Лекция 3 Аппроксимация и интерполяция данных. Численные методы

План лекции

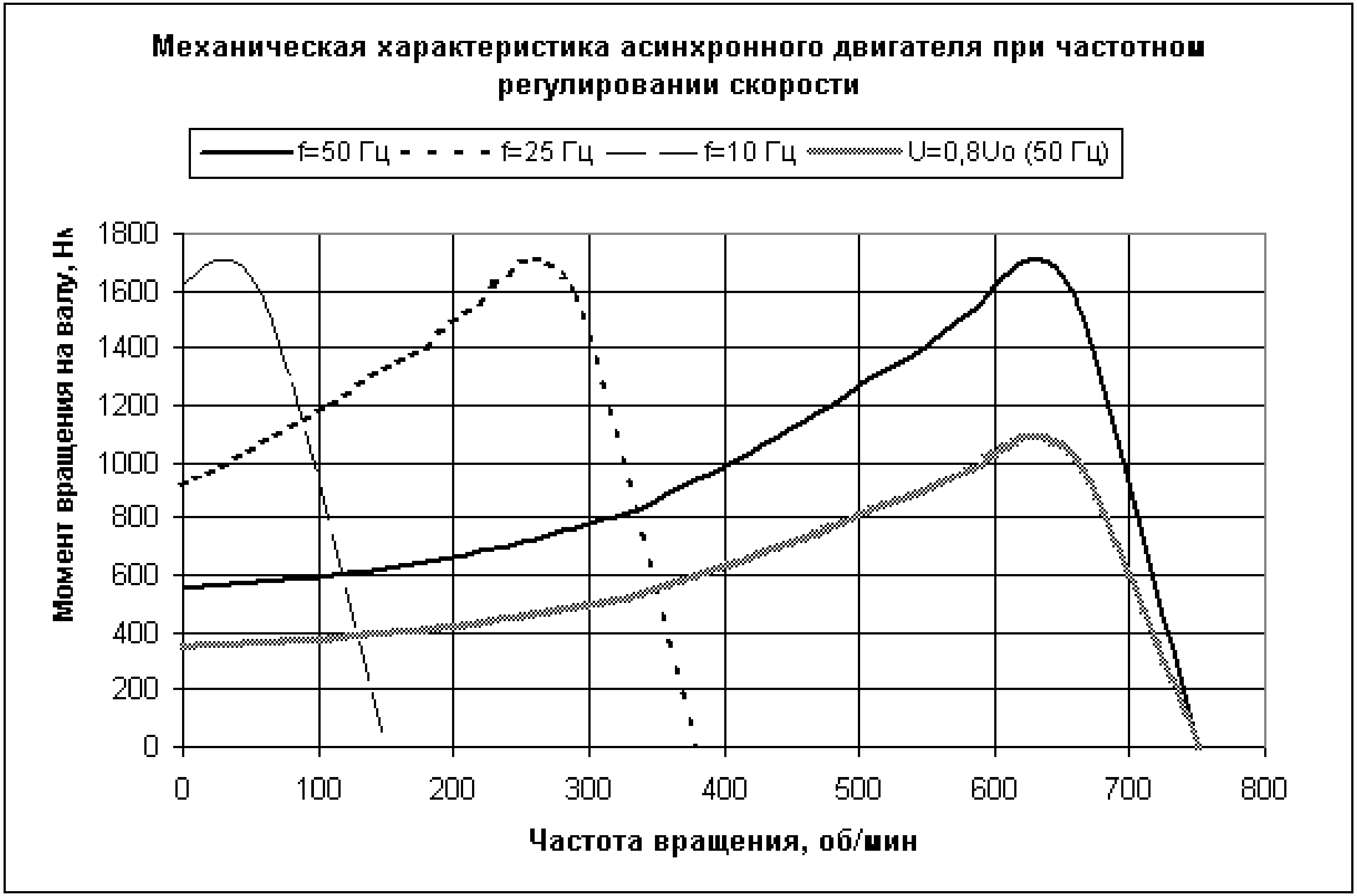
- Практическое применение методов аппроксимации
- Математические определения

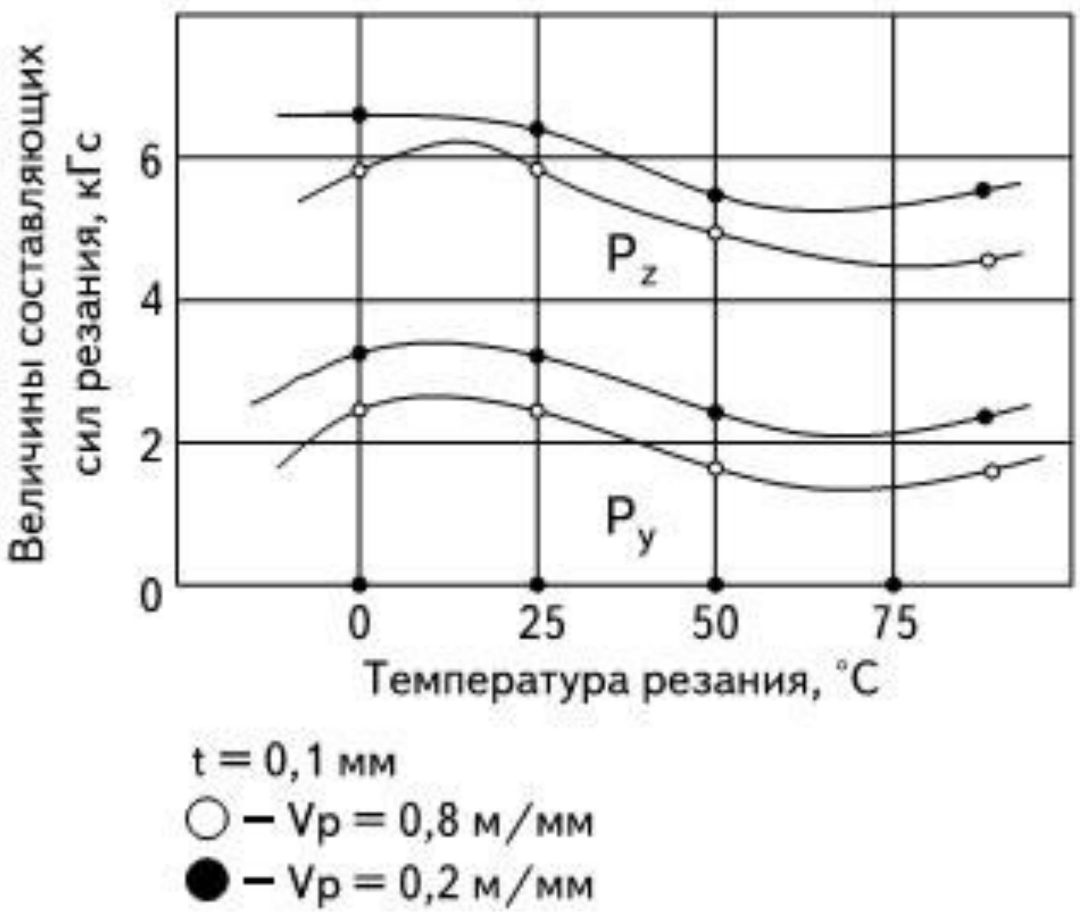
Практическое применение методов аппроксимации

- Любому специалисту в своей практической деятельности приходится изучать зависимости между различными параметрами исследуемых объектов, процессов и систем.

