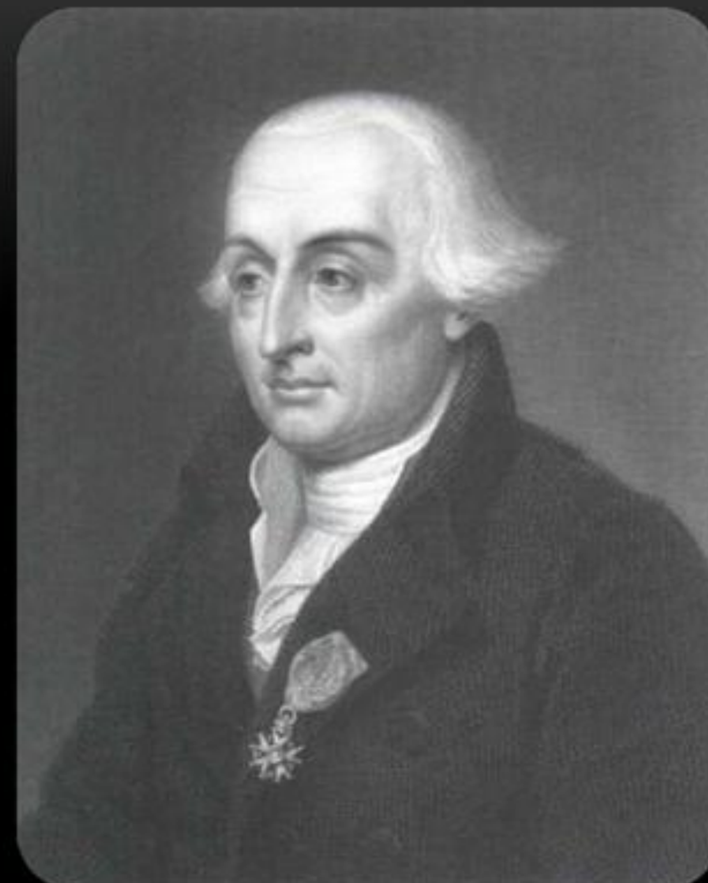
Интерполяция многочленом Лагранжа. Тригонометрическая интерполяция

