FISICA

Riepilogo & Esami

By Edoardo

CINEMATICA (Riepilogo)

- Velocità: $ds/dt = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ • Accelerazione: $dv/dt = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

- Moto rettilineo uniforme: $v(t) = cost$ $a(t) = 0$ $\longrightarrow ds = v(t)dt = v_0 dt \longrightarrow$ integrazione $\longrightarrow S(t) = S_0 + V_0 t$

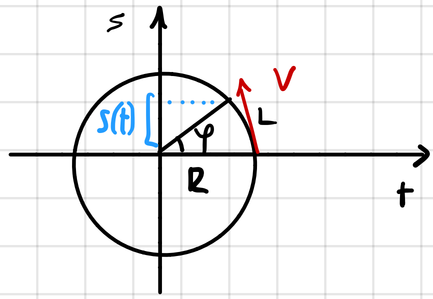
- Moto uniformemente accelerato: $a(t) = cost \longrightarrow dv = a dt \longrightarrow v = v_0 + at \longrightarrow s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

- Moto circolare uniforme: traiettoria circolare $\longrightarrow s(t) = L(t) \longrightarrow L = R\varphi \longrightarrow v = ds/dt = R\, d\varphi/dt = R\omega$

  $\omega = V/R$ = velocità angolare (direzione normale al piano)

  $a = V^2/R = \omega^2 R$ (centripeta)

  $T = S(t)/V = \frac{2\pi R}{V} \longrightarrow \omega = 2\pi/T$



- Moto armonico: $\omega = d\varphi/dt$ (vedi sopra) $\longrightarrow d\varphi = \omega dt \longrightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt \longrightarrow \varphi = \omega t$

  $s(t) = R \sin\varphi = R \sin \omega t = A \sin \omega t$

  $v(t) = ds/dt = A\omega \cos \omega t$

  $a = dv/dt = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 s(t)$ (tangenziale)

DINAMICA (Riepilogo)

- **I° principio dinamica**: ogni corpo non sottoposto a forze esterne persiste in quiete o in moto rettilineo uniforme.

- **II° principio dinamica**: $F = ma = m\,dv/dt = dp/dt$

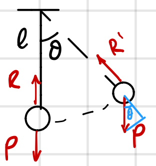
- **Quantità di moto**: $p = m \cdot v$ se $F = 0 \longrightarrow$ la derivata $dp/dt = 0 \longrightarrow p$ cost $\longrightarrow$ conservazione quantità di moto

- **Teorema impulso**: $F\,dt = dp \longrightarrow I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \Delta p = p_2 - p_1$

- **III° principio dinamica**: ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

- **Forza Peso**: $P = mg$ • **Forza Elastica**: $F_{el} = -kx$ • **Attrito**: $A_s = \mu_s R_N \leq \mu_d R_N = A_d$

- **Pendolo semplice**



$F = \vec{P} + \vec{R}' = ma$ $\quad s = l\theta \longrightarrow \theta = s/l$

componente tangenziale: $-mg\sin\theta = ma = m\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ per piccoli spostamenti $\theta \cong \sin\theta \longrightarrow \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -gs/l$

$\longrightarrow a_t = -\dfrac{g}{l} \cdot s$ come un moto armonico con $\omega = \sqrt{g/l} \longrightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{l/g}$

- **Momento di una forza**: $M = F \cdot b$ con b = distanza punto - linea d'azione forza - braccio $\quad (M = r \times F = rF\sin\theta = Fb)$

Il momento di una somma di forze è la somma dei momenti

- **Momento quantità di moto** $\quad b$ = momento angolare $= r \times P$

Teorema del momento quantità di moto: $F = dp/dt \longrightarrow r \times F = M = r \times dp/dt$

$db/dt = dr/dt \times P + r \times dp/dt = (v - v_0) \times P + r \times dp/dt = v \times P - v_0 \times P + r \times dp/dt$

$v \times mv = 0$ perché prodotto di vettori paralleli (v)

$\longrightarrow db/dt + v_0 \times P = r \times dp/dt = M$

LAVORO ED ENERGIA (Riepilogo)

• **Lavoro**: $dL = F ds \rightarrow L = \int_1^2 F ds = \int_1^2 F v dt$ Il lavoro di una somma di forze è la somma dei lavori.

• **Potenza**: $W = L/dt = F \cdot ds/dt = F v$

• **Energia cinetica**: $dL = F \cdot ds = m \cdot a \cdot ds = m\frac{dv}{dt} \cdot v dt$

$d(v^2)/dt = d(v \cdot v)/dt = \frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} = 2\frac{dv}{dt} \cdot v \longrightarrow dL = \frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dt}dt = d(\frac{1}{2}mv^2) = dK$ $K = \frac{1}{2}mv^2$ = energia cinetica

$L = \int_1^2 dL = \int_1^2 dK = K_2 - K_1 = \Delta K$ Teorema delle forze vive

• **Energia potenziale**: $L = U_1 - U_2 = -\Delta U$ per campi conservativi $[U = -\int_0^1 dL + U(0) = -\int_0^1 F ds + U(0)]$

- Energia potenziale gravitazionale: $U(y) = -\int_0^y mg\, dy + U(y_0) = -mgy = -mgh$ $U(y_0) = 0$ solitamente

- Energia potenziale elastica: $U(x) = -\int_{x_0}^x (-kx)dx + U(x_0) = \frac{1}{2}kx^2$ $U(x_0) = 0$ solitamente

• **Conservazione energia** $L = U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \longrightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = cost = E$ = energia meccanica

Valido solo nel caso di forze conservative

Nel caso invece ci fossero forze non conservative come l'attrito:

$L = K_2 - K$ (Teorema forze vive) $\rightarrow L = L_{NC} + L_C = K_2 - K_1 \rightarrow L_{NC} + (U_1 - U_2) = K_2 - K_1 \rightarrow L_{NC} = (U_2 + K_2) - (K_1 + U_1) = E_2 - E_1$

MECCANICA (Riepilogo)

Per un sistema di punti $F = m a_c$ con a_c = acc. centro di massa.

