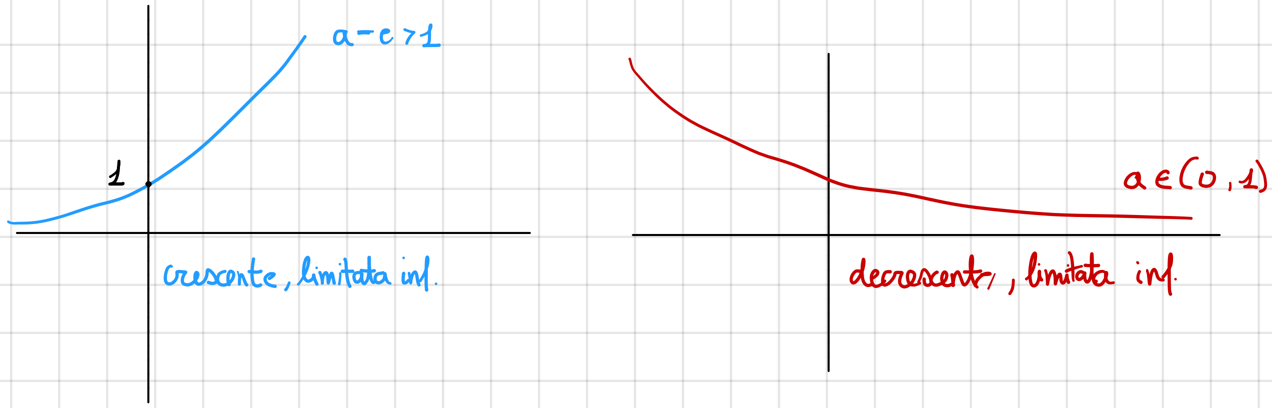
valgono per $r,s \in \mathbb{Q}$, si portano per passaggio anche al caso $r,s \in \mathbb{R}$

Potenze Reali: $f(x) = x^r\ \forall x \in (0,\infty)\quad r \in \mathbb{R}$

Se $r>0$, $f(x)=x^r$ si può definire anche per $x=0$ con $f(0)=0$

Se $r\in\mathbb{N}$ $f(x)=x^r$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

Esponenziale: $f(x) = a^x \quad a>0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \qquad$ (esponenziale $f(x)=e^x$)



Funzioni iperboliche

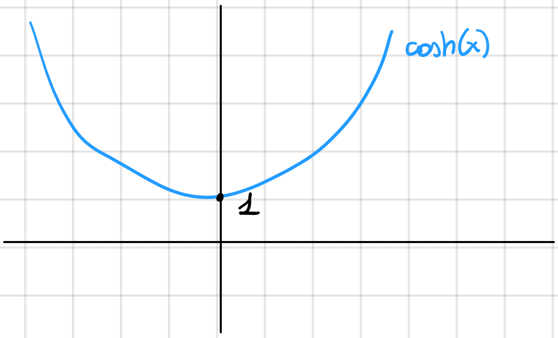
$\cosh(x)$ = coseno iperbolico $= \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\sinh(x)$ = seno iperbolico $= \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

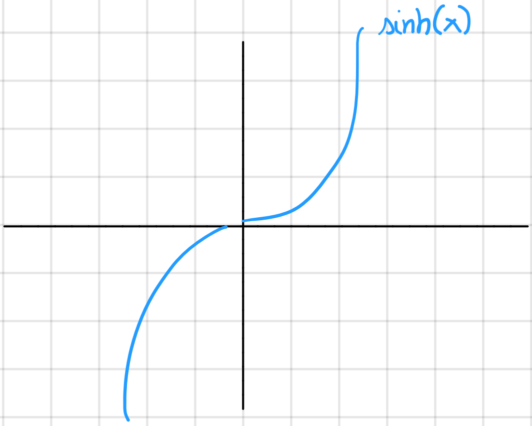
$\tanh(x)$ = tangente iperbolico $= \sinh/\cosh = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\Big\}\ \forall x \in \mathbb{R}$

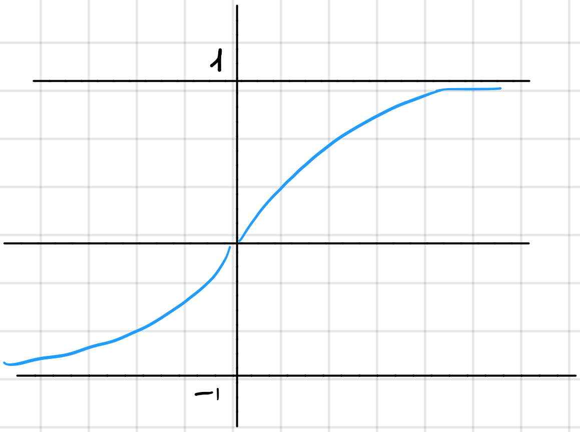
$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ (Formule Eulero)



- Pari
- Limitata inf. da 1



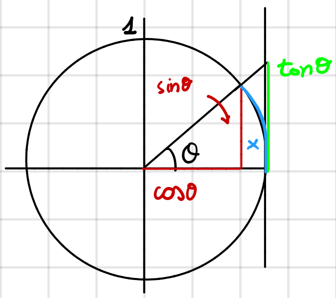
- Dispari
- NON limitata



- Dispari
- Limitata (Sup = 1, inf = -1)

Identità fondamentale: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Funzioni Trigonometriche

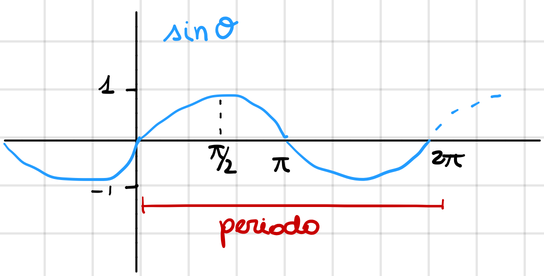


$\theta = x$ [angoli in radianti]

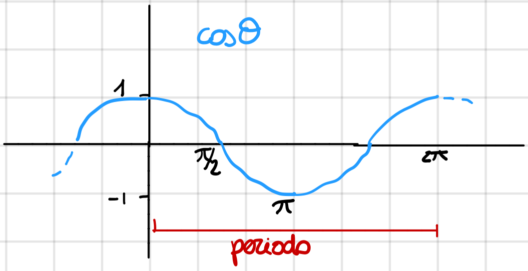
$360° \to 2\pi$

$180° \to \pi$

...



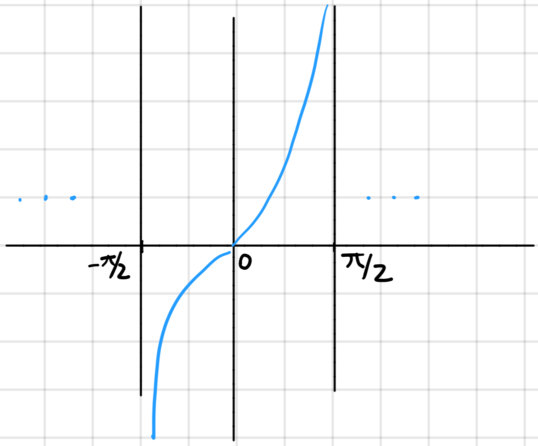
- Periodica con periodo 2π
- Dispari
- Limitata



- Periodico di periodo 2π
- Pari
- Limitata

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}\ \cos(x) = 0\} \longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(x) = 0$ $x = \pi/2 + k\pi\ \forall k \in \mathbb{R}$

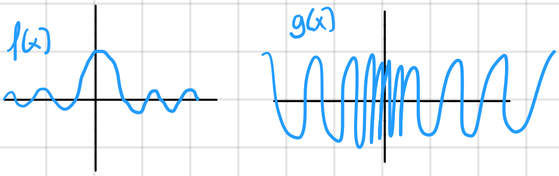


- Periodica di periodo π
- Dispari
- NON limitata, ne sup. ne inf.

Identità fondamentale: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Limite Funzione Reale

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $g(x) = \sin(1/x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Funzioni simili ma con comportamenti molto diversi!

PUNTO DI ACCUMULAZIONE: Dato $c \in \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ allora c si dice punto di accumulazione per X se $\exists \{x_n\}$ t.c.

1) $x_n \in X\ \ \forall n \in \mathbb{N}$
2) $x_n \neq c\ \ \forall n \in \mathbb{N}$
3) $\lim_{n \to \infty} x_n = c$

$c \in \mathbb{R}$, che in generale potrebbe non appartenere ad X, può essere approssimato (nel senso del limite) da punti contenuti in X

es $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $c = 0$ è acc. per X con $x_n = 1/n$

Se X = intervallo $a,b \Rightarrow$ l'insieme dei punti di accumulazione di X $(\overline{X})$ è $[a,b]$

es. $X = \mathbb{N}$, $\overline{X} = \infty$

es. $X = \{-1\} \cup \{1\} \cup [3, \infty) \Rightarrow \overline{X} = [3, \infty] \cup \{\infty\}$

-1 e 1 non sono punti di accumulazione poiché ogni successione contenuta in X sta in $[3, \infty]$, essi sono detti punti isolati di X

es. $X = \{1/n\ \ n \in \mathbb{N}\}$ $\overline{X} = 0$

LIMITI DI FUNZIONI REALI

Data $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c punto di accumulazione per X, allora si dice che f tende ℓ per x che tende a c ($\lim_{x\to c} f(x) = \ell$) dove $\ell, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq c\ \forall n\in\mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Poiché c è "pda" per X allora esiste almeno una successione $\{x_n\}_n \subseteq X$ e t.c. $x_n \to c$ per $n \to \infty$
NB. ℓ non deve dipendere dalla successione x_n che converge al pda c.

es.
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad g(x) = \sin(1/x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

limite notevole

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n$ t.c. $x_n \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\nexists \lim_{n\to 0} \sin(1/x)$:

$x_n = 1/2\pi n \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ①
$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(1/x_n) = \lim_{x\to\infty} \sin(2\pi n) = 0$
$y_n = 1/\frac{\pi}{2}+2\pi n \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ②
$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$

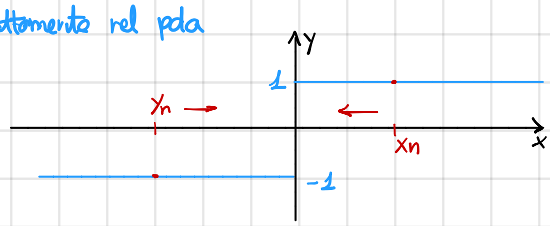
Ho trovato due successioni convergenti al pda che però hanno limiti diversi $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \sin(1/x)$

La definizione di limite data è ben definita sia per $c \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ sia per $\ell \in \mathbb{R}\{\pm\infty\}$
Definizione equivalente con ε-δ (più complessa!)
$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ $\quad \ell \in \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. se $x \in X$ e $0 < |x - c| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
NB. Tale definizione, al contrario della precedente, non vale per $c, \ell \in \{\pm\infty\}$

es. $f(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ $\quad$ pda $\in \mathbb{R} \to$ es. $c = 0 \to \lim_{x\to 0} f(x) = 0$
Il limite "guarda" cosa succede nell'intorno e non esattamente nel pda

es.
$f(x) = x/|x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad c = 0 \to \lim_{x\to 0} f(x)\ \nexists$
- $x_n = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$
- $y_n = -1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$



Limite da destra e da sinistra

Data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$ si dice che:

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = c^+$ se
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$
- $x_n \geq c\ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = c^-$ se
- $\lim_{n\to\infty} x_n = c$
- $x_n \leq c\ \forall n \in \mathbb{N}$

Pda

$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$ $\quad c \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X, x_n \neq c$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c^+$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$
$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ $\quad c \in \mathbb{R}$ $\quad \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ se $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X, x_n \neq c$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = c^-$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Prendendo l'esempio precedente:
- $\lim_{x\to 0^+} x/|x| = 1$
- $\lim_{x\to 0^-} x/|x| = -1$

Condizione necessaria e sufficiente per $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ è $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$

es $\lim_{x\to 0} 1/x \nexists$

$x_n = 1/n \to 0, \lim_{n\to\infty} 1/x_n = \infty$
$y_n = -1/n \to 0, \lim_{n\to\infty} 1/x_n = -\infty$ } limiti diversi!

ma...

$\lim_{x\to 0^+} 1/x$: prendo $\{x_n\}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 1/x_n = \left[1/0^+\right] = \infty$

$\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora diremo che la retta $y = l$ è asintoto orizzontale in $\pm\infty$

Se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ $c\in\mathbb{R}$ allora diremo che la retta $y = c$ è asintoto verticale in c

Operazioni sui limiti

Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $\lim_{x\to c} g(x) = m$ $m, l \in \mathbb{R}$ allora

1) $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
2) $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = l\cdot m$
3) $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = l/m$ se $m \neq 0$
4) $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $l > 0$
5) $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$

Si possono estendere anche al caso $l, m \in \overline{\mathbb{R}}$ purché ottengo una forma determinata!

Limite funzioni composte

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$ $g: Y \to \mathbb{R}$ e c pda in X. Se

1) $\lim_{x\to c} f(x) = y_0$
2) $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$
3) $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x-c| < \delta$, $x \in X \to f(x) \neq y_0$

allora $\lim_{x\to c} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to c} g(f(x)) = l = \lim_{y\to y_0} g(y)$

es. $\lim_{x\to\infty} \sin(1/x^2)$

$h(x) = \sin(1/x^2) = g(f(x))$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sin(1/x^2) = \lim_{y\to 0} \sin(y) = 0$

pda di $f(x) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 0$

es. $f(x) = 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $g(y) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

- $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(0) = 0$ (perché $f(x) = 0$ sempre e $g(0) = 0$)
- $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$ per la definizione di limite di funzione composta

} sono diversi perché la terza condizione non è rispettata ($f(x) = y_0\ \forall x\in\mathbb{R}$)

Teorema del confronto

Date $f, g: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c pda per X, supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x\in X$ e $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $\lim_{x\to c} g(x) = m$ allora $l \leq m$

Teorema dei carabinieri

$f, g, h: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supponiamo $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x\in X$ e $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to c} h(x) = l$

Teorema permanenza del segno

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ $\forall x\in X$ e $\lim_{x\to c} f(x) = l$ allora $l \geq 0$

Se $f(x) \in [a,b]$ allora $l \in [a,b]$

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente allora $\lim_{x\to c^+} f(x)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x)$ esistono sempre. Inoltre:

1) se $f(x)$ è crescente $\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x\in X \text{ t.c. } x < c\}$ e $\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in X \text{ t.c. } x > c\}$
2) se $f(x)$ è decrescente le disuguaglianze si invertono

Formula di Prostoferesi

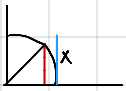
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ \infty & 0<a<1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} x^r = \begin{cases} \infty & r>0 \\ 1 & r=0 \\ 0 & r<0 \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$
- $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{a^x} = 0 \quad r>0 \quad a>1$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0 \quad r>0$
- $\lim_{x\to0^+} x^r \ln(x) = 0$
- $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$
- $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\pm\infty} (1+r/x)^x = e^r \quad r\in\mathbb{R}$

Esercizi

1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



$0 \le \sin(x) \le x \le tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow 0 \le 1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$

Per $x\to0^+$ $\cos(x)\to1 \Rightarrow 1 \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

In maniera analoga si trova per $x\to0^- \Rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

$\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{(1+\cos x)} \xrightarrow[x\to0]{} \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x\to\infty} (x^3-3x^2+2)$

$= \infty - \infty \Rightarrow x^3\left(1 - 3/x + 2/x^3\right) \to \lim_{x\to\infty} x^3\left(1 - 3/x^2 + 2/x^3\right) = \infty$

4) $\lim_{x\to-\infty} (x^3-3x^2+2)$

$-\infty - \infty = -\infty$

5) $\lim_{x\to\infty} (x^\pi + 2\sqrt{x} - x + 1/x^2)$

$= \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^\pi\left(1 - \frac{2}{x^{\pi-1/2}} - \frac{1}{x^{\pi-1}} + \frac{1}{x^{\pi+2}}\right) = \infty$

6) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2\sqrt{x}+1}{x^2+1/x}$

$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1+2/x^{5/2}+1/x^3)}{x^2(1+1/x^3)} = \infty$

7) $\lim_{x\to0} \frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x}$

$= \frac{0}{0} \Rightarrow$ Raccolgo i termini di grado minore $\Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{2x(x^2/2+x+1)}{x(x+1)} = 2$

8) $\lim_{x\to0} \frac{x^3+x}{x^4+2x^2}$

$= \lim_{x\to0} \frac{x(x^2+1)}{2x^2(x^2/2+1)} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2x}\cdot\frac{(x^2+1)}{(x^2/2+1)} = ?$
$\left.\begin{cases} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2x}\frac{(x^2+1)}{(x^2/2+1)} = 1/0^+ = \infty \\ \lim_{x\to0^-} \frac{1}{2x}\cdot\frac{(x^2+1)}{(x^2/2+1)} = 1/0^- = -\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to0} \frac{x^3+x}{x^4+2x^2}$

9) $\lim_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{tg x}$

$= \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\cancel{\cos x}^{1} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ $\quad f(x) = \sin(x),\ g(y) = \frac{e^y-1}{y} \Rightarrow \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y} = 1$ perché $\sin x\to0$ per $x\to0$

$\to \lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{tg x} = 1$

10) $\lim_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} =$

$\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot\frac{x}{1-\cos x} = 2$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\sqrt{1-\cos x}}$

$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x\ln(2)}-1}{x\ln(2)}}_{1} \cdot \frac{x\ln 2}{\underbrace{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{1/\sqrt{2}}\, x^2} = \frac{x\ln 2}{|x|\cdot 1/\sqrt{2}}$ $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} \cdot \frac{x\ln 2}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} \cdot 1/x = \ln 2 \cdot \sqrt{2} \\ \lim_{x\to 0^-} \quad // \cdot (-1/x) = -\ln 2\sqrt{2} \end{cases}$

12) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^{x^2}-1}{x^2}$

$=\infty$ poiché 3^{x^2} (esponenziale) cresce piú velocemente di x^2 (potenza)

13) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2-1)-1}{(x-1)^2}$

$= 0/0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2-1)-1}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow y = x^2-1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2-1)-1}{(x^2-1)^2} \overset{y=x^2-1\to 0}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\cos(y)-1}{y^2} = -1/2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\cos(x^2-1)-1}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2} = 4\cdot(-1/2) = -2$

14) $\lim_{x\to 0^+} (1+|\sin(x)|)^{1/x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{|\sin x|}}\right)^{1/|\sin x|}\right]^{\frac{|\sin x|}{x}}$ $y = 1/|\sin x| \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{|\sin x|}}\right)^{1/|\sin x|} = \lim_{y\to\infty} \left(1+1/y\right)^y = e$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\frac{1}{1/|\sin x|}\right)^{1/|\sin x|}\right]^{\frac{|\sin x|}{x}} = e^1 = e$

15) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x(1+x))}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 0/\infty = 0$

16) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})x$

$= \infty - \infty = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})x \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{(x+1-x)x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x}+1)} = \sqrt{x}/2 = \infty$

17) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-2^x}$

$\underbrace{\frac{\sin(\ln(1-x))}{\ln(1-x)}}_{\to 1} \cdot \frac{\ln(1-x)}{1-e^{x\ln 2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{1-e^{x\ln 2}} = \underbrace{\frac{\ln(1-x)}{-x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{-x\ln 2}{1-e^{x\ln 2}}}_{1} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

18) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}$

$= 0^0 \Rightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{1/\ln x \cdot \ln(\sin x)} \overset{e^{\lim_{x\to 0^+} \text{espon.}}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x}\cdot x)}{\ln x} = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x}) + \ln x}{\ln x} = \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{\ln x} + 1 = \frac{0}{\infty} + 1 = 0+1 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x} = e^1 = e$

19) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$

$= 1^\infty \Rightarrow \left[\underbrace{\left(1+\frac{3/2}{x}\right)^x}_{e^{3/2}}\right]^{1/x\,(1-x)} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x} = -1 \Rightarrow e^{3/2\cdot -1} \Rightarrow e^{-3/2}$

20) $\lim_{x\to\infty} x^r \ln(\cos(1/x))$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} x^r = \begin{cases} \infty & r>0 \\ 1 & r=0 \\ 0 & r<0 \end{cases} \\ \lim_{x\to\infty} \ln(\cos 1/x) = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{ll} r>0 & \infty\cdot 0 \\ r=0 & 0 \\ r<0 & 0 \end{array}$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^r \ln(\cos 1/x)$ lo trasformo nella forma $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

$\Rightarrow y = 1/x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} 1/y^r \underbrace{\frac{\ln(1+[\cos y-1])}{\cos y - 1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos y - 1}{y^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot y^2 = -1/2 \cdot y^{2-r} = \begin{cases} 2-r>0 & 0 & \Leftrightarrow 0<r<2 \\ 2-r=0 & -1/2 & \Leftrightarrow r=2 \\ 2-r<0 & -\infty & \Leftrightarrow r>2 \end{cases}$

Funzioni Composte

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

1) x_0 è polo per il dominio di f, ma non necessariamente x_0 appartiene ad esso
2) Anche se appartenesse, il valore $f(x_0)$ non ha nessun ruolo nel calcolo del limite

Data $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ allora f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
2) $\ell = f(x_0)$

Nella definizione di continuità $x_0 \in X$ e deve essere polo per X! Se $x_0 \in X$ è un punto isolato di X allora f si assume continua su x_0

es. $D(f) = \{0\} \cup [1, \infty)$ f è continua in 0

Data $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in X se f è continua in x_0 $\forall x_0 \in X$. In questo caso si dice che $f \in C^0(X)$ = insieme di funzioni $f: X \to \mathbb{R}$ t.c. f continue su X

es $f(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ dimostriamo f continua

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$. Tesi: $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} e^x - e^{x_0} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} e^x - e^{x_0} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} (e^{x - x_0} - 1) \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = 0$

Se f, g sono continue in x_0 allora:
1) $f \pm g$
2) $f \cdot g$
3) f/g se $g(x_0) \neq 0$
4) $|f| \wedge |g|$

sono continue in x_0

$f, g \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow f + g \in C^0(\mathbb{R}) \wedge \alpha f \in C^0(\mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$, $g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.
1) f è continua in $x_0 \in X$
2) g è continua in $y_0 = f(x_0)$

allora $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è continua in x_0

Le funzioni elementari sono continue nel loro dominio di definizione
1) $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ è continua su tutto $\mathbb{R}$
2) $r(x) = p(x)/q(x)$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{x \text{ t.c. } q(x) = 0\}$
3) e^x è continua in $\mathbb{R}$
4) $\cosh(x), \sinh(x), \tanh(x)$ sono continue su $\mathbb{R}$
5) funzioni trigonometriche sono continue su $\mathbb{R}$ ($\tan(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$)

es $f(x) = e^{\sin x} + \cos(x^2 + 1) \in C^0(\mathbb{R})$

Se f non è continua si dice discontinua

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$ limite esiste ma $\neq f(x_0)$

$f(x) = \begin{cases} x/|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} x/|x| \nexists$

Funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ f è discontinua $\forall x \in \mathbb{R}$

NB $f(x) = 1/x$ è definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\rightarrow$ è continua sul suo dominio. Per $x=0$ non ho senso parlare di continuità.

Nel caso $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ posso ridefinire la funzione come $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ quindi la funzione così ridefinita risulta in $x_0 = 0$. In questi casi x_0 è detta discontinuità eliminabile

TEOREMA DEGLI ZERI

Dato $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trovare $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$ (zeri o radici della funzione).

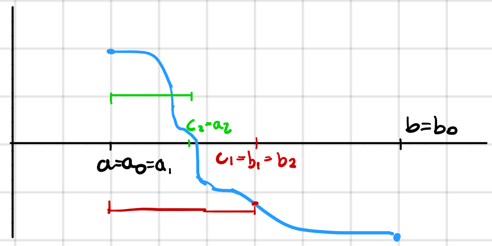
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in tale intervallo e t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$

La terza condizione esprime il fatto che a e b devono avere segno opposto.

NB. i punti c sono ALMENO uno, ma non sappiamo esattamente quanti.

Se f non è continua anche in un solo punto allora non è garantita l'esistenza della radice (zero)

dim. con metodo di bisezione



Passo 1: $a_0 = a$ $b_0 = b$ $c_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ = punto medio $\overline{ab}$

1) Se $f(c_1) = 0 \Rightarrow c = c_1$

2) Se $f(c_1) = 0$ $\begin{cases} \text{se } f(a_0) \cdot f(c_1) < 0 \rightarrow a_1 = a_0 \text{ e } b_1 = c_1 \\ \text{se } f(b_0) \cdot f(c_1) < 0 \rightarrow a_1 = c_1 \text{ e } b_1 = b_0 \end{cases}$

quindi $[a_1, b_1]$ verifico ancora il teorema

Passo 2: ripeto in $[a_1, b_1]$ ...

In questo modo ho definito una successione di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ t.c. $I_{n+1} \subseteq I$.

Inoltre:

1) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ $\forall n$

2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Osservo che $a_0 = a \leq a_1 \leq a_2 \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0 = b \Rightarrow \{a_n\}$ è crescente e limitata mentre $\{b_n\}$ è decrescente e limitata

quindi esistono:

1) $\lim_{n \to \infty} a_n = c_1$

2) $\lim_{n \to \infty} b_n = c_2$

D'altra parte $0 \leq c_2 - c_1 = \lim_{n \to \infty} a_n - b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow c_2 = c_1 = c$

Poiché f è continua in $[a,b]$ allora $f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) \Rightarrow 0 \leq f(c)^2 = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$ per la permanenza del segno $\Rightarrow 0 \leq f(c)^2 \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0$

es. Calcolare uno zero di $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ con un errore di $1/8$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = 5 > 0 \end{array}\right\}$ $[0,1]$ soddisfa le proprietà del teorema

- $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ $c_1 = 1/2 \rightarrow f(1/2) > 0 \rightarrow a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = c_1 = 1/2$ $|c - a_1| \leq 1/2$ (anche $|c - b_1| \leq 1/2$) cioè a_1 approssima quel valore con un errore minore di $1/2$
- $c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 1/4 \rightarrow f(1/4) > 0 \rightarrow a_2 = a_1$, $b_2 = c_2 = 1/4$ $|c - a_2| \leq 1/4 \rightarrow$ errore minore di $1/4$
- $c_3 = 1/8 \rightarrow f(1/8) < 0 \rightarrow a_3 = 1/8$ $b_3 = b_2 = 1/4$ $|c - a_3| \leq 1/8 \rightarrow$ errore minore di $1/8$

Teorema dei valori intermedi

$f: I \to \mathbb{R}$ ove I è un intervallo generico e f è continua in I. Allora posto $m = \inf\{f(x)\ x \in I\}$ e $M = \sup\{f(x)\ x \in I\}$
$\forall y \in (m, M)\ \exists x$ t.c. $f(x) = y$

Funzioni inverse delle funzioni elementari

$f(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad m = 0 \quad M = \infty \quad f$ continua in $\mathbb{R}$

- Il teorema dei valori intermedi implica che $\forall y \in (0, \infty)\ \exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $e^x = y$ cioè $f(x)$ è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $(0, \infty)$
- Inoltre f è strettamente crescente che implica iniettività in $\mathbb{R}$

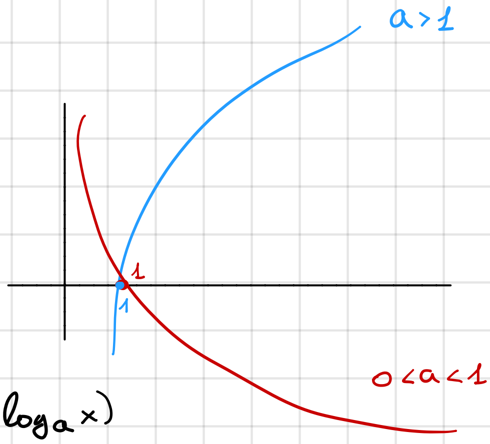
Queste due proprietà implicano che f è biettiva → sempre possibile definire l'inversa $f^{-1}\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$
$y \to f^{-1}(y) = \ln(y)$ con le seguenti proprietà:

- $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- (equivalentemente) $\ln(e^x) = x \quad [f^{-1}(f(x)) = x]$
  $e^{\ln(y)} = y \quad [f(f^{-1}(x)) = y]$

Lo stessa costruzione si può fare nel caso $f(x) = a^x \to f^{-1}(y) = \log_a y$

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$
$y = a^x \Leftrightarrow e^{\ln y} = (e^{\ln a})^x \Leftrightarrow e^{\ln y} = e^{x \ln a} \overset{\text{iniettività}}{\Leftrightarrow} \ln y = x \ln a \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$
Ne segue che $\log_a y = \ln y / \ln a$