Практическое применение методов аппроксимации

- Например: зависимость числа оборотов двигателя от нагрузки, т.е. n=f(Мкр.); зависимость силы резания при обработке детали на металлорежущем станке от глубины резания, т.е. P=f(t), и т.д.
- Из всех способов задания зависимостей наиболее удобным является аналитический способ задания зависимости в виде функции n=f(Мкр.), P=f(t), y=f(t).


Механическая характеристика асинхронного двигателя при частотном регулировании скорости
f=50 Гц
f=25 Гц
f=10 Гц
U=0,8Uo (50 Гц)
Момент вращения на валу, Нм
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
Частота вращения, об/мин


Величины составляющих сил резания, кГс
6
4
2
0
P_z
P_y
0
25
50
75
Температура резания, °C
t = 0,1 мм
○ – Vp = 0,8 м/мм
● – Vp = 0,2 м/мм

Практическое применение методов аппроксимации

- Однако на практике специалист чаще всего получает зависимости между исследуемыми параметрами экспериментально.
- В этом случае ставится натурный эксперимент, изменяются значения параметров на входе системы, измеряются значения параметров на выходе системы. Результаты измерений заносятся в таблицу.

Практическое применение методов аппроксимации

В результате проведения натурного эксперимента получаем зависимости между исследуемыми параметрами в виде таблицы, т.е. получаем, так называемую, **табличную функцию.**

x	$y=f(x)$
-3,0	0,13
-2,7	0,15
-2,4	0,19
-2,1	0,23
-1,8	0,29
-1,5	0,35
-1,2	0,44
-0,9	0,54
-0,6	0,66
-0,3	0,81
0,0	1,00
0,3	1,23
0,6	1,52
0,9	1,87
1,2	2,30
1,5	2,83
1,8	3,48
2,1	4,29
2,4	5,28
2,7	6,50
3,0	8,00

Практическое применение методов аппроксимации

- Далее с этой табличной функцией необходимо вести научно-исследовательские расчеты.

- Можно ли проинтегрировать или продифференцировать табличную функцию?

Практическое применение методов аппроксимации

- При такой постановке задачи моделирования нужно заменить табличную функцию аналитической.
- Для этой цели используются методы аппроксимации и интерполяции.

Таблица

x	Y(x)