Stessa cosa per la quantità di moto: $P = m V_c$

$\Rightarrow \boxed{F = dP/dt}$ I^a equazione cardinale

Se $F = 0 \rightarrow dP/dt = 0 \rightarrow p = cost$ Principio di conservazione della quantità di moto

Teorema del momento quantità di moto – II^a equazione cardinale (n punti)

$M_T = \sum M_n = \sum r_n \times F_n$

b = momento angolare $= \sum r_n \times P_n$

$\rightarrow M_n = M_n^I + M_n^E = db_n/dt + V_0 \times m_n V_n$

$\sum M_n^I = 0 \Rightarrow \boxed{M = db/dt + V_0 \times P}$

Se $M = 0 \rightarrow db/dt = 0 \rightarrow b = cost$ Principio di conservazione del momento angolare

• Energia cinetica

$L_n = \int_1^2 F_n^I + F_n^E \, ds_n = \frac{1}{2} m (v_n'')^2 - \frac{1}{2} m (v_n')^2 \rightarrow L = \sum L_n = K_2 - K_1$

$V_n = V_c + V_{cn}$ con V_{cn} = velocità del punto rispetto al centro di massa

$\rightarrow K = \frac{1}{2} \sum m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum m_n (v_n \cdot v_n) = \frac{1}{2} \sum m_n (V_c + V_{cn})(V_c + V_{cn}) = \frac{1}{2} \sum m_n V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_n V_{cn}^2 + \sum m_n V_c V_{cn}$

$\sum m_n V_c V_{cn} = V_c \sum m_n V_{cn} \rightarrow \sum m_n V_{cn} = m V_{cc}$ con V_{cc} = velocità del centro di massa rispetto al centro di massa $= 0$

$\rightarrow K = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_n V_{cn}^2$

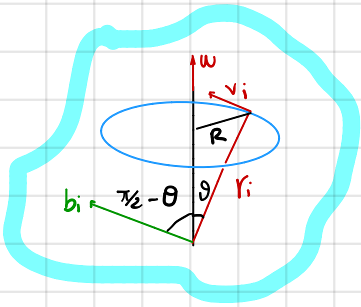
• Energia potenziale: $dL = -dU \rightarrow L = -\Delta U$

• Urti

– Perfettamente elastico: conservazione quantità di moto $m_1 (v_1 - V_1) = m_2 (V_2 - v_2)$

conservazione energia cinetica $m_1 (v_1^2 - V_1^2) = m_2 (V_2^2 - v_2^2)$

– Anelastico: conservazione quantità di moto $m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) V$



• Momento di inerzia:

Rotazione: $|b_i| = m_i v_i r_i = m_i r_i R \omega$

momento di inerzia I

La proiezione di b_i sull'asse è $b_{iz} = b_i \sin\theta = m_i r_i \sin\theta R_i \omega = m_i R_i^2 \omega \rightarrow b = \sum b_{iz} = \boxed{\sum m_i R_i^2} \cdot \omega$ $\left(I = \int_V \rho R^2 dV\right)$

Nel caso generale $I_a = I_{ac} + md^2$ con I_{ac} = momento di inerzia con asse passante per c e parallelo ad a e d = distanza tra c e a

• Statica $\begin{cases} F_e = 0 \\ M_e = 0 \end{cases}$

FLUIDI

P = pressione $= \Delta F / \Delta S$

• Legge di Stevino: $p = p_0 + \rho g h$ con p_0 = pressione atmosferica e $\rho g h$ = pressione idrostatica.

La pressione su un punto superficiale si trasmette con lo stesso valore su ogni altro punto della superficie

• Principio di Archimede: un corpo immerso in un liquido è sottoposto ad una spinta pari al peso della massa di liquido spostata.

$\frac{\rho_{sol}}{\rho_{liq}} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_{sol} V g}{\rho_{liq} V g}$ $\qquad V_{imm} = V_{sol} \cdot \rho_{sol} / \rho_{liq}$

TERMODINAMICA (Riepilogo)

• Trasformazioni reversibili: quasi statiche (passaggio da stato intermedio al contiguo avviene in un lungo tempo) e senza processi dissipativi.