Proprietà logaritmo
1) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall x, y \in (0, \infty)$
2) $\ln(x/y) = \ln x - \ln y \quad \forall x, y \in (0, \infty)$
3) $r \ln x = \ln x^r \quad \forall x \in (0, \infty)\ \forall r \in \mathbb{R}$
4) $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$

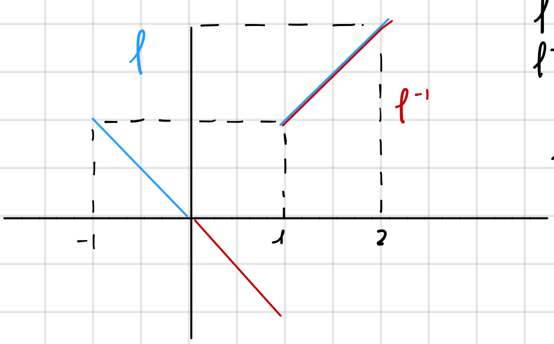


Tali proprietà valgono per qualsiasi altra base a $(\log_a x)$

Teorema continuità funzione inversa

$f: I \to J$ ove I è intervallo ed f continua in esso
1) f è iniettiva in $I \Leftrightarrow f$ è strettamente monotona in I
2) Se f è biettiva da I in J allora $f^{-1}\ J \to I$ è continua in J

$\Rightarrow$ l'inversa di una funzione continua è continua
Il teorema vale se I è un intervallo, altrimenti potrebbe essere falso
es.
$f(x) = |x| \quad x \in (-1, 0) \cup [1, 2] = X$



f è biettiva da X in $(0, 2]$ → posso fare l'inversa
$f^{-1}: (0,2] \to X$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -y & \text{se } y \in (0,1) \\ y & \text{se } y \in [1,2] \end{cases} \text{ discontinua in } (0,2]$$

Dal teorema $\Rightarrow f(x)=\ln(x)$ è continua in $(0,\infty)$ perché inversa di una funzione continua (anche $f(x)=\log_a x$)

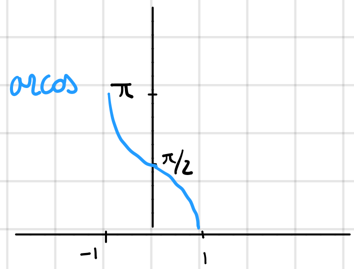
FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Una funzione periodica non può essere biettiva quindi trovo un intervallo massimale in cui la funzione lo è
es. $f(x)=\sin x$ è biettiva in $[-\pi/2,\pi/2]$

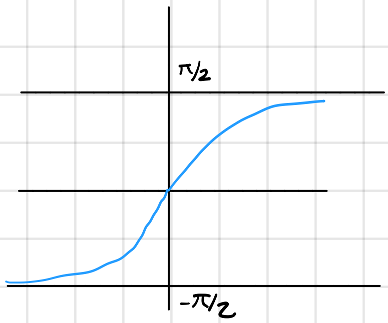
$f:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ è biettiva e posso quindi fare l'inversa $f^{-1}:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]=\arcsin(x)$
$x\to f(x)=\sin x$

$y=\sin x \Leftrightarrow x=\arcsin(y)$

Procedimento analogo per $f(x)=\cos x$.
$f(x)=\cos x$ è biettiva in $[0,\pi] \to f:[0,\pi]\to[-1,1] \Rightarrow f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]=\arccos(x)$
$y=\cos x \Leftrightarrow x=\arccos y$



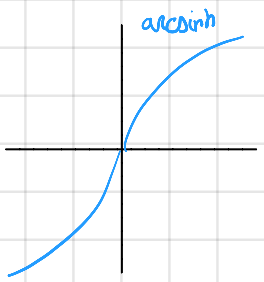
$f(x)=tg(x)$ è biettiva in $[-\pi/2,\pi/2] \to f:[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}:\mathbb{R}\to[-\pi/2,\pi/2]=\operatorname{arctg}(x)$
$y=tg\,x \Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} y$

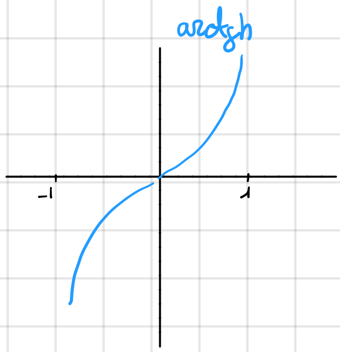


$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\pi/2 \Rightarrow$ asintoti orizzontali

FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

- $f(x)=\sinh(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}\mathbb{R}\to\mathbb{R}=\operatorname{arcsinh}(x)=\ln(y+\sqrt{x^2+1})$
- $f(x)=\cosh(x):[0,\infty]\to[1,\infty]\Rightarrow f^{-1}[1,\infty]\to[0,\infty]=\operatorname{arccosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
- $f(x)=tgh(x):\mathbb{R}\to(-1,1)\Rightarrow f^{-1}(-1,1)\to\mathbb{R}=\operatorname{arctgh}(x)=$





Teorema di Weierstrass

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ allora f ammette massimo e minimo in $[a,b]$, cioè $\exists\, x_m, x_M$ t.c.
$f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)\quad \forall x\in[a,b]$

Esercizi

1) Studiare l'insieme di continuità di limiti in $\pm\infty$ di $f(x)=xe^{-1/|x|}$

$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad f$ è continua nel suo dominio

$\lim\limits_{x\to0} xe^{-1/|x|}=0 \Rightarrow x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile perché il limite esiste

$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (nuova funzione)

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-1/|x|}=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-1/|x|}=-\infty$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}$

$D(f)=(0,\infty)\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow$ cambio variabile $y=x-1$ $\Rightarrow \lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{\sqrt[3]{y}}=\underbrace{\cancel{\frac{\ln(1+y)}{y}}}_{1}\cdot\frac{y}{y^{1/3}}=y^{2/3}=0$

$x=1$ è un punto di discontinuità eliminabile perché esiste il limite in quel punto

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{-\infty}{-1}=\infty$

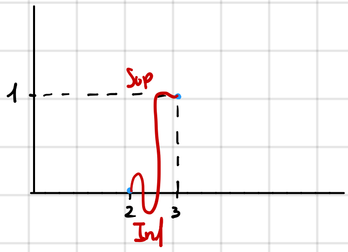
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x(1-1/x)}}=\frac{\ln x}{x^{1/3}\cdot\underbrace{\cancel{\sqrt[3]{1-1/x}}}_{1}}=0$ (perché $\ln x$ perde su $x^{1/3}$)

3) $f:[2,3]\to\mathbb{R}$ continua t.c. $f(2)=0$ $f(3)=1$. Posto $J=\{f(x)\ x\in[2,3]\}$ allora:

a) $J=[0,1]$ b) $J\supseteq[0,1]$ c) $J\subseteq[0,1]$ d) $J=[2,3]$

La risposta è la b perché per il teorema dei valori intermedi assume tutti i valori tra inf e sup

Essi possono essere minori di 0 e maggiori di 1 $\Rightarrow J\supseteq[0,1]$



4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c. $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, continua allora

a) f è decrescente b) $\forall y>0\ \exists x<0$ t.c. $f(x)=y$ c) $\forall y<0$ t.c. $f(x)=y$ d) nessuno

Come sopra per il teorema dei valori intermedi la risposta è b.

5) Calcolare uno zero di $f(x)=x^3+2x+1$ con errore minore di $10^{-1}=1/10$

- $f: C^0(\mathbb{R})$ perché polinomio
- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ } zero esiste per il teorema degli zeri
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$f(0)=-4$

$f(1)=-1$ } Considero l'intervallo $a=1$ e $b=2$

$f(2)=8$

- $a_0=1$ $\quad b_0=2$ $\quad c_1=3/2 \to f(3/2)=27/8+3-4>0$ $\quad a_1=1$ $\quad b_1=3/2$ $\quad |c-a_1|=|c-1|<b_1-a_1=1/2$

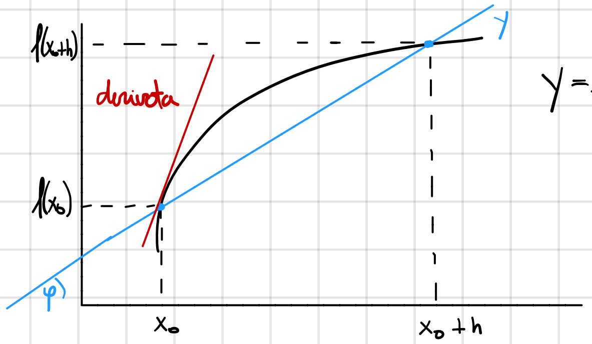
$c_2=5/4 \to f(5/4)=\frac{125}{64}+\frac{10}{4}-4>0$ $\quad a_2=1$ $\quad b_2=5/4$ $\quad |c-a_2|=|c-1|<1/4$

$c_3=9/8 \to f(9/8)<0$ $\quad a_3=9/8$ $\quad b_3=5/4$ $\quad |c-a_3|=|c-9/8|<1/8$

$c_4=19/16 \Rightarrow |c-19/16|<1/2\cdot1/8=1/16<1/10 \Rightarrow 19/16=1{,}1875$

CALCOLO DIFFERENZIALE

- costruzione della retta tangente al grafico di una funzione
- approssimazione: $f(x) \approx \alpha + \beta x$ stimando l'errore commesso



$$y = f(x_0) + \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right](x - x_0)$$

coefficiente angolare = inclinazione

$$\tan\varphi = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Faccio tendere $x_0 + h$ a x_0 $(h \to 0)$

Nell'eq. della retta secante la dipendenza da h è solo nel coefficiente angolare.

