MANUALE FONDAMENTI DI AUTOMATICA

By Edoardo

DIAGRAMMA DI BODE

Termine Monomio s
Termine Binomio $s \pm$ termine noto
Termine Trinomio $s^2 \pm s \pm$ termine noto

Trasformazione in forma di Bode:

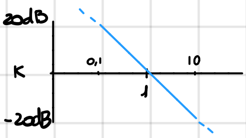
$(s+a) \longrightarrow a(s/a + 1)$

Guadagno K = termine noto esplicitato totale

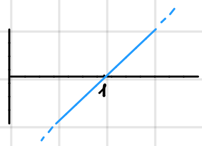
Grafico Modulo:

Tracciamo una retta a $20\log_{10}|K|$ su cui segniamo tutti i valori $|a_i|$ della forma di Bode e le decadi successive e precedenti (es. $a = 10 \longrightarrow$ segno 1, 10, 100)

Termine Monomio:

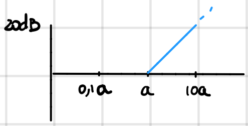


(se al denominatore)

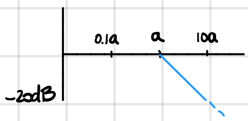


(se al numeratore)

Termine Binomio:



(se al numeratore)



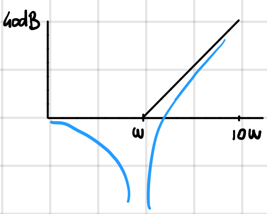
(se al denominatore)

Termine Trinomio: $(1 + as + bs^2)$

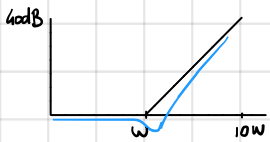
si confronta il termine trinomio con il polinomio caratteristico:

$as = 2\varepsilon s/\omega \longrightarrow$ ricaviamo ε = smorzamento

$bs^2 = s^2/\omega \longrightarrow$ ricavo ω



(se al numeratore e $|\varepsilon| = 0$)



(se al numeratore e $|\varepsilon| \neq 0$)

I grafici sono ribaltati se il termine trinomio è al denominatore

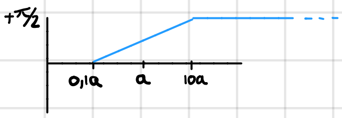
Grafico Fase

Fase "guadagno": 0 se $K>0$, $-\pi$ se $K<0$

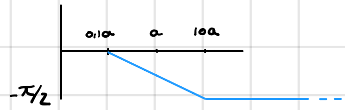
Fase termine monomio: $\pi/2$ se al numeratore, $-\pi/2$ se al denominatore

Tracciamo una retta a "fase guadagno + fase termine monomio" su cui segnamo le stesse decadi del grafico del modulo

Fase Termine Binomio

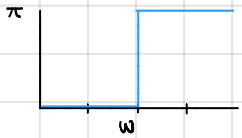


(se al numeratore $1/\tau>0$)
inverso se $1/\tau<0$

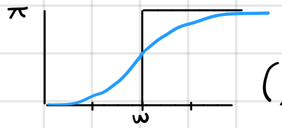


(se al denominatore e $1/\tau>0$)
inverso se $1/\tau<0$

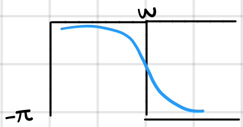
Fase Termine Trinomio



(se al numeratore e $\varepsilon=0$)



(se al numeratore e $\varepsilon>0$)



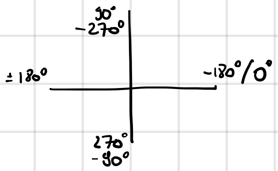
(se al numeratore e $\varepsilon<0$)

I grafici sono ribaltati se al denominatore

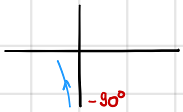
DIAGRAMMA POLARE

Partenza: $\begin{cases} K \text{ sull'asse reale se non ho termini monomi al denominatore} \\ \infty \end{cases}$

Nel secondo caso trovo l'asse che è asintoto di partenza trovando la fase in $\omega=0$ e seguendo lo schema seguente:



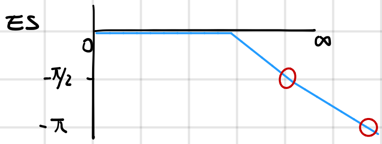
Es. $\omega\to 0 \to \infty$ e $\varphi = -\pi/2$ $\longrightarrow$



Arrivo: $\begin{cases} \text{origine se (grado den} - \text{grado num)} > 0 \\ \text{asse reale altrimenti (caso)} \end{cases}$

Nel diagramma di bode della fase trovo i punti di intersezione con gli assi:

ES



Incontro sia $-\pi/2$ che $-\pi$ $\longrightarrow$ intersecherà l'asse negativo immaginario e reale seguendo il grafico sopra.