• Lavoro: è positivo se compiuto dal sistema su corpi esterni
generalmente $\Delta L = p\Delta V \rightarrow dL = pdV$

• Quantità di calore Q: positiva se assorbita dal sistema $\quad Q = c \cdot m \cdot (t_2 - t_1)$

• I° principio: l'energia totale scambiata con l'esterno durante una trasformazione è $Q - L$ e dipende solo dagli stati iniziale e finale $\rightarrow U_2 - U_1 = Q - L \quad \rightarrow dU = dQ - dL = dQ - pdV$

• Processi adiabatici: $dQ = 0$

• Gas perfetti: $\begin{cases} pV = p_0 V_0 & a \; T = cost \\ p_T = p_0 \, T/T_0 & a \; V = cost \\ V_T = V_0 \, T/T_0 & a \; p = cost \end{cases}$

Dalle 3 leggi si ricava l'equazione di stato:
1) si riscalda un volume di gas fino a temperatura $T \rightarrow p_T = p_0 T/T_0$
2) espansione isotermica da V_0 a $V \rightarrow p_T V_0 = pV$
3) Sostituisco e divido per $T \rightarrow \frac{p_0 T V_0}{T_0} = pV \rightarrow \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} = cost$
$p_0V_0/T_0 = mR' \rightarrow pV/T = mR'$
Avogadro: $n = m/M \rightarrow pV = \frac{m}{M} RT = nRT$ per n kmoli
$pV = RT$ per 1 kmole
$pv = RT/M$ per unità di massa con v = volume specifico

Joule:
L'esperienza di Joule dimostra che l'energia interna di un gas non dipende dal suo volume.
Per verificarlo ho immerso due recipienti comunicanti tramite un rubinetto in un bagno termometrico isolato con l'esterno alla temperatura T e riempito uno dei due recipienti con un gas molto rarefatto.
Aprendo il rubinetto il gas ha iniziato a riempire anche il secondo recipiente.
Durante l'espansione la temperatura non è variata (o almeno le variazioni si avvicinano a zero più il gas è rarefatto e simile ad un gas perfetto).
Il lavoro del sistema gas + recipienti + bagno è nullo perché espansione libera
La quantità di calore scambiata con l'esterno è nulla per via dell'isolamento.
$\rightarrow \Delta U = Q - L = 0 \rightarrow U_1 = U_2$ per il primo principio della termodinamica
Poiché nulla è cambiato nel sistema se non il volume del gas si può affermare che l'energia interna non dipende dal volume del gas e quindi U dipende solo da $T \rightarrow U = U(T)$
$c_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT} \rightarrow dU = c_V dT$
$\Rightarrow dQ = dU + dL = c_V dT + pdV$

Calore molare: $pV = RT/M \rightarrow V = \frac{RT}{Mp} \rightarrow dV = \frac{R}{Mp} dT \rightarrow (dQ)_p = c_V dT + R\,dT/M \rightarrow \frac{dQ}{dT} = c_p = c_V + R/M$
$\rightarrow c_p \cdot M = c_V \cdot M + R \rightarrow C_p - C_V = R$

- II° principio: non è possibile realizzare una trasformazione il cui risultato finale sia solamente quello di trasformare in lavoro il calore estratto da una sorgente termica.

- Teorema di Carnot: Tutte le macchine reversibili che operano tra due temperature hanno lo stesso rendimento $\eta = 1 - Q_2/Q_1$ che è sempre maggiore del rendimento di una macchina irreversibile operante tra le stesse temperature.

- Entropia $\Delta S = \int_1^2 dQ/T$

ELETTROMAGNETISMO (Riepilogo)

- Legge di Coulomb: F = forza attrattiva / repulsiva tra cariche $= K_0 \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$

- Campo elettrico: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q/r^2$

- Legge di Gauss elettrica: $\Phi(E) = \int_S E\, n\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$ Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è pari al rapporto fra la somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie e ε_0

DIMOSTRAZIONE:
$d\Phi(E) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$ con $d\Omega$ = angolo solido sotto cui è visto dalla carica q l'area $d\Sigma$
$\Phi(E) = \int_\Sigma E\, n\, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$

Ω vale 4π per ogni tipo di superficie chiusa $\rightarrow \Phi(E) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = q/\varepsilon_0$

- Potenziale elettrostatico: $\Delta V = \int_P^Q E\, dl$

Un campo magnetico è generato da una corrente e le cariche in moto (corrente) sono soggette alla forza dovuta ad un campo magnetico detta Forza di Lorentz

- Forza di Lorentz: $F_L = q\vec{v} \times \vec{B_0} = qvB_0 \sin\alpha = qvB_0$ $(\alpha = 90°)$
Per N cariche (corrente) su un filo lungo l di sezione S: $F = nSl \cdot F_L = qvB_0 nSl = ilB_0 = il \times B_0$

- Campo magnetico: Legge di Laplace: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds \times u_r}{r^2}$ con u_r = versore della direzione orientata da ds al punto P
$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint \frac{ds \times u_r}{r^2}$
$\longrightarrow$ per un filo rettilineo indefinito $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$ con R = distanza ($\perp$) P - ds Legge di Biot - Savart

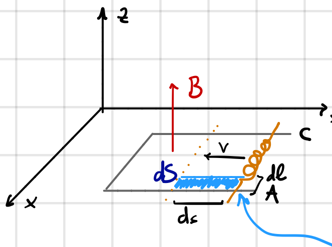
- Legge di Gauss magnetica: $\int_S B_0 n dS = 0$ Il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo

- Legge di Ampere (circuitazione originale): $\oint B_0 \cdot dl = \sum^k \mu_0 i_k$ La circuitazione di B_0 lungo una qualsiasi linea chiusa è pari a μ_0 volte la somma delle correnti concatenate con la linea

• Faraday:

- esperimento 1: Avvicinando un campo magnetico ad una spira si genera una corrente durante l'intervallo di tempo in cui avviene il movimento
- esperimento 2: Come sopra, ma viene spostata la spira e non la sorgente del campo magnetico
- esperimento 3: Due spire non collegate tra loro, la seconda connessa ad una batteria. Azionando l'interruttore si genera una corrente nella prima spira per pochi istanti: la corrente è INDOTTA dalla variazione di campo magnetico

$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B_0)}{dt}$ Legge di Faraday-Neumann. Tale legge può essere ricavata dalla forza di Lorentz tramite il seguente esempio.



