

FISICA

By Edoardo

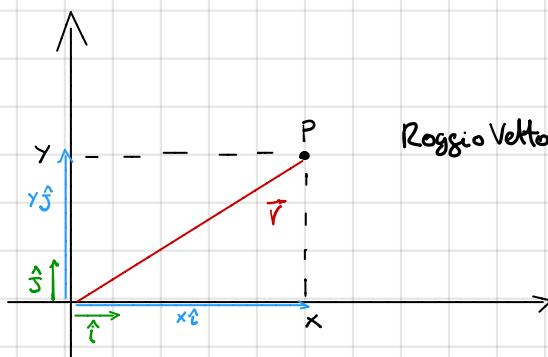
CINEMATICA (DEL PUNTO MATERIALE)

Studio del moto di un punto materiale SENZA considerare le cause del movimento

NB. con il punto materiale non è possibile schematizzare lo **pura rotazione** ma solo lo **puro traslazione**

Grandezze

- Spostamento $[L]$ m
- Velocità $[L, T^{-1}]$ m/s
- Accelerazione $[L, T^{-2}]$ m/s²



Raggio Vettore = $\vec{r} = \vec{OP}$ = vettore origine - punto

\hat{i} = vettore: dà il verso e la direzione
lo stesso cosa si può fare per lo y : \hat{j}
 $\Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (teorema di Pitagora)

Essendo dipendenti dal tempo: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ [moti componenti]

moti componenti = # gradi di libertà

$P(t_0)$ $\rightarrow P(t)$

Un altro approccio è quello della **traiettoria** ovvero nell'identificare il tipo di equazione della traiettoria.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \quad \vee \quad y = f(x) \quad \text{NB il tempo scomponere} \\ \text{legge oraria } S(t) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} = \begin{cases} x(t) & \text{equivalente al} \\ y(t) & \text{primo metodo} \end{cases} \\ \text{interversione tra due superfici} \end{array} \right)$$

Nel caso 3D:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} = \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ S(t) \end{cases} \quad \text{interversione tra due superfici}$$

Di moto allo traiettoria

ES.

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -3t + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \text{trovo un'equazione atemporale: } t = x + 1 \quad \begin{matrix} y(x) = -3(x+1) + 1 = -3x - 2 \\ \text{eq. retta} \Rightarrow \text{moto rettilineo} \end{matrix}$$

e la legge oraria?

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t^2}} \cdot \Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

$$\int_{S_0}^{S(t)} ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \rightarrow S(t) = S_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

derivate rispetto al tempo dei moti componenti

$$\Rightarrow s(t) = S_0 + \sqrt{10}(t - t_0) = \sqrt{10}t \quad (t_0 = 0, S_0 = 0)$$

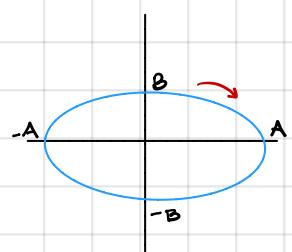
Vettore Spostamento: $P_1 \rightarrow P_2$

ES 2

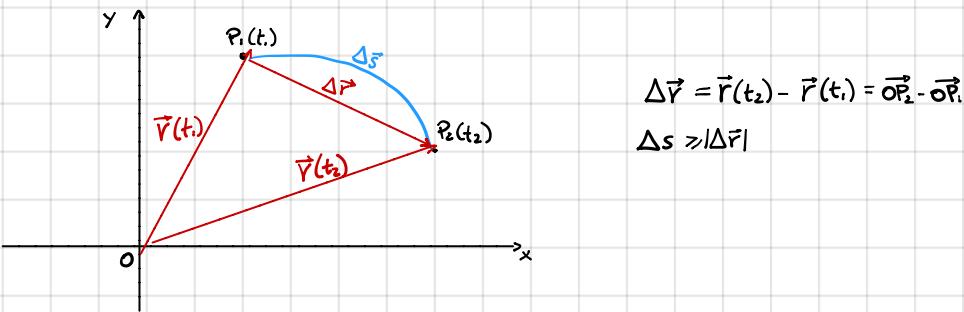
$$\begin{cases} x(t) = A \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) = B \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t) = \frac{y}{B} \end{cases} \rightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1 \rightarrow 1 = \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 \quad \text{traiettoria ellittica}$$

NB. il verso è dato dalla tabella oraria
($t=0$ B, $t=\pi/2$ A, $t=\pi$ -B ...)

$$\rightarrow s(t) = S_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{(Aw \cos(\omega t))^2 + (-Bw \sin(\omega t))^2} dt$$



Nel caso in cui $A = B$ abbiamo una circonferenza $\rightarrow s(t) = s_0 + Aw(t - t_0) = A\omega t = 2\pi$



VELOCITÀ

$$\Delta s / \Delta t = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_{\text{media}}$$

Questo però non ha nessuna informazione riguardo verso e direzione...

$\Rightarrow \bar{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, ma commette un errore poiché $\Delta \vec{r} \neq \Delta s$ che aumenta con il tempo quindi non va bene

Per evitare ciò si fa tendere Δt a zero e si parla di velocità istantanea.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (\text{derivata della legge oraria rispetto al tempo}) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \text{velocità vettoriale} \quad (\text{errore trascurabile})$$

In sostanza per un Δt molto piccolo $\Delta s = \Delta \vec{r}$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

\bar{v} è la "vera" velocità, mentre v è il suo modulo! \bar{v} è tangente alla traiettoria e quindi moltiplicando v per un versore tangente alla traiettoria otengo \bar{v} : $\bar{v} = v \cdot \hat{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{v}$

Poiché $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$:

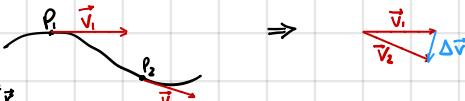
$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad \text{e ricordando che un vettore } \vec{v} \text{ può essere espresso secondo le sue componenti}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{componenti della velocità}$$

ES

$$\begin{cases} x(t) = 4t + 8 \\ y(t) = -5 \\ z(t) = -3t + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 0 \\ v_z = \frac{dz}{dt} = -3 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m/s}$$



ACCELERAZIONE

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{d}{dt}(v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}) = \frac{d^2}{dt^2}(x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k})$$

Poiché come ogni vettore a può essere scomposto nelle sue componenti: $\bar{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

MOTO RETTILINEO

Moto lungo un asse unico: l'asse x

$$\begin{cases} \text{Posizione: } x(t) \\ \text{Velocità: } v(t) = \frac{dx}{dt} \quad (\Rightarrow \int_{t_0}^t v(t) dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx) \\ \text{Acelerazione: } a(t) = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

Se la velocità è costante si parla di moto rettilineo uniforme: $v(t) = v_0$ (costante) $\rightarrow a(t) = 0$

$$x(t) = ?$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t v_0 dt = \int_{x_0}^{x(t)} dx \Rightarrow v_0(t - t_0) = x(t) - x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

N.B. il grafico è una retta inclinata

es

$$v_1 = 0.2 \text{ m/s} \quad v_2 = 0.4 \text{ m/s} \quad d = 5 \text{ m}$$

$$\begin{cases} 1 \quad v(t) = v_1 + 0 \\ 2 \quad \begin{cases} v(t) = -v_2 \\ x_1(t) = v_1 t \end{cases} \end{cases}$$

Quando si incontrano? Quando $x_1(t) = x_2(t)$

$$\Rightarrow v_1 t = d - v_2 t \Rightarrow t(v_1 + v_2) = d \Rightarrow t = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{5}{0.2 + 0.4} = 8.3 \text{ s}$$

Dove? \Rightarrow Sostituisco t^* in una delle leggi del moto $\Rightarrow s = x(t^*) = v_1 \frac{d}{v_1 + v_2} - d \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2} \right) = \frac{d}{3} = 1.67 \text{ m}$
(usiamo x_1 per comodità)

es 2

$v_1 = 120 \text{ Km/h}$ (ladri)

Dove e quando lo poliziano raggiunge i ladri?

$v_2 = 150 \text{ Km/h}$ (polizia)

$t_0 = 5 \text{ s}$ (per lo poliziano)

$$\begin{cases} 1 \quad v(t) = v_1 \\ 2 \quad \begin{cases} v(t) = \begin{cases} t < t_0 & v_1 \\ t > t_0 & v_2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t < t_0 & 0 \\ t > t_0 & v_2(t - t_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow v_1 t = v_2(t - t_0) \Rightarrow (v_1 - v_2)t = -v_2 t_0 \Rightarrow t^* = \frac{v_2 t_0}{v_2 - v_1} = \frac{150}{150 - 120} \cdot 5 = 25 \text{ s}$$

$$x_1(t^*) = 120 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ s} = \frac{120}{3.6} \text{ m/s} \cdot 25 \text{ s} = 833 \text{ m}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

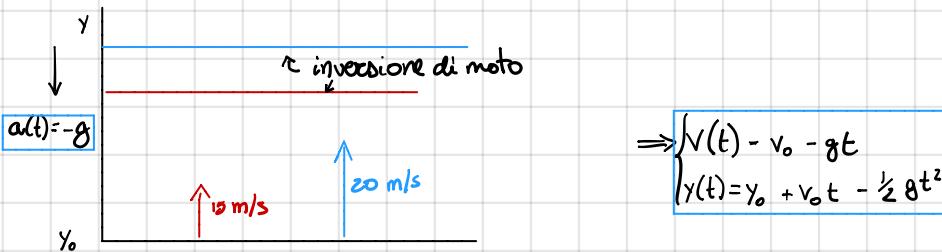
$$\begin{cases} x(t) \\ v(t) = \frac{dx}{dt} \\ a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 \text{ costante} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_0 dt = dv \Rightarrow a_0 \int_{t_0}^t dt = \int_{v_0}^{v(t)} dv \Rightarrow a_0 (t - t_0) = v(t) - v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0)$$

$$\Rightarrow dx = [v_0 + a_0 (t - t_0)] dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a_0 (t - t_0) dt \Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 (t - t_0) + a_0 \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$

La cordata dei gravi



Le formule sono le stesse del moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione negativa perché contrario!

ALTEZZA MASSIMA $\Rightarrow v(t) = 0$

$$\begin{cases} v(t) = 0 \rightarrow t = v_0/g \\ y(t) = \dots \end{cases} \Rightarrow y(t)_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

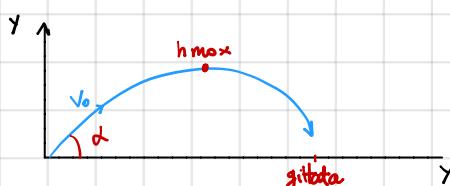
TEMPO DI VOLO $\Rightarrow y(t) = 0$

$$v(t) = 0 \Rightarrow t(v_0 - \frac{1}{2} g t) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \text{ (partenza)} \\ t = \frac{2v_0}{g} \text{ (arrivo)} \end{cases} \quad t_{\text{volo}} = 2 t_{\text{altezza massima}}$$

$$v(t) = v_0 - gt = -v_0 \quad \text{Velocità di atterraggio} = -\text{velocità partenza}$$

Polistica



Bisogno scomporre tutte le componenti in x e y!

$$v_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 + at = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 + at = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

$$(x, y) \begin{cases} x = v_{0x} t = v_0 \cos \alpha t \\ y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

ALTEZZA MASSIMA $\Rightarrow v_y = 0$

$$\begin{cases} v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = v_0 \sin \alpha / g \\ y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \alpha / g$$

GITTATA $\Rightarrow y = 0$

$$\begin{cases} y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{v} \\ x = v_0 t \cos \alpha = v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g = v_0^2 \sin(2\alpha) / g \end{cases}$$

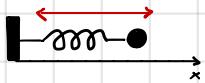
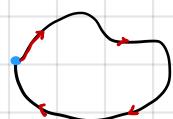
Altezza Max: $\alpha = 45^\circ$

Gittata Max: $\alpha = 45^\circ$

MOTO PERIODICO

PERIODO T = tempo per tornare al punto di partenza

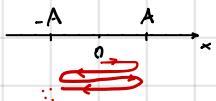
Anche il moto su un arco di circonferenza è considerato periodico (es. pendolo) oppure su una retta (es. molla)



Moto Armonico

legge oronica: $x(t) = A \sin(\omega t)$ angolo di fase (rad)

ampiezza (m) pulsazione (rad/sec)



$$\begin{cases} 2\pi + \alpha = \omega t_2 \\ \alpha = \omega t_1 \end{cases} \Rightarrow 2\pi = \omega(t_2 - t_1) = \omega T$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

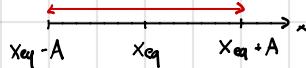
$$f = \text{FREQUENZA} = \frac{1}{T} \quad (\frac{1}{s} \circ Hz)$$

Indico quanti periodi ci sono in un secondo ovvero quante volte in un secondo riesco a fare un giro completo
 $\Rightarrow \omega = 2\pi f$ (rad/sec)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = Aw \cos(\omega t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -Aw^2 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \int x(t) - A \cos(\omega t + \phi) + x_{eq.}$$



$$v(t) = -Aw \sin(\omega t + \phi)$$

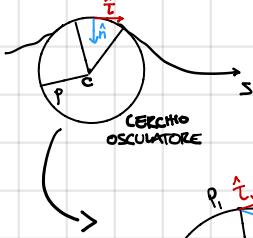
$$a(t) = -Aw^2 \cos(\omega t + \phi) = -w^2(x(t) - x_{eq})$$

$$\vec{v} = v \cdot \hat{t} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d}{dt}(v(t) \cdot \hat{t}(t)) = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt}$$

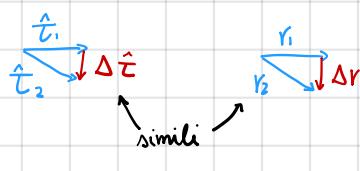
a tangenziale

a normale



C = centro di curvatura

r = raggio di curvatura



$$\Delta \hat{\tau}: \hat{\tau}_1 = \Delta r: r_1 \Rightarrow \Delta \tau - \frac{\Delta r}{r_1 = r} = \frac{\Delta r}{r}$$

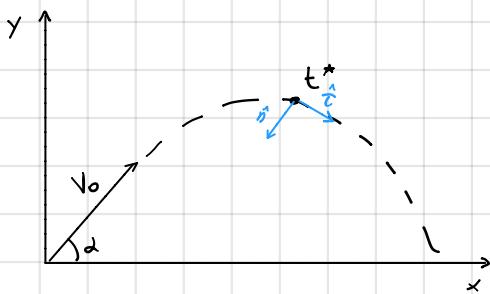
$$\Rightarrow a_{\text{normale}} = v \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{r} = v \cdot v \cdot \frac{1}{r} = v^2/r \quad \text{versore per direzione e verso}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} a_n \\ a_t \\ \downarrow \end{array}$$

simili

nulla nel caso di moto rettilineo

ES



Dalle scomposte della Balistica:

$$\begin{cases} \dots \\ V_x = V_0 \cos \theta \\ a_x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ V_y = V_0 \sin \theta - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow V^2 = V_x^2 + V_y^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} V^2(t) = \frac{d}{dt} (V_x^2 + V_y^2(t)) \Rightarrow 2V \frac{dV}{dt} = 2V_y \frac{dV_y}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V_y}{V} \frac{dV_y}{dt} = -\frac{V_y g}{V}$$

$$\Rightarrow a_t = -\frac{V_y g}{V}$$

$$\text{NB. } \begin{array}{c} a_n \\ a_t \\ \downarrow g \end{array} \Rightarrow g^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$\Rightarrow a_n^2 = g^2 - a_t^2 = g^2 - g^2 \frac{V_y^2}{V^2} = g^2 \frac{V^2 - V_y^2}{V^2} = g^2 \frac{(V_x^2 + V_y^2) - V_y^2}{V^2} = g^2 \frac{V_x^2}{V^2} \Rightarrow a_n = g \frac{V_x}{V}$$

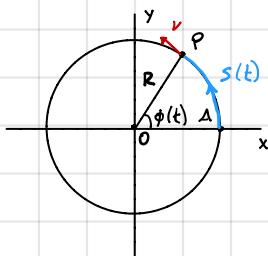
$$r = \frac{V^3}{g V_x} \quad \text{poiché } V \text{ varia nel tempo} \rightarrow r(t) = \frac{V^3(t)}{g V_x}$$

$$\text{Il raggio di curvatura minimo si ha all'apice della parabola, nel punto in cui } V_y = 0 \Rightarrow V = V_x \Rightarrow r_{\min} = \frac{V^2}{g} = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

MOTO CIRCOLARE

La traiettoria è una circonferenza

A = origine degli archi = punto di potenza

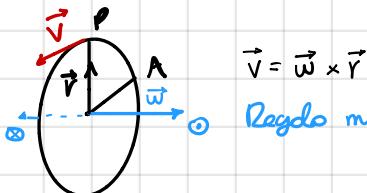


$$s(t) = R \cdot \phi(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \text{ velocità angolare } \omega \text{ (rad/sec)} = \omega R$$

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} R \\ a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \end{cases} \text{ accelerazione angolare } \alpha \text{ (rad/s}^2\text{)} = \alpha R$$

Sono tutti scalari e quindi "perdiamo" le informazioni di verso e direzione! Applico quindi i vettori



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Regola mano destro: medio = pollice x indice

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\omega} \times \vec{\omega})$$

$$\begin{cases} \vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \\ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \end{cases} \text{ accelerazione centripeta}$$

Moto circolare uniforme

Modulo di v costante, non verso e direzione!

$v(t)$ costante $\Leftrightarrow \omega(t)$ costante (poiché R costante)

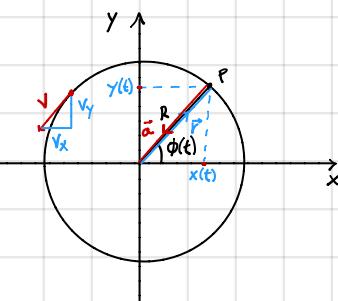
Dovendo $\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \alpha(t) = 0 \Rightarrow a_T = 0$

Integrandando $\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$

ANGOLI	ARCHI
$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$	$s = \phi R$
$\omega(t) = \omega_0$	$v_0 = \omega_0 R$
$\alpha(t) = 0$	$a_T = 0$
	$a_n = \omega_0^2 R$

L'accelerazione normale non cambia il modulo della velocità ma solo il suo verso e direzione!

$$2\pi + \phi_0 = \omega_0 T + \phi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ (simile al moto ormonico)}$$



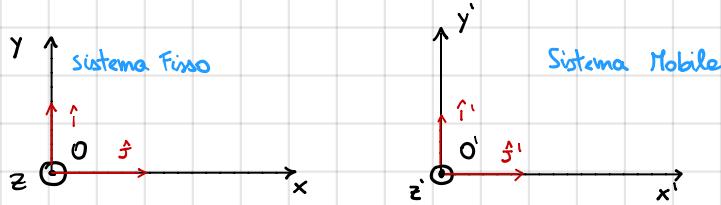
$$\begin{cases} x(t) = R \cos[\phi(t)] \\ y(t) = R \sin[\phi(t)] \end{cases} = R \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{moto ormonico}$$

pulsazione ω_0 2 moti ormonici $[-R, +R]$
sfusi di $\pi/2$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -R \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = R \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 R \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega_0^2 R \sin(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 y(t) \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = -\omega_0^2 x \hat{i} - \omega_0^2 y \hat{j} = -\omega_0^2 (\underline{x} \hat{i} + \underline{y} \hat{j}) = -\omega_0^2 \vec{r} \quad (\text{centripetica})$$

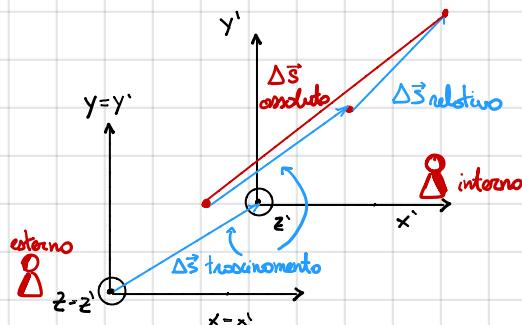


Ogni movimento cinematico, anche complesso, può essere scomposto in moti di traslazione e/o rotazione

MOTO DI TRASCINAMENTO PER TRASLATIONE

L'orientazione degli assi deve rimanere lo stesso di partenza
I versori \hat{i}' e \hat{j}' rimangono inalterati!

Esempio Treno:



$$\frac{\Delta \vec{s}_a}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{s}_r}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{s}_t}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

Ogni vettore a sua volta può essere scomposto sui suoi 3 assi

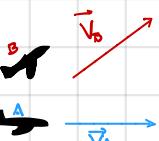
$$\vec{v}_a - (v_{ax} \hat{i} + v_{ay} \hat{j} + v_{az} \hat{k}) = \vec{v}_r + \vec{v}_t - (v_{rx} \hat{i}' + v_{ry} \hat{j}' + v_{rz} \hat{k}') + (v_{tx} \hat{i} + v_{ty} \hat{j} + v_{tz} \hat{k})$$

$$\Rightarrow d/dt \Rightarrow (a_{ax} \hat{i} + a_{ay} \hat{j} + a_{az} \hat{k}) = (a_{rx} \hat{i}' + a_{ry} \hat{j}' + a_{rz} \hat{k}') + (a_{tx} \hat{i} + a_{ty} \hat{j} + a_{tz} \hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

CASO PARTICOLARE: $\vec{v}_t = \text{costante}$ $\vec{a}_t = 0$ sistema inerziale

ES.



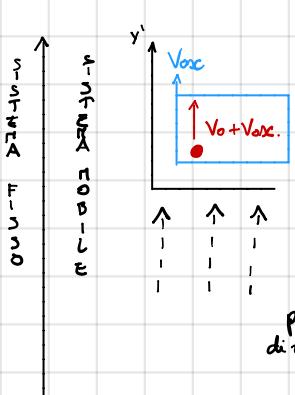
$$\begin{aligned} &\vec{v}_{BA} \\ &\vec{v}_B \\ &\vec{v}_A \end{aligned} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

ossoluta = relativa + trascinamento $\Rightarrow \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

δ osservatore esterno

δ osservatore interno a A

ES lancia moneta in ascensore



SISTEMA MOBILE

$$\vec{a}_a - \vec{a}_r + \cancel{\vec{a}_t} = \vec{a}_r = \vec{g}$$

$$\begin{cases} a_y' = -g \\ V_y' = V_0 - gt \\ y' = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

SISTEMA FISSO

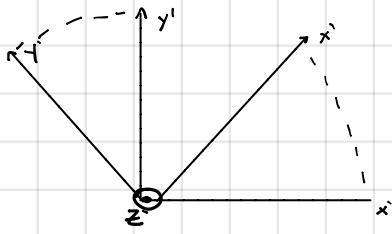
$$\vec{a}_a = \vec{g}$$

$$\begin{cases} a_y = -g \\ V_y = V_0 + V_{oxc} - gt \\ y = (V_0 + V_{oxc}) t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

punto di ritorno

$$\begin{cases} Y_{oxc} = V_{oxc} \cdot t \\ y = (V_0 + V_{oxc}) t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow t^* = \frac{2V_0}{g} \Rightarrow \text{Sistema mobile o fiso è uguale!}$$

MOTO DI TRASCIINAMENTO PER ROTAZIONE



I vertori cambiano l'orientamento (in questo caso non \hat{z})

$$\Delta \vec{s}_a = \Delta \vec{s}_r + \Delta \vec{s}_e$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e ?$$

$$= \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= (V_{rx} \hat{i} + V_{ry} \hat{j} + V_{rz} \hat{k}) = (V_{rx} \hat{i}' + V_{ry} \hat{j}' + V_{rz} \hat{k}') + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow d/dt$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow (\alpha_{ax} \hat{i} + \alpha_{ay} \hat{j} + \alpha_{az} \hat{k}) = \vec{\alpha}_a$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \cancel{(\vec{\omega} \times \vec{r})} - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

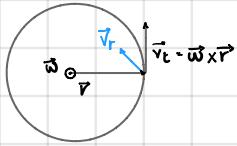
$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{d}{dt}(V_{rx} \hat{i}') = \frac{dV_{rx}}{dt} \hat{i}' + \frac{d\hat{i}'}{dt} V_{rx} = \left(\frac{dV_{rx}}{dt} \hat{i}' + \frac{dV_{ry}}{dt} \hat{j}' + \frac{dV_{rz}}{dt} \hat{k}' \right) + \left(V_{rx} \frac{d\hat{i}'}{dt} + V_{ry} \frac{d\hat{j}'}{dt} + V_{rz} \frac{d\hat{k}'}{dt} \right)$$

Orientati di Poisson: $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}' \Rightarrow (V_{rx} \vec{\omega} \times \hat{i}' + V_{ry} \vec{\omega} \times \hat{j}' + V_{rz} \vec{\omega} \times \hat{k}') = \vec{\omega} \times (V_{rx} \hat{i}' + V_{ry} \hat{j}' + V_{rz} \hat{k}')$

a trascinamento a complementare di Coriolis

$$\vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_r + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega}^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \right)$$

a centrifuga



$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_{t_1} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\ \vec{\alpha}_{t_2} &= -\vec{\omega}^2 \vec{r} \\ \vec{\alpha}_{t_3} &= 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r \end{aligned} \right\} + \vec{\alpha}_r = \vec{\alpha}_a$$

DINAMICA (DEL PUNTO MATERIALE)

Studio delle cause (forze) del moto

CAUSA → EFFETTO

FORZA $F \rightarrow$ ACCELERAZIONE \ddot{a}

massa inertiola

2° Princípio della Dinamica: $\sum \vec{F} = m \cdot \ddot{a}$ [N = kg m/s²]

Risultante delle forze

$\Rightarrow \ddot{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$: L'accelerazione è direttamente proporzionale alla somma delle forze e inversamente proporzionale alla massa inertiola

Il tutto si basa su sistemi fissi (inertioli) non mobile!

$\sum F_x = m a_x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$
 $\sum F_y = m a_y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$ Es Una macchina che accelera vista da fuori è un sistema inertiola
 $\sum F_z = m a_z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$ I pedoni che "si muovono" visti da dentro la macchina no!