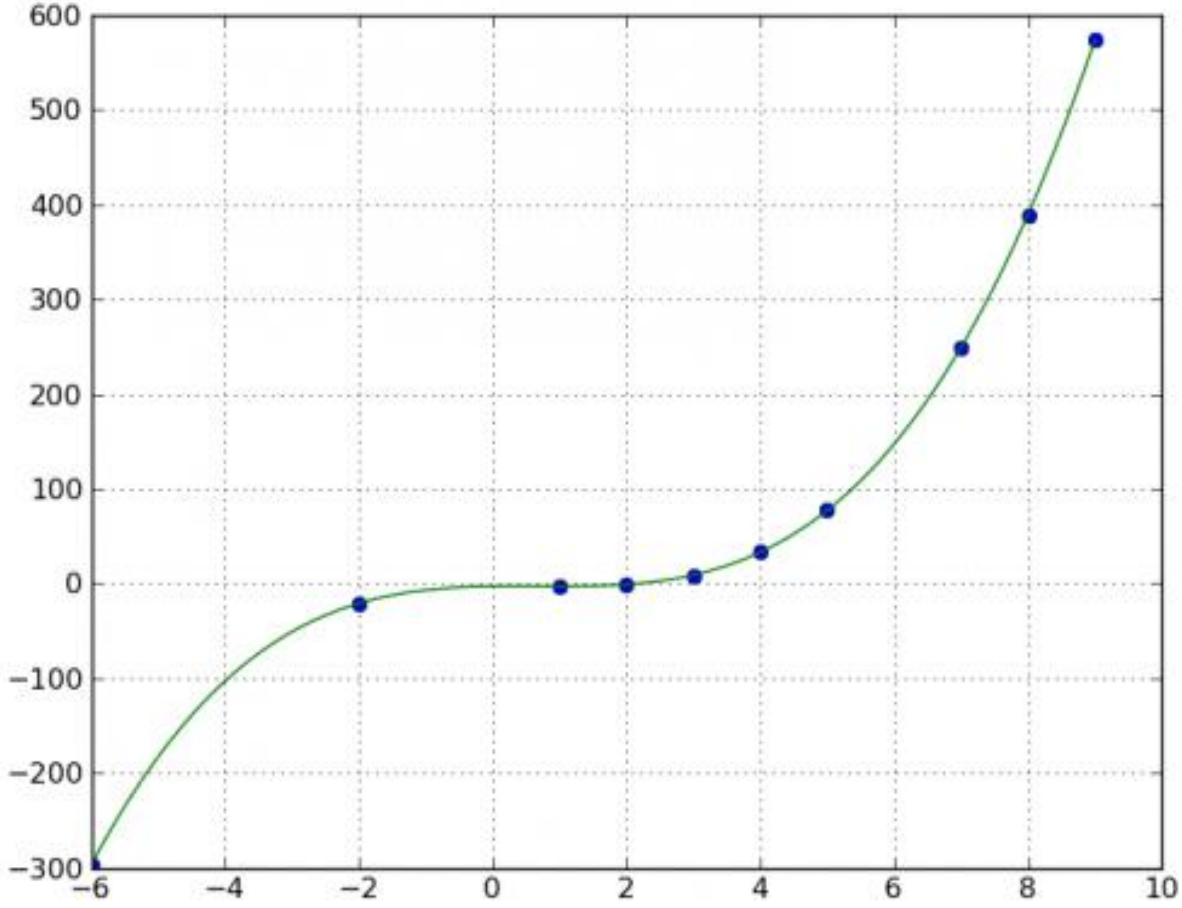
Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) — французский математик и механик, физик. Один из лучших математиков 18 века. иностранный почетный член Петербургской АН (1776).Труды по вариационному исчислению, где им разработаны основные понятия и методы, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям.



Фурье Жан Батист Жозеф (1768-1830)

- Французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской АН (1829), член Парижской академии наук (1817).
- Труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и особенно по математической физике.
- Его «Аналитическая теория тепла» (1822) явилась отправным пунктом в создании теории тригонометрических рядов (рядов Фурье).

Что такое интерполяция?



Методы интерполяции

При **интерполировании** функцию, заданную ее значениями в узлах интерполяции (то есть, с помощью **таблицы**) заменяют **формулой** (аналитическое задание функции)

Интерполирование с помощью многочлена **Лагранжа**

Интерполирование с помощью многочлена **Ньютона**

- Равноотстоящие узлы интерполяции: $\mathbf{h=x_i-x_{i+1}=const}$
- Неравноотстоящие узлы интерполяции: $\mathbf{h=x_i-x_{i+1}\neq const}$

Полиномиальная функция

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

1. $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$ $\quad y = a_1 x + a_0$
2. $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$ $\quad y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
3. $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_5, y_5\}$ $\quad y = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
4. $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_{20}, y_{20}\}$ $\quad y = a_{19} x^{19} + a_{18} x^{18} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Интерполяция полиномом

Известны точки $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, y_{n-1}\}, \{x_n, y_n\}$

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Требуется найти параметры $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}\}$

Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0, \\ y_1 = a_{n-1}x_1^{n-1} + a_{n-2}x_1^{n-2} + \ldots + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_n = a_{n-1}x_n^{n-1} + a_{n-2}x_n^{n-2} + \ldots + a_2x_n^2 + a_1x_n + a_0. \end{cases}$$

Интерполяция многочленом Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале строится единый многочлен.

Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Пусть функция F(x) задана таблицей:

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Построим $L_n(x)$ – многочлен Лагранжа, для которого выполнены условия:

$$L_n(x_0) = y_0$$
$$L_n(x_1) = y_1$$
$$\ldots$$
$$L_n(x_n) = y_n$$

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} +$$

$$y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots +$$

$$y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} y_i .$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов.

Многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть

$$x_0, x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$$

– корни этого многочлена.

- **Линейная интерполяция**
- При **n=1** формула Лагранжа имеет вид:

$$L_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

- **Квадатическая интерполяция**
- При **n=2** формула Лагранжа имеет вид:

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- **Кубическая интерполяция**
- При **n=3** формула Лагранжа имеет вид:

$$L_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

- Пример
- Даны значения координат трех точек

	0	1	2
x	**-1**	**0**	**1**
y	**-0.8**	**1.6**	**2.3**

- На основе полинома Лагранжа выполнить интерполяцию исходной табличной функции

- Введем обозначения
- xt- текущее значение аргумента, для которого нужно найти интерполяционное значение yt
- Пусть xt=0.5

$$L_2(x) = y_0 \underbrace{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}_{L1(xt)} + y_1 \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}_{L2(xt)} + y_2 \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{L3(xt)}$$

$$L1(0.5) = -0.125$$

$$L2(0.5) = 0.75$$

$$L3(0.5) = 0.375$$

- $Y(xt)=L1(xt)\cdot y0+L2(xt)\cdot y1+L3(xt)\cdot y2$

$$Y(0.5) = 2.163$$

- Написать программу для вычисления значений интерполяционного многочлена Лагранжа для функции, заданной таблицей

	1	2	3
x	**-1**	**0**	**1**
y	**-0.8**	**1.6**	**2.3**

- **Yt-** результирующее значение интерполирующей функции (переменная для накопления суммы)
- xt – значение аргумента, при котором нужно найти интерполирующую функцию
- **L** – коэффициент полинома Лагранжа (переменная для накопления произведения)

$$L(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i L_i(\mathrm{x}),$$

где

$$L_i(x) = \prod_{\substack{1 \le m \le k \\ m \ne i}} \frac{x - x_m}{x_i - x_m}.$$

Алгоритм

1) Ввести числовые значения для одномерных массивов x и y
2) Сформировать заголовок цикла с переменной цикла j для работы с массивом y (накопления суммы)
3) В рабочей части цикла сформировать цикл по i для работы с массивом x (накопление произведения)
4) Если i не равно j, то вычислить L
5) После выхода из цикла по j вычислить новое значение Yt

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import*
x=np.array([-1,0,1])
y=np.array([-0.8, 1.6, 2.3])
n = len(x);
xt=0.5
Yt=0;
```