Si ha un circuito composto da una parte fissa (filo grigio) e uno mobile (spira arancione) che si muove con velocità V in un campo magnetico B perpendicolare al piano.

Il campo totale è dato da un campo elettrostatico E_s e uno elettromotore $E_i = \frac{F_L}{q} = V \times B$

$f.e.m. = \oint E_T \cdot dl = \oint E_s\, dl + \oint E_i\, dl$ per definizione

$\oint E_s\, dl = 0$ perché E_s è conservativo $\rightarrow f.e.m. = \int_A^C (V \times B) dl$ perché $E_i \neq 0$ solo tra A e C

$\int_A^C V \times B \cdot dl = \int_A^C B \times dl \cdot V = \int_A^B dl \times V \cdot B$ per le regole del prodotto misto

$V = dS/dt \rightarrow f.e.m. = \frac{1}{dt}\int_A^B \boxed{dl \times ds} \cdot B = \frac{1}{dt}\int_A^B dS \cdot B = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$

Il segno negativo è dato dalla Legge di Lenz: il verso della corrente indotta è sempre tale da opporsi alla variazione del flusso che la genera.

• Equazioni di Maxwell

1°: $\Phi(E)$ = flusso del campo elettrico $= \int_S \varepsilon_r E \cdot n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau$

Se indichiamo $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \rightarrow \int_S D \cdot n = \int \rho\, d\tau$

TEOREMA DIVERGENZA: il flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa è pari all'integrale della sua divergenza esteso al volume racchiuso dalla superficie

$\Rightarrow \int_S \varepsilon_r E\, n\, dS = \int_\tau \mathrm{div}\, \varepsilon_r E\, d\tau$

$\Rightarrow \int_\tau \mathrm{div}\, \varepsilon_r E\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, d\tau \Rightarrow \mathrm{div}\, \varepsilon_r E = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\, D = \rho}$

2°: $\Phi(B) = \int_S B \cdot n\, dS = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\, B = 0}$

3°: $f.e.m. = \oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S B\, n\, dS = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} n\, dS$ (Circuitazione campo elettrico)

TEOREMA STOKES: la circuitazione di un vettore è uguale al flusso del rotore di quel vettore calcolato attraverso una qualsiasi superficie che abbia la linea della circuitazione come contorno $\Rightarrow \oint E\, dl = \int_S \mathrm{rot}\, E \cdot n\, dS$

$\Rightarrow \int_S \mathrm{rot}\, E\, n\, dS = -\int_S \partial B/\partial t\; n\, dS \rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\, E = -\partial B/\partial t}$

4°: Una corrente genera un campo magnetico $\rightarrow \oint B\, dl = \mu \sum i = \mu \underbrace{\int J\, n\, dS}_{\text{flusso densità di corrente } = I}$ → teorema di Stokes $\rightarrow \mathrm{rot}\, B = \mu J$

densità di corrente

Questa formula è stata poi modificata da Maxwell aggiungendo una così detta "corrente di spostamento" $= \partial(\varepsilon E)/\partial t$ che esplicita il fatto che anche nel caso in cui non ci siano correnti ($J = 0$), un campo magnetico può essere generato da una variazione di campo elettrico. $\rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\, B = \mu \left(J + \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t}\right)}$

Riepilogo

- $K_i + U_i = K_f + U_f$ per un sistema conservativo
- $L_{non\ conservativo} = \Delta U + \Delta K$ per un sistema NON conservativo Quando c'è attrito
- $A_s \leq A_d = \mu R_N$ condizione di statica
- Usare SEMPRE derivate e integrali quando non sappiamo se a e V sono costanti
- EQUAZIONI CARDINALI $\begin{cases} I: \sum F_{est} = m \cdot a \\ II: M_{est} = I \cdot \alpha \end{cases}$ = momento di inerzia • a. angolare

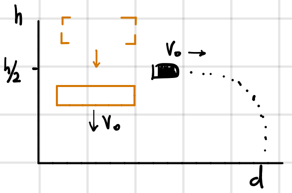
- $\Delta U = Q - L$ (I Principio termodinamica)
- $\Delta U = C_V \Delta T = n \cdot M \cdot c_V \cdot \Delta T = n \overline{C_V} \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T$ 8.314
  #moli massa molare calore molare imparo a memoria
- $L = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ (solitamente) NB. trovare la relazione tra p e V da inserire nell'integrale $p(V)$
- Legge di Stevino : p = pressione = $\sigma \cdot a \cdot h$ (utilizzare per le forze nei fluidi)