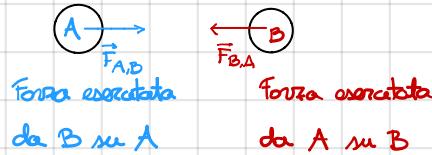
1° Princípio della Dinamica

In un sistema di riferimento **inertiola**, ogni corpo in assenza di forze esterne prosegue nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme

Alessenza di forze equivale anche a risultante nulla $\ddot{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{quiete} \\ \vec{v}_0 & \text{moto rettilineo uniforme} \end{cases}$

Tale principio va "letto al contrario": se in assenza di forze un oggetto rimane in quiete o in moto rettilineo uniforme allora ci troviamo in un sistema di riferimento inertiola

3° Princípio della Dinamica (Azione e Reazione)



Ad ogni azione che A esercita su B corrisponde una reazione di B su A, uguale ed opposta diretta lungo lo congiungente i corpi

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

QUANTITÀ DI MOTO $\vec{p} = m \vec{v}$ non costante

$$\vec{F} = m \ddot{a} = m \frac{d(\vec{v})}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

quantià di moto $P = mV$

TEOREMA IMPULSO

$$\vec{F} dt = d\vec{p}$$

impulso elementare

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Indica la variazione di \vec{p}

CONSERVAZIONE QUANTIÀ DI MOTO

$$\text{se } \vec{F} = 0 \quad \text{o} \quad \vec{I} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} \text{ costante}$$

ES



$$t_1 = 0 \text{ s}$$

$$V_1 = 108 \text{ km/s}$$

$$m = 1000 \text{ kg}$$

$$t_2 = 10 \text{ s}$$

$$V_2 = 0 \text{ km/s}$$

$$\vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$P_2 = m V_2 = 0 \quad P_1 = m V_1 = 1000 \cdot 30 = 30000 \text{ kg m/s}$$

$$\rightarrow \vec{I} = -30000 \text{ kg m/s}$$



$$\Rightarrow \vec{I} = \vec{F}_m \Delta t \Rightarrow F_m = \frac{-30000}{10} = -3000 \text{ N}$$

TIPI DI FORZE

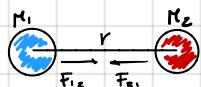
FONDAMENTALI:

- 1) gravitazionali
- 2) elettromagnetiche (Forza Peso)
- 3) nucleare debole
- 4) nucleare forte

DI COSTRATTO

- 1) vincolari (Reazione Normale e Forze di Attrito)
- 2) tensione di una fune
- 3) elastiche
- 4) appunti

GRAVITAZIONE UNIVERSALE



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$F_G = F_{12} = F_{21} = \frac{M_1 M_2}{r^2} G$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{\text{Nm}^2}{\text{Kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{Kg s}^2} \right)$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{(R+h)^2} \stackrel{R \gg h}{\sim} G \frac{m_1 m_2}{R^2} = m \left(G \frac{m_2}{R^2} \right) = mg$$

FORZA PESO

È la forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra sui corpi sulla superficie terrestre. Modulo costante, diretta lungo lo verticale e orientata verso il basso.

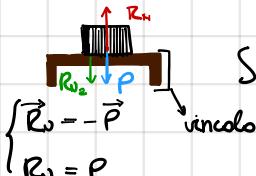
$$\vec{P} = m \vec{g} \quad [\text{N o Kg peso}]$$

La massa viene chiamata anche massa gravitazionale

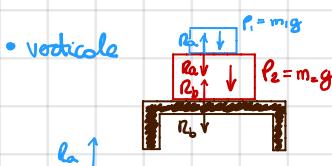
$$m_{\text{grav.}} \vec{g} = m_{\text{massa.}} \vec{a}$$

$$F_{\text{peso}} \quad \text{II principio}$$

FORZA DI REAZIONE VINCOLARE



Sono le forze esercitate dal vincolo sull'oggetto.



$$R_N - m_1 g = 0 \Rightarrow R_N = m_1 g$$

$$R_N - R_N - m_2 g = 0 \Rightarrow R_N = R_N + m_2 g = (m_1 + m_2) g$$

\rightarrow questo è dovuto al terzo principio della dinamica

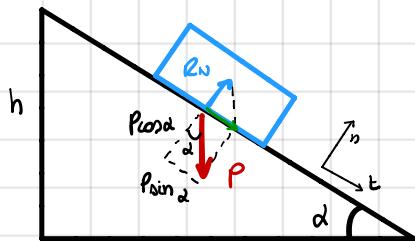
• orizzontale



$$\begin{aligned} ① \quad & \left\{ \begin{array}{l} -P_1 + R_{N1} = 0 \\ -P_2 + R_{N2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow R_{N1} = P_1 \\ ② \quad & \left\{ \begin{array}{l} R_{N1} = P_1 \\ R_{N2} = P_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ASSE } Y & \quad ① \int F - f = m_1 a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{F}{(m_1 + m_2)} \\ f = \frac{(m_2)}{(m_1 + m_2)} F \end{array} \right. \\ \text{ASSE } X & \quad ② \int f = m_2 a \end{aligned}$$

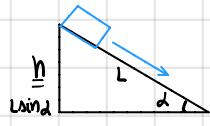
- piano inclinato



In questo caso $\vec{P} + \vec{R}_N \neq 0$
 $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$

Scomponiamo P sulle componenti n e t

$$\begin{aligned} n & \left\{ R_N - P \cos \alpha = m a_n = 0 \rightarrow R_N = mg \cos \alpha \right. \\ t & \left. \begin{aligned} P \sin \alpha &= m a_t \\ \rightarrow mg \sin \alpha &= m a_t \Rightarrow a_t = g \sin \alpha \text{ moto uniformemente accelerato} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



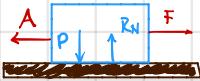
$$\begin{cases} a = g \sin \alpha \\ v = at + \cancel{x} \\ s = at^2/2 + \cancel{x} = L \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2h/\sin \alpha}{g \sin \alpha}} = \boxed{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \end{cases}$$

t costante libera ($\approx \alpha = 90^\circ$)

$$v_{fin} = a t_{fin} = g \sin \alpha \cdot t_{fin} = \sqrt{2gh} \text{ indipendente da } \alpha$$

FORZA DI ATTRITO

Parallela alle superfici di contatto e si oppone al loro movimento relativo.



$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} + \vec{A}_s = 0 \quad \text{caso statico (oggetto rimane fermo)}$$

Per muovere l'oggetto F deve essere maggiore di $A_s \rightarrow F > \mu_s R_N = A_{max}$

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} + \vec{A}_d = m\vec{a} \quad \text{caso dinamico (oggetto si muove)}$$

$$A_s \leq A_{max} = \mu_s R_N$$

$$A_d = \mu_s R_N$$

$$\mu_s > \mu_d$$

es.

$$A_d \xleftarrow[\downarrow P, R_N]{\xrightarrow[V_0]} \quad \text{Dopo quanto tempo si spezza?}$$

Caso dinamico poiché già in movimento (V_0)

$$\text{orizz y: } R_N - P = m a_y = 0 \rightarrow R_N = P$$

$$\text{orizz x: } -A_d = m a_x \quad \text{NB. } A_s \text{ si oppone ad una forza, } A_d \text{ al movimento!}$$

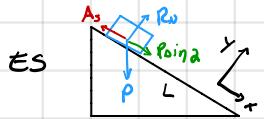
$$a_x = -\frac{A_d}{m} = -\frac{\mu_s R_N}{m} = -\frac{\mu_s m g}{m} = -\mu_s g \quad (\text{decelerazione})$$

$$V = -\mu_s g t + V_0$$

$$S = V_0 t - \frac{1}{2} \mu_s g t^2$$

$$T_{fin} \rightarrow V = 0 \rightarrow t_{fin} = \frac{V_0}{\mu_s g}$$

$$S_{fin} = S(t_{fin}) \rightarrow S_{fin} = V_0^2 / 2 \mu_s g$$



$$R_N - P \cos \alpha = m a_{x2} = 0 \Rightarrow R_N = P \cos \alpha$$

$$P \sin \alpha - A_s = m a_{y2} = 0 \Rightarrow A_s = P \sin \alpha$$

Verifico che $A_s \leq A_{max} = \mu_s R_N \rightarrow \tan \alpha \leq \mu_s$ Condizione statica

$\tan \alpha > \mu_s$ condizione dinamica

↓

caso y (uguale): $R_N - P \cos \alpha = m a_{y2} = 0 \Rightarrow R_N = P \cos \alpha$

caso x: $P \cos \alpha - A_s = m a_{x2}$ incognita $a_{x2} = \frac{P \sin \alpha - A_s}{m} = \frac{mg \sin \alpha - \mu_s mg \cos \alpha}{m} = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)$

$a = g \sin \alpha (1 - \frac{\mu_s}{\tan \alpha}) > 0 \rightarrow$ acc. di caduta

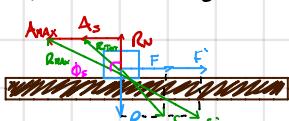
$V = at$

$s = at^2/2 = L$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2h / \sin \alpha}{g \sin \alpha (1 - \frac{\mu_s}{\tan \alpha})}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_s}{\tan \alpha}}}$$

$$V = at = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{\mu_s}{\tan \alpha}}$$

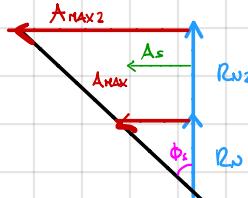
Supponiamo il seguente esempio



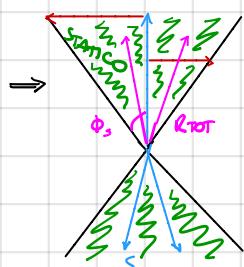
$$(\vec{P} + \vec{F}) + (R_N + A_s) = 0$$

S è il vettore delle sollecitazioni, mentre R_{rot} quello delle reazioni vincolari

$$\tan \phi_s = \frac{A_{max2}}{R_N} = \frac{\mu_s R_N}{R_N} = \mu_s \Rightarrow$$



All'interno del cono siamo sempre nel caso statico poiché $A_s \leq A_{max}$

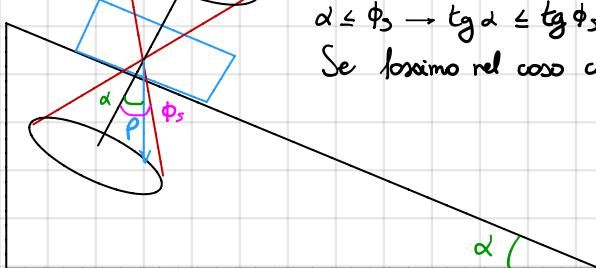


Questo è valido per entrambi i versi!

Lo forza peso basta per far muovere l'oggetto? No perché sta dentro il cono.

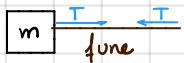
$$\alpha \leq \phi_s \rightarrow \tan \alpha \leq \tan \phi_s = \mu_s \rightarrow \tan \alpha \leq \mu_s$$

Se fosimo nel caso contrario $\tan \alpha > \mu_s$ il corpo sarebbe nel caso dinamico.



TENSIONE DELLA FUNE

FUNE: filo inestensibile che sviluppa forze uguali ed opposte ai suoi capi chiamate tensioni T



Lo tensione può cambiare direzione mediante l'uso di corrucole



$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = m\ddot{\alpha} \quad \text{mo } m \text{ è trascurabile} \rightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B \rightarrow F_A = F_B = T$$

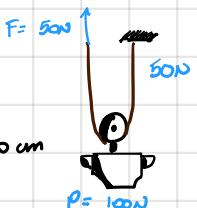
Nel caso in cui usiamo delle corrucole dovrà comunque avere come "risultante 0":



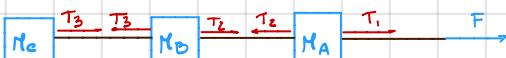
Nel caso di corrucole fisse l'unico vantaggio è cambiare la direzione della forza

con una (o più) corrucole mobili (finte cioè al peso) posso distribuire i carichi:

N.B. Il rapporto P/F è uguale a $\frac{\text{portamento corruco}}{\text{corda tirata}}$ (es. $P=100$ $F=50$, per dritore di 10 cm il corruco dovrà tenere 20 cm di fune)



ES.



NO attrito \rightarrow solo forze orizzontali

$$T_1 = F$$

$$\text{Forze agenti su } M_A: T_1 - T_2 = M_A a$$

$$\text{Forze agenti su } M_B: T_2 - T_3 = M_B a$$

$$\text{Forze agenti su } M_C: T_3 = M_C a$$

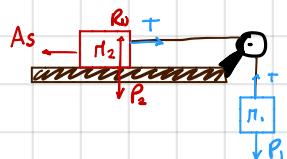
} ovviamente a è uguale per tutti!

$$\Rightarrow T_1 - a(M_1 + M_2 + M_3) \rightarrow a = \frac{F}{M_1 + M_2 + M_3}$$

$$T_3 = \left(\frac{M_C}{M_1 + M_2 + M_3} \right) F = \left(\frac{M_C}{M_{\text{TOT}}} \right) F$$

$$T_2 = T_3 + M_B a = \left(\frac{M_C}{M_{\text{TOT}}} \right) F + \left(\frac{M_B}{M_{\text{TOT}}} \right) F = \left(\frac{M_B + M_C}{M_{\text{TOT}}} \right) F$$

ES (caso statico con attrito)



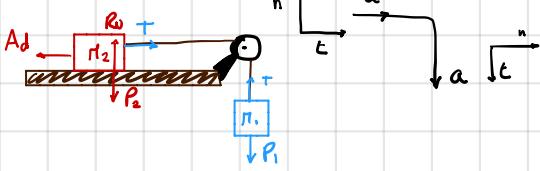
$$\begin{aligned} M_1: & T = P_1 \\ M_2: & \begin{cases} R_N = P_2 \\ A_s = T \end{cases} \end{aligned}$$

$$A_s = T = P_1$$

$$\Rightarrow A_s \leq A_{\text{max}} = \mu_s R_N = \mu_s P_2 \Rightarrow P_1 \leq \mu_s P_2 \Rightarrow M_1 g \leq M_2 g \mu_s \Rightarrow M_1 \leq \mu_s M_2$$

N.B. queste sono condizioni solo per il caso statico

(caso dinamico $M_1 > M_2 = M_d$)

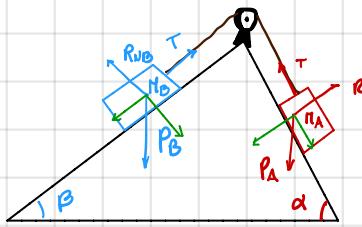


$$\begin{aligned} M_2: & \begin{cases} R_N = P_2 \\ T - Ad = M_2 a \\ n \end{cases} \\ M_1: & P_1 - T = M_1 a \\ t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_1 - Ad = (M_1 + M_2)a \Rightarrow a = \frac{P_1 - Ad}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 g - \mu_d M_2 g}{M_1 + M_2} = g \left(\frac{M_1 - \mu_d M_2}{M_1 + M_2} \right)$$

$$t = P_1 - M_1 a = M_1 \left[g - g \left(\frac{M_1 - \mu_d M_2}{M_1 + M_2} \right) \right] = M_1 g \left(\frac{M_2 (1 + \mu_d)}{M_1 + M_2} \right)$$

ES (pendio doppio senza attrito)



Non avendo ulteriori informazioni iniziamo ipotizzando che sia M_A a trascinare M_B

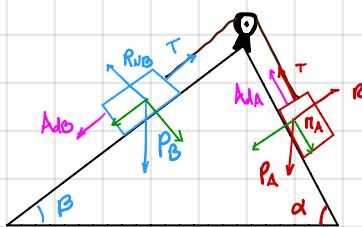
$$\begin{aligned} M_A & \left\{ \begin{array}{l} R_{NA} - P_A \cos \alpha = 0 \\ P_A \cos \alpha - T = M_A a \end{array} \right. \\ M_B & \left\{ \begin{array}{l} R_{NB} - P_B \cos \beta = 0 \\ T - P_B \sin \beta = M_B a \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le equazioni sull'ome in rel. cono senza attrito possiamo direttamente

$$\Rightarrow P_A \sin \alpha - P_B \sin \beta = (M_A + M_B) a \Rightarrow a = \frac{P_A \sin \alpha - P_B \sin \beta}{M_A + M_B} = g \left(\frac{M_A \sin \alpha - M_B \sin \beta}{M_A + M_B} \right)$$

se $M_A \sin \alpha - M_B \sin \beta < 0$ dobbiamo invertire il senso del moto

Se aggiungiamo gli attriti:



$$\begin{aligned} M_A & \left\{ \begin{array}{l} R_{NA} = P_A \cos \alpha \\ -A_d A + P_A \sin \alpha - T = M_A a \end{array} \right. \\ M_B & \left\{ \begin{array}{l} R_{NB} = P_B \cos \beta \\ -A_d B + T - P_B \sin \beta = M_B a \end{array} \right. \end{aligned}$$

Risolvere il sistema come al solito...

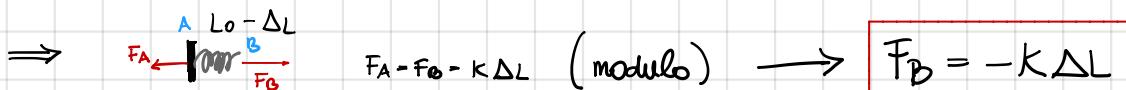
N.B. Introduci bisognava prima studiare il caso statico con le diverse condizioni di staticità

FORZE ELASTICHE

Forze che hanno origine dalla deformazione dei corpi

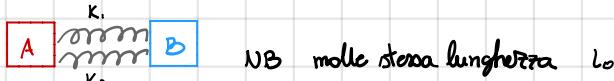


$$F_A = F_B = \text{costante elastica} [N/m] \cdot \Delta L$$

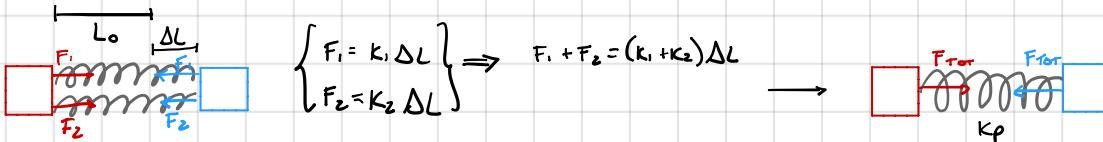


$$F_A = F_B = k \Delta L \quad (\text{modulo}) \rightarrow F_B = -k \Delta L$$

• Configurazione Parallela



NB molle stessa lunghezza L_0



$$\begin{cases} F_1 = k_1 \Delta L \\ F_2 = k_2 \Delta L \end{cases} \Rightarrow F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta L$$



$$F_{\text{TOT}} = K_p \Delta L$$

$$\Rightarrow K_p = \text{costante elastica parallela} = \sum_i^n K_i$$

NB la lunghezza a riposo di tutte le molle deve essere uguale

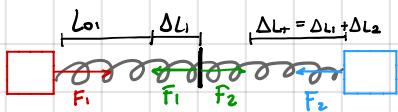
• Configurazione Serie



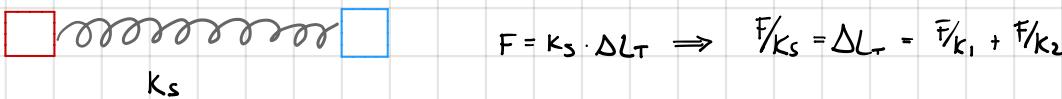
I = punto intermedio privo di mossa

$$\Rightarrow F_1 - F_2 = 0 \rightarrow F_1 = F_2 = F$$

$$\begin{cases} F = K_1 \Delta L_1 \\ F = K_2 \Delta L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta L_1 = F/K_1 \\ \Delta L_2 = F/K_2 \end{cases}$$



$$\Delta L_T$$



$$F = K_s \cdot \Delta L_T \Rightarrow F/K_s = \Delta L_T = F/k_1 + F/k_2$$

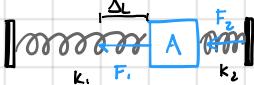
$$K_s$$

$$\Rightarrow \frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \rightarrow K_s = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

ES



NB caso contrario al precedente, I=A non è privo di mossa

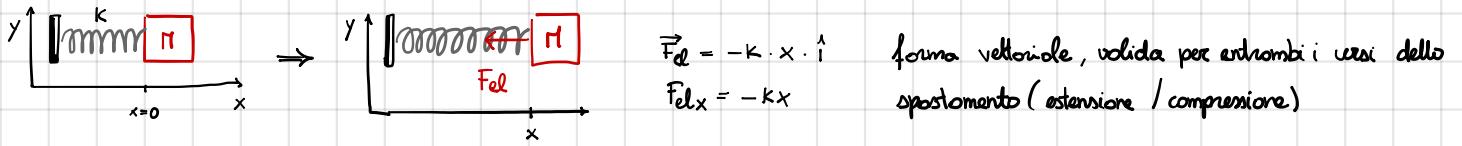


ΔL è sia la compressione della molla 2 sia l'allungamento della molla 1
Le forze applicate alle positi (oggetti fissi) vengono trascurate

$$\begin{cases} F_1 = k_1 \Delta L \\ F_2 = k_2 \Delta L \end{cases} \Rightarrow F_T = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2) \Delta L$$

come il caso parallelo





$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$
 $\begin{cases} R_N = P \\ F_{elx} = ma_x \Rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$

NB eq. differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ lineare, 2° ordine

- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$
- $\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} e^{(\alpha t)} = A\alpha e^{\alpha t} = dx$
- $\frac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t} = \alpha^2 x$

$\Rightarrow \alpha^2 x + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow (\alpha^2 + \frac{k}{m})x = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{k}{m} = 0 \rightarrow \alpha^2 = -\frac{k}{m} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$

$$x(t) = A e^{(\alpha_1 t)} + B e^{(\alpha_2 t)} = A e^{(i\omega_0 t)} + B e^{(-i\omega_0 t)}$$

$$e^{(i\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)$$

$$e^{(-i\omega_0 t)} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t) = \overline{e^{(i\omega_0 t)}} \text{ coniugati}$$

$$\bar{x}(t) = \overline{A e^{(i\omega_0 t)} + B e^{(-i\omega_0 t)}} = \bar{A} e^{(-i\omega_0 t)} + \bar{B} e^{(i\omega_0 t)} = x(t) \rightarrow A = \bar{B} = \frac{C}{2} e^{(i\phi)}$$

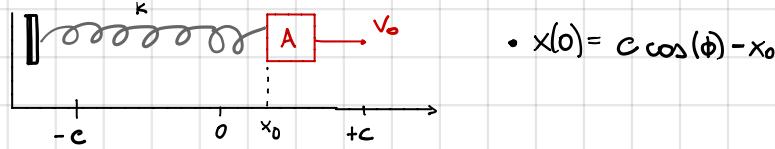
$$x(t) = C/2 e^{(i\omega_0 t + i\phi)} + \frac{C}{2} e^{(-i\omega_0 t - i\phi)} = \frac{C}{2} [e^{i(\omega_0 t + \phi)} + e^{-i(\omega_0 t + \phi)}] = \frac{C}{2} 2 \cos(\omega_0 t + \phi) = C \cos(\omega_0 t + \phi)$$

fase iniziale
 moto ormonico
 comp. opea
 pulsazione $\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right)$$

Rimangono C e ϕ incognite.

Supponiamo di partire la molla a x_0 e di darle un'ulteriore velocità iniziale v_0

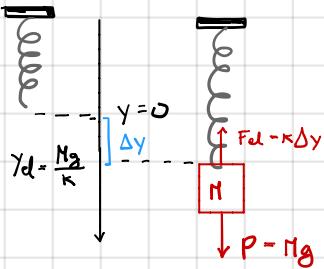


Dato $x(t) \rightarrow v(t) = -\omega C \sin(\omega_0 t + \phi) \rightarrow v(0) = -\omega C \sin \phi = v_0$

$$\begin{cases} C \cos \phi = x_0 \\ C \sin \phi = -v_0/\omega_0 \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = \text{ampiezza massima}$$

$$\tan \phi = \frac{-v_0}{\omega x_0} (+\pi) = \text{fase iniziale}$$

OSCILLAZIONI LIBERE IN VERTICALE



In questo caso la posizione di equilibrio viene postata da 0 a y_0 dal peso attaccato alla molla

Spostando ulteriormente verso il basso il peso, F_{el} aumenterà e genererà il moto compensando P . (condizione fuori equilibrio)

In condizioni fuori equilibrio (y generica)

$$P + F_{\text{el}} - m\ddot{y} \rightarrow mg + F_{\text{el}} - m\ddot{y} = m\ddot{y} - k y - m \frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)y = g \quad \text{NON omogenea}$$

Soluzione $y(t) = Y_{\text{omogenea}} + y_{\text{particolare}}$

$y_{\text{particolare}}$:

$$\text{Se ipotizziamo costante} \rightarrow y_{\text{part.}} = \frac{mg}{k}$$

y_{omogenea} :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)y = 0 \rightarrow \ddot{a} + \left(\frac{k}{m}\right)a = 0 \rightarrow a = \pm i\omega_0 \quad \text{come nel caso orizzontale}$$

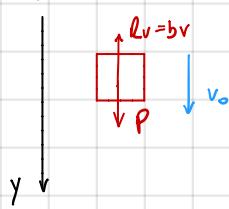
$$\Rightarrow y_{\text{omo}} = C \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow y = \frac{mg}{k} + C \cos(\omega t + \phi) \quad \text{le oscillazioni in pratica sorgeranno intorno alla nuova posizione di equilibrio}$$

RESISTENZA DEL MEZZO - FORZE VISCOSCE



$$R_v = b v \quad \vec{R}_v = -b\vec{v} \quad \text{A differenza dell'altro, questa forza non è costante}$$



$$\vec{P} + \vec{R}_v = m\vec{a} \rightarrow mg - bv_y = m a_y \rightarrow a_y + \frac{b}{m} v_y = g \rightarrow \frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right) v_y = g \quad \text{lineare non omogenea}$$

Soluzione particolare: $v_p = \frac{mg}{b}$

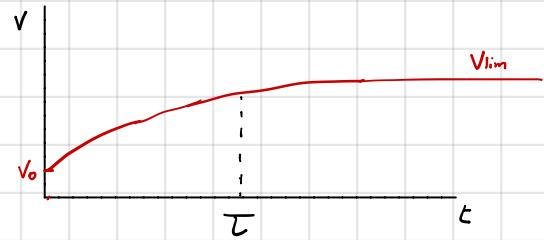
Soluzione omogenea: $v_{om} = A e^{(at)}$ $\rightarrow a + \frac{b}{m} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{m} \rightarrow v_{om} = A e^{(-bt/m)}$

$$\Rightarrow v_y(t) = A e^{(-bt/m)} + \frac{mg}{b} \quad \rightarrow v_y(t) = (v_0 - \frac{mg}{b}) e^{(-bt/m)} + \frac{mg}{b}$$

$$v(0) = A + \frac{mg}{b} = v_0 \rightarrow v_0 - \frac{mg}{b} = A$$

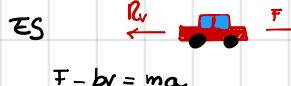
se $\frac{mg}{b} = v_{limite}$ e $\frac{m}{b} = \tau \Rightarrow v_y(t) = (v_0 - v_{lim}) e^{(-t/\tau)} + v_{lim}$

τ è il tempo in cui la velocità inizia a tendere al suo valore limite v_{lim}



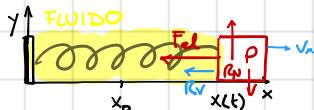
Da $\frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right) v_y = g$ posso ponere a $\frac{dv_y}{dt} - \left(\frac{b}{m}\right) \left(v_y - \frac{mg}{b}\right) = -\left(\frac{b}{m}\right) (v_y - v_{lim})$
 $\Rightarrow \frac{dv_y}{v_y - v_{lim}} = -\left(\frac{b}{m}\right) dt \rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv_y}{v_y - v_{lim}} = -\left(\frac{b}{m}\right) dt \rightarrow \ln \frac{v_y - v_{lim}}{v_0 - v_{lim}} = -\left(\frac{b}{m}\right) dt \rightarrow \frac{v_y - v_{lim}}{v_0 - v_{lim}} = e^{-\left(\frac{b}{m}\right) dt}$

$$\Rightarrow v_y(t) = (v_0 - v_{lim}) e^{(-t/\tau)} + v_{lim} \quad \text{come prima}$$



Possiamo semplicemente trovare lo v_{lim} supponendo che in quel momento $a = 0$
 $\rightarrow F = bv \rightarrow v = F/b$

OSCILLAZIONI SMORZATE



$$P + R_w + F_d + R_v = m\ddot{x}$$

$$\begin{aligned} y \\ x \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} P = R_w \\ F_d + R_w - m\ddot{x} = -kx - bv = m\ddot{x} \end{array} \right. \rightarrow -kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \quad \text{eq. differenziale}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{sol. omogenea: } a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}$$

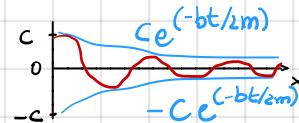
- $\Delta > 0 \rightarrow b^2 > 4mk \rightarrow 2$ soluzioni reali distinte negative
- $\Delta = 0 \rightarrow b^2 = 4mk \rightarrow 1$ soluzione reale negativa
- $\Delta < 0 \rightarrow b^2 < 4mk \rightarrow 2$ soluzioni complesse coniugate

• $\Delta < 0$ oscillazioni sottemorzate

$$a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \text{pulsazione oscillazioni smorzate } \omega'$$

$$\Rightarrow \text{soluzione: } x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} + B e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t) \rightarrow x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[A e^{i\omega' t} + B e^{-i\omega' t} \right]$$

$$\text{Poiché } A = \bar{B} = \frac{C}{2} e^{i\phi} \rightarrow x(t) = C e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t + \phi)$$



• $\Delta > 0$ oscillazioni sovramorzate

$$\sqrt{\Delta} = \gamma \rightarrow a = -\left(\frac{b}{2m}\right) \pm \gamma \rightarrow x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} + B e^{-\left(\frac{b}{2m} + \gamma\right)t} \quad \text{assenza di oscillazioni}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[A e^{(\gamma t)} + B e^{(-\gamma t)} \right]$$

• $\Delta = 0$ smorzamento critico

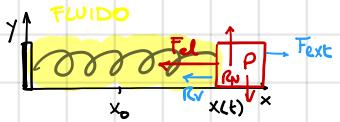
$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} (A + Bt) \rightarrow \text{per non perdere generalità trasformiamo il secondo membro in un polinomio di } 1^\circ \text{ grado}$$

$$\rightarrow e^{-\frac{b}{2m}t} (A + Bt) \quad \begin{array}{c} \text{e}^{-\frac{b}{2m}t} \\ \text{e}^{(\frac{-b}{2m})t} \end{array}$$

$$(A + Bt) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Nella pratica si cerca di evitare al terzo caso...