ANALISI MODALE

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + u$

1) Trovo gli autovalori di A calcolando $\det(A - \lambda I)$
2a) Autovalori reali
Calcolo $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\forall \lambda$ e trovo gli autovettori
2b) Autovalori complessi coniugati $\alpha \pm j\omega$
Calcolo:

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Risolvo il sistema e trovo i due autovettori complessi
3)
$$T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ V_3^T \end{pmatrix}$$
4) Calcolo $V_i^T B$ $\forall i$ $\longrightarrow$ se $\neq 0$ eccitabile
5) Calcolo $C u_i$ $\forall i$ $\longrightarrow$ se $\neq 0$ osservabile
6)
$Re > 0 \longrightarrow$ divergente
$Re < 0 \longrightarrow$ converge

Modo aperiodico per gli autovalori reali, pseudoperiodico per quelli complessi

Trovare x_0 tale che non eccita un modo specifico:

- caso reale: imposto $c_i = V_i x_0 = 0$ $\longrightarrow$ il modo relativo a λ_i non sarà eccitabile
- caso complesso coniugato: $\begin{cases} C_a = V_a x_0 = 0 \\ C_b = V_b x_0 = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ il modo relativo a $\alpha \pm \omega j$ non sarà eccitabile

TRASFORMATE LAPLACE

$L(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-\lambda}$
$L(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$L(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$L(\delta_{-1}(t)) = 1/s$
$L(t\,\delta_{-1}(t)) = 1/s^2$
$L\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{1}{s^{k+1}}$
$L(e^{\alpha t}\sin\omega t) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$L(e^{\alpha t}\cos\omega t) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

Traslazione: $(t-\alpha) \longrightarrow \mathcal{L}(t) \cdot e^{\alpha s}$ es. $\delta_{-1}(t-3) \longrightarrow \frac{1}{s} \cdot e^{-3s}$

STABILITÀ

Prendo la parte reale degli autovalori

- Se tutte sono <0 asintoticamente stabile
- Se tutte sono ≤ 0 e $m.g = 1$ di quelli $Re(\lambda) = 0$ stabile semplice

Esistenza Risposta a Regime:

- stabilità
- $Re(\lambda)$ OSSERVABILI <0

CRITERIO DI ROUTH

$\det(A - \lambda I) \longrightarrow$ polinomio caratteristico in λ : $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} \dots a_0 = 0$

OPPURE data $F(s) \longrightarrow D(s) + KN(s)$ (in funzione di K)

NB tutti i coefficienti devono avere lo stesso segno

Si costruisce la tabella di routh:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-4}	...	

- $b_{n-2} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}}{-a_{n-1}}$
- $b_{n-3} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix}}{-a_{n-1}}$
- $c_{n-3} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-3} \end{pmatrix}}{-b_{n-2}}$

e così via fino a 0

Finita la tabella si controlla la prima colonna: per ogni cambio di segno corrisponde una radice a parte reale positiva, per ogni permanenza di segno una radice a parte reale negativa.

NB. Se ho due righe proporzionali, tralascio la prima, calcolo la derivata della seconda e la scrivo sotto la seconda, poi proseguo normalmente

NB. Se mi si annullano dei coefficienti es. $(\overbrace{0\ 0\ 0}^{K} \dots n)$ procedo nel seguente modo:

es $(\overset{k=1}{0} \xleftarrow{\text{shift}} -6) \Rightarrow (-6 \quad 0)(-1)^K = (6 \quad 0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ +

$(6 \quad -6)$ al posto di $(0 \quad -6)$

Se ho fatto uno shift e il sistema risulta stabile allora è stabile semplice

MATRICI STRANE

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum e^{\lambda_i t} u_i v_i + \sum e^{\alpha_i t}\left[\cos(\omega t)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\omega t)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)\right]$$

$H(t) = \Phi(t)B$

$\Psi(t) = C\Phi(t)$

$W(t) = C\Phi(t)B + D$

$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$H(s) = \Phi(s)B$

$\Psi(s) = C\,\Phi(s)$

$W(s) = C\,\Phi(s)B + D$

FORMA CANONICA OSSERVABILE

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & & 1 & -a_n \end{array}\right) \quad B=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad C=(0 \dots 0\ 1)$$

NB. Segni cambiati

I termini a_i sono i coefficienti del denominatore
I termini b_i sono i coefficienti del numeratore

es. $\dfrac{s-10}{s(s^2-s+1)} \rightarrow \dfrac{0s^2+s-10}{s^3-s^2+s+0}$

$$B_{3\times1}=\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A_{3\times3}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad C_{1\times3}=(0\ 0\ 1)$$

Il grado del denominatore dà le dimensioni delle matrici

FORMA CANONICA RAGGIUNGIBILE

Si scambiano C e B e A viene riflessa lungo la diagonale

(es $C_{oss.}=(0\ 0\ 1) \longrightarrow B_{RAG}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B_{oss}=\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow C_{RAG}=(-10\ \ 1\ \ 0)$)

DECOMPOSIZIONI SECONDO RAGGIUNGIBILITÀ / OSSERVABILITÀ E KALMAN $\longrightarrow$ Vedi esempi negli esercizi

USCITE MULTIPLE

es. $K(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+3s+1} \\ \dfrac{s+2}{s+3} \end{pmatrix}$