- E_0 = campo elettrico = $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q/r^2 = \frac{kq}{r^2}$ ← 1 carica somma dei campi se ho N cariche o $q = \sigma \cdot$ Area / Volume ....
- $E_{0\,PIANO} = \sigma/2\varepsilon_0$
- $V_0 = \int_0^P E_0\, dl \longrightarrow V_0 = \frac{kq}{r} \longrightarrow V_0(N) = \sum_{i}^{N} \frac{kq_i}{r_i}$
- σ = densità di carica = Q/Volume = Q/Area = Q/lunghezza
- ω_0 = densità energia elettrostatica = $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$
- ENERGIA ELETTROSTATICA = $U_{el} = \int_V \omega \cdot dV$ (volumetrica) $= \int_R \omega \cdot 4\pi r^2 dr$ (sfera) $= \int_R \omega \cdot 2\pi h r\, dr$ (cilindro)

Esami

4.7.2018

1) Uno piattaforma cade liberamente dall'altezza $h = 15\,m$. Ad $h/2$ viene sparato un proiettile dalla piattaforma con velocità pari alla velocità della piattaforma in quel istante e alzo zero (inclinazione zero). Dove cade il proiettile?



A quota $h/2$ vale $\frac{1}{2} m V_f^2 + mg \, h_f = mg h_i + \frac{1}{2} m V_i^2$ ($h_f = h/2$, $h_i = h$, $V_i = 0$) $\rightarrow \frac{1}{2} m V_f^2 = \frac{1}{2} mgh$

per la conservazione di energia (ovviamente vale a tutte le h!)

$\Rightarrow V_f$ = velocità ad $h/2$ $= \sqrt{gh} = V_0$

Per trovare d, calcoliamo inizialmente il "tempo di caduta" del proiettile:

Eq. moto verticale: $y(t) = y_0 + vt + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = -h/2 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t^2 + \frac{2V_0}{g} t - \frac{h}{g} = 0$

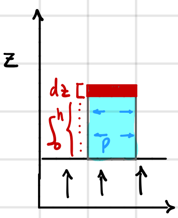
Eq moto orizzontale: $x(t) = V \cdot t = V_0 \cdot t$

$$t = -\frac{V_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + h/g} \longrightarrow$$ prendo il segno + per avere un tempo positivo $\rightarrow t = -\frac{\sqrt{gh}}{g} + \sqrt{\frac{h}{g} + h/g}$

$$\rightarrow t = -\sqrt{\frac{h}{g}} + \sqrt{2h/g} = \sqrt{h/g}\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 0.50$$

$$\longrightarrow x = d = V_0 \cdot t = \sqrt{gh} \cdot 0.5 = \sim 6$$

2) Dei fusti di petrolio pieni ($A = 1.5\,m^2$, $h = 2m$) sono posti su un montacarichi che sale con un'accelerazione $a = 0.5\,m/s^2$. Quanto varia il modulo della forza esercitata dal liquido sulla superficie laterale del fusto? $\rho = 700\ Kg\, m^3$



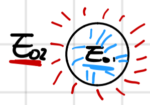
$dF = \Delta p \cdot ds$ = forza applicata su una superficie infinitesima ds

$ds = 2\pi R\, dz$ = una singola striscia laterale di spessore infinitesimo $\rightarrow R = \sqrt{A/\pi}$

$\Delta p = \rho \cdot a \cdot z$ per la legge di Stevino

$$\Rightarrow dF = 2\pi R \rho a z\, dz \Rightarrow F = \underbrace{\int_0^h}_{\text{per tutta l'altezza del fusto}} dF = \int_0^h 2\pi R \rho a z\, dz = 2\pi \sqrt{A/\pi}\, \rho a \left[z^2\right]_0^h = 3039\ N$$

3) Data una distribuzione di carica uniforme a simmetria sferica di raggio R e densità σ costante, calcolare l'energia che le spetta dovuta al campo elettrico in tutto lo spazio considerato vuoto ovunque.



E_{01} = campo elettrico "dentro" la distribuzione $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^3}{4\pi r^2 \, 3}$ ($\sigma \cdot V_{el} = q$) $\longrightarrow$ in questo caso $r = R \longrightarrow E_{01} = \frac{\sigma r}{3\varepsilon_0}$

E_{02} = campo elettrico "fuori" $= \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\sigma 4\pi R^3}{3\varepsilon_0} = \frac{\sigma R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

$$U_{el} = U_{IN} + U_{OUT}$$

$$U_{IN} = \int_V w_{el} \cdot dV = \int_0^R w \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} E_{01}^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2 4\pi}{9\varepsilon_0^2} \int_0^R r^4\, dr = \frac{2\pi\sigma^2}{9\varepsilon_0}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{2\pi\sigma^2 R^5}{45\varepsilon_0}$$

$$U_{OUT} = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\sigma^2 R^6}{9\varepsilon_0^2 r^2} dr = \frac{2\sigma^2 R^6}{9\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{2\pi\sigma^2 R^5}{9\varepsilon_0}$$

$$U_{el} = \frac{2\pi\sigma^2 R^5}{9\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{12}{45} \frac{\sigma^2 \pi R^5}{\varepsilon_0}$$

Domanda 1: Trovare l'espressione del rendimento per un ciclo di Carnot.