OSCILLAZIONI FORZATE



$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_{dL} + \vec{R}_V + \vec{F} = m\vec{a}$$

(rispetto al caso precedente abbiamo una nuova forza)

$$\begin{cases} R_N = P \\ F_{dL} + R_{Nx} + F = m a_x \rightarrow -Kx - bV_x + F = m a_x \rightarrow -Kx - b \frac{dx}{dt} + F = m \frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{Kx}{m} = \frac{F}{m} \quad \text{eq. differenziale lineare non omogenea}$$

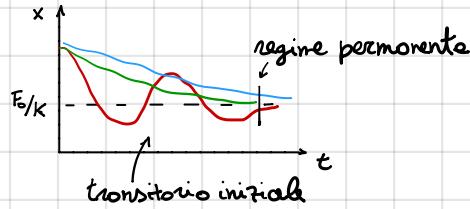
$$x(t) = x_{omo} + x_{pert.}$$

x_{omo} è identico ai casi precedenti: ($\Delta \approx 0$)

Per x_{pert} bisogna vedere di che F parliamo....

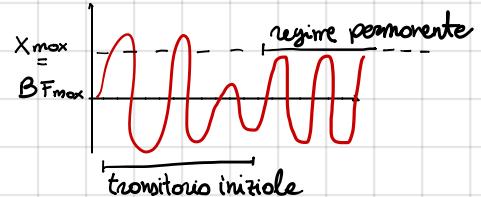
• $F_{ext} = F_0$ forza costante:

$$X_{pert \text{ costante}} \rightarrow \frac{K}{m} X_{pert} = \frac{F_0}{m} \rightarrow X_{pert} = \frac{F_0}{K}$$

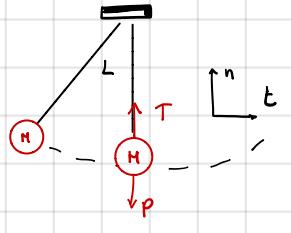


• $F_{ext} = F_{max} \cos(\omega_{ext} t)$ forza ormonica

$$X_{pert} \text{ segue la forza esterna} \rightarrow X_{pert}(t) = B F_{max} \cos(\omega_{ext} t - \phi)$$



PENDOLO SEMPLICE



Il pendolo è in equilibrio in verticale $\rightarrow T = P = mg$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T - P \cos\theta = man = m v^2/L \\ -P \sin\theta = ma_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = m(g \cos\theta + v^2/L) \end{cases}$$

$$t \left\{ -g \sin\theta = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{NB. } \theta \text{ non è costante nel tempo!} \right.$$

$$\text{Nel moto circolare } s(t) = \theta(t) \cdot L \rightarrow -g \sin\theta = \frac{d^2(\theta L)}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T = m(g \cos\theta + v^2/L) \\ -g \sin\theta = L \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \text{ non lineare! ma per } \theta < \pi/12 \sin\theta \sim \theta \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \text{ onologo alla molla}$$

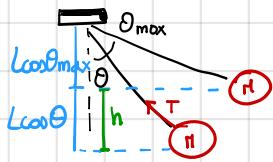
$$\rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ come per la molla ma con } c = \theta_{\max} \text{ e } m = l$$

Per piccoli angoli il periodo non è dipendente dall'angolo di partenza

$$s(t) = s_{\max} \cos(\omega_0 t + \phi) \text{ poiché orchi ed angoli sono simili.}$$

Nell'equazione lungo l'asse n v^2 è incognita.... supponiamo però che dipende dall'altura (vedi piano inclinato):

$$v(\theta) = \sqrt{2gh}$$

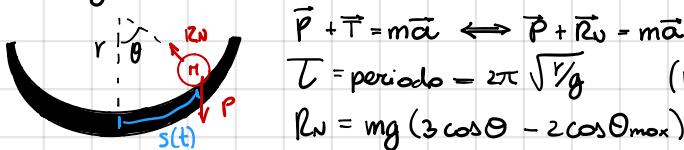


$$h = L \cos\theta - L \cos\theta_{\max} = L(\cos\theta_{\max} - \cos\theta)$$

$$\rightarrow v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}$$

$$\rightarrow T = mg(3 \cos\theta - 2 \cos\theta_{\max}) \quad \text{Tensione all'angolo } \theta \text{ (non } \theta_{\max} \text{) che combina con esso!}$$

Analogamente:



$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \iff \vec{P} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

$$T = \text{periodo} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (r al posto di L)$$

$$R_n = mg(3 \cos\theta - 2 \cos\theta_{\max})$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE (MOBILE)

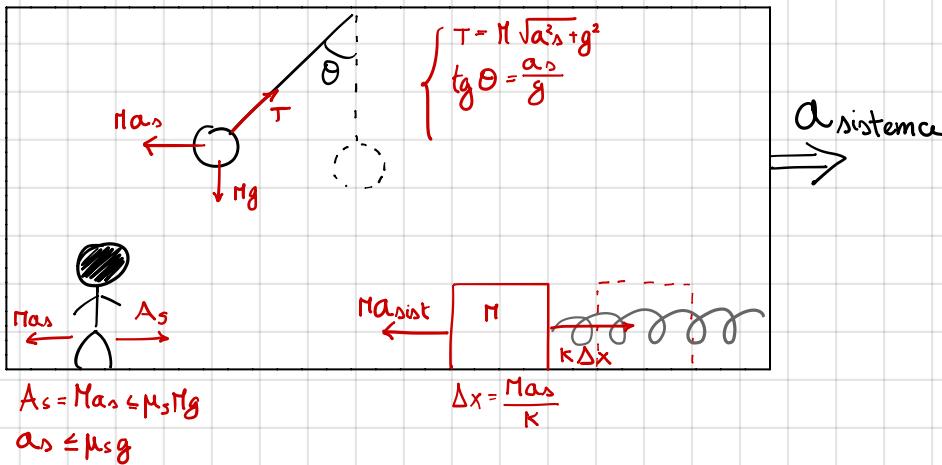
• Traslozione

$$\begin{aligned} \cdot \Delta \vec{s}_a &= \Delta \vec{s}_r + \Delta \vec{s}_t \\ \cdot \vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_t \\ \cdot \vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{a}_t \end{aligned}$$

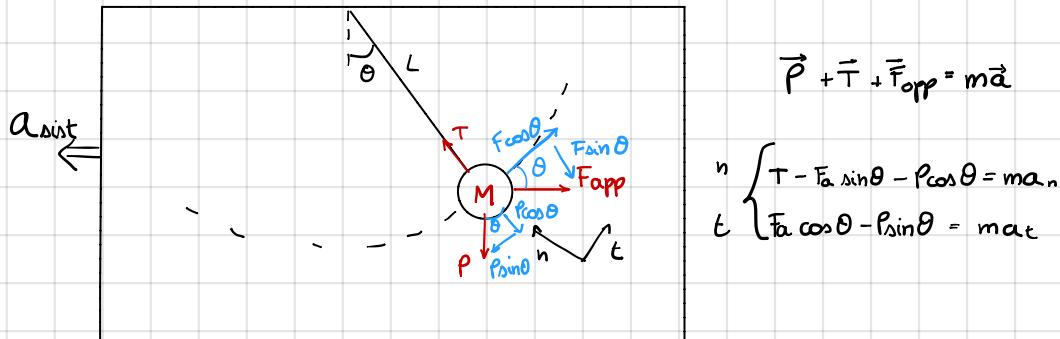
osservato = relativo + traslozione

$$\Rightarrow m \vec{a}_a = m \vec{a}_r + m \vec{a}_t$$

$$m \vec{a}_a = \sum \vec{F} \rightarrow \sum \vec{F} - m \vec{a}_t = m \vec{a}_r \rightarrow \sum \vec{F}_{\text{reale}} - \sum \vec{F}_{\text{oppone}} = m \vec{a}_r$$



Pendolo non inerziale :



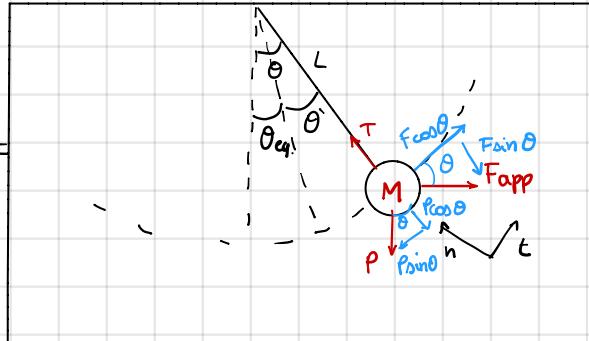
Nel caso di "nuovo" equilibrio $m \vec{a} = 0$ in entrambe le funzioni ...

$$\begin{cases} T - F_a \sin \theta_{\text{eq}} - P \cos \theta_{\text{eq}} = 0 \\ F_a \cos \theta_{\text{eq}} - P \sin \theta_{\text{eq}} = 0 \end{cases} \rightarrow \tan \theta_{\text{eq}} = \frac{F_a}{P} = \frac{m a_s}{m g} = \frac{a_s}{g}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t \rightarrow \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t \rightarrow \vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_s$$

come detto prima!

$\begin{cases} g = g' \cos \theta_{\text{eq}} \\ a_s = g' \sin \theta_{\text{eq}} \end{cases} \rightarrow \tan \theta = \frac{a_s}{g}$



Supponiamo ora di muovere il pendolo oltre l'angolo θ_{eq} .

$$\begin{cases} T - F_a \sin \theta - P \cos \theta = m a_n \\ F_a \cos \theta - P \sin \theta = m a_t \end{cases}$$

$$t: m a_n \cos \theta - m g \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \rightarrow g' \sin \theta_{\text{eq}} \cos \theta - g' \cos \theta_{\text{eq}} \sin \theta = \frac{d^2 s}{dt^2} \rightarrow -g' (\cos \theta_{\text{eq}} \sin \theta - \sin \theta_{\text{eq}} \cos \theta) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -g' \sin(\theta - \theta_{\text{eq}}) = \frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \theta = \theta_{\text{eq}} + \frac{d^2 \theta}{L dt^2} + (\theta_{\text{eq}}) \sin \theta = 0$$

per $\theta' < \pi/12 \rightarrow \sin \theta' \sim \theta' \Rightarrow T = 2\pi/\omega' = 2\pi \sqrt{L/g'}$

$$\theta(t) = \theta_{\text{max}} \cos(\omega' t + \phi) + \theta_{\text{eq}}$$

• Rotazione

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha}_{t_1} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\ \vec{\alpha}_{t_2} = -\omega^2 \vec{r} \\ \vec{\alpha}_{t_3} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \end{array} \right\} + \vec{\alpha}_r = \vec{\alpha}_a \quad \Rightarrow \vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_r + (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$$

Moltiplichiamo per m:

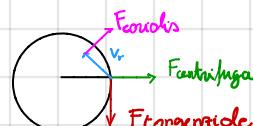
$$\sum \vec{F}_{\text{reale}} = m \vec{\alpha}_r + m(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \rightarrow (-m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + m\omega^2 \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r) + \sum \vec{F}_{\text{reale}} = m \vec{\alpha}_r$$

$F_{\text{centrifuga}}: mw^2 \vec{r}$

$F_{\text{tangenziale}}: -m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$

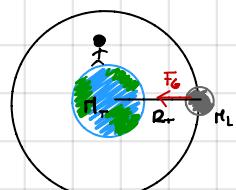
$F_{\text{coriolis}}: -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$

} \vec{F}_{opposti}



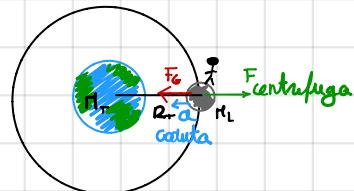
ES

caso inerziale



$$F_G = G \frac{M_T M_L}{R^2} = M_L a_L = M_L \frac{V_L^2}{R} = M_L \omega^2 R \rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}} \\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} = 28 \text{ giorni} \end{cases}$$

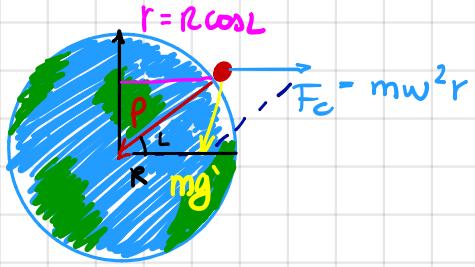
caso non inerziale:



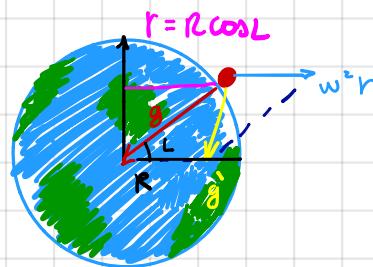
$$F_C = M_L \frac{V_L^2}{R} = M_L \omega^2 R$$

$$F_G - F_C = M_L a_r \text{ a caduta} \quad \text{ma supponiamo che la luna "non cade" } \rightarrow a_r = 0 \rightarrow F_G - F_C = 0 \rightarrow G \frac{M_T M_L}{R^2} - M_L \omega^2 R = 0 \quad \text{NB. il secondo membro indica se siamo o meno in un sistema}$$

inerziale: inerziale se a destra dell'uguale, non inerziale se a sinistra



posso dividere per m:



$$g' = \sqrt{g^2 + (w^2 r)^2 - 2 g w^2 r \cos L} \approx \sqrt{g^2 - 2 g w^2 r \cos L} = \sqrt{g^2 \left(1 - \frac{2 w^2 r \cos L}{g}\right)}$$

Poiché $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$ (se ϵ piccolo): $g' \approx g \left(1 - \frac{w^2 r \cos L}{g}\right) = g - w^2 r \cos L = g - w^2 R \cos^2 L$

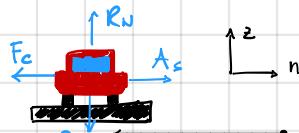
ES

SISTEMA INERZIALE



$$\begin{cases} R_N = P \\ A_s = m a_n = m v^2 / R \end{cases}$$

SISTEMA NON INERZIALE

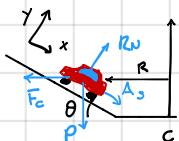


$$\begin{cases} R_N = P \\ A_s = F_f \leq \Delta_{\max} = \mu_s P \end{cases}$$

$$F_f \leq \mu_s P \rightarrow m v^2 / R \leq \mu_s m g \rightarrow v_{\max} \leq \sqrt{\mu_s g R}$$

velocità massima per non uscire di strada

ES. SISTEMA NON INERZIALE



$$\begin{cases} R_N - P \cos \theta - F_f \sin \theta = 0 \rightarrow R_N = P \cos \theta + F_f \sin \theta \\ A_s + P \sin \theta - F_f \cos \theta = 0 \rightarrow A_s = E \cos \theta - P \sin \theta \leq \mu_s R_N \end{cases}$$

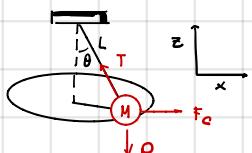
$$\begin{aligned} F_f \cos \theta - P \sin \theta &\leq \mu_s (P \cos \theta + F_f \sin \theta) \rightarrow F_f \cos \theta - \mu_s F_f \sin \theta \leq \mu_s P \cos \theta + P \sin \theta \\ &\rightarrow F_f \leq P (\mu_s \cos \theta + \sin \theta) / (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) \\ &\rightarrow F_f \leq P (\mu_s + \tan \theta) / (1 - \mu_s \tan \theta) \rightarrow F_f \leq P (\tan \phi_s + \tan \theta) (1 - \tan \phi_s \tan \theta) \\ &\rightarrow \frac{v^2}{R} \leq g \left(\frac{\mu_s + \tan \theta}{1 - \mu_s \tan \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{g R \left(\frac{\mu_s + \tan \theta}{1 - \mu_s \tan \theta} \right)}$$

dipendente dall'angolo di inclinazione

$$\text{se } \theta = 0 \text{ torna } v = \sqrt{g \mu_s R}$$

PENDOLO CAJICO



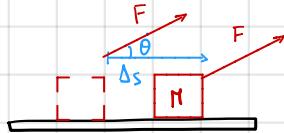
$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_c = 0 \text{ per avere un equilibrio}$$

$$\begin{cases} T \cos \theta - P = 0 \rightarrow T \cos \theta = P \\ F_c - T \sin \theta = 0 \rightarrow T \sin \theta = F_c \\ \Rightarrow \cos \theta = \frac{P}{T} = \frac{g}{\omega^2 L} \end{cases}$$

Poiché $\cos \theta \in \text{compreso tra } 0 \text{ e } 1 \rightarrow \frac{g}{\omega^2 L} \leq 1 \Rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$ velocità angolare minima per questo tipo di rotazione

LAVORO ED ENERGIA

LAVORO = Forza · Spostamento

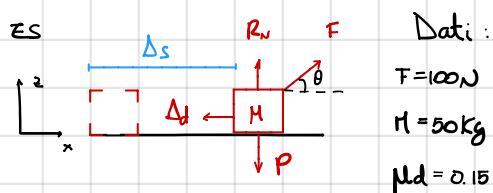
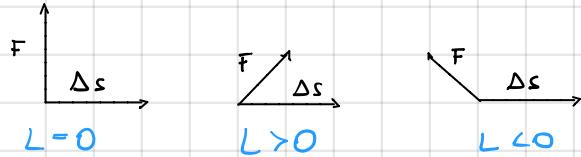


$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \quad (\text{è uno scalare, non un vettore})$$

$= F \cdot \Delta s \cdot \cos \theta$ (angolo compreso tra forza e spostamento)

$$\text{J} = \text{Joule} = \text{Nm}$$

$$L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) (\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \quad (\text{forma alternativa})$$

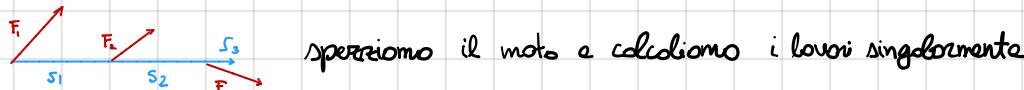


Dati:
 $F = 100 \text{ N}$ $\Delta s = 40 \text{ m}$
 $M = 50 \text{ kg}$ $\theta = 30^\circ$
 $\mu_d = 0.15$

$$\begin{aligned} & R_N + F \sin \theta - P = 0 \rightarrow R_N = P - F \sin \theta \\ & F \cos \theta - \mu_d R_N = ma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} F = 100 \text{ N} \\ P = 490 \text{ N} \\ R_N = 440 \text{ N} \\ Ad = 66 \text{ N} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} L_F = F \cdot \Delta s \cos \theta = 3.5 \text{ kJ} \\ L_P = P \cdot \Delta s \cos 90^\circ = 0 \\ L_{R_N} = R_N \cdot \Delta s \cos 90^\circ = 0 \\ L_{Ad} = Ad \cdot \Delta s \cos 180^\circ = -2.6 \text{ kJ} \end{bmatrix} \Rightarrow L_{\text{TOT}} = \sum L = 0.9 \text{ kJ}$$

Se la forza varia durante il moto



scomponiamo il moto e calcoliamo i lavori singolarmente

$$L_{\text{TOT}} = L_1 + L_2 + L_3 = F_1 s_1 \cos \alpha_1 + F_2 s_2 \cos \alpha_2 + F_3 s_3 \cos \alpha_3$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cos \theta ds \quad \text{LAVORO ELEMENTARE}$$

$$\Rightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = \int_{A,\theta}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{sappiamo che } \vec{V} = \frac{d\vec{s}}{dt} \rightarrow d\vec{s} = \vec{V} dt \rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{V} dt$$

possiamo perciò combinare rotta

$$\int_{A,\theta}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{A,S}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{FORZE NON CONSERVATIVE}$$

(il lavoro varia con lo "direzione")

$$\text{POTENZA} = \frac{dL}{dt} = \frac{\text{lavoro compiuto}}{\text{tempo impiegato}} \quad (\text{potenza istantanea}) = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Watt} = \text{W} = \frac{\text{Joule}}{\text{s}}$$

Il **kilowattora** è invece un'unità dell'energia erogata da una macchina di potenza 1 kW in 1 ora: $1 \text{ kJ} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$

ES



$$V_{lim} = F/b \rightarrow P = F \cdot V_{lim} = F^2/b$$

LAVORO FORZA PESO

$$L_{P_2} = \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \int_1^2 d\vec{s} = \vec{P} \cdot \vec{s}$$

(perché P è costante)

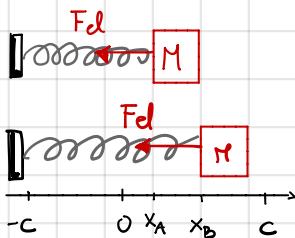
- $\beta = \pi/2 - \alpha \rightarrow L_{P_2} = mg \cdot s \cdot \cos \beta = mg \cdot s \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = mg \sin \alpha$
- $s = h / \sin \alpha \rightarrow L_{P_2} = mg \cdot (h / \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = mg h$ non dipende da α !