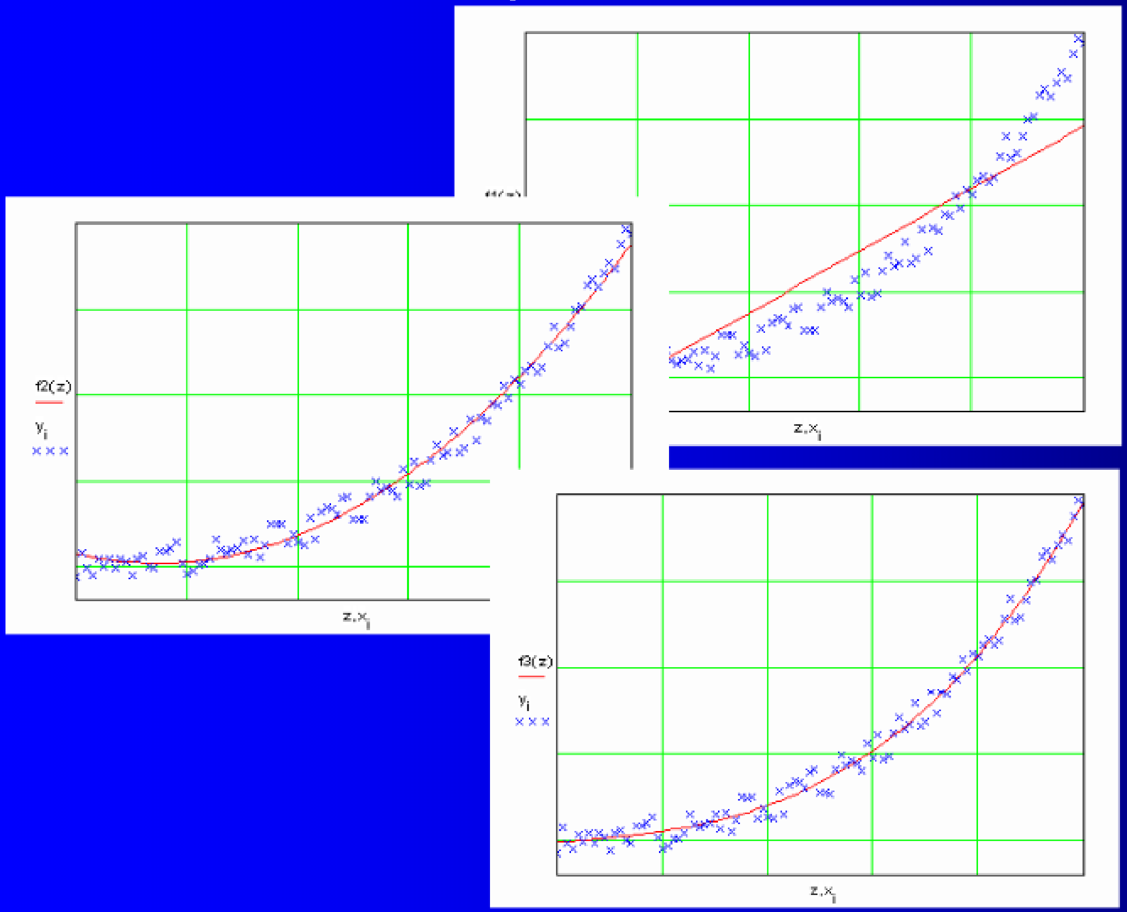
Функция

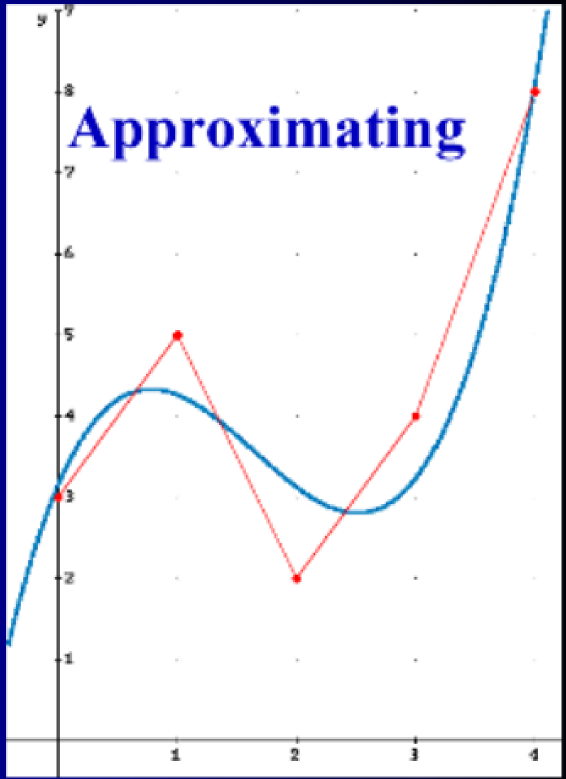
$Y(x)=3.987x^2 +65.34\sin(x)-x/23$

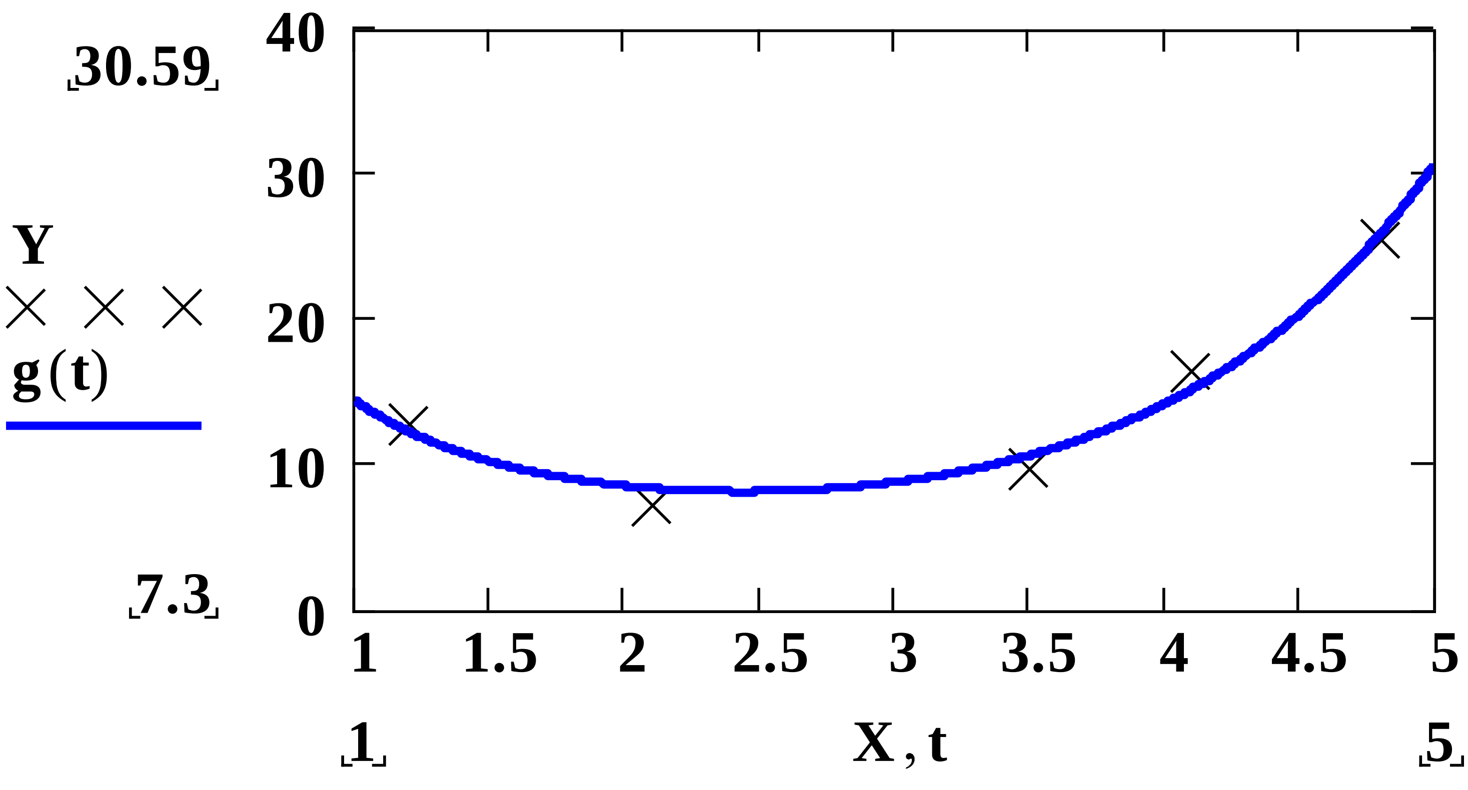
Математические определения

- Аппроксимация – это замена исходной функции f(x) функцией φ(x) так, чтобы отклонение f(x) от φ(x) в заданной области было наименьшим.
- Функция φ(x) называется аппроксимирующей.