Dal primo principio della termodinamica $\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L$

Essendo un ciclo $U_2 = U_1 \rightarrow \Delta U = 0 \rightarrow Q = L$

Durante il ciclo, il gas nella macchina termica assorbe (Q_1, isoterma 1) e cede (Q_2, isoterma 2) calore

e quindi $Q = Q_{TOT} = Q_1 - Q_2 \longrightarrow L = Q_1 - Q_2$

Si definisce rendimento con il quale la quantità di calore Q_1 è trasformata in lavoro il rapporto $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - Q_2/Q_1$

(sempre < 1 perché $Q_2 > 0$ sempre)

Domanda 2: Ricavare il teorema delle forze vive (lavoro ed energia cinetica) e il teorema dell'impulso

TEOREMA FORZE VIVE

Il lavoro della somma delle forze applicate su un punto materiale è uguale alla variazione di energia cinetica.

DIMOSTRAZIONE

$F = m \cdot a = m \cdot dV/dt \longrightarrow$ moltiplico e divido per $ds \longrightarrow F = m \underbrace{\boxed{\frac{ds}{dt}}}_{}^{V} \cdot \frac{dv}{ds} = mv \frac{dv}{ds}$

$L = \int_i^f F\, ds = \int_i^f mv\, dv = m \left[\frac{1}{2} v^2\right]_i^f = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = K_2 - K_1 = \Delta K$

TEOREMA IMPULSO

$I \left(= \int F\, dt\right) = \Delta p$

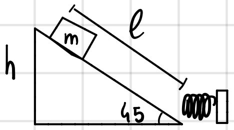
DIMOSTRAZIONE

$F = m \cdot a = m\, dV/dt = \frac{dp}{dt} \longrightarrow F\, dt = dp \longrightarrow \int_i^f F\, dt = p_f - p_i = \Delta p$

L'integrale è chiamato impulso.

4.6.2018

1) Un blocco di massa m scivola su un piano inclinato di 45° da un altezza h con attrito dinamico $\mu = 0.2$. Arrivato a terra prosegue orizzontalmente senza attrito fino ad incontrare una molla che ne inverte il moto. Trovare il rapporto tra h^* = altezza di ritorno e h. Trovare l'espressione della massima compressione della molla.



In presenza di attrito → Forze NON conservative → $L_{NC} = \Delta K + \Delta U$

$\Delta U = mgh' - mgh$

$\Delta K = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = 0$ perché $V_1 = 0$ e nell'istante finale in h' $V_2 = 0$

$L_{NC} = L_{\text{attrito in discesa}} + L_{\text{attrito in salita}} = -F_a \cdot l - F_a \cdot l' = -\mu mg \cos 45°(l + l')$

$l = h/\sin 45$ $\quad l' = h'/\sin 45$

$$\Rightarrow -\mu mg \frac{\cos}{\sin} \cdot h - \mu mg \frac{\cos}{\sin} h' = mgh' - mgh \Rightarrow \left(mg + \mu mg \frac{\cos}{\sin}\right) h' = \left(mg - \mu mg \frac{\cos}{\sin}\right) h$$

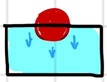
$$\frac{h'}{h} = \frac{\cancel{mg}(1 - \mu \operatorname{tg} 45)}{\cancel{mg}(1 + \mu \operatorname{tg} 45)} = \frac{1 - 0.2}{1 + 0.2} = 0.67$$

Per calcolare la compressione della molla prendiamo in esame solo la discesa: $\Delta T + \Delta U + \Delta U_{el} = L_{NC} = -\mu mg\cos \cdot l = -\mu mg \operatorname{tg}45 \cdot h$

$\Delta T = 0$, $\Delta U = -mgh$ perché $h_2 = 0$, $\Delta U_{el} = \frac{1}{2}kd^2$

$$\Rightarrow -mgh + \frac{1}{2}kd^2 = -\mu mgh \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{2mgh(1-\mu)}{k}}}$$

2) Una bacinella cilindrica con diametro D = 18 cm contiene dell'acqua e sulla superficie c'è una palla di massa m = 0.2 kg. Quanto diminuirà la pressione sul fondo del recipiente se si rimuove la palla?



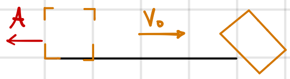
$$P = F/S \longrightarrow \Delta P = P_{acqua+palla} - P_{acqua} = \frac{(m_a + m)g}{\pi (D/2)^2} - \frac{m_a g}{\pi (D/2)^2} = \frac{mg}{\pi (D/2)^2} = 77\ \text{Pa}$$

Domanda 1: Descrivere l'esperienza di Joule di espansione di un gas nel vuoto, le condizioni, i risultati e le conseguenze sul primo principio della termodinamica

L'esperienza di Joule dimostra che l'energia interna di un gas non dipende dal suo volume.
Per verificarlo ha immerso due due recipienti comunicanti tramite un rubinetto in un bagno termometrico isolato con l'esterno alla temperatura T e riempito uno dei due recipienti con un gas molto rarefatto.
Aprendo il rubinetto il gas ha iniziato a riempire anche il secondo recipiente.
Durante l'espansione la temperatura non è variata (o almeno le variazioni si avvicinano a zero più il gas è rarefatto e simile ad un gas perfetto).
Il lavoro del sistema gas + recipienti + bagno è nullo
La quantità di calore scambiata con l'esterno è nulla per via dell'isolamento.
$\longrightarrow \Delta U = Q - L = 0 \longrightarrow U_1 = U_2$ per il primo principio della termodinamica
Poiché nulla è cambiato nel sistema se non il volume del gas si può affermare che l'energia interna non dipende dal volume del gas e quindi U dipende solo da T $\rightarrow U = U(T)$
$C_V = dQ/dT = dU/dT \longrightarrow dU = C_V dT$