Data $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in X$ allora f si dice derivabile in x_0 se esiste $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$\frac{df}{dx}(x_0)$ = derivata di f in x_0 = rapporto incrementale

In particolare risulta definita l'eq. della retta tangente in x_0

$y = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$

$\Rightarrow$ derivabile $\Longleftrightarrow \exists$ la tangente

NB. $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = Df(x_0)$

Nella definizione di derivata $x_0 \in X$ e deve essere un punto interno ad X cioè $\exists\, \delta > 0$ t.c. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq X$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{x = x_0+h}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il rapporto incrementale rappresenta la variazione di f rispetto ad un incremento della variabile indipendente di $h > 0$

Se la derivata è positiva f è crescente, decrescente altrimenti

es. $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \Rightarrow f(x)$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ La derivata di una costante è zero

es. $f(x) = x^n$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{x_0} = \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \Rightarrow$ binomio Newton $(a+b)^n = \sum\limits_{0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \Rightarrow \frac{\binom{n}{0}h^n + \binom{n}{1}x_0 h^{n-1} + \ldots \binom{n}{n-1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{n}x_0^n - x_0^n}{h}$

$= \frac{\binom{n}{0}\cancel{h^n}^{h^{n-1}} + \ldots^{h^{n-2}\ldots} + n x_0^{n-1}\cancel{h} + \cancel{x_0^n} - \cancel{x_0^n}}{\cancel{h}} \Rightarrow n x_0^{n-1} + \lim\limits_{h\to 0} \binom{n}{0} h^{n-1} + \ldots = n x_0^{n-1}$ Derivata di potenze x_0^n

es $f(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^{x_0}\left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^x$ Derivata di e^x

es. $f(x) = |x|$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f'(x) = x/|x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

es $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ Derivata seno

es. $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$ Derivata coseno

Se f derivabile allora:

1) f pari $\rightarrow f'$ dispari

2) f dispari $\rightarrow f'$ pari

dim.

Ipotesi $f(x)=f(-x)$ Tesi: $f'(x)=-f'(x)=$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \cdot (-1) \Rightarrow t=-h \rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \cdot (-1) = f'(x)$

1) Se $\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ allora f si dice derivabile da destra in x_0 e $f'(x_0)=$ derivata destra $f'_+(x_0)$

2) Se $\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$ allora f si dice derivabile da sinistra in x_0 e $f'(x_0)=$ derivata sinistra $f'_-(x_0)$

es $f(x)=|x|$

Per $x\neq 0$ $f'(x)=x/|x|$ mentre per $x=0$ $\begin{cases} f'_+(x)=1 & dx \\ f'_-(x)=-1 & sx \end{cases}$

es. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ non derivabile in $x=0$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = 1/h^{2/3} = \lim_{h\to 0} 1/(h^2)^{1/3} = 1/0^+ = \infty$ limite esiste ma non finito!

Proprietà Derivate

Se f e g sono derivabili in x allora:

1) $f\pm g$ è derivabile in x e $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$

2) $f\cdot g$ è derivabile in x e $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

3) se $g(x)\neq 0$ allora f/g è derivabile in x e $(f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$

In particolare: $(1/g(x))' = -g'(x)/(g(x))^2$

Lemma: Se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0 (derivabilità $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ continuità)

Ipotesi: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ Tesi: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} \cdot (x-x_0) = 0$

es. $f(x)=3x^3+2x+5 \rightarrow f'(x)=9x^2+2$

es. $f(x)=\sin x\cdot e^x+3x^2\cos x \longrightarrow f'(x)=\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x+6x\cos x-3x^2\sin x$

es. $f(x)=tg\,x=\sin x/\cos x$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \; k\in\mathbb{Z}\} \longrightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1+tg^2 x \end{cases}$

es $f(x)=x^{-n} \rightarrow 1/x^n \rightarrow f'(x)=\frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$ $\rightarrow$ Derivata di x^{-n}

Teorema della Catena: se f è derivabile in x_0, g è derivabile in $y_0=f(x_0)$ allora $g\circ f$ è derivabile e $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

$(g\circ f)(x)=g'(y)\big|_{y=f(x)}\cdot f'(x)$

$(h\circ g\circ f)'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$

es. $h(x)=e^{\sin x} \longrightarrow g(y)=e^y$ e $f(x)=\sin x \longrightarrow h'(x)=e^y\big|_{y=\sin x}\cdot\cos x = e^{\sin x}\cdot\cos x$

es. $h(x)=e^{-x} \rightarrow f(x)=-x$ e $g(y)=e^y \rightarrow h'(x)=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$

es $f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \longrightarrow f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$ $\rightarrow$ Derivata $\sinh x$

es $f(x)=\cosh x \longrightarrow f'(x)=\sinh x$ $\rightarrow$ Derivata $\cosh x$

es. $h(x)=\cos(e^{x^2}+2\sin^2 x) \longrightarrow h'(x)=-\sin(e^{x^2}+2\sin^2 x)\cdot(e^{x^2}\cdot 2x+4\sin x\cos x)$

es. $h(x)=e^{tg x}\cdot 6x^3$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi\} \longrightarrow h'(x)=e^{tg x}\cdot 1/\cos^2 x\cdot 6x^3+18x^2\cdot e^{tg x}$

es. $f(x)=e^{|x|^3}$ Per $x\neq 0$ f è derivabile e $f'(x)=e^{|x|^3}\cdot 3|x|^2\cdot x/|x|$ Per $x=0$ $|x|$ non è derivabile e devo verificare $\rightarrow$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{e^{|h|^3}-1}{h} = \left.\begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^3}-1}{h} \cdot \frac{h^3}{h} = 0 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h^3}-1}{h} \frac{(-h^3)}{h} = 0 \end{cases}\right\}$$ f ē derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$

Derivata funzione inversa: sia $f: X \to Y$ una funzione biettiva e $f^{-1}: Y \to X$ la sua inversa. Se f ē derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} ē derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$

La derivata dell'inversa ē il reciproco della derivata

$f'(x_0)=0 \iff$ retta tangente al grafico in x_0 ē orizzontale quindi la retta tangente al grafico di f^{-1} in y_0 ē una retta verticale

es. $f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R} \to f'(x) = e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ quindi $f^{-1}(y) = \ln y$ ē derivabile in $y = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ cioē in $(0, \infty)$

$(\ln y)' = 1/e^x$ con $x = \ln y = 1/e^{\ln y} = 1/y \longrightarrow$ Derivata $\ln y$

es $f(x) = \sin x \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow f^{-1}(x) = \arcsin y \quad y \in [-1, 1]$

$f'(x) = \cos x = 0$ per $x = \pm\pi/2 \Rightarrow f^{-1}(y)$ ē derivabile in $(-1,1)$ poichē i punti ± 1 corrispondono ai punti $\pm\pi/2$ dove $f'(x)=0$

$(\arcsin y)' = 1/\cos x$ con $x = \arcsin y \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \Rightarrow 1/\sqrt{1-\sin^2 x}$ con $x = \arcsin y = 1/\sqrt{1-y^2} \longrightarrow$ Derivata $\arcsin y$

Derivate Elementari

$f(x)$	$f'(x)$	
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	
x^r	$r x^{r-1}$	$r \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$1/x$	
$\log_a x$	$1/x \ln a$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$tg\, x$	$1 + tg^2 x = 1/\cos^2 x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$tgh\, x$	$1 - tgh^2 x = 1/\cosh^2 x$	
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	
$arctg\, x$	$1/(1+x^2)$	

Esercizi

1) Studiare la derivabilità di

$f(x) = \ln(\ln x)$

$D(f) = x>0$ e $\ln x>0 \Rightarrow x>1 = (1,\infty)$

$f'(x) = 1/\ln x \cdot 1/x$

$f(x) = x^x$

$= e^{x\ln x} \Rightarrow D(f) = x>0 = (0,\infty)$

$f'(x) = e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$

$f(x) = (\sin x)^{tg x}$

$h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))} \Rightarrow e^{tg x \ln(\sin x)}$

$\left.\begin{array}{l} \sin x > 0 \longrightarrow x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi) = (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ tg x \text{ è definita per } x \neq \pm\pi/2 \end{array}\right\} D(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((2k\pi, 2k+\pi/2) \cup (2k\pi+\pi/2, (2k+1)\pi)\right)$

$f'(x) = e^{tg \ln(\sin x)} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + tg x\,(1/x \cdot \cos x)\right)$

2) Trovare α e β in modo tale che $f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & x \geq 0 \\ \alpha \sin x & x<0 \end{cases}$ sia derivabile in $\mathbb{R}$

Imporre la continuità:

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^+} (x-\beta)^2 - 2 = \lim_{x\to0^-} \alpha \sin x \Leftrightarrow \boxed{\beta^2 - 2 = 0}$

NB Se f è continua ed $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l$ allora $f(x)$ è derivabile in x_0 e $f'(x) = l$

$f'(x) = \begin{cases} 2(x-\beta) & x>0 \\ \alpha\cos(x) & x<0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^-} f'(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^+} 2(x-\beta) = \lim_{x\to0^-} \alpha\cos x \Leftrightarrow \boxed{-2\beta = \alpha}$

$\begin{cases} \beta^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \pm\sqrt{2} \\ -2\beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \mp 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (\alpha,\beta) = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ (\alpha,\beta) = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{array}$

3) Sia $f(x) = \begin{cases} -3x & x\leq 0 \\ -3x-2 & x>0 \end{cases}$ allora:

a) $f'(x) = -3 \ \forall x\in\mathbb{R}$ b) $f(x)$ è dispari c) $\exists\, c\in\mathbb{R}$ t.c. $f(c) = -1$ d) nessuno delle precedenti

a è falsa perché in 0 non è derivabile perché non continua in zero

c è falsa perché il grafico non passa in -1

b è falsa perché basta vedere il grafico

SIMULAZIONE COMPITO

D1

1) $A \neq \emptyset$ allora $s = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} s \geq a & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \text{ t.c. } s - \varepsilon < a \end{cases}$