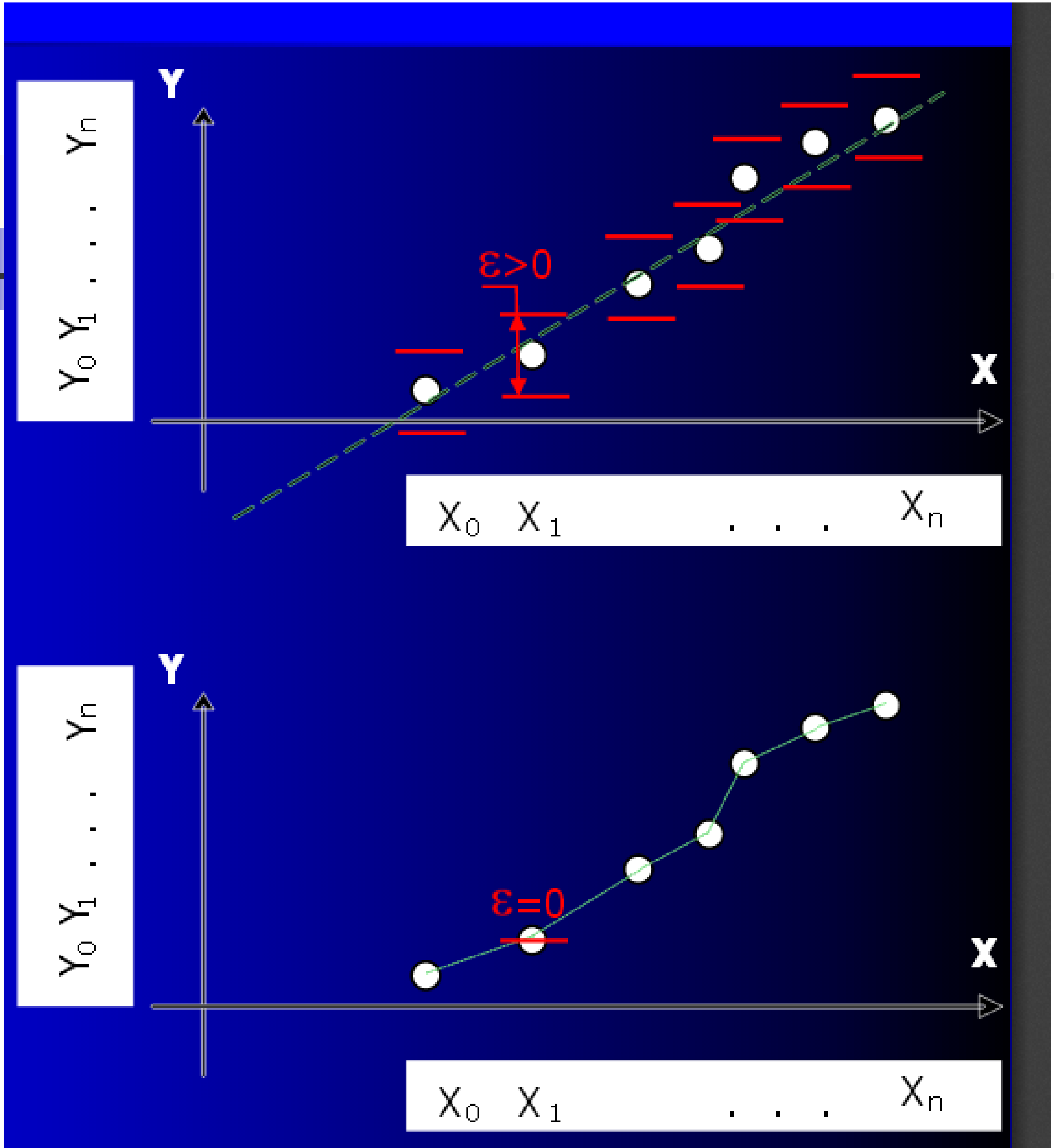
Чаще всего аппроксимацию применяют для экспериментального нахождения некоторых зависимостей.







30.59
7.3
Y
g(t)
40
30
20
10
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
1
X, t
5



Y
Y0 Y1 . . . Yn
ε>0
X
X0 X1 . . . Xn
Y
Y0 Y1 . . . Yn
ε=0
X
X0 X1 . . . Xn

Математические определения

- Если исходная функция f(x) задана таблично (дискретным набором точек), то аппроксимация называется дискретной
- Если исходная функция f(x) задана аналитически (на отрезке), то аппроксимация называется непрерывной или интегральной