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = p \cdot ds \cdot \cos \theta$$

$$= \cancel{P_x} dx + \cancel{P_y} dy + P_z dz = -P_z dz = -mg dz$$

$$\Rightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = mg(z_A - z_B) = mgh$$

LAVORO FORZA ELASTICA

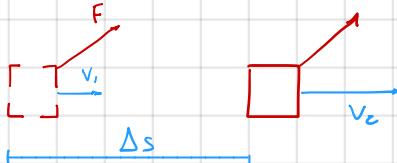


$$dL = \vec{F}_d \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -kx \cdot dx$$

$$L_{AB} = \int_A^B dL = -k \int_{x_A}^{x_B} x dx = -k \left[\frac{1}{2} k x^2 \right]_{x_A}^{x_B} = \frac{k}{2} (x_A^2 - x_B^2)$$

dipende solo da x_A e x_B

LAVORO ED ENERGIA CINETICA



Il lavoro totale (di tutte le forze) causa una variazione di velocità e di conseguenza una variazione di energia cinetica (legato al movimento)

$$L_{TOT} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \text{energia cinetica}$$

$$= K_2 - K_1 = \Delta K$$

Forze:

Spostamento:

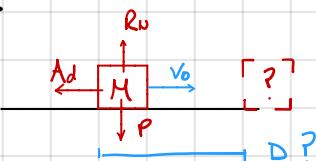
$$\vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad d\vec{s} = \vec{v} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad L_{TOT} = \int dL = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow L_{TOT} = m \int_{V_1}^{V_2} \vec{v} d\vec{v} \Rightarrow d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} d\vec{v} \Rightarrow \frac{m}{2} \int_{V_1}^{V_2} d(\vec{v}^2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta K$$

Alternativa:

$$L_{TOT} = \int dL = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot v dt = m \int_{V_1}^{V_2} \vec{v} d\vec{v} = m \vec{v}_m \int_{V_1}^{V_2} d\vec{v} = m \left(\frac{\vec{V}_2 + \vec{V}_1}{2} \right) \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \Delta K$$

ES



LAVORO:

$$L_P = L_{RN} = 0$$

$$L_A = \int_1^2 \vec{A}_d \cdot d\vec{s} = A_d \cdot D \cdot \cos \pi = -A_d \cdot D = -\mu_d \cdot m \cdot g \cdot D$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{TOT} = -\mu_d \cdot m \cdot g \cdot D \end{array} \right\}$$

ENERGIA

$$K_1 = \frac{mv_0^2}{2}$$

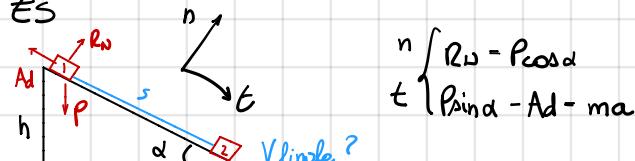
$$K_2 = 0 \quad (\text{perché } V_{finale} = 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta K = -\frac{mv_0^2}{2} \end{array} \right\}$$

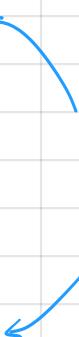
$$\Rightarrow L_{TOT} = \Delta K \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

In entrambi gli esempi non consideriamo il tempo

ES



$$\begin{aligned} & n \int P_{RN} - P_{cos\alpha} \\ & t \int P_{sin\alpha} - Ad - ma \end{aligned}$$



Lavoro:

$$L_P = mgh$$

$$L_{RN} = 0$$

$$L_A = -\mu_d \cdot m \cdot g \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot mgh$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{TOT} = mgh \left(1 - \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \end{array} \right\}$$

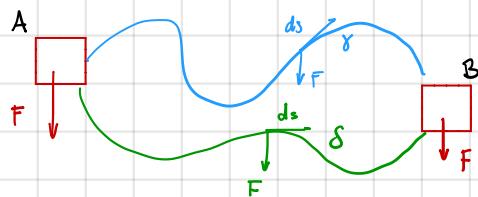
ENERGIA

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = mv_{finale}^2 / 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta K = mv_0^2 / 2 \Rightarrow L_{TOT} - \Delta K \rightarrow V_{finale} = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\alpha} \right)} \end{array} \right\}$$

FORZE CONSERVATIVE

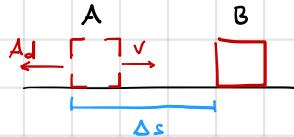


$$\text{Se la forza è conservativa } L_f = \int_A^B d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = L_s$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Nel caso di forze non conservative:



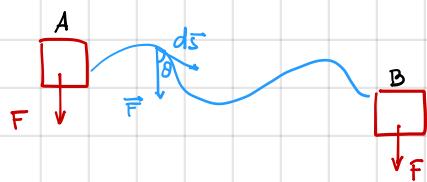
$$L_{AB} = \int_A^B \vec{A}_d \cdot d\vec{s} = -Ad \Delta s$$

se invertito lo spazio:

$$L_{BA} = \int_B^A \vec{A}_d \cdot d\vec{s} = -Ad \Delta s$$

$$L_{TOT} = \oint \vec{A}_d \cdot d\vec{s} = -2Ad \Delta s < 0 \rightarrow \text{non conservativa}$$

ENERGIA POTENZIALE

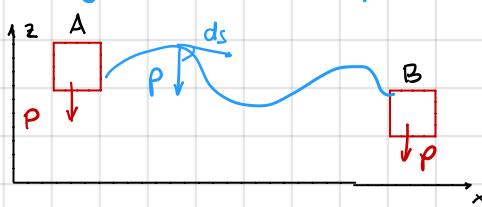


$$F \text{ conservativa} \rightarrow L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = [U(A) - U(B)] = U(x_A, y_A, z_A) - U(x_B, y_B, z_B)$$

$U(x, y, z)$ = integrale della forza = energia potenziale

Per convenzione si impone come variazione "contraria" tra il punto iniziale e finale $\Rightarrow U(A) - U(B) = -\Delta U$

Energia potenziale Forza peso



$$dL = -mg dz \rightarrow L_{AB} = \int_A^B dL = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

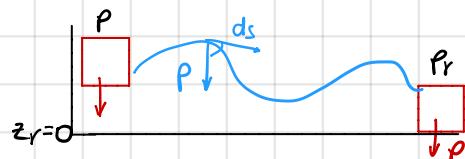
$$\Rightarrow \frac{U_A}{mg z_A} - \frac{U_B}{mg z_B} = U_A - U_B \Rightarrow U(x, y, z) = mg z$$

In realtà $U(x, y, z) = mg z + \text{costante arbitraria}$, come sceglierla?



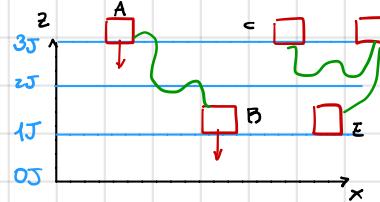
$$L_{pp_r} = U(x, y, z) - U(x_r, y_r, z_r)$$

Impostiamo che il potenziale in P_r sia nullo: $L_{pp_r} = U(x, y, z) = \int_P^{P_r} \vec{F} \cdot d\vec{s}$



$$U(x, y, z) = L_{pp_r} = \int_z^{z_r} -mg z = mg z - mg z_r = mg z - mg z_r = mg z \text{ senza costante}$$

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



$$U(x, y, z) = mgz$$

→ Superfici Equipotenziali: $U(x, y, z) = \text{cost}$ → $z = \text{cost}$

$$L_{AB} = U_A - U_B = 3J - 1J = 2J$$

$$L_{CD} = U_C - U_D = 3J - 3J = 0$$

$$L_{ED} = U_E - U_D = 1J - 3J = -2J$$

$$L_{AB} = -\Delta U$$

$$dL = -dU \Rightarrow \vec{F}_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\Rightarrow F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

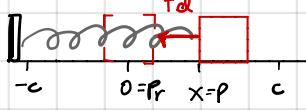
$$\Rightarrow F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\left\{ \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right) \right\}$$

$\nabla = \text{gradiente (nabla)}$

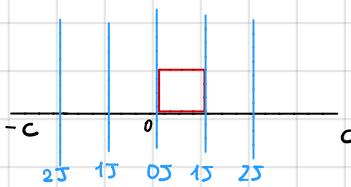
$$\rightarrow \vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

• Energia Potenziale Forza elastica

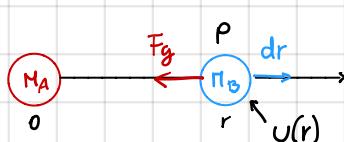


$$U(x, y, z) = L_{pp_r} = \int_x^0 -kx dx = \left[-\frac{kx^2}{2}\right]_x^0 = \frac{kx^2}{2}$$

→ Superficie equipotenziali: $U(x, y, z) = \text{cost}$ → $x^2 = \text{cost}$



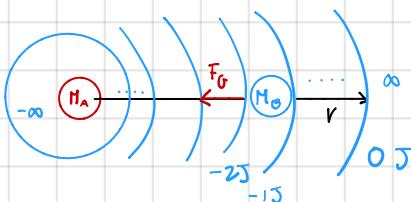
• Energia Potenziale Forza gravitazionale



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_g dr = -G \frac{M_A M_B}{r^2} dr$$

$$U(r) = L_{pp_r} = \int_r^\infty -G \frac{M_A M_B}{r^2} dr = -G M_A M_B \left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{G M_A M_B}{r}$$

→ Superficie equipotenziali: $U(x, y, z) = \text{cost}$ → $r = \text{cost}$



RIEPILOGO

$$\text{Forza Gravitazionale} = F_G = -\frac{GM_A M_B}{r^2} \longrightarrow U^G(r) = -\frac{GM_A M_B}{r}$$

$$\text{Forza Peso} = P = -mg \longrightarrow U^P(z) = mgz$$

$$\text{Forza Elastica} = F_{el} = -kx \longrightarrow U^{el}(x) = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Forza Centrifuga} = F_c = m\omega^2 r \longrightarrow U^c(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$\text{Forza Elettrica} = F_e = \frac{kq_A q_B}{r^2} \longrightarrow U^E = \frac{kq_A q_B}{r} \quad (\text{Spaiare!})$$

CAMPPI DI FORZE CONSERVATIVE



$$L_{tot,c} = K_B - K_A$$

↳ forze di tipo conservativo $L_P + L_d + L_E + \dots = K_B - K_A$

Per ogni L_c vale $L = -\Delta U \rightarrow -\Delta U^P - \Delta U^{el} + \dots = k_B - k_A = (U_A^P - U_B^P) + (U_A^{el} - U_B^{el}) + (\dots) = K_B - K_A$

$$\Rightarrow U_A^P + U_A^{el} + \dots + K_A = K_B + U_B^P + U_B^{el} + \dots \Rightarrow U_A^{tot} + K_A = K_B + U_B^{tot}$$

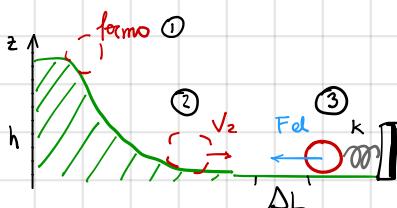
$$U^{tot} + K = E_m = \text{energia meccanica} \rightarrow E_{mA} = E_{mB} \quad \boxed{\text{conservazione energia meccanica}}$$

Quando le forze non sono conservative questo non vale:

$$L_C^{tot} + L_{nc}^{tot} = K_B - K_A \rightarrow (-\Delta U^P - \Delta U^{el} \dots) + L_{nc} = \Delta K \rightarrow L_{nc} = \underbrace{(\Delta U^P + \Delta U^{el} \dots)}_{\Delta E_m} + \Delta K$$

$$L_{nc} = \Delta E_m = E_{mB} - E_{mA} \quad \text{NON c'è conservazione di energia!}$$

ES.



$$\begin{aligned} E_{m1} &= U_1^P + U_1^{el} + K_1 \\ &= mgh \end{aligned}$$

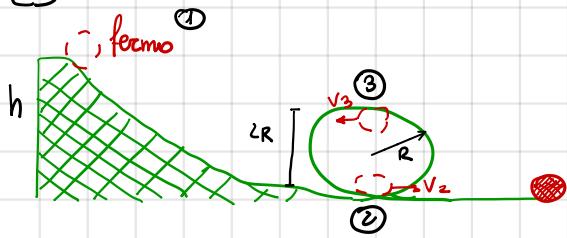
$$\begin{aligned} E_{m2} &= U_2^P + U_2^{el} + K_2 \\ &= mv_2^2/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{m3} &= U_3^P + U_3^{el} + K_3 \\ &= K\Delta L^2/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{m1} &= E_{m2} \rightarrow mgh = mv_2^2/2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \\ E_{m1} &= E_{m3} \rightarrow mgh = K\Delta L^2/2 \rightarrow \Delta L = \sqrt{2mgh}/K \end{aligned}$$

} caso senza attrito o altre forze non conservative

ES

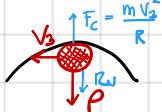


- no attrito

- traiore h sufficiente per fare il giro della montagna

$$\begin{aligned} \bar{E}_{m1} &= U_1^P = mgh \\ E_{m2} &= K_2 = \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow v_e = \sqrt{zgh}$$

$$E_{m3} = U_3^P + K_3 = 2mgR + \frac{mv_3^2}{2} \rightarrow E_{m1} - E_{m2} \rightarrow h = 2R + \frac{v_3^2}{2g}$$

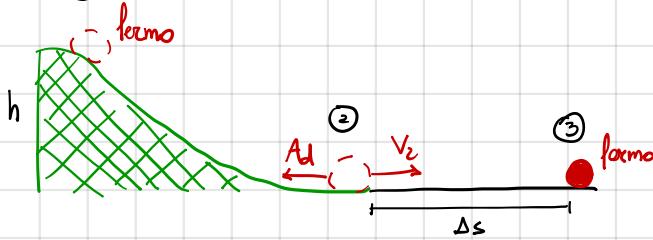


Rw in questo caso ho R stesso verso di P!

$$\rightarrow \frac{mv_3^2}{R} = mg + R_w \rightarrow \text{il caso limite è quando } R_w = 0 \text{ ovvero la palla sta per cadere}$$

$$\rightarrow v_3 = \sqrt{gR} = v_3 \text{ minima} \rightarrow h_{\min} = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$$

ES ①



- si ottiene (dopo la discesa)

- traiore Δs

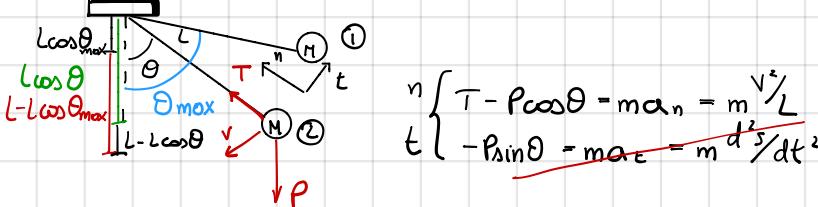
$$\begin{aligned} E_{m1} &= mgh \\ E_{m2} &= \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow v_2 = \sqrt{zgh}$$

$$E_{m3} = 0$$

Tra ① e ② non vi è dissipazione di energia, ma tra ① e ③ (o ② e ③) sì:

$$L_A = E_{m3} - E_{m1} = \Delta E_m \rightarrow -Ad \cdot \Delta s = -mgh \rightarrow \Delta s = \frac{mgh}{Ad} = \frac{h}{Ad}$$

ES

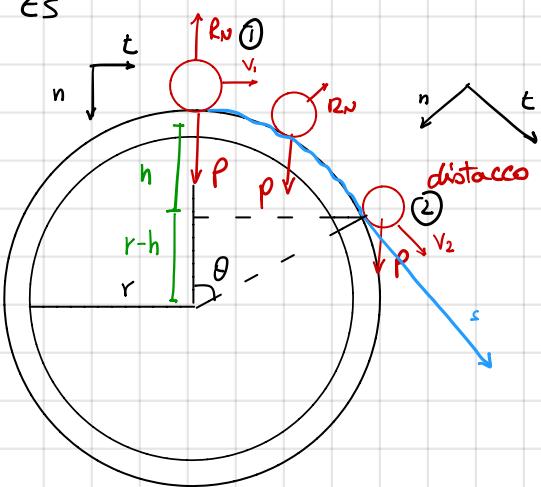


$$\begin{aligned} T - P \cos \theta &= ma_n = m \frac{v^2}{L} \\ -P \sin \theta &= ma_c = m \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}$$

$$\begin{aligned} E_{m1} &= mgL(1 - \cos \theta_{\max}) \\ E_{m2} &= mgL(1 - \cos \theta) + \frac{mv^2}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow E_{m1} = E_{m2} \rightarrow \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_{\max})} \rightarrow T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{\max})$$

ES



$$\begin{aligned} n \int P \cos \theta - R_N = m a_n &= m v_i^2 / r \\ t \int P \sin \theta = m a_t &= m d^2 s / dt^2 \rightarrow m g \cos \theta = \frac{m d^2(r \theta)}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \left(\frac{g}{r}\right) \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{m1} &= mgh + \frac{mv_i^2}{2} \\ E_{m2} &= mg(r-h) + \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned} \right\} E_{m1} = E_{m2} \rightarrow v_2 = \sqrt{v_i^2 + 2gh}$$

$$\rightarrow R_N = P \cos \theta - m \frac{v_2^2}{r} = mg \left(\frac{r-h}{r} \right) - m \frac{(v_i^2 + 2gh)}{r} = \frac{m}{r} [g(r-2h) - v_i^2]$$

$$\text{Quando } R_N = 0 \rightarrow h \text{ distacco} = \frac{r}{3} - \frac{v_i^2}{3g}$$

Energia di un Oscillatore Armonico

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) & \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ v(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) & \\ E_m &= U(t) + K(t) = \boxed{\frac{KA^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(t) &= \frac{Kx^2}{2} = \frac{KA^2}{2} \cdot \cos^2(\omega t + \phi) \quad \text{sempre positiva!} \\ \Rightarrow K(t) &= \frac{mv^2}{2} = \frac{mw^2A^2}{2} \cdot \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Viceversa:

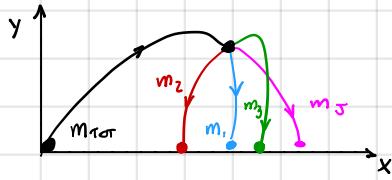
$$\begin{aligned} E_m &= U(t) + K(t) = \frac{KA^2}{2} \quad (\text{costante}) \\ &= \frac{Kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{KA^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{dx}{dt} \quad \text{eq. diff. var. lineare 1° ordine} \\ \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \sqrt{\frac{k}{m}} dt \rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \dots = \int_0^t \dots \rightarrow \arcsin\left(\frac{x(t)}{A}\right) - \arcsin\left(\frac{x_0}{A}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ &\quad \boxed{\arcsin\left(\frac{x(t)}{A}\right)}_{x_0}^{x(t)} \end{aligned}$$

Per esplorare $x(t)$ applico il cos:

$$\cos[\arcsin(\frac{x(t)}{A})] = \cos[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin(\frac{x_0}{A})] \rightarrow x(t) = A \cos[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \arcsin(\frac{x_0}{A})] = A \cos(\omega t + \phi)$$

MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI E DEL CORPO RIGIDO

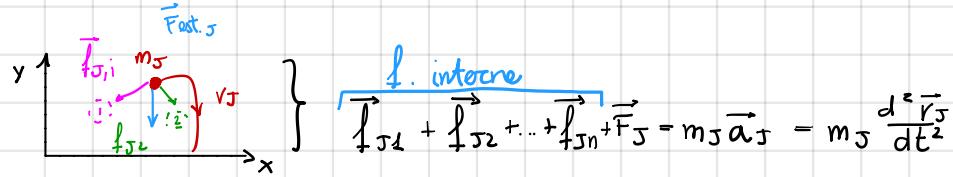
ES disgregazione proiettile



Il moto di ogni sdeggia è governato da forza interne al sistema e forza esterna

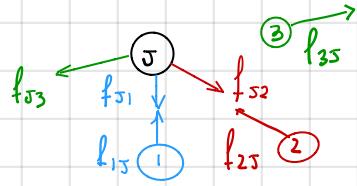
$$\sum_j^n m_j = m_{\text{tot}}$$

$$v_J = \text{velocità } m_J$$



$$f_{Jn} = \text{forza interna esercitata da } m_n \text{ su } m_J \Rightarrow \sum_{k \neq J}^n f_{J,k} + F_J^{\text{ext}} = m_J \vec{a}_J = m_J \frac{d^2 \vec{r}_J}{dt^2}$$

Sfondamento le forze interne sono incognite! perciò...



$$\Rightarrow f_{JK} = -f_{KJ} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) f_{J1} + f_{J2} + f_{J3} + \dots \\ (2) f_{12} + f_{23} + f_{31} + \dots \\ (3) f_{31} + f_{12} + f_{23} + \dots \end{array} \right.$$

Sommiamo tutto e tutte le forze interne scompaiono

$$\Rightarrow \sum_i^n \vec{F}_J^{\text{ext}} = \sum_i^n m_J \vec{a}_J = \sum_i^n m_J \left(\frac{d^2 \vec{r}_J}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i^n m_J \vec{r}_J \right)$$

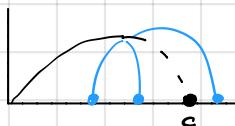
$$\frac{\sum_i^n m_J \vec{r}_J}{\sum_i^n m_J} = \frac{\sum_i^n m_J \vec{r}_J}{m_{\text{tot}}} \rightarrow \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = m_{\text{tot}} \vec{a}_c$$

\vec{r}_c = posizione del centro di massa =

$$\vec{r}_c = \frac{d \vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_j \cdot \frac{d \vec{r}_j}{dt}}{m_{\text{tot}}} = \frac{\sum m_j v_j}{m_{\text{tot}}}$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_j \vec{a}_j}{m_{\text{tot}}}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \vec{g} = m_{\text{tot}} \vec{a}_c \rightarrow \vec{a}_c = \vec{g}$$



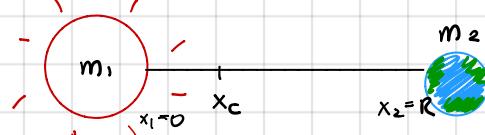
1° equazione coordinata

• Sistema Particolare (o discreto)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{m_{\text{tot}}} = \begin{cases} x_c = \frac{\sum m_j x_j}{m_{\text{tot}}} \\ y_c = \frac{\sum m_j y_j}{m_{\text{tot}}} \\ z_c = \frac{\sum m_j z_j}{m_{\text{tot}}} \end{cases}$$

ES

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}$$



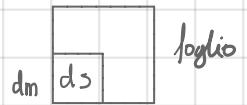
DENSITÀ (sistema continuo)



• Densità lineare = $\lambda = \frac{dm}{dl}$ se il materiale è omogeneo $\lambda = \frac{m_{TOT}}{l_{TOT}} (= \frac{dm}{dl})$ [kg/m]

La densità lineare si usa per oggetti monodimensionali.

• Densità superficiale = $\sigma = \frac{dm}{ds}$ se il materiale è omogeneo $\sigma = \frac{m_{TOT}}{S_{TOT}}$ [kg/m²]



• Densità (volumetrica) = $\rho = \frac{dm}{dV}$ se il materiale è omogeneo $\rho = \frac{m_{TOT}}{V_{TOT}}$ [kg/m³]



CENTRO DI MASSA PER SISTEMI CONTINUI

$$\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r} dm}{m_{TOT}} : \left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{\int_l \lambda x dl}{m_{TOT}} \\ y_c = \frac{\int_l \lambda y dl}{m_{TOT}} \\ z_c = \frac{\int_l \lambda z dl}{m_{TOT}} \end{array} \right\} \text{proiezioni sugli assi}$$

(1D) $\frac{\int_L \vec{r} \lambda dl}{m_{TOT}}$

(2D) $\frac{\iint_S \vec{r} \sigma ds}{m_{TOT}}$

(3D) $\frac{\iiint_V \vec{r} \rho dv}{m_{TOT}}$

ES

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m_{TOT}}{l_{TOT}} \rightarrow x_c = \frac{\int_0^{l_{TOT}} \lambda x dx}{m_{TOT}} = \frac{\lambda}{m_{TOT}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{l_{TOT}} = \frac{\lambda l_{TOT}^2}{2m_{TOT}} = \frac{l_{TOT}}{2}$$

A horizontal axis is shown with origin 0 and total length l_{TOT} .

ES

2 corde con densità diverse

$$x_c' = \frac{l_1}{2} \quad x_c'' = l_1 + \frac{l_2}{2}$$

$$\rightarrow x_c = \frac{m_1 x_c' + m_2 x_c''}{m_1 + m_2} = \dots$$

QUANTITA' DI MOTORE DEL SISTEMA

$$\vec{P}_{\text{TOT}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j \quad \text{se dividiamo per } m_{\text{TOT}} \rightarrow \frac{\vec{P}_{\text{TOT}}}{m_{\text{TOT}}} = \vec{V}_c$$

$$\rightarrow \vec{P}_{\text{TOT}} = m_{\text{TOT}} \vec{V}_c = \vec{P}_c = \vec{P}_{\text{sist.}}$$

Dallo primo eq. cordinale: $\vec{F}_{\text{est.}} = m_{\text{TOT}} \vec{a}_c = m_{\text{TOT}} \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d(m_{\text{TOT}} \vec{v}_c)}{dt} = \frac{d\vec{P}_{\text{sist.}}}{dt}$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{est.}} \cdot dt = d\vec{P}_{\text{sist.}} \quad \text{impulso elementare}$$

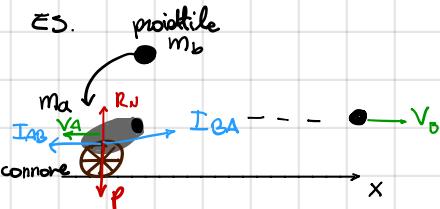
$$\rightarrow \vec{I}_{\text{est.}} = \text{impulso} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{est.}} \cdot dt = \Delta \vec{P}_{\text{sist.}} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

Teorema dell'impulso e della variazione della quantità di moto

Se $\vec{I}_{\text{est.}} = 0 \rightarrow P_1 = P_2 = \text{conservazione della quantità di moto} \Rightarrow \vec{P}_{\text{sist.}} = \text{cost.} \quad (\text{es. } \vec{F}_{\text{est.}} = 0)$

Se $I_{\text{asse}} = 0 \rightarrow P_{\text{asse}} = \text{cost.}$

E. g.

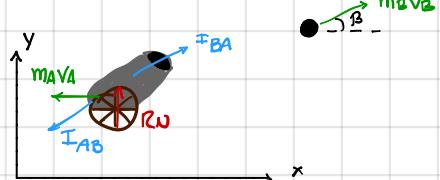


C'è conservazione di quantità di moto poiché gli impulsi sono interni e le forze esterne si compensano.

$$\vec{P}_{\text{prima}} = 0$$

$$\vec{P}_{\text{dopo}} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = 0 \rightarrow \vec{v}_A = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right) \vec{v}_B$$

Supponiamo di inclinare il comune:



$$\vec{I}_{\text{est.}} = I_{RN} \neq 0 \quad \text{NO conservazione quantità di moto}$$

Lungo l'asse delle x però si può conservare poiché $\vec{I}_x = 0 \rightarrow \Delta P_x = 0 \rightarrow P_{x\text{primo}} = P_{x\text{dopo}}$

$$P_{x\text{primo}} = 0$$

$$P_{x\text{dopo}} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A v_A + m_B v_B \cos \beta = 0 \rightarrow v_{Ax} = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right) v_B \cos \beta$$

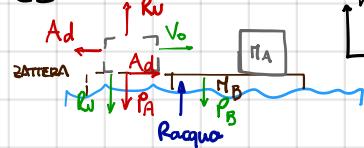
In alternativa:

$$\vec{I}_{\text{est.}} = \vec{I}_{RN} = \Delta \vec{P}_{\text{sist.}} \quad \begin{cases} y) I_{RN} - \Delta P_y = P_{y\text{dopo}} - P_{y\text{primo}} = m_B v_{Ay} - 0 \\ x) 0 = \Delta P_x = P_{x\text{dopo}} - P_{x\text{primo}} = m_B v_{Bx} + m_A v_{Ax} \end{cases}$$

$$\rightarrow v_A = -\left(\frac{m_B}{m_A}\right) v_B \cos \beta$$

$$\rightarrow I_{RN} = m_B v_B \sin \beta$$

ES



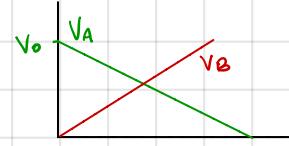
Calcolare quando A si ferma

NB. Ad e R_W sono "duplicati" perché egualino ho "effetto" su A o su B

$$\begin{aligned} A & \left\{ \begin{array}{l} R_W - M_A g = 0 \rightarrow R_W = M_A g \\ -Ad = M_A a_A \end{array} \right. \rightarrow a_A = -\mu d g \Rightarrow V_A = V_0 - \mu d g t \end{aligned}$$

a_A

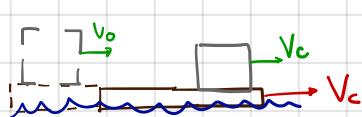
$$\begin{aligned} B & \left\{ \begin{array}{l} R_B = R_W + M_B g \\ Ad = M_B a_B \end{array} \right. \rightarrow a_B = \left(\frac{M_A}{M_B} \right) \mu d g \Rightarrow V_B = \mu d g t \left(\frac{M_A}{M_B} \right) \end{aligned}$$