11.9.2018

1) Un blocco di massa m ha velocità iniziale V_0 e striscia lungo un piano orizzontale con attrito μ. Dopo $t_1 = 2s$ il blocco percorre $l = 1.5\,m$ prima di cadere dal bordo. Determinare l'intervallo di valori di μ per il quale è permesso il moto. Nel caso di massimo valore permesso di μ, dato il lavoro della forza di attrito $L = -2J$, trovare la massa m.



$$l = 1.5 = \overbrace{V_0 t_1 - \frac{1}{2}\underbrace{\mu g}_{a} t_1^2}^{\text{moto decellerato}}$$

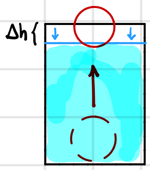
La velocità a fine corsa è nulla, ma è il risultato di una velocità minima di spostamento meno la componente di attrito

$V = 0 = V_0 - \mu g t_1 \longrightarrow V_0 = \mu g t_1$

$\Rightarrow$ sostituiamo $\longrightarrow 1.5 = \mu g t_1^2 - \frac{1}{2}\mu g t_1^2 = \frac{1}{2}\mu g t_1^2 \longrightarrow \mu = \frac{6}{g t_1^2} = 0.075 \Longrightarrow 0 \le \mu \le 0{,}75$

$\mu = 0.075,\ L = -2J \longrightarrow -2 = F \cdot s = mg\mu \cdot 1.5 \longrightarrow m = \frac{2}{g\mu \cdot 1.5} = 1.8\ kg$

2) In un recipiente cilindrico di base $A = 800\,cm^2$ pieno d'acqua è ancorato sul fondo un corpo di massa $m = 0.6\,kg$ e densità $\rho = 230\,kg/m^3$. Di quale valore Δh scenderà il livello dell'acqua se si lascia libero il corpo di venire in superficie?



Quando il corpo è immerso $h = \frac{V_a + V_c}{A} = \frac{V_a + m/\rho_c}{A}$

Quando il corpo galleggia solo una sua parte è immersa: $V_{c\,imm} = \rho_c V_c / \rho_a$

e quindi la nuova altezza h' sarà $\frac{V_a + V_{c\,imm}}{A}$

$$\Delta h = \frac{V_a + V_{c\,imm} - V_a - V_c}{A} = \frac{V_c}{A}\left(\frac{\rho_c}{\rho_a} - 1\right) = \frac{V_c}{A}(-0.77) = 2.5\ cm$$

3) Una sbarra di lunghezza L e massa M è libera di ruotare con velocità angolare ω, senza attrito in un piano, attorno a un asse ortogonale passante per un suo estremo. Una palla di massa m può essere posizionata ad una distanza $r < L$ dall'asse in modo da essere colpita dalla sbarra in un urto elastico. Trovare r tale che dopo l'urto la barra si fermi. Qual è il valore massimo del rapporto tra le masse M/m affinché il moto sia realizzabile? In quest'ultimo caso trovare la velocità v della pallina dopo l'urto

• URTO ELASTICO $\longrightarrow$ conservazione energia cinetica : K_b iniziale + K_p iniziale = K_b finale + K_p finale

$\Rightarrow \frac{1}{2}M v_b^2 + \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{1}{2} M V_b^2 + \frac{1}{2} m v_p^2$

la palla parte da ferma $\longrightarrow v_p = 0$
la barra si deve fermare $\longrightarrow V_b = 0$
$\Big\} \longrightarrow \frac{1}{2} M v_b^2 = \frac{1}{2} m V_p^2$

Per un corpo rigido che ruota su un asse l'energia cinetica vale $\frac{1}{2} I \omega^2$ con I = momento d'inerzia ($= \frac{ML^2}{3}$ per una barra)

$\longrightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m v^2$

Il momento quantità di moto è $mv \cdot r$ e nel caso di corpi in rotazione vale $I\omega$

$$\begin{cases} I\omega = mvr \\ \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 \longrightarrow v = \omega\sqrt{I/m} \end{cases} \longrightarrow r = \frac{I\cancel{\omega}}{m\cancel{\omega}\sqrt{I/m}} \longrightarrow \text{fattorizzo} \longrightarrow r = \sqrt{I/m} = L\sqrt{\frac{M}{3m}}$$

• Affinché il moto sia realizzabile r deve essere minore di L $\rightarrow r = L\sqrt{M/3m} < L \longleftrightarrow M/m \le 3$

• Se $\frac{M}{m} = 3 \rightarrow L = r \rightarrow v = \omega\sqrt{I/m} = \omega L\sqrt{\frac{M}{3m}} = \omega L$

Domanda 1: Per un gas perfetto, ricavare la relazione tra C_p e C_v e la variazione di entropia tra due stati A e B

$dU = dQ - dL \longrightarrow dQ = dU + dL = c_v dT + p dV$

Dall'eq. caratteristica di unità di massa di un gas perfetto sappiamo che $pv = \frac{R}{M} T$

Se consideriamo una trasformazione a pressione costante $\rightarrow dV = \frac{R}{Mp} dT$

Sostituendo sopra e dividendo per dT : $\left(dQ/dT\right)_{p=cost} = c_p = c_v + R/M$