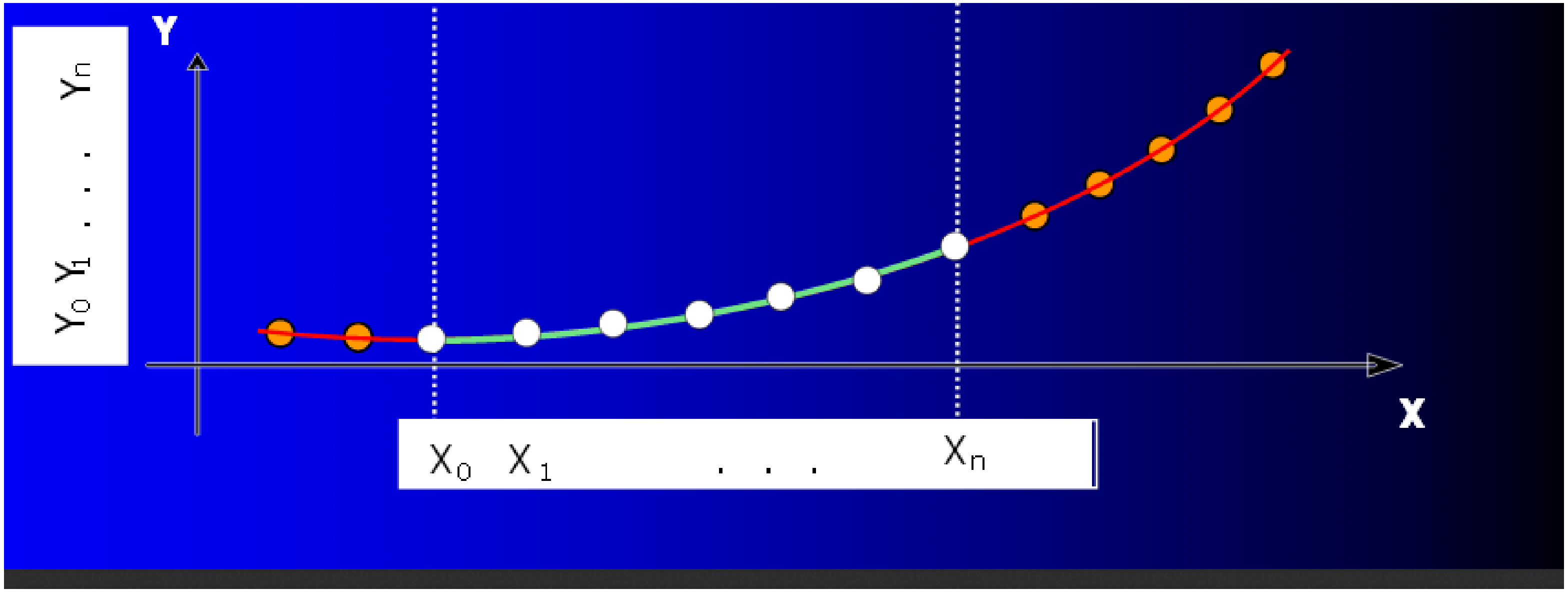
Математические определения

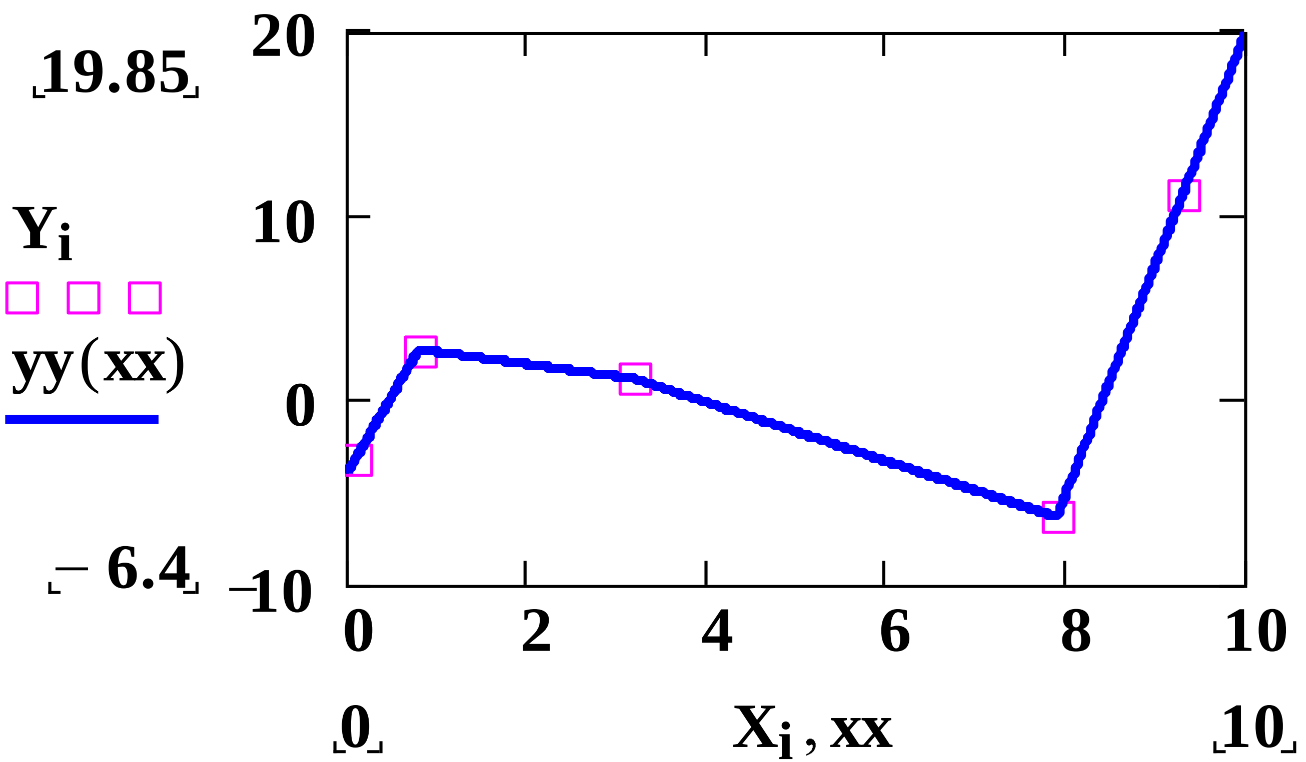
- Интерполяция – это замена исходной функции f(x) функцией φ(x) так, чтобы φ(x) точно проходила через точки исходной функции f(x).
- Интерполяция еще называется точечной аппроксимацией
- Точки исходной функции f(x) называются узлами интерполяции

Математические определения

Экстраполяцией называется аппроксимация вне заданной области определения исходной функции, т.е.

$$x < x0 \text{ и } x > xn$$





19.85
20
10
0
−10
− 6.4
Y_i
yy(xx)
0
2
4
6
8
10
0
X_i , xx
10

Математические определения

- Найдя интерполяционную функцию, мы можем вычислить ее значения между узлами интерполяции, а также определить значение функции за пределами заданного интервала (провести экстраполяцию).

Математические определения

- Если интерполяция проводится только для отдельных участков отрезка $[a, b]$ (области определения $f(x)$), т.е. для m интерполяционных узлов, где $m < n$, то интерполяцию называют ***локальной***.

Математические определения

- Если интерполяционный многочлен ищется для всего интервала области определения *x*, т.е. для $[x_0, x_n]$, то интерполяция называется ***глобальной.***