In questo caso "fermarsi" vuol dire che $V_A = V_B$

$$\rightarrow t^* = \frac{V_0}{\mu d g} \left(\frac{M_B}{M_A + M_B} \right)$$

$$\rightarrow V_B(t^*) = V_A(t^*) = V_0 \left(\frac{M_A}{M_A + M_B} \right)$$

Alternativamente, usando lo conservazione della quantità di moto

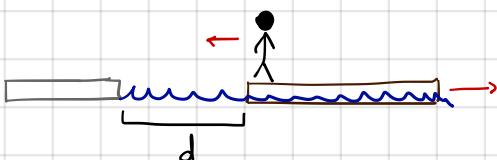


$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{prima}} = M_A V_0 \\ P_{\text{dopo}} = (M_A + M_B) V_C \end{array} \right\} V_C = V_0 \left(\frac{M_A}{M_A + M_B} \right)$$

ES

$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ m} & m &= 50 \text{ kg} & X_{CM} &= \frac{mL + M(L/2)}{m + M} - 6.5 \\ \text{banchina} &= \text{banchina} & M &= 150 \text{ kg} & \end{aligned}$$

Comminando verso lo banchina, lo persona si muove, ma fa muovere anche (al contrario) lo zattera. Il principio è lo stesso del caso precedente

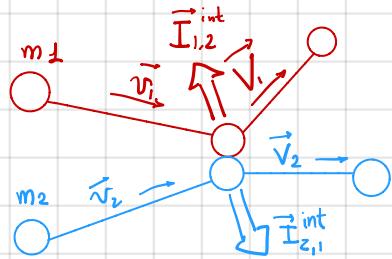


Il centro di massa rimane invariato

$$X_{CM} = \frac{md + M(d + L/2)}{m + M} = d + \left(\frac{M}{M+m} \right) \frac{L}{2}$$

$$X_{CM} = 6.5 \rightarrow d = 2.75 \text{ m}$$

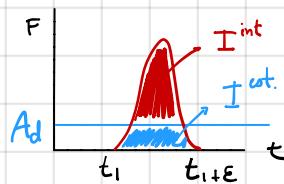
PROCESSI D'URTO



v = prima dell'urto

V = dopo l'urto

Durante il contatto si scambiano delle brevi ma intense forze interne



$$\vec{I}_{\text{Ad}}^{\text{ext}} + \vec{I}_{1,2}^{\text{int}} = \Delta \vec{p}_1 \quad \text{Teorema dell'impulso} = m_1 \vec{V}_1 - m_1 \vec{v}_1 \\ (\text{per lo meno } m_1)$$

L'impulso delle forze esterne può essere trascurato

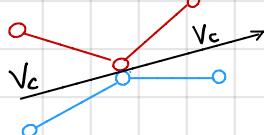
$$\text{Analogamente: } \vec{I}_{\text{Ad}}^{\text{ext}} + \vec{I}_{2,1}^{\text{int}} = \Delta \vec{p}_2 = m_2 \vec{V}_2 - m_2 \vec{v}_2$$

$$I_{1,2} = - I_{2,1}$$

Ora vediamo il tutto come unico sistema senza differenziare le masse $\rightarrow F^{\text{int}}$ trascurabili $\rightarrow \vec{I}^{\text{ext}} = \Delta \vec{p}_{\text{sist}}$

$$\rightarrow I^{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} Ad dt = \vec{F}_d \epsilon \approx 0 \text{ poiché } \epsilon \text{ è molto piccolo (o zero)} \rightarrow \Delta p_{\text{sist}} = 0 \rightarrow p_{\text{sist}} = \text{const}$$

$$\vec{p}_c^{\text{prima}} = \vec{p}_c^{\text{dopo}}$$



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \Rightarrow \text{In tutti gli urti c'è conservazione di quantità di moto del sistema}$$

URTI ELASTICI

Si conserva anche l'energia meccanica, ma poiché l'energia potenziale può essere trascurata, perché non varia, si conserva anche l'energia cinetica.

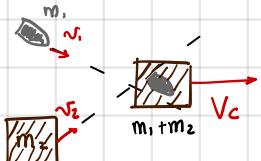
URTI ANELASTICI

Non c'è conservazione di energia meccanica (cinetica), ma diminuisce

URTI PERFETTAMENTE ANELASTICO

I due corpi si fondono e procedono insieme

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO



$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{prima}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ P_{\text{dopo}} = (m_1 + m_2) \vec{V}_c \end{array} \right\} P_{\text{p}} = P_{\text{d}} \rightarrow V_c = \left(\frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right)$$

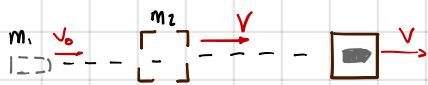
$$K_{\text{primo}} > K_{\text{dopo}} \rightarrow Q - \text{calore} = K_{\text{prima}} - K_{\text{dopo}} = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) V_c^2}{2} =$$

$$\left(\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \left| \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right|^2 = \left(\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(m_1 + m_2) m_1 v_1^2 + (m_1 + m_2) m_2 v_2^2}{m_1 + m_2} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot (v_1^2 + v_2^2 + 2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot |v_1 - v_2|^2$$

Il calore è sempre positivo

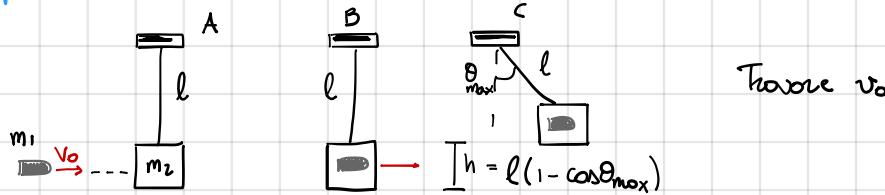
caso monodimensionale



$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{primo}} = m_1 v_0 \\ P_{\text{dopo}} = (m_1 + m_2) V \end{array} \right\} \rightarrow V = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_0$$

$$K_{\text{primo}} = \frac{m_1 v_0^2}{2} \quad K_{\text{dopo}} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} = \frac{m_1^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)} \quad \rightarrow Q = K_{\text{primo}} - K_{\text{dopo}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2$$

pendolo balistico



$$P_A = m_1 v_0 \quad P_B = (m_1 + m_2) V \quad P_C = 0 \rightarrow \text{NO conservazione}$$

$$\text{Conservazione} \quad v_0 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) V$$

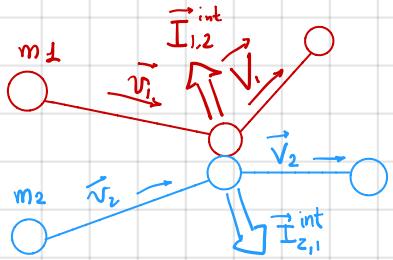
$$E_{\text{mA}} = k_A = \frac{m_1 v_0^2}{2} \quad E_{\text{mB}} = \frac{(m_1 + m_2) V^2}{2} \quad E_{\text{mC}} = U_C = (m_1 + m_2) g h$$

No conservazione

$$\text{Conservazione} \rightarrow V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_{\text{max}})}$$

$$\rightarrow v_0 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \cdot \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_{\text{max}})}$$

URTO ELASTICO



- Conservazione quantità di moto
 $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$
- Conservazione energia meccanica (cinetica)
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

Nel caso 3D, per trovare \vec{V}_1 e \vec{V}_2 (6 incognite totali (x, y, z)) ho bisogno di 6 eq.

- 3 le ricavo dalla conservazione della quantità di moto (su x, y, z) perché vettoriale
- 1 lo ricavo dalla conservazione dell'energia cinetica (non vettoriale)

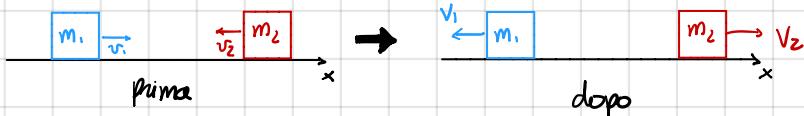
} NOPE

Nel caso 2D ho bisogno di 4 eq.

- 2 delle quantità di moto
- 1 dell'energia cinetica

} NOPE

Nel caso monodimensionale invece ho le due eq. per le due incognite:



$$P_{\text{prima}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 =$$

$$K_{\text{prima}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$P_{\text{dopo}} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$K_{\text{dopo}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases} \rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_2^2) \rightarrow m_1 (v_1 - v_1) (v_1 + v_1) = m_2 (v_2 - v_2) (v_2 + v_2)$$

$$\rightarrow m_1 (v_1 - v_1) = m_2 (v_2 - v_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + V_1 = v_2 + V_2 & \text{eq. mista} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \end{cases} \rightarrow V_1 - V_2 = v_2 - v_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \det \begin{vmatrix} v_2 - v_1 & -1 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 & m_2 \end{vmatrix} / \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \frac{m_2(v_2 - v_1) + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2$$

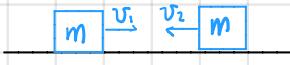
Scomponendo 1 con 2 trovo V_2

es

$$\boxed{m_1} \xrightarrow{v_1} \quad \boxed{m_2} \xrightarrow{v_2} \quad m_2 = \infty$$

$$V_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2 = -v_1$$

ES mozione uguale

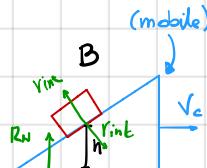


$$V_1 = \frac{m}{2m} V_E = V_E \quad \text{scambio di velocità!}$$

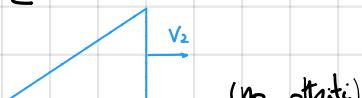
$$V_2 = V_1$$

Es

A



C



• A/B

$\vec{I}_{ext} = \int_{t_i}^{t_f} (\vec{R}_W + mg + Mg) dt = \Delta \vec{P}_{ext}$ → Non c'è conservazione di quantità di moto intotale nel sistema, ma si lungo l'asse x poiché tutte le forze esterne sono verticali

$$\vec{I}_x^{ext} - \Delta P_x = 0$$

$$P_A = P_B \rightarrow mv_0 = (m+M)V_C \rightarrow V_C = \frac{mv_0}{m+M}$$

Per quanto riguarda l'energia in questo caso quella potenziale è presente poiché non è propriamente un urto (m impiega tempo > ε per solle, non istantaneo)

$$E_{mA} - E_{mB} \text{ (no otturati)} \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}(m+M)V_C^2 \rightarrow h = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \left(\frac{M}{m+M} \right)$$

• A/C

$$\begin{cases} mv_0 = mV_1 + MV_2 \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \end{cases} \text{ poiché la discesa non influenza sull'asse x } \} \text{ come l'urto elastico}$$

$$\rightarrow V_1 = \left(\frac{m-M}{m+M} \right) V_0 + \left(\frac{2M}{m+M} \right) 0 \quad V_2 = \left(\frac{m}{m+M} \right) V_0 = \left(\frac{m-m}{m+M} \right) 0$$

ESPLORZIONE



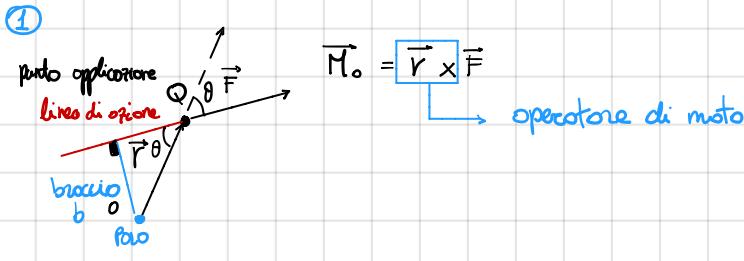
$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = E_{molla} \\ m_1V_1 + m_2V_2 = 0 \end{cases}$$

(Bilanciamento energia, non conservazione)
(conservazione quantità di moto, no forze esterne)

$$\rightarrow V_1 = \sqrt{2E \left(\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)} \right)}$$

MOMENTO DI UNA FORZA

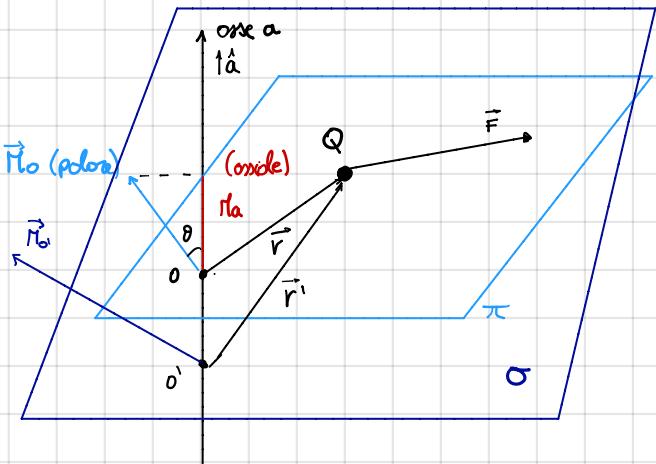
Momento di una forza rispetto a {
 ① un polo
 ② un asse}



INTENSITÀ : $M_o = r \cdot F \cdot \sin \theta = F \cdot b$
 DIREZIONE : \perp piano \vec{r}, \vec{F}
 VERSO : mano destro (regalo mano destro)

Se : $\begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \end{cases} \rightarrow \vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

②



$$M_a = \vec{M}_o \cdot \hat{a} - (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{a}$$

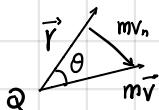
Rispetto O' :

$$\begin{aligned} \vec{M}_o - \vec{r}' \times \vec{F} &= (\vec{r} + \vec{o}'_o) \times \vec{F} \\ \vec{M}_o \cdot \hat{a} &= \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} + \vec{o}'_o \times \vec{F} \cdot \hat{a} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} + \hat{a} \times \vec{o}'_o \cdot \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \vec{F} \cdot \hat{a} = M_a \\ \Rightarrow M_a &= M_o \quad \forall \hat{a} \end{aligned}$$

MOMENTO QUANTITA' DI MOTO

Al punto di \vec{F} avremo $\vec{p} = m\vec{v}$ e Q sarà il punto motoriale

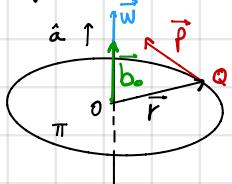
$$\begin{aligned} \vec{b}_o &= momento \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} \\ b_o &= r \cdot m v \cdot \sin \theta = \vec{r} \cdot m v_n \end{aligned}$$



$$\vec{b}_o = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ m v_x & m v_y & m v_z \end{vmatrix}$$

$$b_a = \vec{b}_o \cdot \hat{a} = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \hat{a}$$

Ese. punto motoriale in rotazione



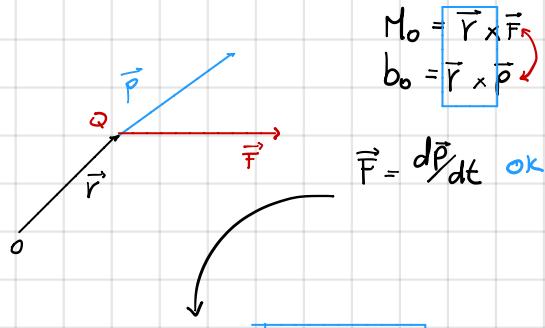
$$\vec{p} = m\vec{v} = m\vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{b}_o = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(m\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = (mr^2)\vec{\omega}$$

$$b_a = \text{proiezione } \vec{b}_o \text{ sull'asse} = b_o = (mr^2)\omega$$

$$\omega \perp r \rightarrow \omega \cdot r = 0$$

$$mr^2 = \text{momento di inerzia} = I_a$$



$$M_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$b_o = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \quad \text{OK}$$

$$M_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} \quad \text{NO}$$

$$M_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{b}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow M_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} =$$

$$\text{Se anche il polo è in movimento } \vec{M}_o = \frac{d\vec{b}_o}{dt} - (\vec{V}_Q - \vec{V}_o) \times m \vec{V}_Q = \frac{d\vec{b}_o}{dt} + \vec{V}_o \times m \vec{V}_Q$$

$\vec{V}_Q \times \vec{V}_Q = 0$

Nel caso di sistema di punti materiali le regole precedenti sono applicate per ogni singolo punto

$$\vec{M}_J = \vec{r} \times \vec{F}_J = \vec{r} \times \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{r} \times \vec{F}^{\text{int}} = \vec{M}_J^{\text{ext}} + \vec{M}_J^{\text{int}} = \frac{d\vec{b}_J}{dt} + \vec{V}_o \times m_J \vec{V}_J$$

$$\text{Per tutto il sistema: } \sum \vec{M}_J^{\text{ext}} + \sum \vec{M}_J^{\text{int}} = \sum \frac{d\vec{b}_J}{dt} + \sum \vec{V}_o \times m_J \vec{V}_J$$

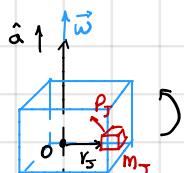
$$\vec{M}_{JK}^{\text{int}} = \vec{r}_J \times \vec{F}_{JK} \quad \vec{M}_{KJ}^{\text{int}} = \vec{r}_K \times \vec{F}_{KJ} \longrightarrow \vec{r}_J \times \vec{F}_{JK} + \vec{r}_K \times \vec{F}_{KJ} = \vec{r}_J \times \vec{F}_{JK} - \vec{r}_K \times \vec{F}_{JK} = (\vec{r}_J - \vec{r}_K) \times \vec{F}_{JK} = 0 \text{ perché } \parallel$$

Anche in questo caso le forze interne si annullano $\rightarrow \sum \vec{M}_J^{\text{int}} = 0$

$$\vec{M}_o^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum \vec{b}_J + \vec{V}_o \times \sum m_J \vec{V}_J = \frac{d\vec{b}_o}{dt} + \vec{V}_o \times \vec{P}_c \quad \text{II equazione cordinale}$$

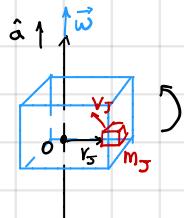
Per semplificare eliminando il secondo termine si pone $O = C$ e si fa

es



- $\vec{P}_J = m_J \vec{V}_J = m_J \vec{\omega} \times \vec{r}_J$
- $\vec{b}_{oJ} = \vec{r}_J \times \vec{P}_J = \vec{r} \times (m_J \vec{\omega} \times \vec{r}_J) = (m_J r_J^2) \vec{\omega}$
- $\vec{b}_{aJ} = \vec{b}_{oJ} \cdot \vec{a} = \vec{b}_{oJ} - (m_J r_J^2) \vec{\omega}$
- $\vec{b}_a = [\sum (m_J r_J^2)] \vec{\omega} = I_a \cdot \vec{\omega}$

es



- $\vec{V}_J = \vec{\omega} \times \vec{r}_J \longrightarrow V_J = \omega r_J$
- $K_J = \frac{1}{2} m_J r_J^2 = \frac{1}{2} (m_J r_J^2) \omega^2$
- $K = \sum K_J = \frac{\omega^2}{2} \sum m_J r_J^2 = \frac{1}{2} I_a \omega^2$

TRASLAZIONE → ROTAZIONE

$$\vec{P} = m \vec{V} \Rightarrow b_a = I_a \cdot \omega$$

$$K = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} I_a \omega^2$$

$$\text{I eq. cord. : } \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}_c}{dt}$$

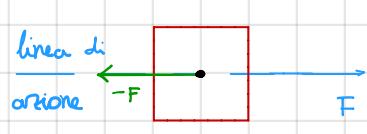
$$\text{II eq. cord. : } \vec{M}_a^{\text{ext}} = \frac{d\vec{b}_a}{dt} \quad (\coso \quad O=c \quad \vee \quad O \text{ fermo})$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M_{\text{TOT}} \vec{a}_c \Rightarrow \vec{M}_a^{\text{ext}} = \frac{d\vec{b}_a}{dt} = \frac{1}{dt} (I_a \omega) = I_a \vec{a}$$

$$\vec{I}^{\text{ext}} = \int \vec{F}_{\text{ext}} dt = \Delta \vec{P}_{\text{int}} \Rightarrow \vec{J}_a^{\text{ext}} = \text{impulso angolare} = \int \vec{M}_a^{\text{ext}} dt = \Delta \vec{b}_a$$

$$\vec{P}_{\text{int}} = \text{cost} \quad (\neq \vec{I}^{\text{ext}} = 0) \Rightarrow b_a = \text{cost} \quad (\neq \vec{J}_a^{\text{ext}} = 0)$$

CORPO VINCOLATO



I eq. cord.

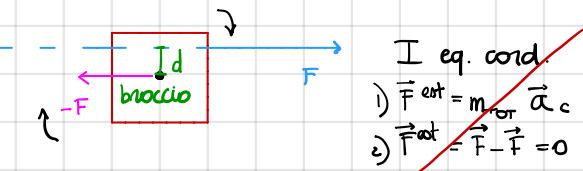
$$1) \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \vec{a}_c$$

$$2) \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

II eq. cord.

$$1) M_a^{\text{ext}} = I_a \vec{a}$$

$$2) M_a^{\text{ext}} = 0 \quad \text{poiché braccio nullo}$$



I eq. cord.

$$1) \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}} \vec{a}_c$$

$$2) \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

II eq. cord.

$$M_a^{\text{ext}} = I_a \vec{a}$$

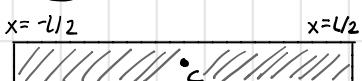
$$M_a^{\text{ext}} = -F \cdot d$$

NB per convenzione si mette il segno negativo
si ruota in senso orario

"-F" ha momento nullo perché non ha braccio!

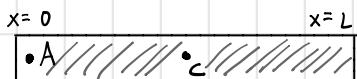
$$I_a = \sum m_j r_j^2 = \int_r r^2 dm \quad \left\{ \begin{array}{l} 1D \int_x r^2 \lambda dl \\ 2D \int_s \int r^2 \sigma ds \\ 3D \int_v \int \int r^2 p dv \end{array} \right.$$

es (1D)



$$\lambda L = m$$

$$I_a = \int r^2 dm \rightarrow I_a = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \lambda \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} m L^2$$



$$\lambda L = m$$

$$I_a = \int_0^L \lambda x^2 dx = \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \lambda L^3 / 3 = \frac{1}{3} m L^2$$

Teatrma di Huyghens Steiner $I_A = I_c + M_{\text{TOT}} \cdot AC^2 \quad \forall A$

barra

$$I_a = \frac{1}{12} m l^2$$

Parallelepipedo



$$I_a = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Cilindro Pieno



$$I_a = \frac{1}{2} m r^2$$

Cilindro Vuoto



$$I_a = m r^2$$

Cilindro Parzialmente Pieno



$$I_a = \frac{1}{12} m (r_2^2 + r_1^2)$$

Sfera Piena

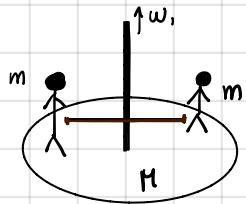


$$I_a = \frac{2}{5} m r^2$$

Sfera Vuota



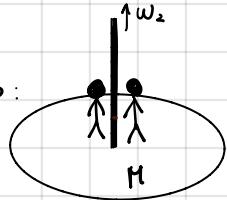
$$I_a = \frac{2}{3} m r^2$$



$$M_a^{\text{est}} = \frac{d\mathbf{ba}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_a \omega) = 0 \quad \mathbf{ba} = I_{\text{alt}}(t) \cdot \omega(t) = \text{cost}$$

$$I_{a1} = \frac{1}{2} M R^2 + 2mR^2$$

Se i due si avvicinano:

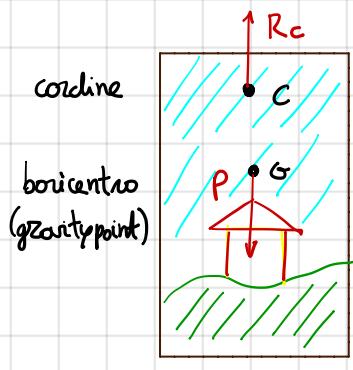


$$I_{a2} = \frac{1}{2} M R^2$$

poiché la loro distanza dal centro (braccio) è nulla (primo caso)

$$I_{a1} \omega_1 = I_{a2} \omega_2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} M R^2 + 2mR^2 \right) \omega_1 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_2 \quad \omega_2 > \omega_1$$

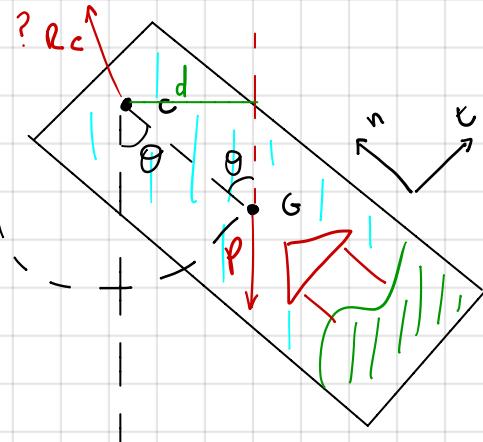
PENDOLO COMPOSTO



cordine

baricentro
(gravity point)

$$R_C = P$$



I eq. cord

$$\vec{P} + \vec{R}_C = m\vec{a}_c$$

$$\begin{cases} R_{Cn} - P \cos \theta = m a_n \\ R_{Ct} - P \sin \theta = m a_t \end{cases}$$

impossibile

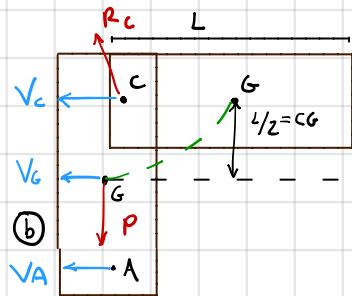
$$\text{II eq. cord}$$

$$M_a^{\text{est}} = I_a \frac{d\omega}{dt} = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_p + M_{ac} = P_d = P \cdot G \sin \theta \Rightarrow -mg \cdot G \sin \theta = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mg \cdot CG}{I_a} \right) \sin \theta = 0 \quad \text{simile al pendolo semplice} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} \right) \sin \theta = 0 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I_a}{mg \cdot CG}}$$

$$\text{Associamo il quadruo ad una barra oppesa per un estremo} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2/3}{mg \cdot L/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}}$$



a

- Velocità orologio massima w_b
- Velocità nei punti C, G, A

$$\begin{aligned} w_a &= 0 \\ E_{ma} &= U_a = Mg(cG) = Mg \frac{L}{2} \\ w_b &=? \\ E_{mb} &= K_b = \frac{1}{2} I_c w_b^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} I_c w_b^2 &= Mg \frac{L}{2} \\ w_b &= \sqrt{\frac{MgL}{I_c}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \end{aligned} \right\} I_c = \frac{1}{3} mL^2 \text{ (asse estremo)}$$