2) $A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$n + \frac{(-1)^n}{n}$: $\lim_{n\to\infty} n + \frac{(-1)^n}{n} = \infty \Rightarrow \sup A = \infty$

Per $n = 1$ $n + \frac{(-1)^n}{n} = 0$ inoltre $\forall n \geq e$ $n + \frac{(-1)^n}{n} \geq e - 1 \geq 0$ quindi 0 è un minorante $\min A = 0$

D2

1) $\sum^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_0^{\infty} |a_n|$

2) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma $\sum_1^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ diverge

Es 1

Se una delle radici quarte di z è $1+i$ allora:

a) $1 - i$ è una radice quarta di z ✓

b) $-2i$ è radice quarta di z

c) le altre radici sono i vertici di un triangolo equilatero

d) $2i$ è radice quarta di z

Es 2

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata, allora:

a) $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n| \leq M$ $\forall M > 0$

b) $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ✓

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall M > 0$ $|a_n| \leq M$

d) $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$ per qualche n

$\{a_n\}$ limitata $\Leftrightarrow \exists r, R \in \mathbb{R}$ t.c. $r \leq a_n \leq R$

$M \in \mathbb{R}$ t.c. $M \geq R$, $-M < r$ quindi $-M \leq r \leq a_n \leq R \leq R \Leftrightarrow |a_n| \leq M$

Es 3

Sia $\{a_n\}$ t.c. $a_n \geq 0$ e $(n+1)a_{n+1} \sim a_n$. Allora:

a) $\sum a_n$ converge ✓

b) $a_n \sim 1/n$ per $n \to \infty$

c) $\sum a_n$ diverge

d) $\sum a_n$ oscillante no perché a termini positivi $\longrightarrow$ mai oscillante

$(n+1)a_{n+1} \sim a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{1}{n+1} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1/_{n+1} = 0 < 1$ (vedi criterio del rapporto)

Es 4

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \Big/ \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Big/ \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = (1+1/n)^n / (1-1/n)^n = e/e^{-1} = e^2$$

Es 5

$n^3+2n=3\cdot k \quad \forall k\in\mathbb{N}$

Base $(n=1)$:

$1+2=3$

Passo Induttivo

Ipotesi $n^3+2n=3k \quad k\in\mathbb{N}$

Tesi $(n+1)^3+2(n+1)=3m \quad m\in\mathbb{N}$

dim,

$n^3+3n^2+3n+1+2n+2=\underbrace{n^2+2n}_{3k}+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(\underbrace{k+n^2+n+1}_{n})$

Es 6

$z+i(\bar{z})^2=-2i \qquad z=x+iy$

$x+iy+i(x-iy)^2=-2i \iff x+iy+i(x^2-2xyi-y^2)=-2i \iff x+iy+ix^2+2xy-iy^2+2i=0$

$\begin{cases} x+2xy=0 \\ y+x^2-y^2+2=0 \end{cases} \iff x(1+2y)=0 \iff x=0 \quad y=-1/2$

$\begin{cases} x=0 \\ y^2-y-2=0 \end{cases} \iff y=2 \wedge y=-1$

$\begin{cases} y=-1/2 \\ -1/2+x^2-1/4+2=0 \end{cases} \iff x^2+5/4=0$ impossibile

$z_1=2i \qquad z_2=-i$

OTTIMIZZAZIONE

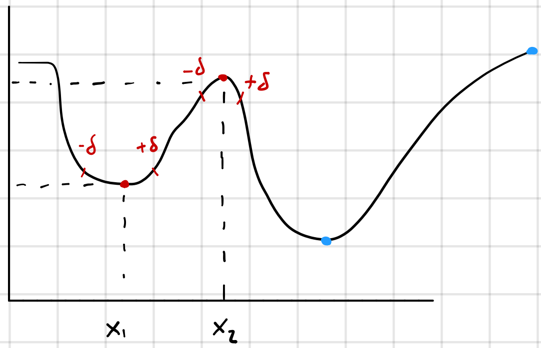
Ricerca massimi e minimi delle funzione

Data $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora:

1) x_0 si dice punto di minimo relativo per f se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X \cap \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$
2) x_0 si dice punto di massimo relativo per f se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X \cap \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$

Se x_0 è un punto di minimo o massimo relativo allora x_0 si dice punto di estremo locale

NB $x_0 \in X$ è un punto di minimo assoluto per f se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X$ (cambia l'insieme



$f(x_1)$ = minimo relativo
$f(x_2)$ = massimo relativo
minimo e massimo assoluti (anche loro sono comunque relativi)

TEOREMA DI FERMAT

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ punto di estremo locale e f derivabile in x_0 allora la derivata in tale punto si annulla: $f'(x_0) = 0$

x_0 così definito si dice punto critico (o stazionario). estremo locale $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ punto critico

I punti di estremo assoluto sono contenuti in uno dei seguenti insiemi:

- punti critici interni
- punti in cui f non è derivabile
- punti estremi dell'intervallo

es. $f(x) = x e^{-x^2}$ $\quad x \in [0, 2]$

Trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di f.

1) f è continua in $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue in $\mathbb{R}$: $f \in C(\mathbb{R})$
   $\Rightarrow$ da Weierstrass: f ammette minimo e massimo
2) f è derivabile in $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni derivabili
   $\to f'(x) = 0 \iff e^{-x^2} + x e^{-x^2}(-2x) = 0 \iff e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \iff 1 - 2x^2 = 0$ perché $e^{-x^2} > 0$ $\forall x$
   $\iff x = \pm 1/\sqrt{2} \longrightarrow$ prendo solo la soluzione positiva perché interno all'intervallo
   $x_0 = 1/\sqrt{2}$ è l'unico punto critico interno
3) Non ci sono punti di non derivabilità
4) Estremi intervallo: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$
5) Calcolo f in x_0, x_1 e x_2 e trovo minimo e massimo

$f(0) = 0 \longrightarrow$ minimo
$f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}\, e^{-1/2} \longrightarrow$ massimo
$\Big\} \in [0,2]$
$f(2) = 2e^{-4}$

$f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0$ punto critico $\Rightarrow$ Condizioni che consentono di stabilire se x_0 è estremo locale

TEOREMA DI ROLLE

$f:[a,b]$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e t.c. $f(a)=f(b)$. Allora $\exists$ $c \in [a,b]$ t.c $f'(c)=0$

TEOREMA DI LAGRANGE

$f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c\in[a,b]$ t.c. $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Cioè: l'eq. della retta passante per a e b è $y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ e il suo coefficiente angolare è $f'(c)=$ coefficiente angolare della tangente in c $\longrightarrow$ tangente e y sono parallele
$\exists$ un punto interno t.c. la retta tangente in c e la retta passante per gli estremi sono parallele

TEST MONOTONIA

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivabile. Allora
1) f è crescente in $(a,b) \Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b)$
2) f è decrescente in $(a,b) \leftrightarrow f'(x)\leq 0$ $\forall x(a,b)$

$f'(x)>0$ $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f$ strettamente crescente
$f'(x)<0$ $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f$ strettamente decrescente

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER ESTREMI LOCALI

$f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ derivabile, $x_0\in(a,b)$ punto critico ($f'(x_0)=0$). Se $\exists$ $\delta>0$ t.c.
1) $f'(x)\leq 0$ in $(x_0-\delta)$, $f'(x)\geq 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$ allora x_0 è un punto di minimo locale
2) $f'(x)\geq 0$ in $(x_0-\delta)$, $f'(x)\leq 0$ in $(x_0, x_0+\delta)$ allora x_0 è un punto di massimo locale
3) Se $f'(x)\geq 0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ oppure $f'(x)\leq 0$ in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ allora x_0 non è un punto di estremo locale

TEOREMA DEL CONFRONTO

$f,g\ (a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ derivabili t.c.
1) $g(a)\leq f(a)$
2) $g'(x)\leq f'(x)$ $\forall x\in(a,b)$
allora $g(x)\leq f(x)$ $\forall x\in(a,b)$

$f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA in (a,b) se $\exists\, \ell$ t.c. $\forall x_1, x_2\in(a,b)$ con $x_1\neq x_2$ $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leq \ell$
es. $f(x)=|x| \longrightarrow \ell=1$

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \frac{||x_2|-|x_1||}{|x_2-x_1|} \leq \frac{|x_2-x_1|}{|x_2-x_1|}=1$$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

$f, g\ (a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$ derivabili t.c. [Il teorema vale anche per b^- e $x_0 \in (a,b)$]

1) $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = 0/0$ (o ∞/∞

2) $g(x) \neq 0$ $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

allora $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = \ell$

APPROSSIMAZIONE LINEARE

- Ricerca tangente al grafico $\longrightarrow T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
- Trovare una funzione lineare che approssimi la funzione data stimando l'errore

$r(x)$ = errore (resto) $= f(x) - T(x)$

- $r(x_0) = f(x_0) - T(x_0) = 0$
- $\dfrac{r(x) - \cancel{r(x_0)}^{\,0}}{x-x_0} = r(x)/x-x_0 = \dfrac{f(x)-T(x)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \underbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x)\ \text{per}\ x\to x_0} - f'(x_0)$

quindi $\lim_{x\to x_0} \dfrac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0} = 0$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$ allora si dice che $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (o piccolo)

es. $x^4 = o(x^3)$ per $x\to 0 \iff \lim_{x\to 0} x^4/x^3 = 0$

$r(x) = o(x-x_0)$ per $x \to x_0$

Riassumendo: $r(x) = f(x) - T(x)$ allora abbiamo dimostrato che se f è derivabile in x_0 allora $r(x) = o(x-x_0)$

$f(x) = T(x) + r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti

1) f è derivabile in x_0

2) $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0) \longrightarrow A = f'(x_0)$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

$f(a,b) \to \mathbb{R}$. Se è derivabile possiamo definire una nuova funzione che è la sua derivata $f'(a,b) \to \mathbb{R}$
Se f' è derivabile possiamo definire una nuova funzione $f''(x)$ che è la derivata della derivata ovvero derivata seconda.