Математические определения

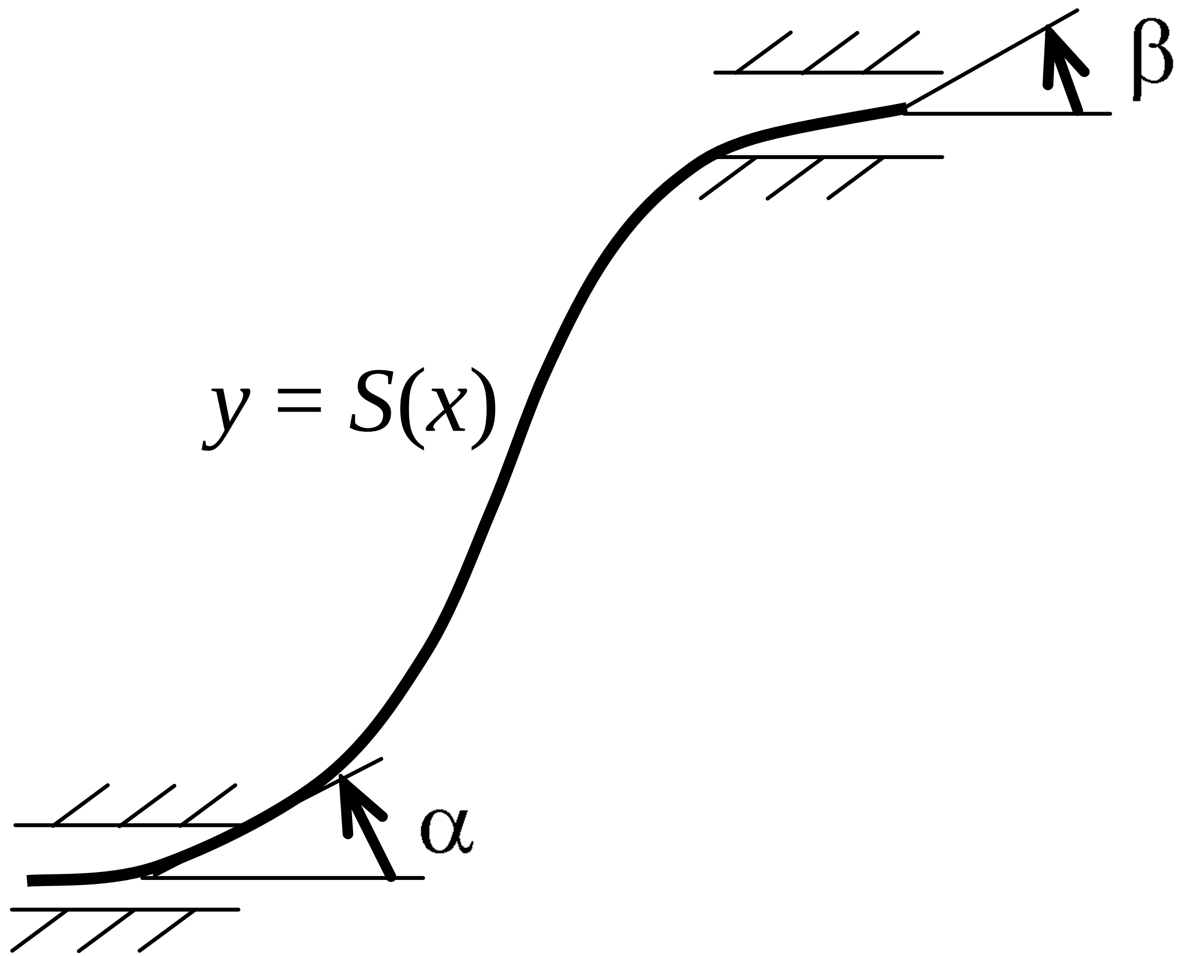
- Простейшими видами локальной интерполяции является линейная и квадратичная
- При линейной интерполяции точки заданной функции соединяются линейными отрезками, а при квадратичной – отрезками парабол.
- Такая интерполяция еще называется параболической.

Типовые виды глобальной интерполяции

- Интерполяционный многочлен Лагранжа
- Интерполяционный многочлен Ньютона
- Сплайны

Математические определения

- Сплайн представляет собой математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала, закрепленного в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклона α и β так, чтобы потенциальная энергия стержня была минимальна