1) Quanti ingressi e quante uscite?
$\rightarrow$ 1 colonna = 1 ingresso
$\rightarrow$ 2 righe = 2 uscite

2) Gli elementi hanno tutti grado(N) < grado(D)?
- SI $\longrightarrow$ OK
- NO $\longrightarrow$ estraiamo D (es. $\dfrac{s+2}{s+3} \longrightarrow 1 - \dfrac{1}{s+3} \Longrightarrow K(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+3s+1} \\ -\dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

3) MCD tra i due elementi della prima matrice $\longrightarrow (s^2+3s+1)(s+3) \longrightarrow s^3+6s^2+10s+3$

4) $K(s)=\dfrac{b_0+b_1 s+b_2 s^{2}}{s^3+6s^2+10s+3}$ grado(Den) − 1

5) Moltiplico ogni elemento per MCD:
- $\dfrac{s+1}{\cancel{s^2+3s+1}} \cdot (\cancel{s^2+3s+1})(s+3) \longrightarrow (s+1)(s+3) = s^2+4s+3$
- $-\dfrac{1}{\cancel{s+3}} \cdot (s^2+3s+1)(\cancel{s+3}) \longrightarrow -s^2-3s-1$

6) Sistemo $K(s)$:

$$= \frac{\begin{bmatrix} \overset{b_2}{s^2} + \overset{b_1}{4s} + \overset{b_0}{3} \\ -s^2-3s-1 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+10s+3} = \frac{\left[\overset{b^0}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + \overset{b^1}{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}} s + \overset{b^2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}\right]}{s^3+6s^2+10s+3}$$

$$A_{raggiungibile}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & -6 \end{pmatrix} \qquad C_r=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_r=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NB Indipendentemente dal numero di uscite, se l'ingresso è 1 la forma canonica raggiungibile è MINIMA

$$A_{osservabile}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 0 & -10 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & 0 & -6 \end{array}\right] \qquad B_o=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \qquad C_o=\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

NB. Indipendentemente dagli ingressi, se ho una sola uscita la forma canonica osservabile è MINIMA

METODO DI GILBERT

1) Si estrae D come nel caso della forma canonica con uscite multiple

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+3} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{-1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{s+3} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{-1}{s+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Fratti semplici: $\frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{s+2} \longrightarrow R_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ in pratico prendo il numeratore dei coefficienti che hanno $s+3$ al denominatore per R_1 e $s+2$ per R_2

3) Rango R_1 e R_2: $rango(R_1) = 1$ $\quad rango(R_2) = 1$
Rango Tot $= 1 + 1 = 2$

4) Scomponiamo R_i in $C_i B_i$:

$$R_1 = C_1 B_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$R_2 = C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_G = matrice diagonale con autovalori di $W(s)$ sulla diagonale tante volte quanto è il rango delle rispettive matrici

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{dim = rangoTot}$$ NB se $rango(R_1) = 2 \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

B_G = tutte le B_i in colonna $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
C_G = tutte le C_i in riga $= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA DELL'OSSERVATORE

Dato un sistema: $\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$ determinare un dispositivo in grado di inseguire asintoticamente lo stato di un processo assegnato con modalità di convergenza stabilite a priori.

Lo stato di tale dispositivo $[(A - GC)\xi + Bu + GCx]$ converge a quello del sistema secondo modalità dipendenti dagli autovalori di $[A - GC]$ che quindi dovrò assegnare se e solo se (A, C) è osservabile

SISTEMI TEMPO CONTINUO

EVOLUZIONE LIBERA DELLO STATO

1) Trovo gli autovettori destri e sinistri
2) Calcolo $c_i = v_i^T x_0$
3a) Autovalori reali:

$$x_e(t) = \sum e^{\lambda t} u_i c_i$$

3b) Autovalori complessi:

$$x_e(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 c_1 + e^{\alpha t} \cdot m \left(\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b\right)$$

con $m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}$ $\qquad \varphi = \text{arctg}\left(\frac{c_a}{c_b}\right)$

EVOLUZIONE LIBERA DELL'USCITA

Autovalori reali:

$$\sum e^{\lambda t} C u_i c_i$$

Autovalori complessi

$$e^{\lambda t} C u_1 c_1 + e^{\alpha t} m \left[\sin(\omega t + \varphi) C u_a + \cos(\omega t + \varphi) C u_b\right]$$

RISPOSTA FORZATA STATO

1) Trasformo $u(t)$ in $U(s)$ con le trasformate di Laplace
2) $X_F(s) = H(s) \cdot u(s)$
3) Calcolo i residui
4) Ritrasformo in t

RISPOSTA FORZATA USCITA

1) Trasformo $u(t)$ in $U(s)$ con le trasformate di Laplace
2) $Y_F(s) = W(s) \cdot u(s)$
3) Calcolo i residui
4) Ritrasformo in t

Residui

$\frac{R_1}{s} \longrightarrow \lim_{s \to 0} s\, Y_F(s)$

$\frac{N_1 s + N_2}{s^2 + as + b} \longrightarrow$ trovo N_1 e N_2 $\longrightarrow$ calcolo la soluzione complessa del den. $u = \alpha + j\omega \longrightarrow \frac{N_1(s-\alpha) + N_2 \omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$