Il processo può continuare...

In generale se f è derivabile n volte in un suo sottinsieme definisco $f^{(n)}(a,b) \to \mathbb{R}$ che chiamo derivata n-esima

NB. Se f è derivabile n volte $\longrightarrow f^{(n-1)}$ è continua

FORMULA DI TAYLOR

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

Voglio approssimare f con un polinomio di grado n $T_n(x)$ stimando l'errore commesso

$n=0 \longrightarrow T_0(x)=a_0=f(x_0) \longrightarrow T_1(x_0)=f(x_0)$

$n=1 \longrightarrow T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow T_1(x_0)=f(x_0) \quad \wedge \quad T_1'(x_0)=f'(x_0)$

n generico: $\exists\ T_n(x)$ t.c. $T_n(x_0)=f(x_0),\ T_n'(x_0)=f'(x_0)\ \dots\ T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$? (hanno un contatto di ordine n in x_0)

Data $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ t.c. f è derivabile n volte in x_0 allora $\exists!$ polinomio di grado n $T_n(x)$ che ha un contatto di ordine n con f in x_0. Inoltre

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}=\sum_0^n\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$

es. $f(x)=e^x$ $\quad x_0=0$

$$T_n(x)=\sum_0^n\frac{x^k}{k!}=1+x+x^2/2+\dots+x^n/n!=\sum_0^n\frac{x^k}{k!}$$ sviluppo esponenziale

es. $f(x)=\sin x$ $\quad x_0=0$

$$T_n(x)=\sum_0^n(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-x^3/3!+x^5/5!+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$ sviluppo del seno

RESTO DELLA FORMULA DI TAYLOR

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad f\in C^n((a,b))$ $\quad x_0\in(a,b)$ allora

1) $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$ resto di Peano

2) Se $f\in C^{n+1}((a,b))$ allora $f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ resto di Lagrange

Il resto di Peano fornisce una stima dell'errore di tipo qualitativo: l'errore sta tendendo a zero per $x\to x_0$ più velocemente dell'incremento elevato alla n

Il resto di Lagrange è una stima quantitativa poiché fornisce il valore esatto dell'errore, ma il punto c non è noto e sappiamo solo che la distanza di c da x_0 è minore di quella di x da x_0

Se f è un polinomio di grado m per $n\geq m$ il polinomio di Taylor T_n di f coincide con f

es. $f(x)=\cos x$ $\quad x_0=0$

$$T_n(x)=1+\frac{x^4}{4!}-x^6/6!+\dots+(-1)^n x^{2n}/2n!=\sum_0^n(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}$$ sviluppo del coseno

Il polinomio di Taylor in $x_0=0$ di una funzione pari contiene solo potenze pari, dispari in una funzione dispari.

NB f pari $\to f'$ dispari $\to f''$ pari $\to f'''$ dispari

se una funzione è dispari le sue derivate di ordine dispari sono dispari

NB. Se f è continua e dispari allora $f(0)=0$

es $f(x)=e^x$

$e^x = 1+x+x^2/2 + \dots + x^n/n! + o(x^n)$ Peano

$e^x = 1+x+x^2/2 + \dots + x^n/n! + e^{x} \, x^{n+1}/(n+1)!$ Lagrange

$f(x)=\sin x$

$\sin x = \underbrace{x - x^3/3! + x^5/5! + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+1}} + o(x^{2n+1})$

Per $n=3$

$\sin x = x - x^3/3! + o(x^3)$

$n=4$

$\sin x = x - x^3/3! + \cancel{0\, x^4/4!}^{\,0} + o(x^4) = x - x^3/3! + o(x^4) = T_3(x)+o(x^4)$

$f(x)=\cos x$

$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \dots + (-1)^n x^{2n}/2n! + o(x^{2n+1})$

$n=4 \quad \cos x = T_4(x) + o(x^4) = 1 - x^2/2! + x^4/4! + o(x^4)$

$n=5 \quad \cos x = T_5(x) + o(x^5) = 1 - x^2/2! + x^4/4! + o(x^5) = T_4(x) + o(x^5)$

$\sinh x = x + x^3/3! + x^5/5! + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\cosh x = 1 + x^2/2! + x^4/4! + \dots + x^{2n}/2n! + o(x^{2n+1})$

$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots + (-1)^{n+1} x^n/n + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^\alpha)$ dove $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2 \dots k}$

Sviluppi Elementari

Se $n \in \mathbb{N} \longrightarrow (1+x)^n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (binomio di Newton)

Se $n \in \mathbb{R} \longrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdot \dots k}$

es. $\alpha = 1/2$

$(1+x)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \dots$

$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1} = 1/2$

$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{1\cdot 2} = -1/8$

$\Rightarrow 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$

Applicazioni

1) Caratterizzazione estremi locali

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $f\in C^n((a,b))$ $x_0\in(a,b)$ t.c. $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ e $f^{(n)}(x_0)\neq 0$

a) Se n è pari e
- $f^{(n)}(x_0)>0$ allora x_0 è un minimo locale
- $f^{(n)}(x_0)<0$ allora x_0 è un massimo locale

b) Se n è dispari x_0 non è un estremo locale

$\Rightarrow$ Se $f'(x_0)=0$:
- $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ minimo locale
- $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ massimo locale

2) Calcolo di limiti con Taylor

- Se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1 \Rightarrow f \sim g$ per $x \to x_0$ $[f \sim g$ per $x \to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f = \lim_{x\to x_0} g]$
- Se $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ e $f_3 \sim g_3$ per $x \to x_0$ allora $\lim_{x\to x_0} f_1 \cdot f_2 / f_3 = \lim_{x \to x_0} g_1 \cdot g_2 / g_3$
- $f \sim g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ per $x \to x_0$

Idea: $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0/0 \Rightarrow$ Taylor

primo termine $\neq 0$

$$f(x) = \cancel{f(x_0)} + \cancel{f'(x_0)}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$g(x) \sim \frac{g^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}{\frac{g^{(m)}(x_0)}{m!}} \frac{(x-x_0)^n}{(x-x_0)^m} \begin{cases} 0 & n>m \\ \pm\infty & m>n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(m)}(x_0)} n!/m! \end{cases}$$

Calcolo dei limiti con Taylor

- $f(x) \longrightarrow$ guardare il primo termine non nullo del suo polinomio di Taylor che mi da l'asintoticità
- sviluppi elementari

es $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+\sin x}}{\ln(\cos x)} = 0/0 \longrightarrow$ Taylor

Partiamo dal denominatore: $\ln(\cos x) = \ln(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{t\to 0})$

$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! \dots \Rightarrow \cos(x) - 1 = -x^2/2 + x^4/4! \dots$

$\Rightarrow \ln(1+(\cos x - 1)) = \left(-\frac{x^2}{2} + x^4/4! + \dots\right) - 1/2\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)^2 + \dots$

a noi interessa il primo termine ...

$= -x^2/2 + o(x^2) \sim -x^2/2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\dots}{-x^2/2} \Rightarrow$ denominatore di ordine 2 $\longrightarrow$ sviluppo il numeratore fino ad ordine 2

- $e^t = 1 + t + t^2/2 + o(t^2) \longrightarrow e^{x/2} = 1 + x/2 + \frac{(x/2)^2}{2} + o((\frac{x}{2})^2) = 1 + x/2 + x^2/8 + o(x^2/4)$
- $(1+t)^{1/2} = 1 + t/2 - t^2/8 + o(t^2)$
- $\sin x = x + o(x^2)$ (guadagno un ordine!)

$\Rightarrow (1+\sin x)^{1/2} = 1 + (x + o(x^3))/2 - \frac{(x+o(x^3))^2}{8} + o((x+o(x^3))^2) = 1 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$

$\Rightarrow e^{x/2} - \sqrt{1+\sin x} = 1 + x/2 + x^2/8 + o(x^2/4) - 1 - x/2 + x^2/8 - o(x^2) = x^2/4 + o(x^2) \sim x^2/4$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2/4}{-x^2/2} = -1/2$

Proprietà o-piccolo

1) $o(f) \pm o(f) = o(f)$
2) $\alpha(o(f)) = o(f)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
3) $o(\alpha \cdot f) = o(f)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
4) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ per $x \to x_0$
5) $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ per $x \to x_0$
6) $(x-x_0)^n = o((x-x_0)^m)$ se $n > m$ es. $x^4 = o(x^2)$ oppure $x^4 = o(x^3)$
7) $o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^m)$ se $n >$ es. $o(x^6) = o(x^4)$

Se $f \sim g$ per $x \to x_0$ e $\varphi(t) \to x_0$ per $t \to t_0$ allora $f(\varphi(t)) \sim g(\varphi(t))$ per $t \to t_0$

es. $\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, $\sin t \to 0$ per $t \to 0$ $\Rightarrow \ln(1+\sin t) \sim \sin t$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \ln(\cos x)}{x^2+x^5}$$

- $x^4 + x^5 \sim x^4$ (ordine più basso per $x \to 0$, ordine più alto per $x \to \infty$)
- numeratore al grado 4:

– $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + o(x^4) \Rightarrow 1-\cos x = x^2/2 - x^4/4! + o(x^4)$

– $\ln(\cos x) = \ln(1-(\cos x - 1)) = \underbrace{\left(-x^2/2! + x^4/4! + o(x^4)\right)}_{t} - 1/2 \underbrace{\left(-x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)\right)^2}_{t^2} + 1/3 \overbrace{\left(-x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)\right)^3}^{t^3} - 1/4 \overbrace{\left(-x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)\right)^4}^{t^4} + o\left(\left(-x^2/2 + x^4/4! + o(x^4)\right)^4\right)$