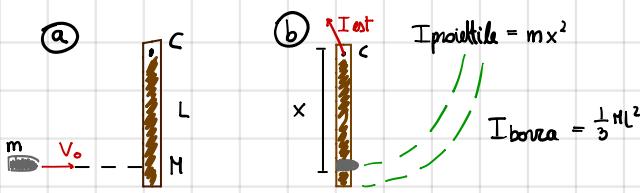
$$V(r) = w_b \cdot r$$

$$\rightarrow V_c = w_b \cdot \cancel{r} = 0$$

$$\rightarrow V_g = w_b \cdot \cancel{r} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{3gL}{4}}$$

$$\rightarrow V_A = w_b \cdot \cancel{r} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot L = \sqrt{3gL}$$

distanza del cordine



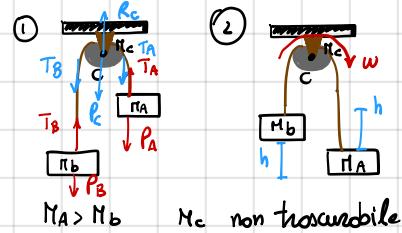
$I_{ext} \neq 0 \rightarrow$ no conservazione quantità di moto

Poiché però le forze esterne sono applicate sul punto di rotazione, il loro momento è nullo $\rightarrow J_a^{ext} = 0 \rightarrow b_a = \text{cost}$
 \rightarrow conservazione momento quantità di moto

$$\begin{aligned} @: b_a &= m v_b \times \\ @: b_a &= I_c^{\text{tot}} \cdot \omega = \left(\frac{1}{3} M L^2 + m x^2\right) \omega \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} b_a = b_a \\ b_a = \omega(x) = \frac{m v_b x}{\frac{1}{3} M L^2 + m x^2} \end{array} \right\} \omega$$



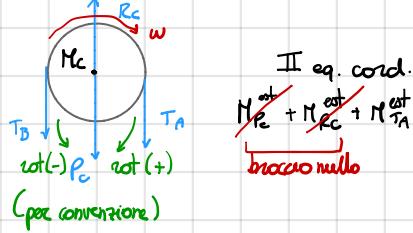
MACCHINA DI ATWOOD



- Accelerazione del sistema
- Tensione della fune
- Velocità impatto
- Velocità angolare massima

$$\begin{aligned} P_A - T_A &= M_A a_A \\ T_B - P_B &= M_B a_B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} a_A = a_B = a \\ \text{Positivo la forza "vincente"} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\text{I eq. cord.} \\ &y: R_C = P_C + T_A + T_B \\ &x: / \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\text{II eq. cord.} \\ &M_{P_C}^{ext} + M_{T_A}^{ext} + M_{T_B}^{ext} = I_C \cdot \frac{dw}{dt} \Rightarrow T_A \cdot r - T_B \cdot r = I_C \cdot \frac{dw}{dt} \rightarrow T_A - T_B = \frac{I_C}{r} \cdot \frac{dw}{dt} \\ &\text{braccio nullo} \end{aligned}$$

lo ruota accelerata se c'è differenza di tensione



$$v_{\text{fune}} = v_{\text{parafusica ruota}}$$

l'ottura statica tende ad annullare il moto relativo dei corpi a contatto

$$\rightarrow v_{\text{fune}}(t) = \omega(t) \cdot r$$

$$\rightarrow a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \alpha \cdot r$$

a linea fune

a angolare ruota

$$\rightarrow \left((T_A - T_B) = \frac{I_C}{r} \cdot \alpha \right) +$$

$$\left. \begin{array}{l} P_A - T_A = M_A a \\ T_B - P_B = M_B a \end{array} \right. +$$

=

$$\rightarrow P_A - P_B = (M_A + M_B + \frac{I_C}{r^2}) a \rightarrow \boxed{a = g \left(\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + \frac{I_C}{r^2}} \right)}$$

così ruota (cilindro) piena

Sostituiamo in T_A e T_B :

$$\left[T_A = M_A(g - a) = \dots \right]$$

$$\left[T_B = M_B(a + g) = \dots \right]$$

$$\begin{aligned} s &= a \cdot t \\ s &= \frac{1}{2} a t^2 = h \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \end{aligned}$$

moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\rightarrow v = \sqrt{2ah} = \text{velocità di impatto} (= \text{velocità sollevamento})$$

$$= \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + \frac{I_C}{r^2}}}$$

In assenza di attriti o forze non conservative c'è conservazione di energia meccanica:

$$E_{m1} = U_A = M_A g h$$

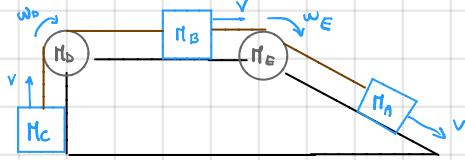
$$E_{m2} = U_B + K_B + K_C + K_A = M_B g h + \frac{1}{2} M_B V^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M_A V^2 = M_B g h + \frac{1}{2} (M_A + M_B + \frac{I_C}{r^2}) V^2$$

$\downarrow \frac{1}{2} I_C \frac{V^2}{r^2}$

$$E_{m1} = E_{m2} \rightarrow V = \sqrt{2gh} \quad \sqrt{\frac{M_A - M_B}{M_A + M_B + I_C/r^2}}$$

come tracito precedentemente

MACCHINE COMPLESSE



$$K_{SIST.} = \frac{1}{2} (M_A + M_B + M_C) V^2 + \frac{1}{2} I_D w_D^2 + \frac{1}{2} I_E w_E^2$$

$$= \frac{1}{2} (M_A + M_B + M_C + \frac{I_D}{r_D^2} + \frac{I_E}{r_E^2}) V^2$$

Mome

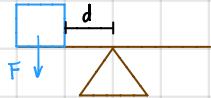
mote

STATICA

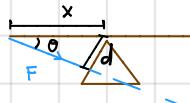
Le condizioni di statica è:

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{est}} = m\vec{a}_c = 0 & \text{NO TRASLAZIONE} \\ M_{\text{est}} = I_a \alpha = 0 & \text{NO ROTAZIONE} \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} v_0 = 0 \\ \omega_0 = 0 \end{cases}$$

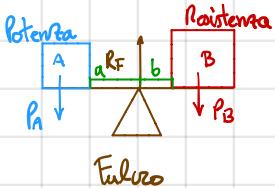


$$M = F \cdot d$$



$$M = F \cdot d = F \cdot x \cdot \sin \theta$$

LA LEVA



Statico:

$$\vec{F}_{\text{est}} = 0 \quad \begin{cases} y: R_F = P_A + P_B \\ x: / \end{cases}$$

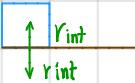
$$M_F^{\text{est}} = 0 \rightarrow M_{P_A} + M_{P_B} = 0 \quad (M_F = 0)$$

$$P_A \cdot a - P_B \cdot b = 0$$

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{a}{b} = \begin{array}{l} \text{Guadagno} \\ \text{Meccanico} \end{array}$$

corrispondente
forza applicata

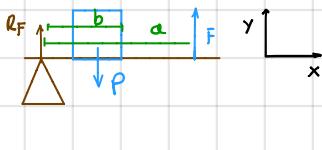
NB



le forze normali sono intorne e quindi non calcolate (idem per B)

Questo tipo di leva è detto di **1° genere**: se $G\Gamma > 1$ vantaggiosa se $G\Gamma < 1$ svantaggiosa

LEVA 2° GENERE



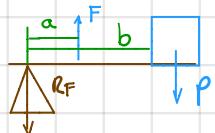
Statico:

$$\vec{F}_{\text{est}} = 0 \quad \begin{cases} y: R_F = P - F \\ x: / \end{cases}$$

$$M_F^{\text{est}} = 0 \rightarrow M_F + M_P = F \cdot a - P \cdot b = 0 \Rightarrow G\Gamma = \frac{P}{F} = \frac{a}{b}$$

La leva di 2° genere è sempre vantaggiosa perché a è sempre maggiore di b

LEVA 3° GENERE



Il verso di R_F è contrario poiché in questo caso la leva è "soldata" al fulcro per non staccarsi (Si alzerebbe a sinistro altrimenti)

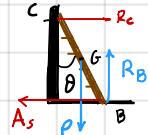
Statico:

$$\vec{F}_{\text{est}} \quad \begin{cases} y: R_F = F - P \\ x: / \end{cases}$$

$$M_F^{\text{est}} = F \cdot a - P \cdot b = 0 \rightarrow G\Gamma = \frac{P}{F} = \frac{a}{b}$$

La leva di 3° genere è sempre svantaggiosa perché $b > a$ sempre

SCALA



• Trouver θ_{\max}

Statique:

$$F_{\text{ext}} = 0 \quad \begin{cases} y: -P + R_B = 0 & \text{OK} \\ x: R_C - A_s = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} R_B = P \\ A_s = R_C \end{cases}$$

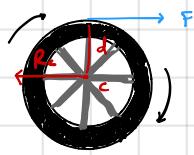
$$M_{\text{ext}} = 0 \rightarrow M_p + M_{R_B} + M_{R_C} + M_{A_s} = 0 \rightarrow P(\frac{l}{2} \sin \theta) - R_C(l \cos \theta) = 0 \rightarrow R_C(l \cos \theta) = P(\frac{l}{2} \sin \theta)$$

OK de B

$$R_C - \boxed{\frac{P}{2} + \theta} = A_s \leq A_{\max} = \mu_s R_D = \boxed{\mu_s P} \rightarrow \mu_s \geq \frac{\theta}{\frac{P}{2}}$$

ROTAZIONE E ROTOTRASLAZIONE DELLA RUOTA

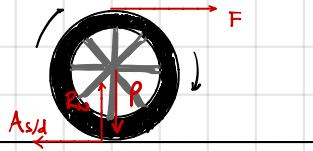
FISSA



$$\text{I eq. cond: } \vec{F}_{\text{est}} = \vec{F} + \vec{R}_c = 0$$

$$\text{II eq. cond: } M_{\text{est}} = F \cdot d + R_c \cdot 0 = I_c \cdot \alpha \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{F \cdot d}{I_c} \quad \begin{array}{l} \text{accelerazione angolare} \\ \text{velocità angolare} \end{array}$$

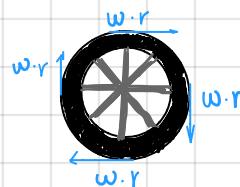
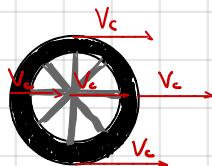
ROTOLAMENTO



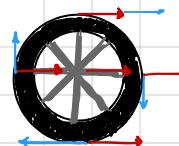
$$\text{I eq cond: } \vec{F}_{\text{est}} = m \cdot \vec{a}_c \quad \begin{cases} y: R_N - P = 0 \\ x: F - A = m a_c \end{cases}$$

$$\text{II eq. cond: } M_{\text{est}} = I_c \cdot \alpha \quad \begin{array}{l} \text{diversi perché } F \text{ non è applicata sulla superficie} \\ (c = \text{centro massa}) M_A + M_F = I_c \cdot \alpha \rightarrow A(r + Fd) = I_c \cdot \alpha \end{array}$$

Vediamo il rotolamento come la combinazione di 1) puro traslazione e 2) puro rotazione.



⇒



L'effetto vero di vetro opposto al "vincere" tra le due velocità.

Se $w \cdot r = V_c$ parliamo di rotolamento

↳ derivando → $\alpha \cdot r = a_c$

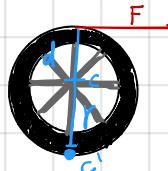
$$\Rightarrow A_s r + Fd = I_c \cdot \frac{a_c}{r} \rightarrow A_s = \frac{I_c \cdot a_c}{r^2} - \frac{Fd}{r}$$

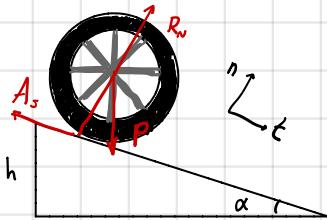
$$\Rightarrow F - A_s = m a_c \Rightarrow F \left(\frac{d+r}{r} \right) = m a_c \left(1 + \frac{I_c}{m r^2} \right) \Rightarrow a_c = \frac{F}{m} \left(\frac{d+r}{r} \right) \left(\frac{1}{1 + I_c / m r^2} \right)$$

In alternativa è possibile calcolarla puntando l'asse nel punto di contatto con il terreno:

Teo. H. Steiner

$$F(d+r) = (I_c + m r^2) \cdot \alpha \rightarrow a_c = F(d+r) \left(\frac{r}{I_c + m r^2} \right) \quad (\text{equivalente allo precedente})$$





- Attito richiesto
- Accelerazione sistema
- Velocità finale

$$\text{I eq. cord: } \begin{cases} n: R_N - P \cos \alpha = 0 \\ t: P \sin \alpha - A_s = m a_c \end{cases}$$

condizione rotolamento $V_c = \omega r \rightarrow a_c = d \cdot r$

$$\rightarrow A_s = \frac{I_c}{r^2} \cdot a_c$$

$$\rightarrow \text{sostituisco } A_s \text{ nello I eq. cord} \rightarrow Q_c = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_c/mr^2}$$

$$\rightarrow A_s = \frac{I_c/mr^2}{1 + I_c/mr^2} \cdot mg \sin \alpha \leq \mu_s R_N = \mu_s mg \cos \alpha \rightarrow \mu_s > \tan \alpha \frac{I_c/mr^2}{1 + I_c/mr^2} \quad \text{il punto di contatto deve essere fermo!}$$

$$\begin{cases} V = a \cdot t \\ s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{h}{\sin \alpha} \end{cases} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a \sin \alpha}} \rightarrow V = \sqrt{\frac{2ah}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_c/mr^2}}$$

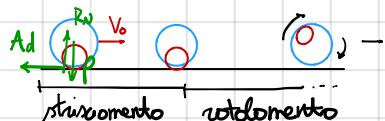
Usando l'energia:

$$E_{m1} = mgh$$

$$E_{m2} = \underbrace{\frac{1}{2} m V_c^2}_{\text{trans.}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_c \omega^2}_{\text{rotaz.}} \rightarrow V_c \cdot wr \rightarrow E_{m2} = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \frac{I_c}{r^2} V_c^2 = \frac{1}{2} m V_c^2 \left(1 + \frac{I_c}{mr^2} \right) \quad \text{tras. rot.}$$

$$E_{m1} = E_{m2} \rightarrow V_c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_c/mr^2}}$$

ES pollo da Bowling



L'attito è dinamico all'inizio!

$$\text{I eq. cord: } \begin{cases} y: R_N - P = 0 \\ x: -Ad = m a_c \end{cases} \rightarrow a_c = -\mu_d g \rightarrow V_{\text{traslazione}} = V_0 - \mu_d g t$$

$$\text{II eq. cord: } M_A + M_P + M_{R\omega} = I_c \cdot \alpha \rightarrow Ad \cdot r = I_c \cdot \alpha \rightarrow \alpha = \frac{\mu_d m g r}{I_c} \rightarrow \omega = \alpha \cdot t + \omega_0 \quad \text{nulla} \\ V_{\text{rotaz.}} = wr - \left(\frac{mr^2}{I_c} \right) \mu_d g t$$

V_t diminuisce nel tempo, V_r cresce:

$$V_r = V_t \rightarrow t = \frac{V_0}{\mu_d g} \left(\frac{I_c}{I_c + mr^2} \right)$$

$$V_{\text{rotolamento}} = V_0 \left(\frac{mr^2}{I_c + mr^2} \right)$$

I FLUIDI

Liquidi o gas

Pressione: è il rapporto tra la forza e la superficie su cui agisce $p = \frac{F}{S}$ [$\text{Pa} = \text{N/m}^2$]

NB la forza deve essere perpendicolare

La pressione è uno scalare e non un vettore, che agisce uniformemente su tutta la superficie



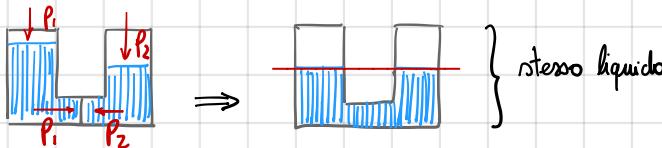
Legge di Pascal: la pressione esercitata su qualsiasi superficie di un liquido si trasmette con lo stesso valore su ogni altra superficie a contatto con il liquido

Legge di Stevino: ogni liquido è soggetto alla forza-peso che determina una pressione. $p_L = g d h$ → ^{densità} \rightarrow profondità

La pressione totale del liquido sarà $p = p_0 + g d h$

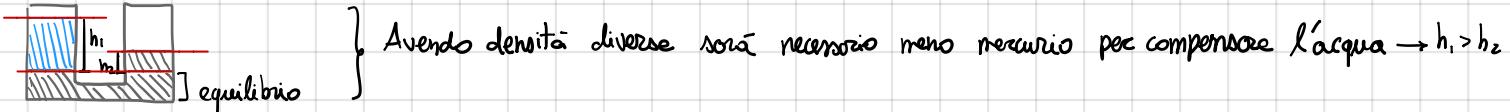
↳ pressione atmosferica

VASI COMMUNICANTI



$$P_1 > P_2$$

$$P_1 = P_2$$



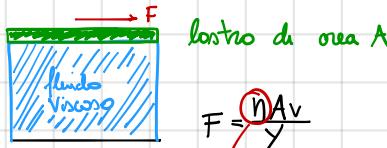
$$\begin{cases} P_1 = p_0 + d_1 g h_1 \\ P_2 = p_0 + d_2 g h_2 \end{cases} \rightarrow P_1 = P_2 \rightarrow d_1 h_1 = d_2 h_2 \rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad (\text{per liquidi diversi})$$

Sprinta di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto di intensità pari al peso del volume del liquido spostato

$$F_A = m_{\text{liquido}} g = d_f \cdot V \cdot g$$



FLUSSO VISCOSO E COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ

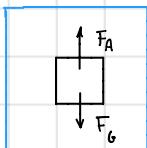


$$F = \eta A v$$

↳ coefficiente viscosità

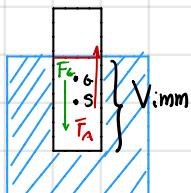


GALLEGGIAMENTO

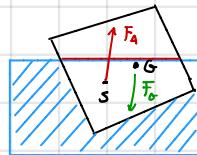


$$\left. \begin{array}{l} F_G = mg = (d_{\text{corpo}} \cdot V)g \\ F_A = m_{\text{fluido}} g = (d_{\text{fluido}} \cdot V)g \end{array} \right\} F_G - F_A = ma \rightarrow d_c/g - d_f/g = d_c/a \rightarrow a = g \left(\frac{d_c - d_f}{d_c} \right)$$

- $d_c - d_f > 0 \rightarrow a$ costata
- $d_c - d_f < 0 \rightarrow a$ solito
- $d_c - d_f = 0 \rightarrow a = 0$ corpo fermo

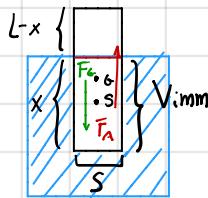


$$\begin{aligned} G &= \text{baricentro totale} \\ S &= \text{baricentro parte immersa} \\ V_{\text{imm}} &= \text{Volume immerso} \end{aligned}$$



Osillo tipo pendolo ↗

$$\left. \begin{array}{l} F_G = mg = (d_c \cdot V)g \\ F_A = F_G \rightarrow \frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{d_c}{d_f} \\ F_A = d_f \cdot g \cdot (d_f \cdot V_{\text{imm}})g \end{array} \right\}$$

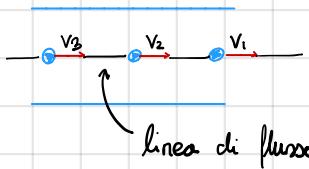


Osillo tipo molla ↑↓↑↓

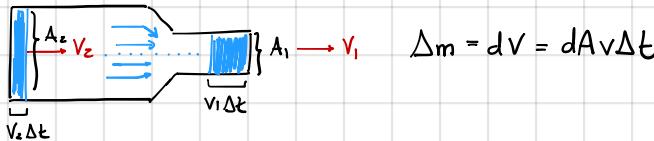
$$\left. \begin{array}{l} F_G = (d_c \cdot L \cdot s)g \\ F_A = (d_f \cdot x \cdot s)g \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{I eq. cora: } F_G - F_A &= ma \rightarrow d_c L s g - d_f x s g = d_c s L a \\ &\rightarrow d_c L g - d_f x g = d_c L \frac{d^2 x}{dt^2} a \\ &\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{d_f}{d_c} \cdot \frac{g}{L} \right) x = g \end{aligned}$$

FLUIDODINAMICA

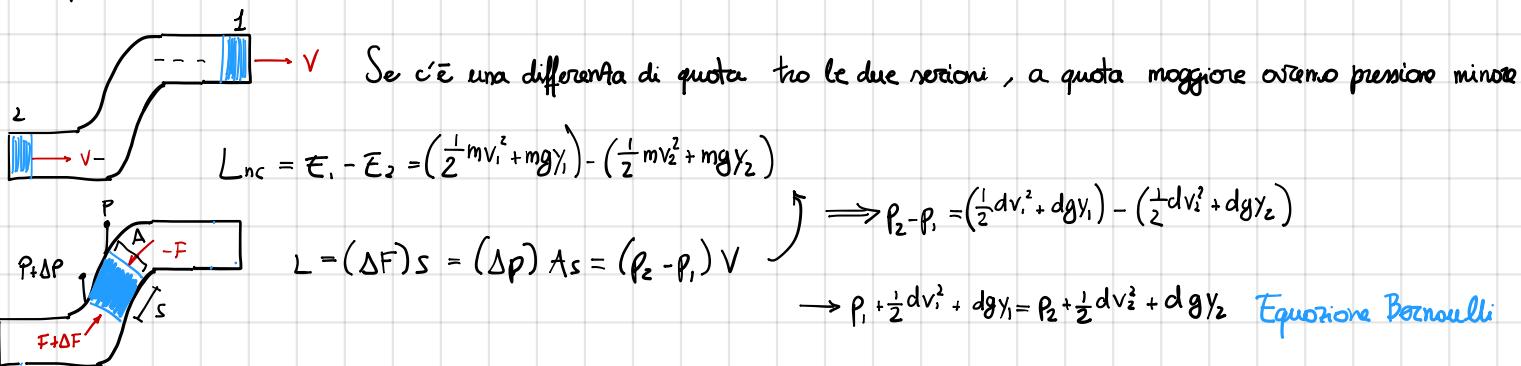


Portata: massa fluido che attraversa lo sezione di un tubo in un secondo [kg/s]



$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = d_2 A_2 v_2 = \text{portata}_2 \\ \frac{\Delta m_1}{\Delta t} = d_1 A_1 v_1 = \text{portata}_1 \end{array} \right\} \text{nello stesso tempo } (\Delta t) \text{ deve passare lo stesso massa } (\Delta m) \text{ in entrambe le sezioni} \rightarrow \text{portata}_2 = \text{portata}_1 \text{ equazione di continuità}$$

d non può essere cambiata, solo A e $v \Rightarrow A \cdot v = Q = \text{portata del condotto}$ [m^3/s]



Se c'è una differenza di quota tra le due sezioni, a quota maggiore c'è una pressione minore

$$L_{nc} = E_1 - E_2 = \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_1 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + m g y_2 \right)$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \left(\frac{1}{2} d v_1^2 + d g y_1 \right) - \left(\frac{1}{2} d v_2^2 + d g y_2 \right)$$

$$\rightarrow p_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 + d g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} d v_2^2 + d g y_2 \quad \text{Equazione Bernoulli}$$

TERMOCHEMIA E TERMODINAMICA

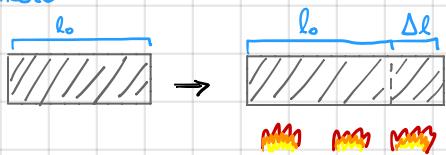
La temperatura è indice dello stato di agitazione termica dei corpi.

$$0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ Kelvin} - T_0$$

$$t + 273.15 = T$$

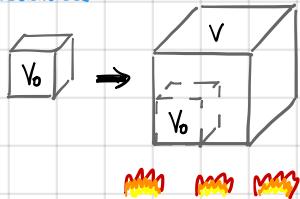
DILATAZIONE

- lineare



$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t \quad \begin{matrix} \text{coefficiente dilatazione lineare} \\ \text{variazione temperatura} \end{matrix}$$

- volumetrica

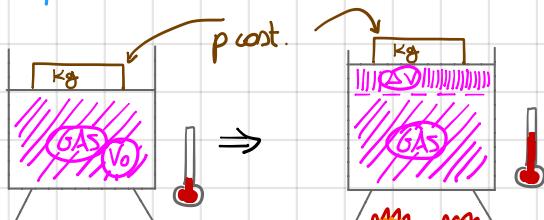


$$V = V_0 (1 + \beta \Delta t)$$

coefficiente dilatazione volumetrica

LO STATO DI UN GAS

- Trasformazione ISOBARA



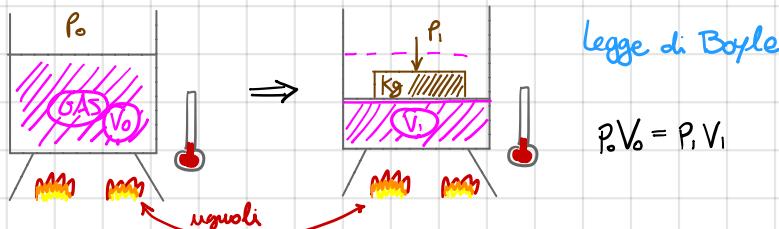
$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \quad V_a \leftarrow V = \frac{V_0}{T_0} T \quad \begin{matrix} \text{temperatura gas} \\ \text{temperatura } T \end{matrix}$$

I legge di Gay-Lussac

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta t) \Rightarrow V = V_0 \left(\frac{t + 273.15}{273.15} \right) \Rightarrow V = V_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

per i gas è sempre uguale di solito $3.66 \times 10^{-3} = \frac{1}{273.15}$

- Trasformazione ISOTERMA



legge di Boyle

$$p_0 V_0 = p_1 V_1$$

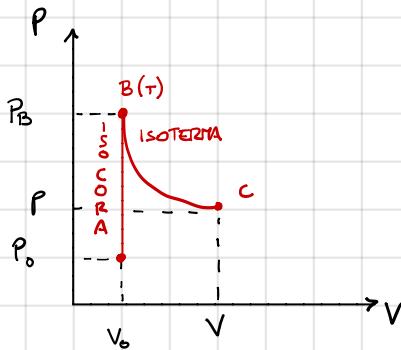
- Trasformazione ISOCORA



II legge di Gay-Lussac

$$p = p_0 (1 + \alpha \Delta t) \rightarrow p = \frac{p_0}{T_0} T$$

GAS PERTETTO



$$\frac{P_B}{T} = \frac{P_0}{T_0}$$

ISOCORA

$$P V = P_B V_0$$

ISOTERMA

$$\rightarrow P V = \left(\frac{P_0 T}{T_0} \right) V_0 \rightarrow \frac{P V}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