Moltiplico per $M \rightarrow C_p = C_v + R$

23.10.2018

1) Un punto materiale parte da fermo in $x=0$ verso le x positive con $a = k+\omega t$ $(k = 8\,m/s^2)$. Se dopo $t_1 = 4s$ il punto ripassa per $x=0$ quanto vale ω? che accelerazione avrà in t_1?

$$V - V_0 = V - 0 = \int_0^t a\,dt = \int_0^t k+\omega t\,dt = \int_0^t k\,dt + \int_0^t \omega t\,dt = kt + \frac{\omega t^2}{2}$$

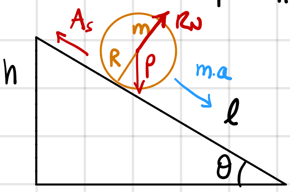
Usiamo l'integrale perché a non è costante

$$X - X_0 = X - 0 = \int_0^t V\,dt = \int_0^t kt\,dt + \int_0^t \frac{\omega t^2}{2}\,dt = \frac{kt^2}{2} + \frac{\omega t^3}{6}$$

$$x(t_1) = 0 \text{ (perché torno in } x_0) = \frac{kt^2}{2} + \frac{\omega t^3}{6} \longrightarrow \omega = -\frac{k\cancel{t^2}\,\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{2}t^{\cancel{3}}} = -6\,m/s^3$$

$$a(t_1) = k + \omega t_1 = 8 - 6(4) = -16\,m/s^2$$

2) Un disco di massa m e raggio R è posto su un piano inclinato con angolo θ. Trovare il coefficiente minimo di attrito statico μ affinché si abbia puro rotolamento e il tempo t che impiega a scendere da altezza h



$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta - A_s \\ \underbrace{A_s \cdot R}_{A_s\cdot R\cdot \sin 90°} = I\cdot\alpha \end{cases}$$

I eq. cardinale $(F_{est} = m\cdot a)$

II eq. cardinale $(M_{est} = I\cdot\alpha)$

La condizione di puro rotolamento è $\boxed{\alpha = \frac{a}{R}}$

$$\begin{cases} a = g\sin\theta - A_s/m \\ A_s = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_s = \frac{Ig\sin\theta}{R^2} - \frac{IA_s}{mR^2} \rightarrow A_s\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right) = \frac{Ig\sin\theta}{R^2} \\ \text{Il momento di inerzia } I \text{ per un disco di massa } m \text{ e raggio } R \text{ vale } \boxed{\frac{1}{2}mR^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_s\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}mg\sin\theta \rightarrow A_s = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

A_s deve essere $\leq A_{max} = \mu R_\nu = \mu mg\cos\theta$ Condizione di statica

$$\Rightarrow \frac{1}{3}mg\sin\theta \leq \mu mg\cos\theta \rightarrow \mu \geq \frac{1}{3}tg\,\theta$$

$$a = \alpha R = R\cdot\left(\frac{A_s\cdot R}{I}\right) = \frac{2\cancel{R^2}\,\cancel{m}g\sin\theta}{3\,\cancel{m}\cancel{R^2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$h = l\sin\theta \rightarrow l = h/\sin\theta = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin\theta}\,\frac{3}{2g\sin\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}$$

3) Due moli di gas monoatomico perfetto si espandono in modo adiabatico reversibile, con volume finale triplo di quello iniziale. La temperatura iniziale vale $T_A = 300K$. Determinare il lavoro compiuto durante l'espansione. Se l'espansione fosse libera nel vuoto, determinare la temperatura finale e la variazione di entropia.

- $\Delta U = Q - L \rightarrow Q = 0 \rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = nc_V T_B - nc_V T_A = -L \rightarrow L = nc_V(T_A - T_B)$

  $TV^{(\gamma-1)} = cost$ nei processi adiabatici $\rightarrow T_A V_A^{(\gamma-1)} = T_B V_B^{(\gamma-1)} \rightarrow T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{(\gamma-1)} = 300\left(\frac{1}{3}\right)^{0.66} = 144$ $\quad (\gamma = 1.\bar{6})$

  C_V per un gas perfetto monoatomico vale $\sim 12{,}5 \longrightarrow L = 2\cdot 12.5\cdot 156 = 3900\,J$
- Se l'espansione è libera il lavoro è nullo e la variazione di temperatura è nulla $\rightarrow T_A = T_B$
- $\Delta U = Q - L \rightarrow nc_V\Delta T = Q - L \rightarrow T_A = T_B \rightarrow Q = L$

$$\Delta S = \int_A^B dQ/T = \int_A^B dL/T = \int_A^B PdV/T = \int_A^B \frac{nRT\,dV}{T\,V} = nR[\ln]_1^3 = nR\ln(3)$$

Domanda 1: Ricavare l'espressione per la densità di energia nel caso di un condensatore piano

$$w_{el} = U/\text{Volume} = U/\text{Area} \cdot d$$

$$dU = V dq \longrightarrow U = \int_0^q \boxed{\overset{V}{\frac{q}{C}}} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{\overset{q^2}{\boxed{V^2C^2}}}{2C} = \frac{V^2C}{2}$$

$$\longrightarrow w_{el} = \frac{V^2 C}{2Ad} \longrightarrow C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \longrightarrow w_{el} = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2} \longrightarrow V = \int_0^d E \cdot dl = Ed \longrightarrow w_{el} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2$$