$\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s^2}$ per R_2 come sopra, per R_1 $\lim_{s \to 0} \frac{\partial f}{\partial s}\left(s^2 Y_F(s)\right)$

$\frac{R_1}{s+\alpha} \longrightarrow \lim_{s \to -\alpha} (s+\alpha) \cdot Y_F(s)$

RISPOSTA REGIME PERMANENTE

- Esistenza: vedi stabilità

1) Ingresso sinusoidale

$\sin(\omega t) \longrightarrow y_R(t) = M(j\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$ $\qquad M(j\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ $\qquad \phi(\omega) = \text{arctg}\frac{Im}{Re}$

Fondamentale

$A \sin(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow y_R(t) = A M(j\omega) \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi(\omega))$

(se c'è il coseno non cambia nulla)

2) Ingresso polinomiale $n \cdot \frac{t^k}{k!}$

$$y_R(t) = n\left[R_0 + R_1 t + R_2 \tfrac{t^2}{2!} + \dots R_k \tfrac{t^k}{k!}\right]$$

con $R_k = W(0)$ e gli altri a scendere con le derivate es. $k=3$ $R_3 = W(0)$ $R_2 = \frac{d}{ds} W(s)\Big|_{s=0}$ $\qquad R_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2} W(s)\Big|_{s=0}$

NB. $4t^2 \longrightarrow \overset{n}{8} \cdot t^2/2$

W(s) da risposta indiciale

La risposta indiciale è la risposta nel tempo al gradino $W_{-1}(t) = W(t) \cdot \delta_{-1}(t)$

es. $W_{-1}(t) = (\cos t + \sin t - 1)\,\delta_{-1}(t)$

- Trasformo in s $\longrightarrow \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s}$
- mcd $\longrightarrow \frac{s^2+s-s^2-1}{s(s^2+1)} = \frac{s-1}{s(s^2+1)}$
- estraggo il gradino $1/s \longrightarrow \frac{1}{s} \cdot \frac{s-1}{(s^2+1)} \longrightarrow W(s) = \frac{s-1}{s^2+1}$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

$\Phi(k) = A^k = \lambda_1^k u_1 v_1^T + |\lambda_2|^k \left[\cos(\varphi k)(u_a v_a^T + u_b v_b^T) + \sin(\varphi k)(u_a v_b^T - u_b v_a^T)\right]$ $\quad (\lambda_2 = \alpha + j\omega)$

$H(k) = A^{k-1} B$

$\Psi(k) = C A^k$

$W(k) = \begin{cases} C A^{k-1} B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases}$

$A_{discreta} = e^{At} = \Phi(t)$ stessa forma!

$B_d = \int_0^T e^{A\varepsilon} B \, d\varepsilon$ $\quad [A^{-1}(e^{AT} - I)B$ se A non ha autovalori in zero$]$

$C_d = C$

$D_d = D$

EVOLUZIONE LIBERA DELLO STATO

1) Trovo autovettori destri e sinistri
2) $x_e(k) = \Phi(k) x_0 = \lambda_1^k u_1 v_1^T x_0 + |\lambda_2|^k m \left[\sin(\theta k + \varphi) u_a + \cos(\theta k + \varphi) u_b\right]$

NB. questo è il caso con un autovalore reale e due complessi coniugati, se ho solo autovalori reali DOVREBBE essere solo
$\sum \lambda_i^k u_i v_i^T x_0$

TRASFORMATA Z = CAMPO COMPLESSO DISCRETO

- $\lambda^k \to \dfrac{z}{z - \lambda}$
- $\delta_{-1}(k) \to \dfrac{z}{z - 1}$
- $\sin \omega k \longrightarrow \dfrac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$
- $\cos \omega k \longrightarrow \dfrac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$

RISPOSTA FORZATA USCITA

A differenza di s le trasformate z hanno z anche al numeratore percui (es) $\dfrac{R}{z-1}$ non sappiamo calcolarlo
$\Rightarrow$ calcoliamo allora $Y_F(z)/z$ nello stesso modo di $Y_F(s)$ e poi moltiplichiamo alla fine tutti i componenti per z

$\Phi(z) = (zI - A)^{-1} z$

$H(z) = (zI - A)^{-1} B$

$\Psi(z) = C\,\Phi(z)$

$W(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$

DA W(s) A W(z)

1) Dati $W(s)$ e $u(t) \longrightarrow u(s)$
2) Calcolo $Y_F(s) = W(s) \cdot u(s)$
3) Trovo $Y_F(t)$
4) Data $Y_F(t)$ calcolo $Y_F(k)$ e la trasformo in $Y_F(z)$
5) $u(t) \longrightarrow u(z)$
6) $W(z) = \dfrac{1}{u(z)} \cdot Y_F(z)$