```
for j in range(0, n):
    L=1
    for i in range (0,n):
        if i!=j :
            L=L*(xt-x[i])/(x[j]-x[i])
    Yt=Yt+y[j]*L
print(Yt)
```

$$L1(xt) := \frac{(xt - x_2)\cdot(xt - x_3)}{(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)}$$

$$L2(xt) := \frac{(xt - x_1)\cdot(xt - x_3)}{(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_3)}$$

$$L3(xt) := \frac{(xt - x_1)\cdot(xt - x_2)}{(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)}$$

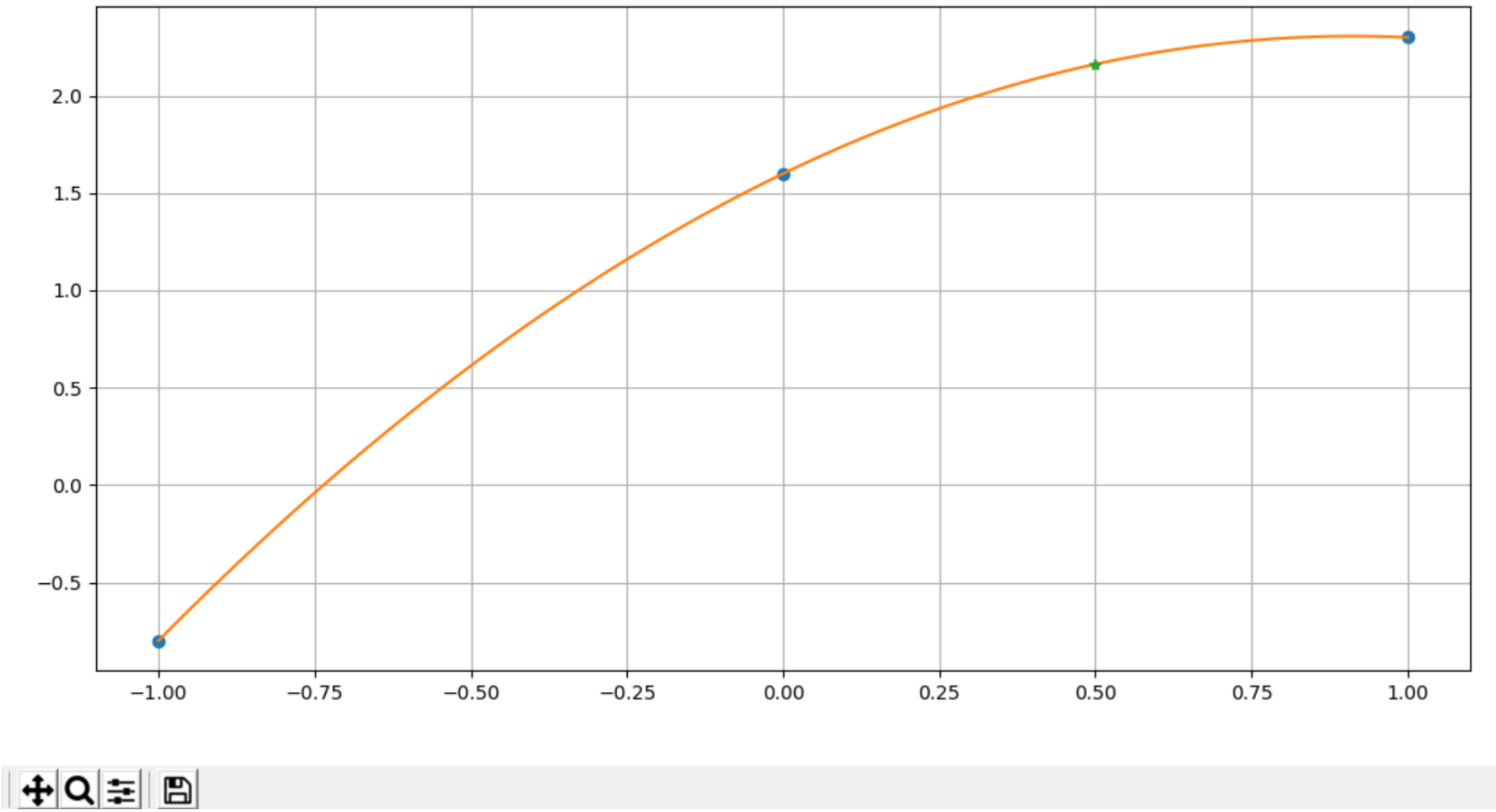
$$Y(xt) := L1(xt)\cdot y_1 + L2(xt)\cdot y_2 + L3(xt)\cdot y_3$$

```
=== RESTART: C:\Users\TTA\School\Программы
      Python\Аппроксимация\lagran1.py ===

2.1625
```

```
def lagrang(x,y,xt):
   Yt=0;
   for j in range(0, n):
      L=1
      for i in range (0,n):
          if i!=j :
             L=L*(xt-x[i])/(x[j]-x[i]);
      Yt=Yt+y[j]*L
   return Yt
yt=lagrang(x,y,0.5)
print(yt)
```