β
$y = S(x)$
α

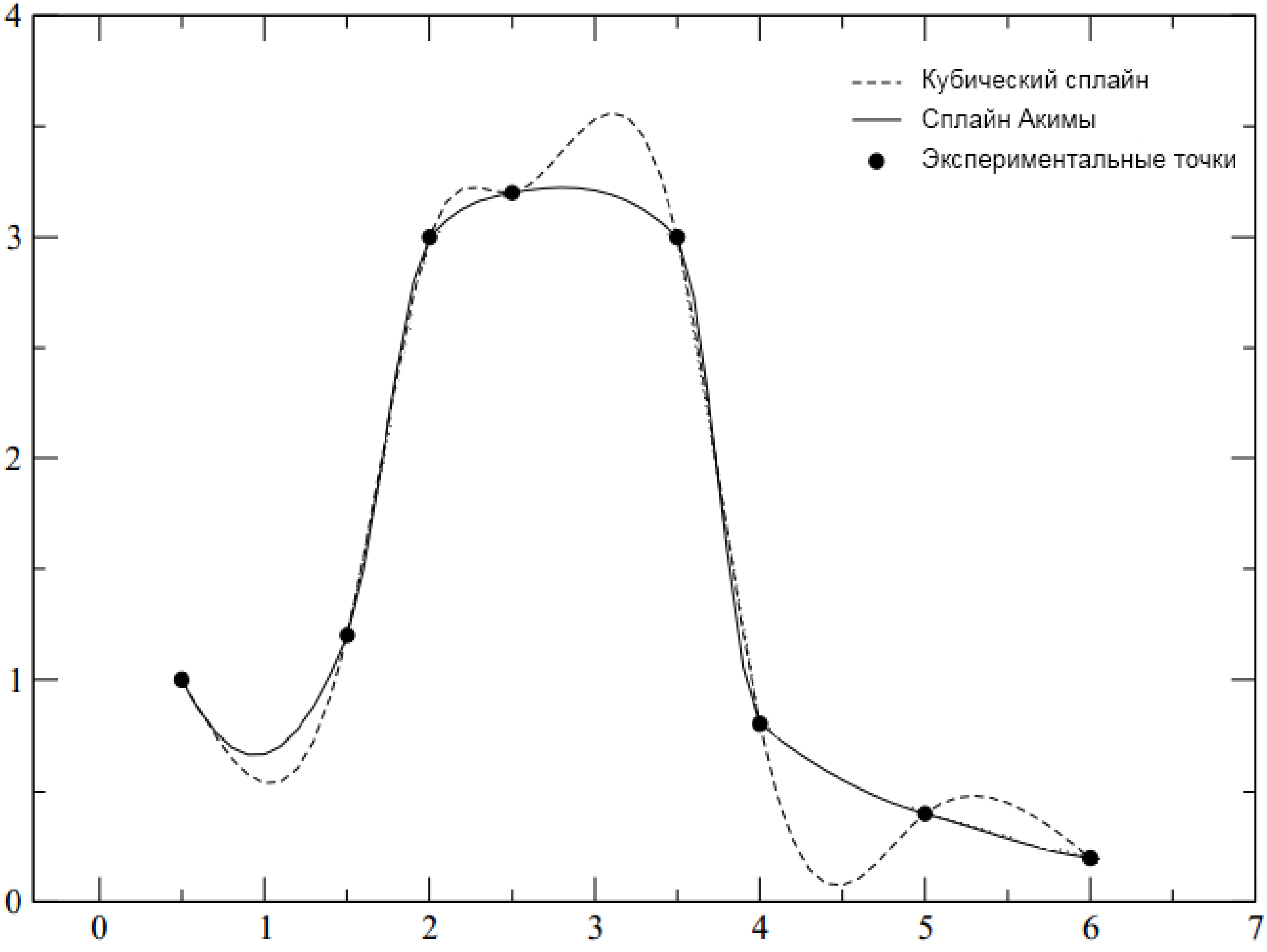


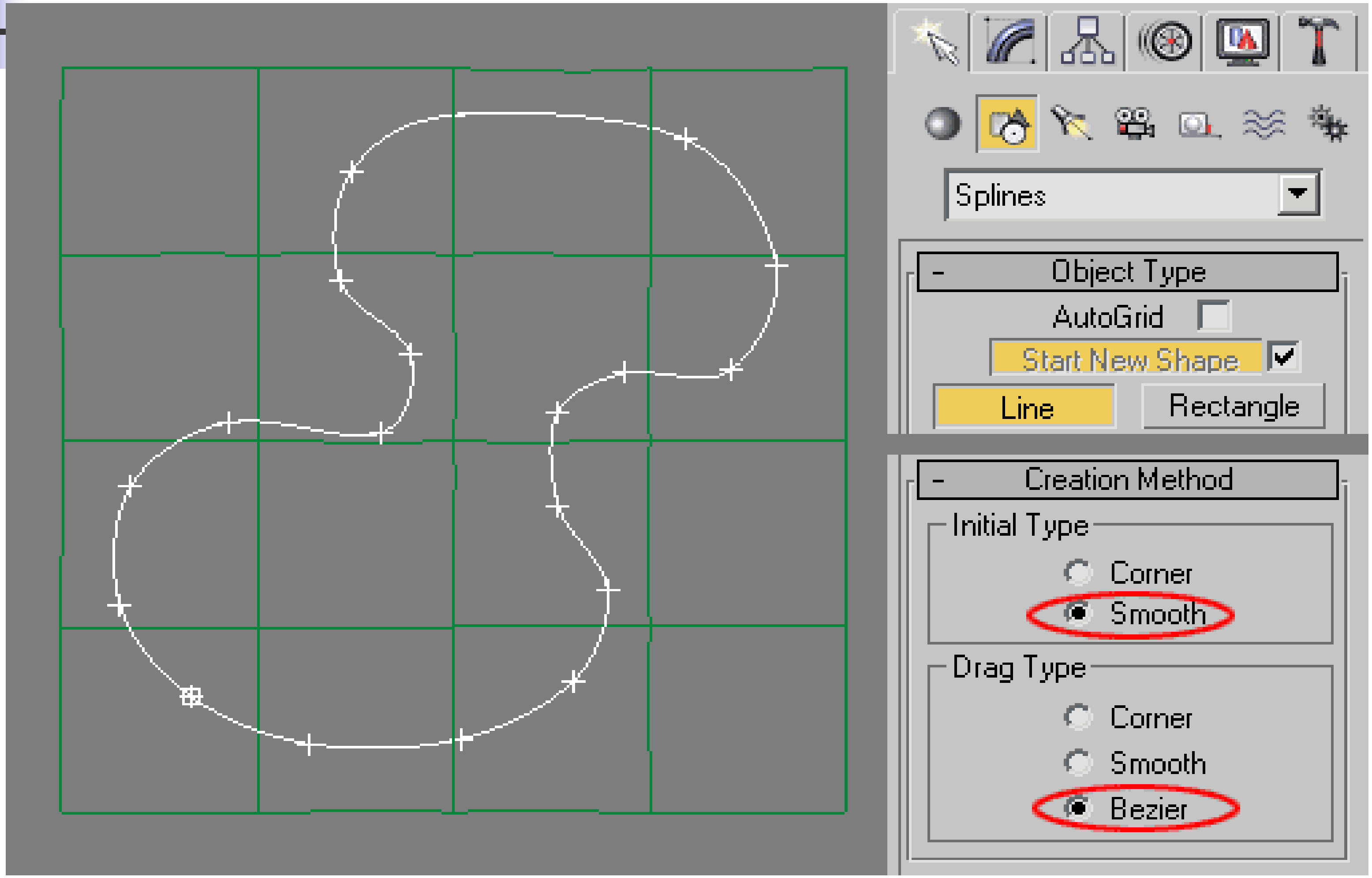
- Сплайн – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке [x_i, x_{i+1}] в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