Esercizi

• Calcolo evoluzione libera stato , tempo continuo

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(-\lambda)+2\right] + \left[-4+2+2\lambda\right]$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)}_{\text{cambio segno a tutti}} + \cancel{(2-2\lambda)} + \cancel{(-2+2\lambda)} = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{cases} c = 0 \\ -2a - 2b - \cancel{c} = 0 \\ 2a + 2b - \cancel{c} = 0 \end{cases} \quad a = -b \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$$

$$C_i = V_i x \longrightarrow x_\ell(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}(2\ 1\ 1)x + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}(1\ 1\ 0)x + e^{0}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(2\ 2\ 1)x$$ autovalori reali e distinti

2) $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow (1-\lambda)\left[\underbrace{(-\lambda)(-2-\lambda)+2}\right] = 0 \rightarrow 2\lambda + \lambda^2 + 2 = 0 \longrightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 0 \longrightarrow -1 \pm i$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_a = -1+i \quad \lambda_b = -1-i \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come prima

$$u_a, u_b : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\begin{array}{cc} \alpha & \omega \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ -\omega & \alpha \end{array} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_1 - b_1 \\ a_3 = -a_2 - b_2 \\ -2a_2 - 2a_3 = -a_3 - b_3 \\ b_1 = a_1 - b_1 \\ b_3 = a_2 - b_2 \\ -2b_2 - 2b_3 = a_3 - b_3 \end{cases} \longrightarrow a_1 = b_1 = 0$$

In questo caso il sistema ha infinite soluzioni, pertanto i valori sono presi "a piacere"

$$u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Trovo } V_1, V_a \text{ e } V_b \text{ come prima} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} V_1 \\ V_a \\ V_b \end{array}$$

$$x_\ell(t) = \underbrace{x_{\ell_1}(t)}_{\text{aperiodico}} + \underbrace{x_{\ell_2}(t)}_{\text{pseudoperiodico}}$$

$C_1 = V_1 x_0 = 1$

$C_a = V_a x_0 = 0$

$C_b = V_b x_0 = 2$

$m = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{0}{2}\right) = 0$

$$x_\ell(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{-t}\left[\sin(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$ autovalori complessi coniugati

- Eccitabilità e osservabilità, tempo continuo

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&-1&-1\\2&2&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&1\\-2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$ $D=0$ Studiare eccitabilità e osservabilità

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\-2&-1-\lambda&-1\\2&2&-\lambda\end{pmatrix}=0 \longrightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=0$

$u_a=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $u_b=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $u_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\longrightarrow \begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}V_1\\V_2\\V_3\end{matrix}\end{array}$

$V_1B=(2\ 1\ 1)\begin{pmatrix}2&-1\\-2&1\\-2&1\end{pmatrix}=(0,0)$ NON eccitabile | $Cu_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ osservabile

$V_2B=(0,0)$ NON eccitabile | $Cu_2=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ osservabile

$V_3B=(-2,1)\neq 0$ eccitabile | $Cu_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ NON osservabile

2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $C=(0\ 1\ 0)$ $D=0$ Studiare eccitabilità e osservabilità

$\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\0&-2&-2-\lambda\end{pmatrix}=0 \longrightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1\pm J$ $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $u_a=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $u_b=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}V_1\\V_a\\V_b\end{matrix}$

$V_1B=0$ modo aperiodico NON eccitabile | $Cu_1=0$ modo aperiodico NON osservabile

$\left\{\begin{matrix}V_aB\\V_bB\end{matrix}\right. \neq 0$ modo pseudoperiodico eccitabile | $\left\{\begin{matrix}Cu_a\\Cu_b\end{matrix}\right. \neq 0$ modo pseudoperiodico osservabile

- Evoluzione libera, tempo discreto

1) $x(k+1)=\begin{pmatrix}7&2&-6\\-30&-12&30\\-6&-3&7\end{pmatrix}x(k)+\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}u(k)$ $y(k)=(-6\ \ -3\ \ 7)\,x(k)$

autovalori: $\lambda_1=1$ $\lambda_2=-2$ $\lambda_3=3$ NB. con suffissi

$u_a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $u_b=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ $u_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\longrightarrow \begin{pmatrix}-2&-1&3\\2&1&-2\\-3&-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}V_1\\V_2\\V_3\end{matrix}$

$x_\ell(k)=1^k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(-2\ -1\ 3)\ -2^k\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}(2\ 1\ -2)\ +3^k\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}(-3\ -1\ 3)$

• Dominio S

1) Calcolare $w(t)$ da $W(s) = \frac{10}{s(s+1)}$

- Sviluppo in fratti semplici: $W(s) = R_1/s + \frac{R_2}{s+1}$

$$R_1 = sW(s)|_{s=0} = s \cdot \frac{10}{s(s+1)} = 10$$
$$R_2 = (s+1)W(s)|_{s=-1} = (s+1)\frac{10}{s(s+1)} = -10$$
$$\longrightarrow \frac{10}{s} - \frac{10}{s+1} \rightarrow w(t) = 10\,\delta_{-1}(t) - 10e^{-t}\,\delta_{-1}(t)$$

2) Calcolare evoluzione forzata da $W(s) = \frac{10}{s+1}$ con $u(t) = \delta_{-1}(t)$