```
XR=np.linspace(np.min(x),np.max(x),100)
YR=[lagrang(x,y,i) for i in XR]
plt.plot(x,y,'o',XR,YR,xt,yt,'*')
plt.grid(True)
plt.show()
```



2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

Ряд Фурье

- Ряд Фурье позволяет изучать периодические функции, разлагая их на компоненты.
- Переменные токи и напряжения, смещения, скорость и ускорение кривошипно-шатунных механизмов и акустические волны - это типичные практические примеры применения периодических функций в инженерных расчетах.

Ряд Фурье периодических функций с периодом 2π.

$f(x)=a_o+ a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+...$

$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+...,$

где a_o, $a_1,a_2,...,b_1,b_2,..$ - действительные константы, т.е.

$$f(x)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

- Коэффициенты a_o,a_n и b_n называются **коэффициентами Фурье**, и если их можно найти, то ряд называется **рядом Фурье,** соответствующим функции f(x).

Тригонометрическая интерполяция

- **Тригонометрическим полиномом** от переменной ***x*** называется выражение вида

$$
\begin{aligned}
g_n(x) = a_0 \quad &+ \quad a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \\
&+ \quad b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx =
\end{aligned}
$$

$$
= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx)\,.
$$

при фиксированных постоянных

$$
a_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots\,, a_n\,, b_1\,, \ldots\,, b_n
$$

Тригонометрическая интерполяция

- Если $\boldsymbol{a_n}$ или $\boldsymbol{b_n}$ отличны от нуля, то говорят, что полином **имеет порядок** $\boldsymbol{n}$.

Тригонометрическая интерполяция

- Постановка задачи
- Построить тригонометрический полином порядка n , принимающий значения по следующей таблице
-

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_{2n+1}
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_{2n+1}

- Интерполирующий полином имеет вид

$$g_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- В узловых точках $g_n(x_j) = y_j$ при $j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$

Узлы интерполяци предполагаются вещественными, различными и расположенными в интервале

$$[0, 2\pi[\,.$$

- Для получения коэффициентов интерполирующего полинома нужно решить систему 2n+1 линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2\,x_1 & \sin 2\,x_1 & \dots & \cos n\,x_1 & \sin n\,x_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \cos 2\,x_2 & \sin 2\,x_2 & \dots & \cos n\,x_2 & \sin n\,x_2 \\ \dots & & & & & & & \dots \\ 1 & \cos x_{2n+1} & \sin x_{2n+1} & \cos 2\,x_{2n+1} & \sin 2\,x_{2n+1} & \dots & \cos n\,x_{2n+1} & \sin n\,x_{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n+1} \end{pmatrix} .$$

Тригонометрическая интерполяция

- **Если в качестве узлов интерполяции взять равноотстоящие**

$$x_j = \frac{2(j-1)\pi}{2n+1} \quad npu \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\},$$

- **то коэффициенты интерполяционного тригонометрического полинома находятся по формулам:**

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} y_j,$$

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} y_j \cos k\, x_j,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} y_j \sin k\, x_j \quad \textit{при}\ k \in \{1, \ldots, n\}$$

Алгоритм расчета коэффициентов тригонометрического полинома

1) Ввести значения $\boldsymbol{y_j}$, j изменяется от 1 до 2n+1

Алгоритм расчета коэффициентов тригонометрического полинома

2) Вычислить значения

$$x_j = \frac{2(j-1)\pi}{2n+1} \quad при \quad j \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\},$$

3) Вычислить значения коэффициентов тригонометрического полинома, размерность a и b равна N (оформим вычисление как функцию).

- 4) Рассчитать текущее значение тригонометрического полинома по формуле

$$g_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- 5) Сформировать массив интерполирующей функции yt и доказать графически, что коэффициенты найдены верно
- ```
  xt=np.linspace(0,6,100)
  yt=np.zeros(100)
  for i in range(100):
      yt[i]=furie(x,y,xt[i])
  plt.plot(x,y,'o',xt,yt)
  plt.grid(True)
  plt.show()
  ```
  ```