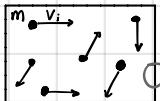
$$P_0 = 1 \text{ atm} = 101300 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

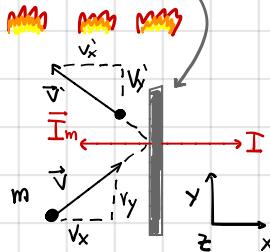
$$V_0 (1 \text{ kmole}) = 22.4 \text{ m}^3 \rightarrow V_0 = \#_{\text{kmole}} \cdot V_{\text{kmole}} \Rightarrow \frac{P V}{T} = \#_{\text{kmole}} \cdot \left(\frac{P_0 V_{\text{kmole}}}{T_0} \right) = \#_{\text{kmole}} \cdot R$$

$$\hookrightarrow R = 8314 \left[\frac{\text{J}}{\text{kmole} \cdot \text{K}} \right] \text{ costante dei gas}$$

TEORIA CINETICA DEI GAS



$$\sum m \vec{v}_i = \text{quantità di moto sistema} = 0 \rightarrow \sum \vec{v}_i = 0 \quad (\text{m uguale per tutti})$$



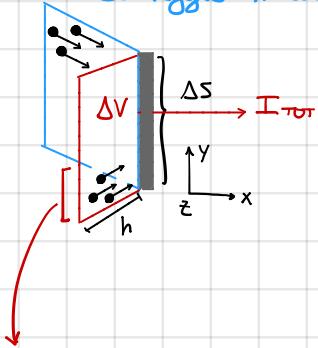
$$\vec{I} = -\vec{I}_m = -\Delta \vec{p} = m(\vec{v} - \vec{v}') \quad \begin{cases} x: I = m(v_x - \bar{v}_y) \\ y: v'_y = v_y \\ z: v'_z = v_z \end{cases}$$

$$\text{Applico la conservazione dell'energia: } \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) \Rightarrow v_x'^2 = v_x^2$$

\Rightarrow dall'eq. su x copiamo che $v_x \neq v'_x$, ma essendo i loro quadrati uguali $\Rightarrow v'_x = -v_x$

$$x: I = m(v_x - v'_x) = 2mv_x$$

Conteggio #urti su uno porote ΔS in un intervallo Δt



$$\Delta V = h \cdot \Delta S = v_x \Delta t \cdot \Delta S = \text{volume delle molecole che contribuiscono all'urto}$$

$$n = \text{concentrazione} = \frac{N}{\Delta V} \rightarrow N = [n(\vec{v})] \Delta V = n(\vec{v}) v_x \Delta S \Delta t = \# \text{molecole in } \Delta V$$

\hookrightarrow a noi interessano solo quelle con una dota \vec{v} , quelle dell'urto

$$I(\vec{v}) = N \cdot I = 2m n(\vec{v}) \cdot v_x^2 \cdot \Delta S \cdot \Delta t$$

$$I_{\text{tot}} = 2m \cdot \left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2 \right) \cdot \Delta S \cdot \Delta t \rightarrow \text{"tengo le molecole che hanno già sbattuto e stanno tornando indietro"} \\ \text{tutte i "}\Delta V\text{" oltre a quello rosso} \rightarrow m \cdot \left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2 \right) \cdot \Delta S \cdot \Delta t$$

$$P = \frac{I_{\text{tot}}}{\Delta S} = \frac{I_{\text{tot}}}{\Delta S \Delta t} = m \left(\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot v_x^2 \right) = \text{pressione sullo porote}$$

$$\overline{V_x^2} \text{ (media)} = \text{calcoli statistici} = \frac{\sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) V_x^2}{n} \rightarrow \sum_{\vec{v}} n(\vec{v}) \cdot V_x^2 = n \cdot \overline{V_x^2} \rightarrow P = m \cdot n \cdot \overline{V_x^2}$$

concentrazione totale

$$\overline{V^2} = \overline{V_x^2} + \overline{V_y^2} + \overline{V_z^2} \rightarrow \overline{V_x^2} = \overline{V_y^2} = \overline{V_z^2} = \frac{\overline{V^2}}{3} \rightarrow P = \frac{1}{3} \cdot mn \overline{V^2} \rightarrow \text{metto in evidenza l'energia cinetica} \rightarrow P = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} mn \overline{V^2} \right) K$$

$$\rightarrow n = N/V \rightarrow P = \frac{2N}{3V} \left(\frac{1}{2} mn \overline{V^2} \right)$$

$$M_{\text{TOT}} = N \cdot m = n_{\text{kandi}} M \rightarrow \text{massa 1 kmoles} \rightarrow PV = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} M_{\text{TOT}} \overline{V^2} \right) = \frac{1}{3} n_{\text{kandi}} M \overline{V^2} = n_{\text{kandi}} \cdot R \cdot T$$

$$\rightarrow V = \text{velocità quadratica media delle molecole} = \sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

CALORIMETRIA

$$[Q] = [c] \cdot m \cdot \Delta T \quad [K_{\text{col}}] \quad 1 \text{ kcol} = 4186 \text{ J} \rightarrow \Delta E = cm\Delta t \quad [J]$$

calore specifico
calore assorbito

$$C = c \cdot m = \text{capacità termica} \quad [J/K]$$

Tra due oggetti con temperature diverse a contatto, quello a temperatura maggiore cede calore all'altro che lo assorbe fino ad un'temperatura di equilibrio per entrambi.

es

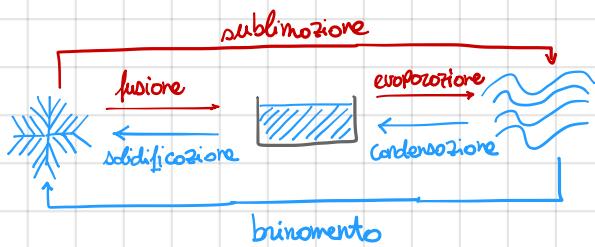
$$T_1 < T_2 < T_3$$

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_2 - T_1) \quad \text{assorbe} \quad Q_2 = c_2 m_2 (T_3 - T_2) \quad \text{cede} \quad \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \quad (\text{in un sistema chiuso}) \rightarrow T_e = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$$

media pesata della capacità termica

$$\text{In generale } \sum Q_i = 0 \quad \sum c_i m_i (T_e - T_i) \Rightarrow \sum c_i m_i T_e = \sum c_i m_i T_i \quad \rightarrow T_e = \sum c_i m_i T_i / \sum c_i m_i$$

CALORE LATENTE



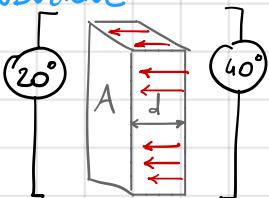
$$Q = \text{calore necessario alla fusione} = \lambda_f \cdot m$$

λ_v : evapiazione

PROPAGAZIONE DEL CALORE termica

- solidi → **conduzione**: trasmissione di **energia** ma non trasporto di **motore**
- fluidi → **convezione**: trasmissione di **energia** e trasporto di **motore**
- ➤ **raggiamento**: trasmissione di energia **elettromagnetica**

CONDUZIONE

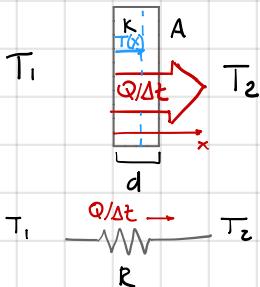


Legge di Fourier della conduzione:

$$Q = k \cdot \frac{A \cdot \Delta T \cdot \Delta t}{d}$$

conducibilità termica [W]

quantità calore che si propaga per conduzione



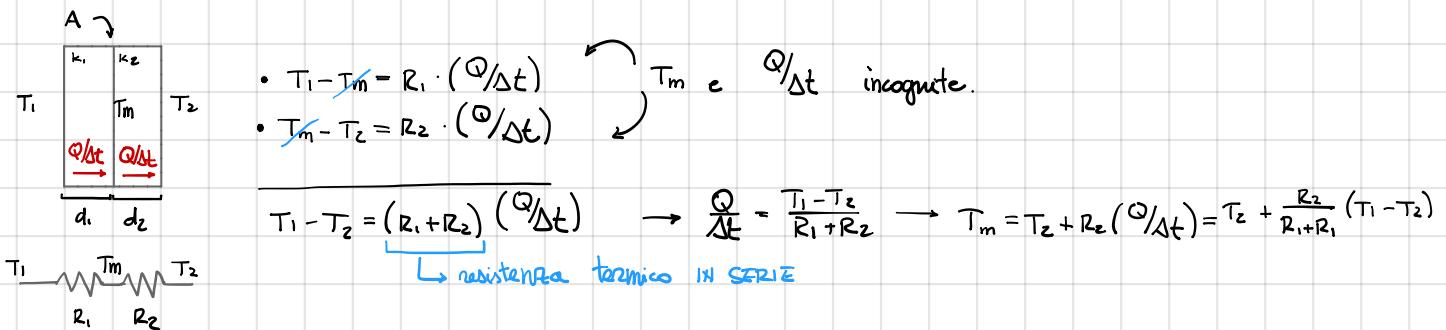
$$\frac{Q}{\Delta t} = (k \cdot \frac{A}{d}) \Delta T$$

flusso termico

$$\text{Legge di Ohm termica: } \Delta T = R \left(\frac{Q}{\Delta t} \right)$$

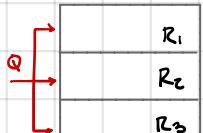
$$\text{Resistenza termica: } R = \frac{d}{k \cdot A}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\Delta t} &= \left(\frac{kA}{d} \right) (T_1 - T_2) \\ \frac{Q}{\Delta t} &= \left(\frac{kA}{x} \right) (T_1 - T(x)) \end{aligned} \quad \left[\frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{T_1 - T(x)}{x} \rightarrow T(x) = T_1 - \left(\frac{x}{d} \right) (T_1 - T_2) \right]$$



$$R_{TOT} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

resistenza termico IN PARALLELO



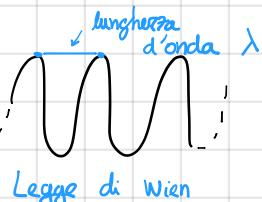
CONVEZIONE

Il fluido più caldo "sole" mentre quello più freddo "scende" poiché hanno rispettivamente densità più bassa e più alta.



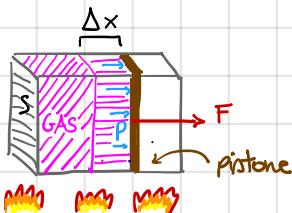
IRRAGGIAMENTO

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2898}{T} \text{ micron}$$



Legge di Wien

LAVORO IN TERMODINAMICA

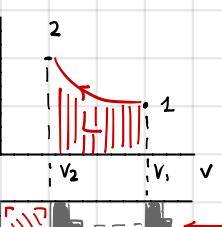
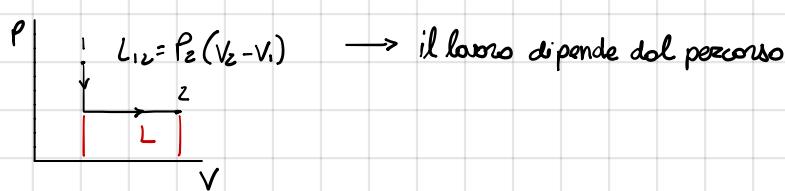
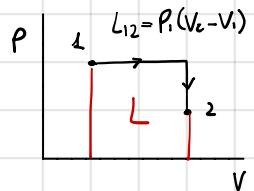
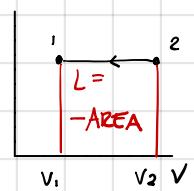
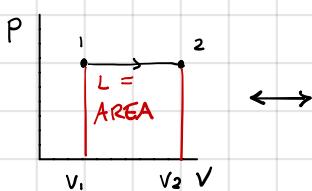


$$L = F \Delta x = p S \Delta x = p \Delta V$$

dL = lavoro infinitesimo = $p S dx = p dV$

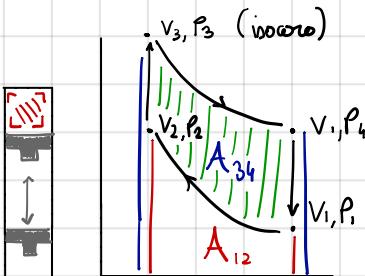
Se F "sposta" il pistone e quindi c'è aumento di volume si parla di lavoro positivo

Se invece F è "contraria" e il gas diminuisce di volume avremo lavoro negativo



$$L = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

In un ciclo completo:

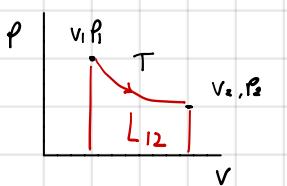


$$L_{\text{Tot}} = A_{34} - A_{12} > 0$$

In compressione ho lavoro negativo $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = -A_{12}$

In decompressione ho lavoro positivo $L_{34} = \int_{V_2}^{V_1} P dV = A_{34}$

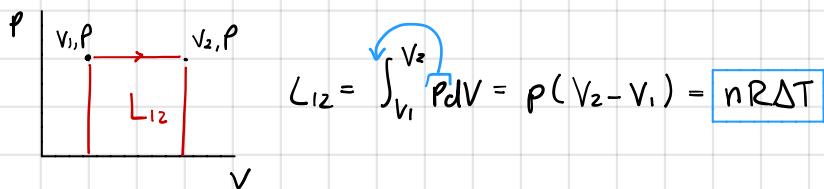
Lavoro in uno trasformazione ISOTERMA per un gas IDEALE



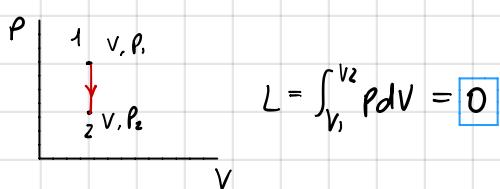
$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV$ in generale, ma $PV = \text{# mol} RT$ nei gas perfetti

$$\rightarrow P = \frac{nRT}{V} \rightarrow L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \left(\ln V_2 - \ln V_1 \right) = nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

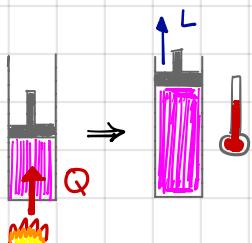
Lavoro in uno trasformazione ISOBARA per un gas IDEALE



Lavoro in uno trasformazione ISOCORA per un gas IDEALE



I principio della termodinamica



$$Q = \Delta U + L \quad Q = C_V dT + PdV \quad (\text{gas perfetti})$$

energia interna → proporzionale alla temperatura per gas perfetti

$dQ = dU + dL \rightarrow$ forma differenziale

ISOCORA: $dQ_V = \boxed{C_V dT} + pdV \rightarrow$ tutto il calore si "trasforma" in aumento di energia / temperatura

\hookrightarrow colore specifico a volume costante $C_V = \frac{dQ_V}{dT} = n \underline{\underline{C_V}}$

\hookrightarrow colore molare volume costante

ISOBARA: $dQ_P = \boxed{C_V dT} + pdV \rightarrow P = nRT \rightarrow pdV = nRdT \rightarrow dQ_P = C_V dT + nRdT = \underbrace{(C_V + nR)}_{C_P} dT = C_P dT$

$$C_P = \frac{dQ_P}{dT} = n \underline{\underline{C_P}}$$

\hookrightarrow colore molare pressione costante

ISOTERMA: $dQ = dL \quad \Delta U = 0$

GAS MONOATÓMICO

$$\text{energia traslazionale} \rightarrow \text{peso molecolare}$$

$$U = K = \frac{1}{2} n \overline{v^2} \rightarrow \sqrt{\text{media}} = \frac{3}{2} nRT \quad \left(V = \sqrt{\frac{3RT}{\pi}} \right) \quad = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} nRT \right)$$

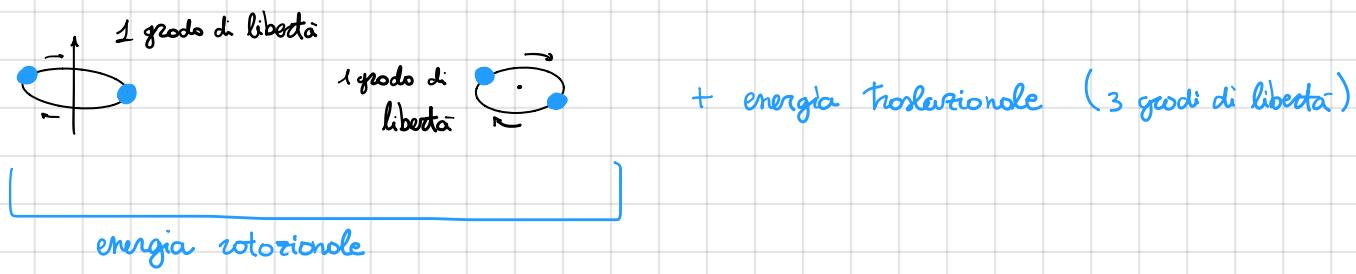
n mol

energia in 3 direzioni
3 gradi di libertà

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad C_P = C_V + R = \frac{5}{2}R$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} - \frac{nC_P}{nC_V} = \frac{5}{3}$$

GAS BIATOMICI



$$U = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} nRT\right)$$

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad C_P = \frac{7}{2} R \quad \gamma = \frac{7}{5}$$

"energica Vibrazione" (trasunibile a basse temperature)

GAS TRIATOMICI

(Disegni complessi) \rightarrow 3 gradi libertà energia rotazionale + 3 gradi libertà energia traslazionale

$$U = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} n k T \right)$$

$$C_V = 3R \quad C_P = 4R \quad \gamma = \frac{4}{3}$$

II principio della termodinamica

Transformazione ADIABATICA: non c'è scambio di calore

$$dQ = C_V dT + P dV \rightarrow PV = nRT \rightarrow Vdp + PdV = nRdT \rightarrow dT = \frac{Vdp + PdV}{nR} \rightarrow \frac{C_V}{nR} (Vdp + PdV) + PdV = 0$$

$$\rightarrow \frac{C_V}{nR} Vdp + \frac{C_V + nR}{nR} PdV = 0 \rightarrow \frac{C_V}{nR} Vdp + \frac{C_P}{nR} PdV = 0 \rightarrow Vdp + \frac{C_P}{C_V} PdV = 0 \rightarrow \frac{dp}{P} + \frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} = 0$$

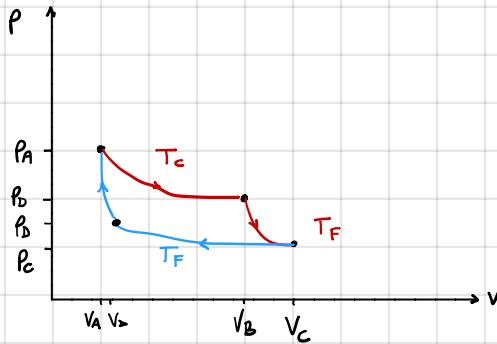
$$\int - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \gamma \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{P_2 V_2^{\gamma}}{P_1 V_1^{\gamma}}\right) = 0 \rightarrow \frac{P_2 V_2^{\gamma}}{P_1 V_1^{\gamma}} = 1$$

$$\Rightarrow P_2 V_2^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

$$U = nC_V \Delta T \quad L = -U = -nC_V \Delta T$$

CICLO DI CARNOT

- 1) Espansione isoterma
- 2) Espansione adiabatica
- 3) Compressione isoterma
- 4) Compressione adiabatica



$$1) Q_C = Q_{AB} = L_{AB} = nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$2) L_{BC} = -nC_V(T_F - T_C)$$

$$3) Q_F = Q_{CD} = L_{CD} = nRT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$4) L_{DA} = -nC_V(T_C - T_F)$$

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{DA} = nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_F \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$\rightarrow L_{TOT} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)(T_C - T_F)$$

$$Q_C = nRT_C \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

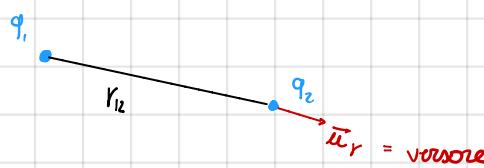
$$\eta = \text{rendimento} = \frac{L_{TOT}}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

ELETTRICITÀ E MAGNETISMO

Elettrostatica: indipendenza dal tempo

LEGGE DI COULOMB: attrazione tra due cariche

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$$



↳ fattore di proporzionalità = costante dielettrico del vuoto

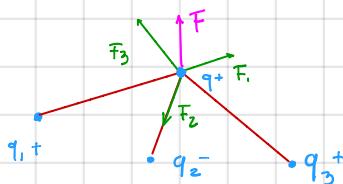
Tale forza può essere sia attrattiva che repulsiva a seconda del segno delle cariche

• $q_1 q_2 > 0 \rightarrow$ forza repulsiva

• $q_1 q_2 < 0 \rightarrow$ forza attrattiva

$$\vec{F} \sim \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_i^n \vec{F}_i$$

Tale forza dipende, oltre dalla carica stessa, anche dalla sua posizione!

→ dividendolo per q tolgo la dipendenza dalla carica → $\vec{F}(x,y,z)/q =$ campo elettrico statico \vec{E}

In altri termini: se in un campo \vec{E} generato da cariche, inserisco una carica di prova q si genera una forza data da $\vec{E} \cdot q$ su tale carica

ES

$$\vec{E}_{tot} = |\vec{E}_{tot}| \cdot \vec{i} = z |\vec{E}_1| \cos \theta \cdot \vec{i}$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r^2 = (a^2 + x^2) \rightarrow \vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{i}$$

oppure \vec{E}_2

Il campo elettrostatico è conservativo!

$$\frac{1}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

↳ Lavoro su una circonferenza

$$\vec{E} = -grad V = -\vec{\nabla} V \quad (\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k})$$

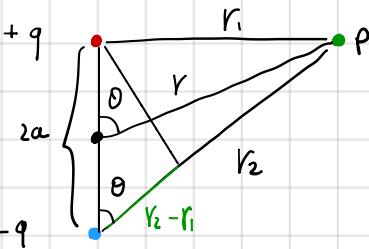
$$= - \left[\frac{dV}{dx} \vec{i} + \frac{dV}{dy} \vec{j} + \frac{dV}{dz} \vec{k} \right]$$

$$V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_A} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{l} \vec{u}_r$$

$$\rightarrow V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_A} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r \cdot \frac{dr}{dr} d\vec{l} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$r_B \rightarrow \infty \Rightarrow V_\infty = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_A}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

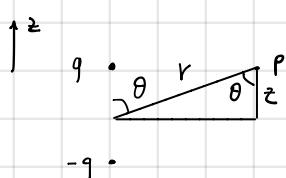
$r_1 < r < r_2$

Se P è molto lontano, i due angoli sono approssimativamente uguali.

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = \cos\theta \\ r_1 \cdot r_2 = r^2 \end{cases} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2aq\cos\theta}{r^2}$$

$\vec{P} = 2aq \cdot \vec{k}$ = momento di dipolo (dipolo conico negativo a quella positiva)

$$\rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos\theta}{r^2}$$



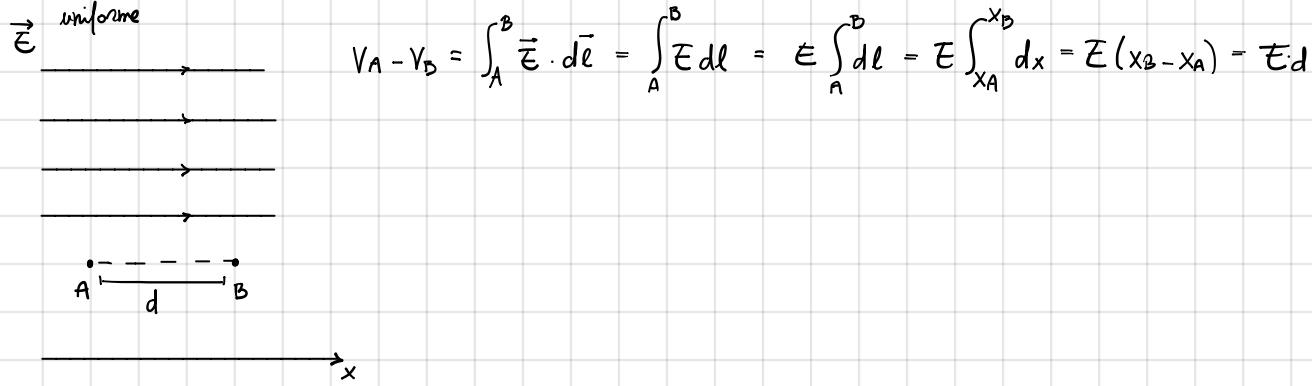
$$z = r \cos\theta \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \frac{z}{r^3}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}{r^3}$$

in coordinate cartesiane

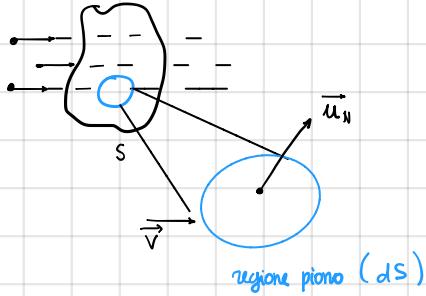
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cdot z}{(x^2+y^2+z^2)^3} \left(-\frac{3}{2} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) = \boxed{\frac{3Pz^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}}$$

$$E_y = \dots$$

$$E_z = \dots$$



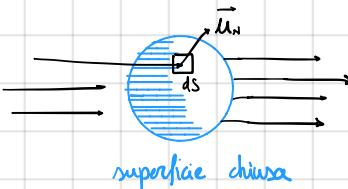
FLUSSO DI UN VETTORE



$$\vec{v} \cdot \vec{u}_n \, ds = d\phi_v$$

$$\rightarrow \phi_v = \int \vec{v} \cdot \vec{u}_n \, ds$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, ds$$



I flussi "usciti" sono positivi, mentre quelli "entranti" negativi perché i vettori sono rispettivamente concordi e opposti al vettore u_n $\rightarrow \Phi = 0$

TEOREMA DI GAUSS

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{\mu}_n$$

$$\rightarrow \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$\rightarrow \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \oint dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$4\pi r^2$ (sfera)

Questo teorema vale per qualsiasi superficie chiusa!

$$\rightarrow \Phi_E = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0}$$

$$q_{tot} = \int_V \rho dV \quad \text{con } \rho = \text{densità di carica} \rightarrow \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

- Sfera conduttrice uniformemente carica sulla superficie

$$r < R \quad \Phi_E = 0 = E(r) \cdot S$$

$$r > R \quad \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In altre parole, fuori dalla sfera "vedo" un campo elettrico pari a quello di una corica puntiforme Q mentre all'interno è nullo.