- $y(s) = W(s) \cdot u(s) = \frac{10}{s+1} \cdot 1/s$
- fratti semplici: $\frac{10}{s} - \frac{10}{s+1} \longrightarrow y(t) = 10\,\delta_{-1}(t) - 10e^{-t}\,\delta_{-1}(t)$

3) Calcolare evoluzione forzata di $W(s) = \frac{s+5}{(s+1)^3}$ con $u(t) = 3\delta_{-1}(t) - 2\delta_0(t)$ trasformando diventa 1

$$y(s) = \frac{s+5}{(s+1)^3} \cdot \left[3/s - 2\right] = 3 \cdot \frac{s+5}{s(s+1)^3} - 2 \cdot \frac{s+5}{(s+1)^3}$$

- fratti semplici: $3\underbrace{\left[\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{(s+1)^2} + \frac{R_4}{(s+1)^3}\right]}_{w_1} - 2\underbrace{\left[\frac{R_5}{s+1} + \frac{R_6}{(s+1)^2} + \frac{R_7}{(s+1)^3}\right]}_{w_2}$

• $R_1 = \frac{s+5}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 5$ • $R_4 = \frac{s+5}{s}\Big|_{s=-1} = -4$ • $R_3 = \frac{d}{ds}\left(\frac{s+5}{s}\right) = \frac{s-s-5}{s^2}\Big|_{s=-1} = -5$ • $R_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{-5}{s^2}\right)\Big|_{s=-1} = -5$

• $R_7 = s+5|_{s=-1} = 4$ • $R_6 = \frac{d}{ds}(s+5) = 1$ • $R_5 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(1) = 0$

$$\rightarrow y(s) = 3\left[\frac{5}{s} - \frac{5}{s+1} - \frac{5}{(s+1)^2} - \frac{4}{(s+1)^3}\right] - 2\left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^3}\right]$$
$$y(t) = 3\left[5\delta_{-1}(t) - 5e^{-t}\delta_{-1}(t) - 5te^{-t}\delta_{-1}(t) - 2t^2e^{-t}\delta_{-1}(t)\right] - 2\left[te^{-t}\delta_{-1}(t) + 2t^2e^{-t}\delta_{-1}(t)\right]$$

4) Calcolare evoluzione forzata di $W(s) = \frac{s^2+7s+1}{s^2+5s+6}$ con $u(t) = (1 + 2\sin 2t)\,\delta_{-1}(t)$

$$y(s) = \frac{s^2+7s+1}{(s+3)(s+2)} \cdot \left[1/s + 2 \cdot \frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{s^2+7s+1}{(s+3)(s+2)} \cdot \frac{s^2+4+4s}{s(s^2+4)} = \frac{(s^2+7s+1)(s+2)^{\cancel{2}}}{s(s+3)\cancel{(s+2)}(s^2+4)} = \frac{s^3+9s^2+15s+2}{s(s+3)(s^2+4)}$$

$$\longrightarrow \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+3} + \frac{R_3s+R_4}{s^2+4}$$

$$R_1 = s\,y(s)|_{s=0} = \frac{2}{12} = 1/6 \qquad R_2 = (s+3)y(s)|_{s=-3} = -11/39 \longrightarrow \frac{1/6}{s} - \frac{11/39}{s+3} + \frac{R_3s+R_4}{s^2+4} = \frac{\frac{1}{6}(s^2+4)(s+3) - \frac{11}{39}s(s^2+4) + (R_3s+R_4)s(s+3)}{s(s^2+4)(s+3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\left[s^3+3s^2+4s+12\right] - \frac{11}{39}\left[s^3+4s\right] + (R_3s+R_4)\left[s^2+3s\right]}{\text{Den} \ldots} = \frac{s^3\left[\frac{1}{6} - \frac{11}{39} + R_3\right] + s^2\left[\frac{1}{2} + 3R_3 + R_4\right] + s\left[\frac{2}{3} - \frac{44}{39} + 3R_4\right] + 2}{\text{Den}\ldots}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{11}{39} + R_3 = 1 \longrightarrow R_3 = 1 + 11/39 - 1/6 = 29/26 \\ \frac{1}{2} + 3R_3 + R_4 = 9 \\ \frac{2}{3} - \frac{44}{39} + 3R_4 = 15 \longrightarrow R_4 = 67/13 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{1}{6}}{s} - \frac{\frac{11}{39}}{s+3} + \frac{\frac{29}{26}s + 67/13}{s^2+4} \rightarrow y(t) = \delta_{-1}(t)\left[\frac{1}{6} - \frac{11}{39}e^{-3t} + \frac{29}{26}\cos 2t + \frac{67}{13}\frac{1}{2}\sin 2t\right]$$

$$\frac{R_3s+R_4}{s^2+4} = \frac{R_3s}{s^2+4} + \frac{R_4}{s^2+4}$$

- Stabilità

1) Studiare la stabilità di $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \longrightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \longrightarrow$ parte reale negativa $\longrightarrow$ asintoticamente stabile

2) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad (p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2)$ devo controllare la molteplicità geometrica:

$mg(\lambda) = \dim A - \text{rango}(A - \lambda I) = 2 - 0 = 2 \longrightarrow mg > 1 \longrightarrow$ instabile

3) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \qquad mg(0) = 2 - 1 = 1 \longrightarrow mg \le 1 \longrightarrow$ stabile semplice

4) Studiare le radici di $p(\lambda) = -2\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 11$ (Routh)

3:	-2	-4
2:	-1	-11
1:	$18 = \frac{\det(\ )}{-(\ )}$	
0:	-11	

Nella prima colonna ci sono due cambi di segno $\longrightarrow$ 2 radici a parte reale positiva

5) $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 15$

5:	1	2	3
4:	1	2	15
3:	0 !	-12	
3bis:	12	-12	
2:	3		

$\hookrightarrow$ shift $\longrightarrow (-12 \quad 0)(-1)^k \longrightarrow$

$$\begin{array}{cc} 12 & 0 \\ 0 & -12 \\ \hline 12 & -12 \end{array} +$$

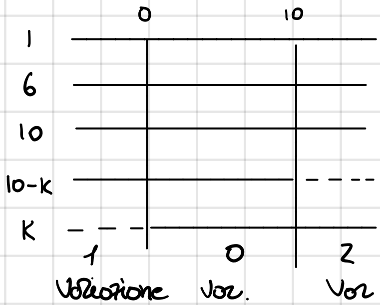
$\longrightarrow$ nessun cambio di segno, ma ho applicato uno shift $\longrightarrow$ stabilità semplice

6) Per quali k il sistema $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x$ è asintoticamente stabile?

Mi costruisco la tabella di routh in $k \longrightarrow p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 11\lambda^2 + 6\lambda + k$

4:	1	11	k
3:	6	6	
2:	10	K	
1:	$10 - k$		
0:	K		

Ora discuto il segno di ogni elemento della prima colonna:



Per $0 < k < 10$ ho stabilità asintotica

Per $k < 0$ ho una radice a parte reale positiva

Per $k > 10$ ho 2 radici a parte reale positiva

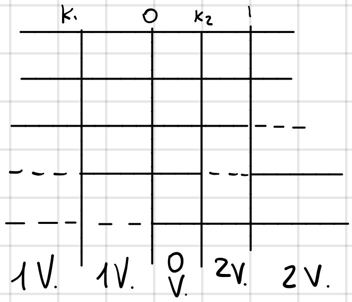
$\hookrightarrow$ instabilità

FORSE LA TABELLA É SBAGLIATA, ma il senso è questo

7) Studiare le radici di $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + (1+k)\lambda + k$

4:	1	2	K
3:	1	$1+K$	
2:	$1-K$	K	
1:	$\frac{K^2+K-1}{K-1}$		
0:	K		

$\longrightarrow$



NB. Questa riga combina lo studio del segno del NUM e DEN

Il sistema è stabile per $0 < K < K_2$

Risposta a regime permanente

1) Risposta a regime permanente di $W(s)=\frac{4}{s+3}$ con ingresso sinusoidale $u(t)=\sin 3t$

Verifico che esiste: unico polo in $s=-3$, parte reale negativa $\longrightarrow$ stabile $\longrightarrow$ esiste

$y_R(t) = M \sin(\omega t + \phi(\omega))$

per diminuire j al den.

- $M = |M(j\omega)| = \sqrt{Re^2+Im^2} \longrightarrow M(j\omega)=\frac{4}{3+3j}\cdot\left(\frac{3-3j}{3-3j}\right) = \frac{12-12j}{18} \longrightarrow Re=\frac{2}{3} \quad Im=-\frac{2}{3} \longrightarrow M=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\phi(\omega)= \operatorname{arctg}\left(\frac{Im}{Re}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$

$\Rightarrow y_R(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin(3t - \pi/4)$

2) Risposta a regime permanente di $W(s)=\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ con ingresso $u(t)=2\cos(3t+4)+\frac{1}{2}t+4t^2+4$

La risposta a regime è la somma delle risposte a regime dei singoli blocchi dell'ingresso

- Risposta a $2\cos(3t+4)$:

$M(3j)=|W(3j)|=\sqrt{Re^2+Im^2} \qquad \phi(3)=\operatorname{arctg}\left(\frac{Im}{Re}\right) \longrightarrow y_{R1}(t) = 2M(3j)\cos(3t+4+\phi(3))$

- Risposta a $\frac{1}{2}t$

$y_{R2}=\frac{1}{2}\left[R_1+R_2 t\right] \quad$ con $R_2=W(0)=\frac{1}{6} \qquad R_1=\frac{d}{ds}W(s)\Big|_{s=0}$

- Risposta a $4t^2 \rightarrow 8\,t^2/2$

$y_{R3}(t)=8\left[R_1+R_2t+R_3\,t^2/2\right] \quad$ con $R_3=W(0) \quad R_2=\frac{d}{ds}W(s)\Big|_{s=0} \qquad R_1=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}W(s)\Big|_{s=0}$