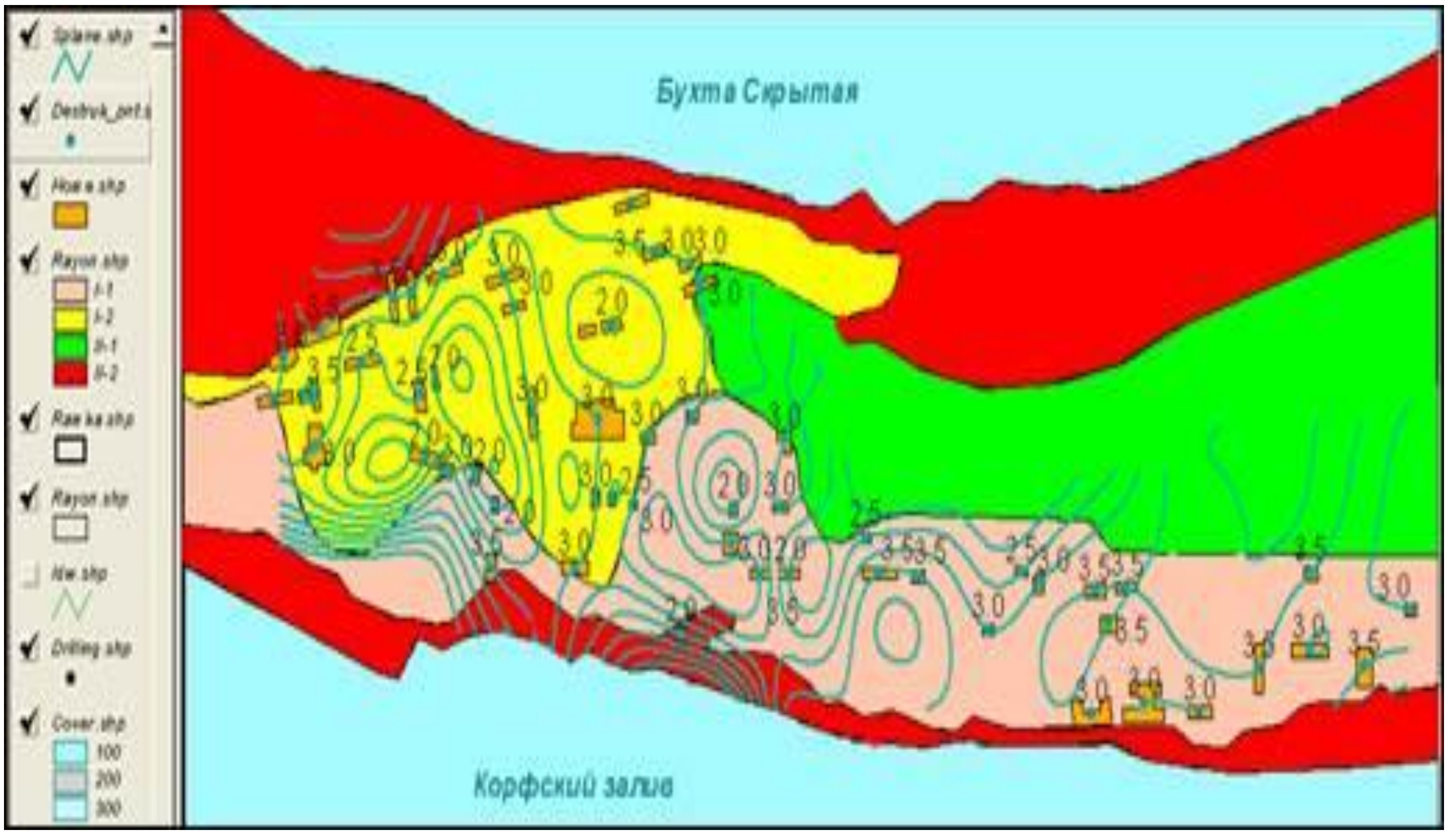
Сплайн-интерполяция

Применение:

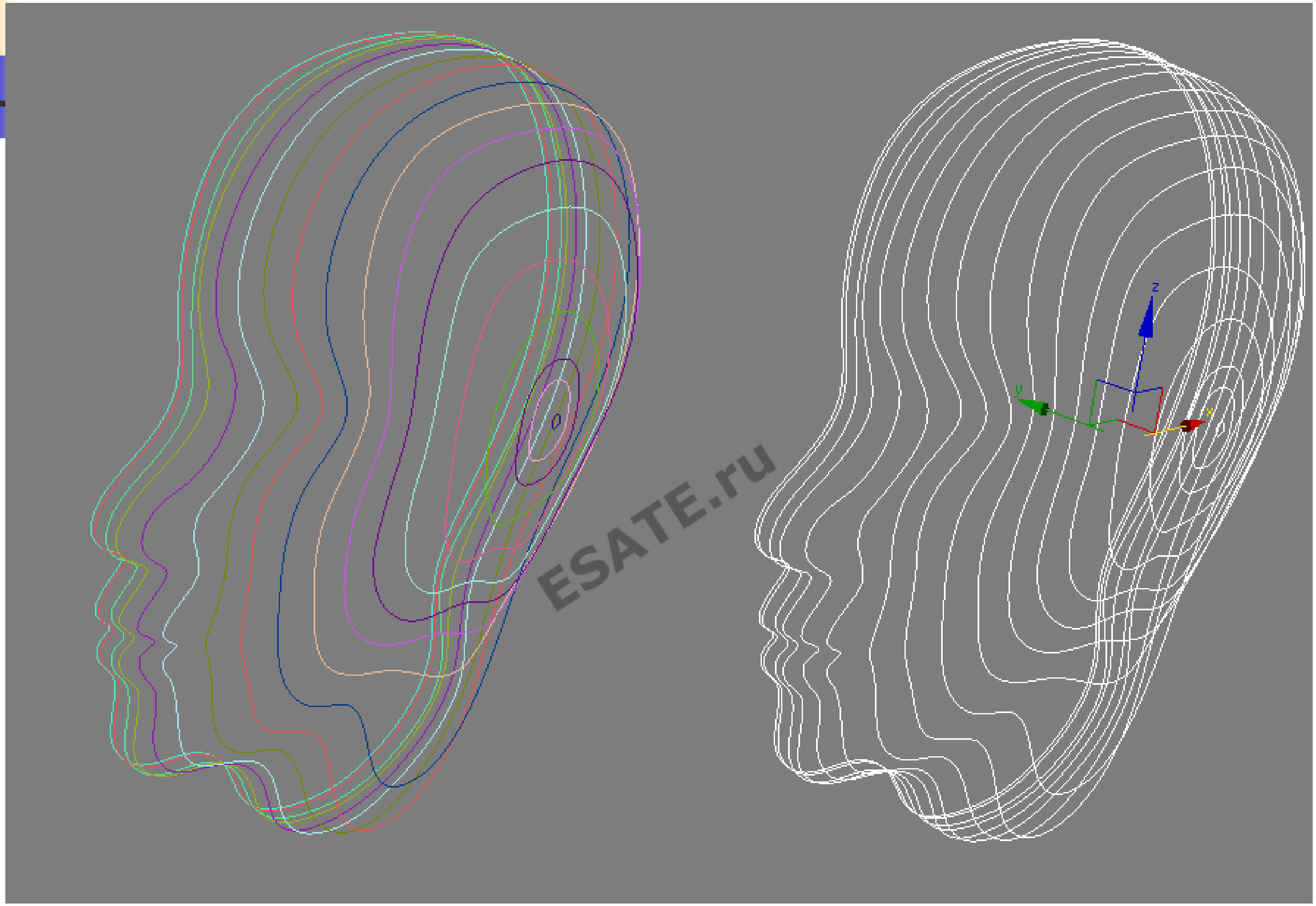
- в системах автоматизированного проектирования для задания линий и поверхностей;
- в задачах перекодировки звукового сигнала;
- в описании законов движения;
- в задачах прогнозирования;
- проектирование автомобильных дорог (сплайн-трассирование) и т.д.


Кубический сплайн
Сплайн Акимы
Экспериментальные точки
0
1
2
3
4
5
6
7


Splines
Object Type
AutoGrid
Start New Shape
Line
Rectangle
Creation Method
Initial Type
Corner
Smooth
Drag Type
Corner
Smooth
Bezier



Rayon.shp
I-1
I-2
II-1
II-2
Rayon.shp
Drilling.shp
Cover.shp
100
200
300
Бухта Скрытая
Корфский залив



Математические определения

- Наиболее известными методами аппроксимации являются метод наименьших квадратов, метод многочленов Чебышева, рядов Тейлор и т.д.

Математические определения

- ***При решении задач аппроксимации часто используются функции регрессии***
- ***Регрессия*** – представление совокупности данных некоторой функцией ***f(x)***.
- Задачей регрессии является вычисление параметров функции ***f(x)*** таким образом, чтобы функция приближала последовательность исходных точек с наименьшей погрешностью.

Математические определения

- При этом функция ***f(x)*** называется ***уравнением регрессии***.
- При регрессии не требуется чтобы функция проходила через все заданные точки, что особенно важно при аппроксимации данных, заведомо содержащих ошибки.