$\ln(\cos x) = -x^2/2 + x^4/24 - 1/2 \cdot x^4/4$ stop al quarto ordine $+ o(x^4) = -x^2/2 - x^4/12 + o(x^4)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2/2} - x^4/24 + o(x^4) - \cancel{x^2/2} - x^4/12 + o(x^4)}{x^4} = \frac{-x^4/8 + o(x^4)}{x^4} \sim \frac{-x^4/8}{x^4} = -1/8$$

NB. Se al denominatore ho grado 2, sviluppo anche il numeratore al grado 2. Se per esempio al numeratore ho $\frac{\sin x}{x}$ sviluppo $\sin x$ al grado 3 perché altrimenti $\frac{x+o(x^2)}{x} = 1 + o(x)$ è di ordine 1

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ al secondo ordine $= \frac{x - x^3/3! + o(x^3)}{x} = 1 - x^2/3! + o(x^2)$

Calcolo valori delle funzioni

$f(x)$? con x punto dato

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)/n! \cdot (x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}}_{R_n}$ con $|c-x_0| < |x-x_0|$

– x_0 abbastanza vicino a x in cui o conosco il polinomio di Taylor di f o posso calcolare facilmente $f^{(k)}(x_0)$ per qualche k

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(c)\right|/(n+1)! \cdot |x-x_0|^{n+1} \leq M|x-x_0|^{n+1}/(n+1)!$$

es. calcolare $\cos(1/2)$ con errore $< 10^{-3}$

$x = 1/2 \quad x_0 = 0$

$T_n(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! \dots$

$|R_n(1/2)| = \frac{|D^{(n+1)}\cos(c)|}{(n+1)!}(1/2 - 0)^{n+1}$ Posso stimare la derivata $n+1$-esima con 1 poiché le derivate sarebbero $\operatorname{sen}(c)$ o $\cos(c)$ a ripetizione $\rightarrow |D^{n+1}\cos(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{(n+1)}}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}} < 10^{-3}$ devo trovare n a tentativi

n	$(n+1)!\,2^{n+1}$
0	2 < 1000
1	8 < 1000
2	48 < 1000
3	< 1000
4	> 1000

prendo $n = 4$ $\quad \frac{1}{(4+1)!\,2^{4+1}} < \frac{1}{1000}$

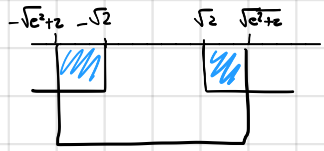
Per $n=4$ $R_n(1/2) < 1/1000 \longrightarrow T_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4!$ calcolato in $1/2 = \frac{337}{384} \approx \cos(1/2)$ con 3 cifre decimali esatte

STUDIO DI FUNZIONI

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) Determinare il dominio X
   - conoscenza funzioni base
   - conoscenza disequazioni

es. $f(x) = \sin(x^2) / \sqrt{2 - \ln(x^2-2)}$



- $x^2 - 2 > 0$ (argomento logaritmo) $\to x^2 > 2 \to x < -\sqrt{2} \wedge x > \sqrt{2}$
- $2 - \ln(x^2-2) > 0$ (argomento radice pari al denominatore, quindi anche $\neq 0$)
  $\to 2 > \ln(x^2-2) \to e^2 > x^2 - 2 \to x^2 < e^2 + 2 \to -\sqrt{e^2+2} < x < \sqrt{e^2+2}$

$$\Rightarrow X = (-\sqrt{e^2+2}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{e^2+2})$$

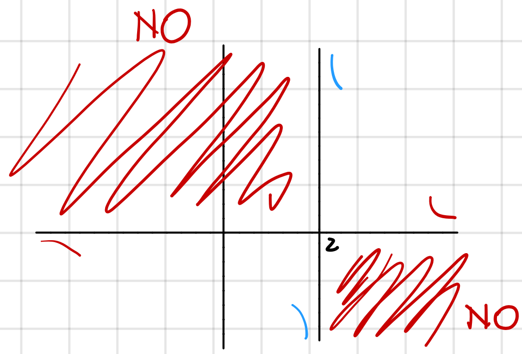
2) Controllo simmetrie (pari / dispari) e periodicità

3) Intersezioni con gli assi
   - asse x: $f(x) = 0$ zeri della funzione
   - asse y: $f(0)$ se $0 \in X$

4) Segno della funzione

5) Calcolo dei limiti sulla frontiera di X

6) Asintoti



   - verticali: es. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \pm\infty$
     se $x_0 \in \mathbb{R}$ pda. per X t.c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$
   - orizzontale se $\lim_{x \to \pm\infty} = l \in \mathbb{R}$
     in questo caso $\lim_{x \to \pm\infty} = 0$
   - obliqui: se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\exists\, y = mx + q$ con $m \neq 0$ t.c.
     $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - [mx+q]) = 0$ allora y è asintoto obliquo di $f(x)$

   Operativamente: (es $x \to \infty$)
   - $\lim_{x \to \infty} f(x)$ non finito
   - controllo se $\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$
   - controllo se $\exists \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

   Se va tutto bene $\Rightarrow$ esiste asintoto obliquo per f che è y per $x \to \infty$

es. $f(x) = \ln(e^{3x+2} + 5)$

- $\lim_{x \to \infty} \ln(e^{3x+2} + 5) = \infty$ OK
- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(e^{3x+2}+5)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \to$ DE L'HOPITAL $\begin{cases} g_1(x) = \log(e^{3x+2}+5) \to g_1'(x) = \frac{1}{e^{3x+2}+5} \cdot 3e^{3x+2} \\ g_2(x) = x \to g_2'(x) = 1 \end{cases}$ $\lim_{x \to \infty} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)} = 3 = m$ OK
- $\lim_{x \to \infty} \ln(e^{3x+2}+5) - 3x = \ln(e^{3x+2}+5) + \ln(e^{-3x}) = \ln\left(e^{3x+2}+5 / e^{3x}\right) \to \lim_{x \to \infty} \frac{e^{3x+2}+5}{e^{3x}} = e^2 \to \lim_{x \to \infty} \ln(e^{3x+2}+5) = \ln(e^2) = 2 = q$ OK

$y = 3x + 2$ asintoto obliquo

7) Studio della derivata prima
- $f'(x) = 0$: punti critici per f (min e max, relativi e assoluti)
- segno $f'(x) \to$ monotonia (Test di monotonia)

Data $f: X \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a,b) \subseteq X$:

f è convessa in (a,b) se f' è crescente in (a,b), concava se f' è decrescente in (a,b)

$x_0 \in (a,b)$ è un flesso se in $f(x_0)$ c'è un cambio di concavità

Se f è derivabile due volte in (a,b):
- f è convessa se $f'' \geq 0$
- f è concava se $f'' \leq 0$

Se $f''(x_0) = 0 \to x_0$ è un punto di flesso es.

$f(x) = tg\,x \quad in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f'' = -2(\cos^2 x)^{-3} \cdot \sin x$

$-\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{2}$

$\cap \quad \cup$

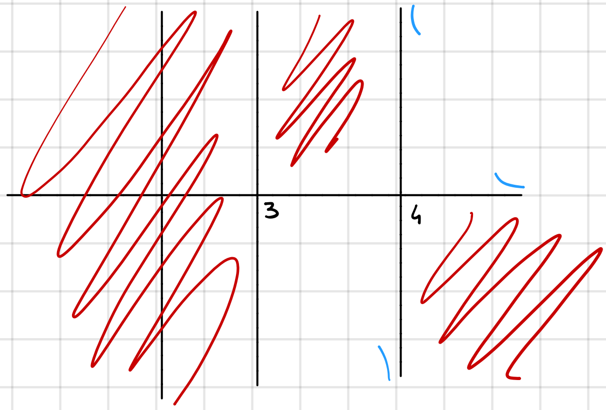
$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e continua in (a,b), allora x_0 è un punto di flesso per f se:

- $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Concavità di f è diversa a destra e a sinistra di x_0

8) Studio derivata seconda
- concavità / convessità
- flessi

Esercizio

$f(x) = 1/\log(x-3)$



$$\text{Dom} f: \begin{cases} x-3>0 \longrightarrow x>3 \\ \log(x-3) \neq 0 \longrightarrow x \neq 4 \end{cases} = (3,4) \cup (4,\infty)$$

Non è simmetrica né periodica

⊙ Intersezione assi
- $y=0$ NO
- $x=0$ NO (perché x non nel dominio)

⊙ Segno

Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\log(x-3) \longrightarrow$ 3 $-$ 4 $+$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ (cost/infinitesimo con segno della funzione)

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty$ (//)

} $x=4$ asintoto verticale

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (cost/divergente) $\longrightarrow y=0$ asintoto orizzontale

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$ (cost/divergente) $\longrightarrow$ prolungabile per continuità in 3 ponendo $f(3)=0$

⊙ Derivata prima

$f(x) = (\ln(x-3))^{-1} \quad f'(x) = -(\ln(x-3))^{-2} \cdot \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{(x-3)\ln(x-3)^2} < 0$ nel dominio $\longrightarrow$ 3 ↘ 4 ↘ (poiché niente punti stazionari)

⊙ Derivata seconda

$f'(x) = -((x-3)\ln^2(x-3))^{-1} \quad f''(x) = ((x-3)\log^2(x-3))^{-2}\left[\log^2(x-3) + 2(x-3)\log(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}\right] = \frac{\log(x-3)+2}{(x-3)^2\log^3(x-3)}$

Zeri: $\log(x-3)+2 \quad 0 \longrightarrow x = e^{-2}+3$

$\log^3(x-3) \longrightarrow X = 3+1$

3		$3+e^{-2}$		4	
	$-$		$+$		$+$
	$-$		$-$		$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$