- Risposta a 4

$y_{R4}(t)=4[R_1] \quad$ con $R_1=W(0) \qquad$ NB il K massimo (in questo caso zero) usa sempre $W(0)$

Decomposizioni

1) Decomporre secondo la proprietà di osservabilità $A=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2&1\end{pmatrix}$

- rango $\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}$ = rango $\begin{pmatrix}-2&1\\4&-2\end{pmatrix} = 1 = r$ (linearmente dipendenti)
- $I = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix} \Rightarrow -2x+y=0 \rightarrow x = y/2 \rightarrow I = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$

↳ $T^{-1} = \begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1/2\\1\end{matrix}\end{bmatrix}$ colonna di completamento $\longrightarrow T = \begin{bmatrix}1&-1/2\\0&1\end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix}\overset{\tilde{A}_{11}}{-2}&\overset{\tilde{A}_{12}}{0}\\ \underset{\tilde{A}_{21}}{0}&\underset{\tilde{A}_{22}}{-2}\end{pmatrix} \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix}\underset{\tilde{C}_1}{-2} & \underset{\tilde{C}_2}{0}\end{pmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix}-3/2\\1\end{pmatrix}$$

OSSERVABILE / RAGGIUNGIBILE

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \tilde{A}_{11}z_1 + \boxed{\tilde{A}_{12}z_2} + \tilde{B}_1 u\\ \dot{z}_2 &= \tilde{A}_{21}z_1 + \tilde{A}_{22}z_2 + \tilde{B}_2 u\\ y &= \tilde{C}_1 z_1 + \tilde{C}_2 z_2\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases}\dot{z}_1 = -2z_1 - \frac{3}{2}u\\ \dot{z}_2 = -2z_2 + u\\ y = -2z_1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{z}_1 = -2z_1 - 3/2\, u\\ y = -2z_1\end{cases} \longrightarrow$$

2) Decomporre secondo la proprietà di raggiungibilità $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}$

- rango$(B\ \ AB)$ = rango$\begin{pmatrix}-2&2\\1&-1\end{pmatrix} = 1 = s$ (lin. dip.)
- $R = \mathrm{Im}(B\ AB) = \begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}$ NB. colonne lin. dip → prende la seconda e la divide per 2 (credo per semplificare)

↳ $T^{-1} = \begin{bmatrix}\begin{matrix}1\\-1/2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\end{bmatrix}$ completamento $\longrightarrow T = \begin{bmatrix}1&0\\1/2&1\end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\dot{z}_1 = -z_1 - 2u\\ \dot{z}_2 = -z_2\\ y = -3/2\, z_1 + z_2\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot{z}_1 = -z_1 + 2u\\ y = -3/2\, z_1\end{cases}$$

3) Decomposizione di Kalman di $A = \begin{pmatrix}4&0&1&0\\1&-2&1&1\\2&2&0&2\\-8&-1&-3&-4\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\\-1&-2\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}2&3&2&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}$

- Calcolo $R = \mathrm{Im}(B\ \ AB\ \ A^2B\ \dots\ A^{k-1}B)$ nel nostro caso $k=4$

$\rightarrow R = \mathrm{Im}\left(\begin{array}{cc|cc|c}1&0&4&0&\\0&2&0&-6&\\0&0&0&0&\\-1&-2&-4&6&\dots\end{array}\right)$ Poiché sono lin. dip dalle prime due lo saranno anche le altre $\rightarrow R = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\0&0\\-1&-2\end{pmatrix} = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\-1&-1\end{pmatrix}$

- Calcolo $I = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}C\\CA\\C^2A\\ \vdots\\ C^{k-1}A\end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2&3&2&2\\0&1&0&0\\-1&-4&-1&-1\\1&-2&1&1\\ \dots\end{pmatrix}$ lin. dip (Vedi riduzione a scalino/Eliminazione di Gauss)

NB I e R devono avere dimensione:
$\dim I$ = rango A − rango$\begin{pmatrix}C\\CA\\ \vdots\end{pmatrix}$
$\dim R$ = rango A − rango$(B\ AB\ A^2B \dots)$

$\rightarrow I = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}2&3&2&2\\0&1&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}2x+3y+2w+2z=0\\ y=0\end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ (un po' forzato)

- $\mathcal{X}_1 = R \cap I \rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \longrightarrow$ cambio segni $\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 1\\ \alpha_2 = 0\\ \beta_1 = 1\\ \beta_2 = 1\end{cases}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ $R \cap I$

- $\mathcal{X}_2$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = R \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\-1&-1\end{pmatrix} = R$ Vettori indipendenti da $R\cap I$ presi rispettivamente da R e I
- $\mathcal{X}_3$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = I \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix} = I$
- $\mathcal{X}_4$: $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\\ \mathcal{X}_1\ \ \mathcal{X}_2\ \ \mathcal{X}_3\qquad\end{array}$ indipendente dalle altre

Data $T = (\mathcal{X}_1\ \mathcal{X}_2\ \mathcal{X}_3\ \mathcal{X}_4)$ trovo $\tilde{A} = TAT^{-1}$ $\tilde{B} = TB$ e $\tilde{C} = CT^{-1}$