- Piatto uniformemente carico

$$\sigma' = \frac{dQ}{dS} = \text{densità superficiale di carica}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\mu}_n dS = ES = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma \cdot S \rightarrow \epsilon = \sigma / 2\epsilon_0$$

- Due piatti uniformemente carichi paralleli

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{2\epsilon_0}$$

compo nullo

compo interno = $\epsilon_{int} = 2 \frac{\epsilon'}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon'}{\epsilon_0}$

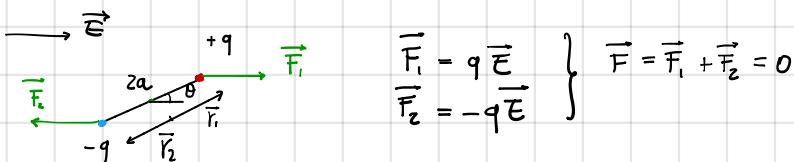
divergenza di \vec{E} = $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ a differenza del gradiente, la divergenza è uno scalare

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \nabla = \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} \end{array} \right\}$$

Proprietà campo elettrico statico

- $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
- $\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$ = rotore di \vec{E}

"immaginiamo" un dipolo in un campo elettrico \vec{E} : sulle cariche verranno esercitate delle forze prodotte dal campo elettrico



Si generano dei momenti di forze:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{\gamma}_1| = |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = a q \epsilon \sin \theta \\ |\vec{\gamma}_2| = a q \epsilon \sin \theta \end{array} \right\} |\vec{\gamma}| = 2 a q \epsilon \sin \theta = \cancel{P} \epsilon \sin \theta \xrightarrow{\text{momento dipolo}}$$

CONDENSATORE

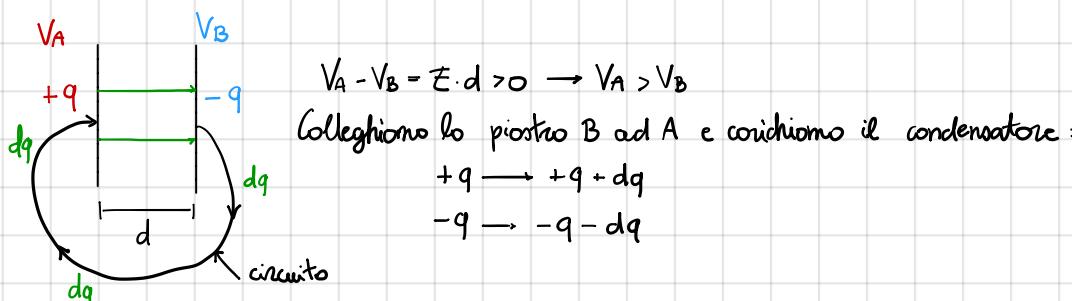
Un qualunque "sistema" in cui ci siano due conduttori carichi con una differenza di potenziale tra di essi.

$$\frac{Q}{\Delta V} = \text{costante} = C = \text{capacità}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot d \rightarrow Q = \epsilon_0 S$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 S / d \quad (\text{condensatore piano})$$



Poiché dq va da uno zero a potenziale minore ad uno con potenziale maggiore eseguita un lavoro! ("controcorrente")

$$dL = (V_A - V_B) dq \quad \left\{ \begin{array}{l} dU = dL = \frac{q dq}{C} \\ V_A - V_B = \frac{q}{C} \end{array} \right. \longrightarrow U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{Energia Potenziale}$$

$$\mu = \frac{U}{\text{Volume}} = \frac{1}{2} CV^2 \cdot \frac{1}{S \cdot d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{Valido per qualsiasi volume, non solo } S \cdot d)$$

CORRENTE ELETTRICA: cariche in movimento. Con velocità molto inferiori a quella della luce, le regole viste fino ad ora sono ancora valide.

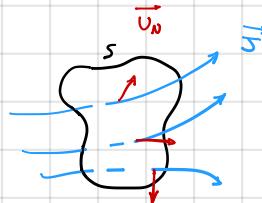
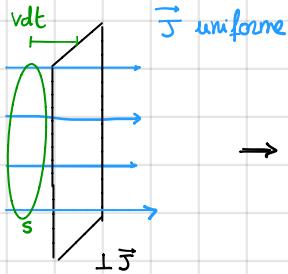
$$i - \text{corrente} = \frac{dq}{dt} \quad (\text{cariche "passanti" in una sezione di conduttore in un intervallo di tempo})$$

$$q \rightarrow \vec{v} \quad q \rightarrow \vec{v}$$

$$n = \# \text{ particelle per unità di volume}$$

$$\vec{J} = n q \vec{v} = \text{densità di corrente}$$

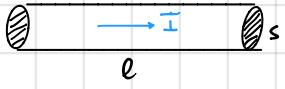
$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{dq}{dt}$$



$$\rightarrow \frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{u}_n \rightarrow \frac{dq}{dt} = JS = nqvS \rightarrow dq = nq [Sv dt]$$

$$\text{Legge di Ohm: } \Delta V = V = IR$$

$$R = \text{resistenza} = \frac{l}{S} \cdot \rho \quad [l = \text{lunghezza conduttore} \quad S = \text{sezione} \quad \rho = \text{resistività}]$$



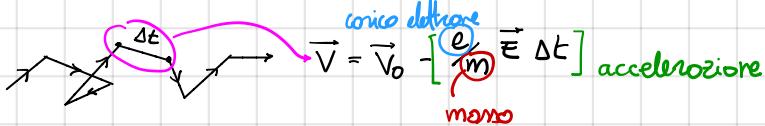
$$V = IR$$

$$V = Ed - El \quad I = JS \quad R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

$$\rightarrow Ed = JS \cdot \rho \cdot \frac{l}{S} \rightarrow E = \rho \cdot J \quad (\vec{E} = \rho \vec{J})$$

$$\text{Alternativamente: } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = \text{condutibilità}$$

Il moto di un elettrone all'interno di un conduttore è irregolare e composto da una serie di salti



$$\bar{\Delta t} \text{ medio} = \tau \rightarrow \bar{v} \text{ media} = \bar{V}_0 \text{ media} - \frac{e}{m} \bar{E} \tau$$

\bar{V}_0 media può considerarsi nulla perché V_0 è totalmente casuale

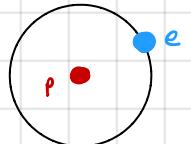
$$\rightarrow \bar{V} \text{ media} - \bar{V} \text{ deriva} = - \frac{e}{m} \bar{E} \tau \rightarrow \bar{J} = - ne \bar{v} d = \frac{n e^2 \gamma}{m} \bar{E}$$

$$P = \text{potenza} = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = -e \vec{E} \cdot \vec{v}_d \quad \text{singolo elettrone}$$

$$P_{\text{vol}} = \text{potenza per unità di volume} = -n e \vec{E} \cdot \vec{v}_d = \vec{J} \cdot \vec{E} = JE (\propto \parallel)$$

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{vol}} \cdot S \cdot l = \frac{I}{JSE} = IV \quad \text{Legge di Joule} \quad V = IR \rightarrow P = I^2 R$$

CAMPO MAGNETICO STATICO



$$\cdot F_e \approx 8.1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$\cdot F_g \approx 3.7 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

↳ le forze gravitazionali sono trascurabili (nei nostri casi)

Diamo per scontato lo natura del campo magnetico (per ora) e immersiamoci una conica di prova: se la conica è in quiete non accade nulla, se invece ha uno suo velocità iniziale avremo vari effetti.

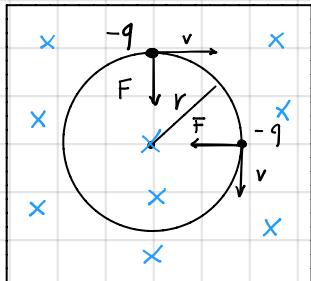
$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = \text{Forza di Lorentz}$$

$$|F| = q v B \sin \alpha$$

$$\vec{F} \perp \vec{v} \rightarrow dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0 \rightarrow L = 0 \rightarrow Kq \text{ non combia!}$$

Essendoci una forza ovvero un'accelerazione che modificherà \vec{v} , ma $K = \text{costante} \sim v^2$
 → l'accelerazione cambia \vec{v} ma non il suo modulo! (forza centripeta)

ES



Piono con campo magnetico entrante, $r = \frac{mv}{eB}$, $v = wr \rightarrow w = \frac{eB}{m}$

$$F = \frac{v \perp B}{evB} = \frac{mv^2}{r}$$

Se \vec{B} e \vec{v} non sono \perp :

$$v_{\parallel}, v_{\perp}, \alpha$$

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad \omega = \frac{v_{\perp}}{r} \quad T = \frac{2\pi r}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

⇒ Il campo modifica v_{\perp} in direzione, ma non in modulo e lascia invariata v_{\parallel} ⇒

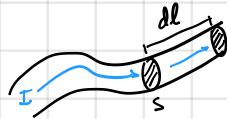
$$\text{Posso } P = v_{\parallel} \cdot T = v_{\parallel} \cdot \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = v_{\parallel} \cdot \frac{2\pi}{v_{\perp}} \cdot \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{\pi m v_{\parallel}}{qB}$$



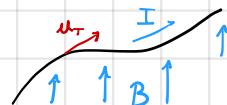
Applichiamo un campo magnetico su di un conduttore in cui sta scorrendo una corrente I

$$f_1 = \text{forza magnetica su un singolo elettrone} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$f_{\text{tot}} = n f_1 = n e\vec{v} \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B}$$



$$dV = S dl \rightarrow dF = \vec{J} \times \vec{B} S dl$$

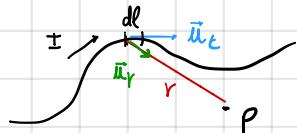


$$\vec{J} = J \cdot \vec{\mu}_t \rightarrow \vec{J} dl = J \vec{\mu}_t dl = J dl \rightarrow dF = \vec{J} S dl \times \vec{B} = I dl \times \vec{B}$$

$$\rightarrow F = I \int_C dl \times \vec{B}$$

Un campo magnetico \vec{B} è generato da correnti stazionarie.

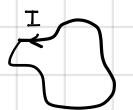
Consideriamo un conduttore in cui scorre una corrente stazionaria e un punto P esterno



$$d\vec{B} \sim I \frac{\vec{\mu}_t \times \vec{\mu}_r}{r^2} dl$$

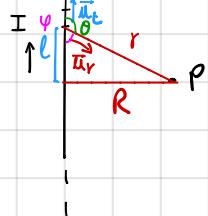
Formula di Ampere-Laplace

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\vec{\mu}_t \times \vec{\mu}_r}{r^2} dl \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \left[\frac{T \cdot m}{A} \right]$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot I \oint \frac{\vec{\mu}_t \times \vec{\mu}_r}{r^2} dl \quad \text{calcolo molto complesso!}$$

A seconda di quale dl prendiamo verremmo solo r , $\vec{\mu}_r$ e θ

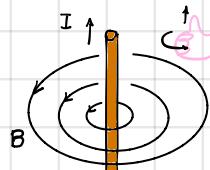


$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{\mu}_t| \cdot |\vec{\mu}_r|}{r^2} \sin\theta \, dl$$

$$R = r \sin\varphi \rightarrow \varphi = \pi - \theta \rightarrow R = r \sin\theta$$

$$dl = R \cot\varphi \, d\varphi \rightarrow dl = -\frac{R}{\sin^2\varphi} \, d\varphi = \frac{R \, d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\sin\theta}{R^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \frac{R}{\sin^2\theta} \cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$



(Regola mano destra)

Legge di Biot-Savart: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\mu}_t$

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \quad d\vec{l}_2 = dl_2 \cdot \vec{J}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (\vec{k}) \quad \text{(indico il verso entrante delle linee di flusso del campo } B_1, \text{ verso destra)}$$

$$\rightarrow \vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int \vec{J}_x (\vec{k}) dl_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int dl_2 \cdot \vec{J} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot L_2 \cdot \vec{J}$$

$$f_2 = \vec{F}_2 / L_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{J}$$

Analogamente: $\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \cdot L_1 \cdot \vec{J} \rightarrow f_1 = -f_2 \rightarrow$ i due conduttori si attraggono!

Se le correnti sono discordi le forze saranno invece di tipo repulsivo.

Campo magnetico sull'asse di una spira

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\vec{u}_t \times \vec{u}_r}{r^2} \right] dl \rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} dl$$

Per i due punti simmetrici rispetto all'asse le componenti "verticali" di $d\vec{B}$ si annullano: basta calcolare le componenti parallele a z .

$$\rightarrow dB_{||} = dB \cos \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{a}{r} \cos \varphi dl$$

$$\rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{r^3} dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{r^3} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \pm \frac{a}{r^3} \frac{1}{2\pi a} \quad \text{circonferenza} \quad = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \quad \rightarrow r = \sqrt{a^2 + z^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{in funzione di } z)$$

$$\text{Per } z=0 \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

$$\text{Per } z \gg a \rightarrow B = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot 2IS}{4\pi} \frac{\pi a^2}{z^2}$$

$$\text{Introduciamo } m = I \cdot S = \text{modulo momento dipolo elettrico} \rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot 2m}{4\pi z^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2q}{z^3} \quad \text{simile}$$

Supponiamo una spira rettangolare

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{Poiché } dl \text{ e } B \text{ sono sempre } \perp \rightarrow F = IBL$$

(dell'otto)

$$F = IBL$$

Il modulo delle forze sui lati sono analogo, ma cambierà il verso

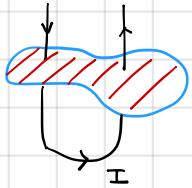
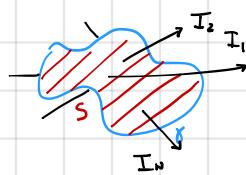
$$F = IBL$$

A differenza del caso precedente, le due forze non sono nella stessa direzione e generano quindi un momento.

$$\gamma_1 = F \frac{l}{2} \sin \theta = \gamma_2 \rightarrow \tau = \frac{m}{IBL} \cdot \sin \theta = m B l \sin \theta$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{con } \vec{m} = IS \vec{u}_N$$

Legge di circuazione: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$
 $= N_0 (I_1 + I_2 + \dots + I_N)$



$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ ciò non implica che \vec{B} sia nullo!

$N_0 I = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{n}_0 dS$

Legge di Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{n}_0 dS$

Flusso densità di corrente

Nel caso del campo elettrico:

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ sempre se \vec{E} statico $\rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$

mentre per il campo magnetico

$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \neq 0$ \rightarrow Al contrario del campo elettrico, il rotore del campo magnetico è nullo solo se non sono presenti correnti (\vec{J}) $\rightarrow \vec{B}$ non è conservativo

Calcolo campo magnetico di un solenoide rettilineo infinito con la legge di Ampere



$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$:

- lato SR \rightarrow campo nullo
- metà superiore lati SP e RQ \rightarrow campo nullo
- metà inferiori lati SP e RQ \rightarrow $dl \perp B$ $\rightarrow \int B \cdot dl = 0$
- lato PQ \rightarrow OK

} più o meno!

$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{PQ} B dl - B \int_{PQ} dl = BL$ per la legge di Ampere $\rightarrow BL = \mu_0 I_{\text{tot}}$

$I_{\text{tot}} = N \cdot I$ con $N = \# \text{ spire in } L$ $\rightarrow B = \frac{\mu_0 N}{L} \cdot I = \mu_0 N I$

$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ $\rightarrow \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$ legge di Gauss per il campo elettrico / 1^a Eq. di Maxwell

$\oint \vec{B} \cdot \vec{n}_0 dS = 0$ $\rightarrow \text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ legge di Gauss per il campo magnetico / 2^a Eq. di Maxwell

S chiusa

$\text{div } \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$ \rightarrow il campo omogeneo sorgente puntiforme (la corda)

$\text{rot } \vec{E} = 0$ \rightarrow campo conservativo

$\text{div } \vec{B} = 0$ \rightarrow non esistono corde magnetiche

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ \rightarrow non conservativo

compo solenoidale

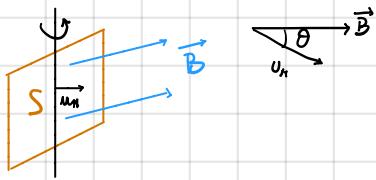
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{tra due punti } A \text{ e } B$$

in un circuito chiuso invece: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_E = \text{Forza elettromotrice indotta}$. Per compi conservativi $V_E = 0$

Si è notato però che la forza elettromotrice è quindi il passaggio di corrente è generata dal cambiamento repentino nel tempo del flusso elettrico del circuito ed è proporzionale alla rapidità di variazione nel tempo

Legge di Faraday - Henry: $V_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n}_w dS$

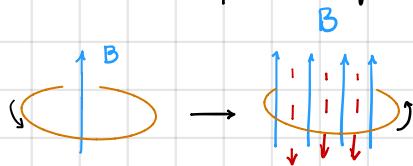


Supponiamo che l'angolo varii nel tempo $\theta = wt$

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}_w dS = BS \cos wt$$

$$\rightarrow V = - \frac{d\Phi_B}{dt} = BS\omega \sin wt$$

N.B. Il segno negativo indica che la corrente indotta genera un campo magnetico secondario che tende ad opporsi al cambiamento del flusso del campo magnetico principale



Forma alternativa legge Faraday - Henry: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n}_w dS$

$$L = \text{coefficiente di autoinduzione} = \frac{\Phi_B}{I}$$

es $B = \mu_0 \cdot n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$

$$\Phi_B' = B \cdot S = \mu_0 n I S$$

$$\Phi_B = N \Phi_B' = \mu_0 n I N S = \mu_0 n^2 I l S \quad \rightarrow L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 l S \quad \rightarrow \frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{per unità di lunghezza})$$

$$\Phi_B = LI \rightarrow V_E = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt}(LI)$$

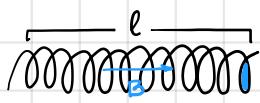
$$\text{se } L = \text{costante} \rightarrow V_L = -L \frac{dI}{dt} = \text{forza elettromotrice autoindotta}$$

$$V_{\text{TOT}} = V_{\text{generatore}} + V_L = RI \rightarrow V - L \frac{dI}{dt} = RI - \underline{I} V = L \frac{dI}{dt} + RI \underline{I}$$

? potenza necessaria a far fluire la corrente
 $\rightarrow VI = LI \frac{dI}{dt} + RI^2$ potenza consumata dal generatore

→ potenza che il generatore spende per produrre il campo magnetico autoindotto

$$\rightarrow \frac{dU_B}{dt} LI \frac{dI}{dt} \rightarrow \int_{0}^{U_B} dU_B = \int_{0}^I LI dI \rightarrow U_B - \frac{1}{2} LI^2 = \text{energia prodotta nel circuito}$$



$$B = \mu_0 n I \quad L = \mu_0 n^2 S l$$

$$U_B = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S l I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \frac{S l}{\text{volume}} \quad \longrightarrow \quad U_B = \text{densità di energia} = \frac{U_B}{S l} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{B^2}{n^2} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

$$\frac{B}{\mu_0} = n I$$

Dove è presente un campo magnetico è presente anche una densità di energia, in qualsiasi caso dota da questa formula.

$$\rightarrow U_B = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V B^2 dv$$

$$\text{Analogamente: } U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv$$

Mutua Induttanza

$$\Phi_{2,1} = \text{flusso 1 nel circuito 2} = M \cdot I_1$$

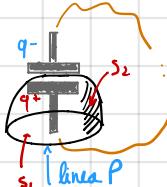
$$\Phi_{1,2} = M I_2$$

$$M = \text{coefficiente di mutua induzione} = \frac{\Phi_{2,1}}{I_1}$$

$$\text{Da questo deriva la forza elettromotrice di mutua induzione } V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n}_s ds \quad \rightarrow \text{forma differenziale: } \text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



In questo caso prendendo prima una superficie e poi l'altra otteniamo due risultati differenti con la legge di Ampere

Maxwell ha modificato la formula nel seguente modo: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + ?)$

Maxwell aggiunge a I una $I_s = I \text{ di spostamento} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{n}_s ds$ che tiene conto dei "combiamenti" (differenze S_1 e S_2)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_s) \quad \text{Legge di Ampere - Maxwell}$$

$$= \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{n}_s ds + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{n}_s ds \quad \Rightarrow \text{Un campo magnetico è generato da correnti e campi elettrici variabili nel tempo}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Riepilogo Equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{div} \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ 2) \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ 3) \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 4) \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

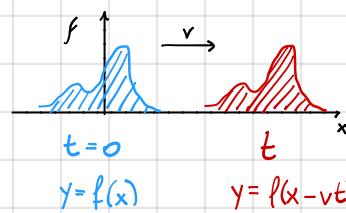
Posiamo notare quindi che campo elettrico e magnetico sono "collegati" fra loro e cominciamo a parlare di campo elettromagnetico

Nel vuoto, quindi dove non vi sono corrente e correnti, diventano ancora più simmetriche:

$$\begin{aligned} \cdot \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \cdot \nabla \times \vec{E} &= - \frac{d\vec{B}}{dt} \\ \cdot \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \cdot \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \end{aligned}$$

ONDE

È una perturbazione che si propaga nel tempo.



Il segno negativo dà un'onda progressiva

I segni positivi danno un'onda regresiva

$$s(x, t) = \text{perturbazione} = f(x-vt) + f_2(x+vt)$$

A differenza di altri tipi di onde, quelle elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto senza spostamento di materia nella direzione dell'onda stessa (onde trasversali)



$$\text{Eq. delle onde: } \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad u = x \pm vt$$

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione:} \\ 1) \frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad \rightarrow \frac{du}{dt} = \pm v \quad \rightarrow \frac{ds}{dt} = \pm v \frac{ds}{du} \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{d}{du} \cdot \frac{du}{dt} \Rightarrow \pm v \frac{ds}{du} \quad \boxed{[\pm v \frac{ds}{du}]} = \boxed{v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}} \\ 2) \frac{ds}{dx} &= \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{ds}{du} \\ \frac{ds}{dx} &= \frac{d}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d}{du} \left[\frac{ds}{du} \right] = \boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}} \end{aligned}$$

$s(x, t)$ è una soluzione generale dell'equazione!

$$s(x, t) = a \sin [k(x-vt)]$$

$$\frac{ds}{dx} = ka \cos [k(x-vt)]$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = -k^2 a \sin [k(x-vt)] \rightarrow \cdot v^2 \rightarrow \frac{ds}{dt} = -vka \cos [k(x-vt)]$$

$$\frac{ds}{dt} = -vka \cos [k(x-vt)]$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -v^2 ka \sin [k(x-vt)] = v^2 \frac{d^2 s}{dx^2}$$

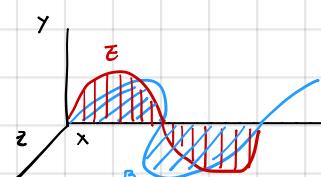
Soluzione Armonica

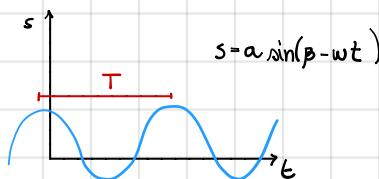
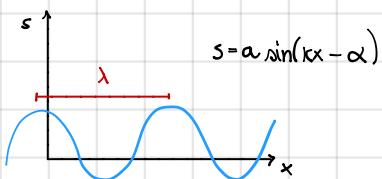
$$\rightarrow s(x, t) = a \sin(kx - wt) + a \sin(kx + wt) \quad \text{con } v = \omega/k$$

$$E = E_0 \sin(kx - wt)$$

$$B = B_0 \sin(kx - wt)$$

} ortogonali tra loro

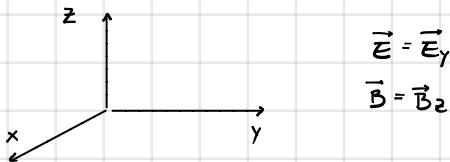




s è periodica sia nel tempo che nello spazio

$$s = a \sin(kx - \omega t) \quad \text{nel punto } x' = x + \lambda \rightarrow s = a \sin(kx + k\lambda - \omega t) = a \sin(kx - \omega t) \rightarrow k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Analogamente si può dimostrare che $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ — frequenza $= \frac{1}{T}$



$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{dE_y}{dy} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \frac{dB_z}{dz} = 0$$

$$\text{Componente } z \text{ rot } \vec{E} = \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_y}{dz} = - \frac{dB_z}{dt} \quad \bullet$$

$$\left(\frac{dE_y}{dz} = 0 \right)$$

vedi formula completa rotore

$$\text{Componente } y \text{ rot } \vec{B} = \frac{dB_x}{dz} - \frac{dB_x}{dx} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE_y}{dt} \quad \bullet$$

$$\left(\frac{dB_z}{dy} = 0 \right)$$

- Deriviamo nuovamente rispetto spazio: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$ (stesso caso valido per B_z)
- Deriviamo nuovamente rispetto al tempo: $-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$

In generale:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = V = c \quad \text{velocità della luce nel vuoto}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2}$$

Se non siamo nel vuoto, ma in un mezzo materiale:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \rightarrow V = \sqrt{\epsilon \mu} \quad n = \frac{c}{V} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \text{indice di rifrazione}$$

$$\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_0 \mu_r$$

È possibile verificare che $\frac{dE_y}{dx} = - \frac{dB_z}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dx} = - \frac{dB}{dt}$
dallo soluzioone omogenea:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= E_0 K \cos(kx - \omega t) \\ \frac{dB}{dt} &= -B_0 \omega \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \rightarrow E_0 K \cos(kx - \omega t) = B_0 \omega \cos(kx - \omega t) \rightarrow E_0 = \frac{\omega}{K} B_0 = C B_0 \rightarrow E = C B$$

$$\mu_e = \text{densità di energia} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\mu_m = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = cB \\ \epsilon = cB \end{array} \right\} \mu_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \cdot \frac{E^2}{c^2}$$

$$C^2 = \left(\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \right)^2 \longrightarrow \mu_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E^2$$

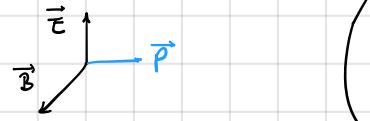
L'energia di un onda elettromagnetico è equipartita tra campo elettrico e magnetico!

$$I = \text{intensità di un'onda} = v \cdot n = c \cdot \mu_{em} = c \epsilon_0 E^2$$

$$\bar{I} = \text{intensità media} = c \epsilon_0 E_0^2 \frac{\sin^2(kx - wt)}{\sin^2(kx - wt)} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

VETTORE DI POYNTING

$$\vec{P} = c^2 \epsilon \vec{E} \times \vec{B}$$



$$|\vec{P}| = c^2 \epsilon_0 E B \sin(90^\circ) = c^2 \epsilon_0 E B = c^2 \epsilon_0 E^2 / c = c \epsilon_0 E^2$$