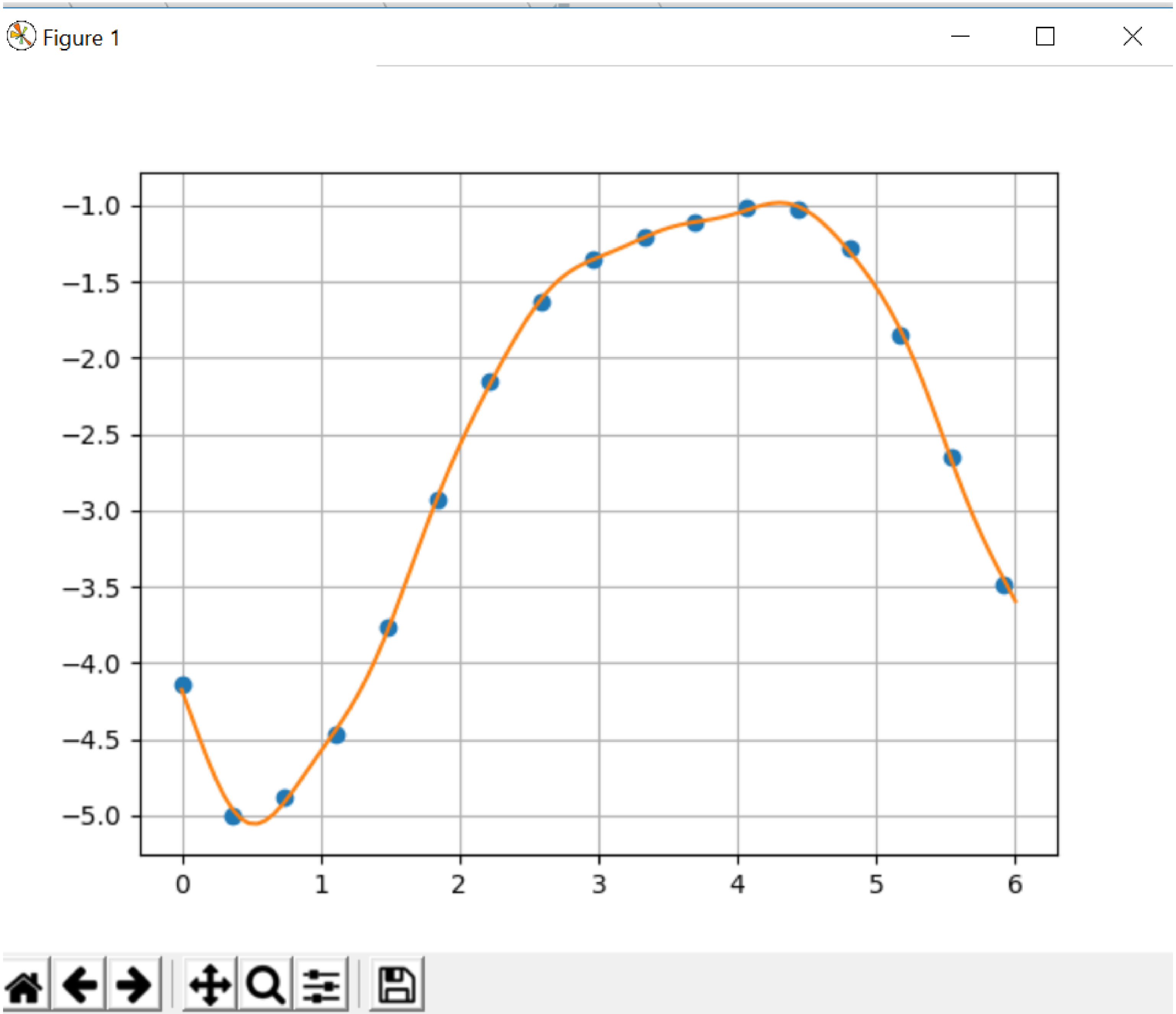


Figure 1
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
−4.5
−5.0
0
1
2
3
4
5
6