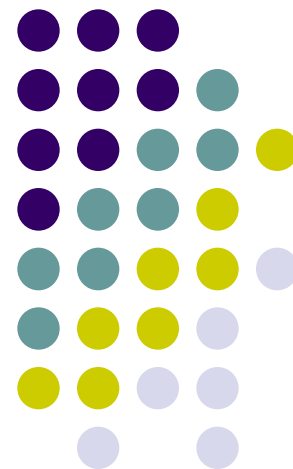


Введение в математическое моделирование



Технические объекты моделирования, параметры объектов



- Чтобы разобраться в системе, изучить, исследовать ее (задача анализа), надо описать систему, зафиксировать ее свойства, поведение, структуру и параметры, то есть построить одну или несколько моделей.



Модель —это?



Определение модели

- **Модель** - это физическая или абстрактная система адекватно (правдоподобно) представляющая объект исследования или проектирования
- **Математическая модель** – это совокупность математических объектов и связей между ними, отражающих основные свойства проектируемого технического объекта
- **Компьютерная модель** – это программная реализация математической модели.

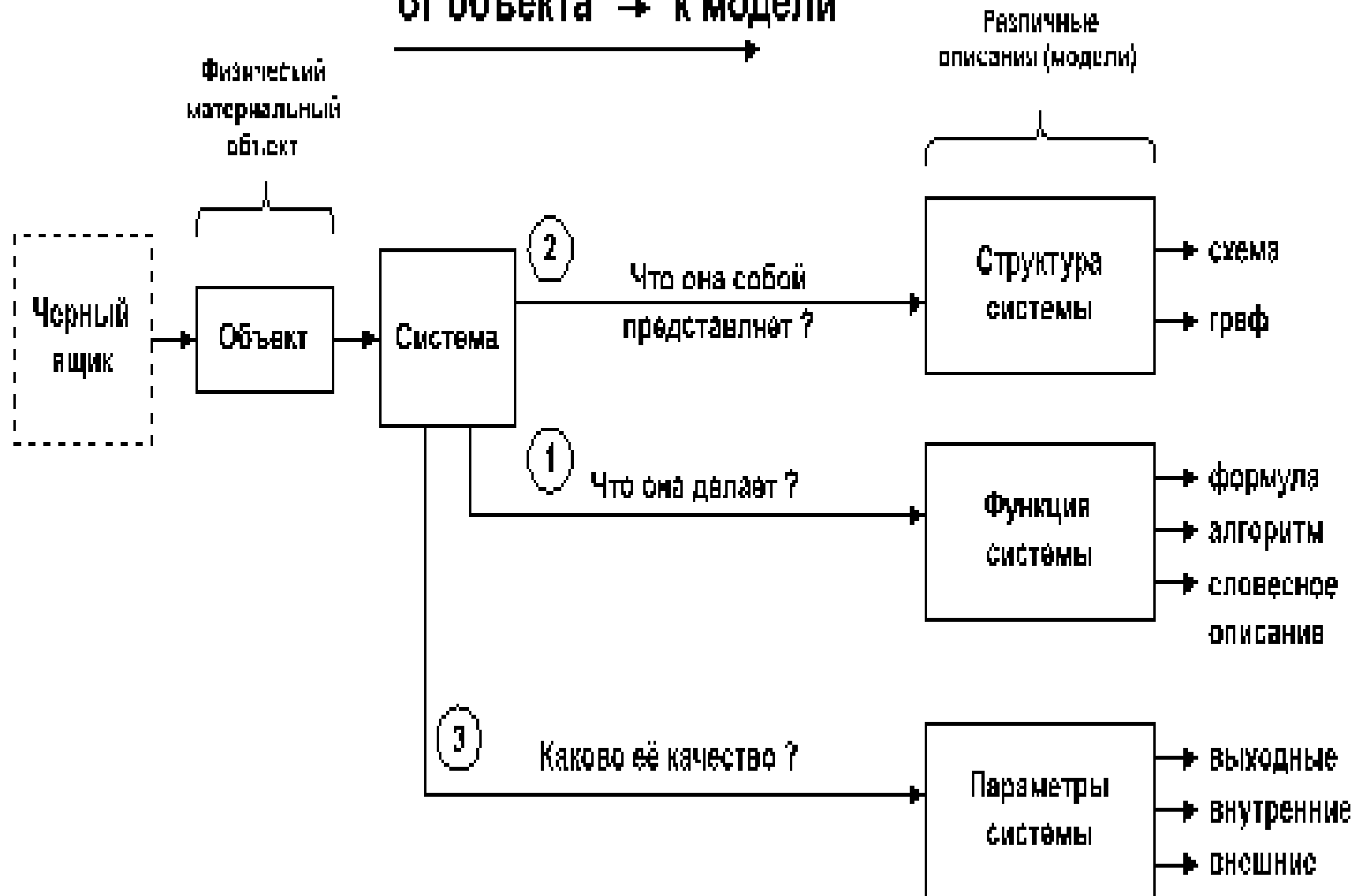
Технические объекты моделирования, параметры объектов



Для того, чтобы разработать модель системы, надо ответить на три основные вопроса:

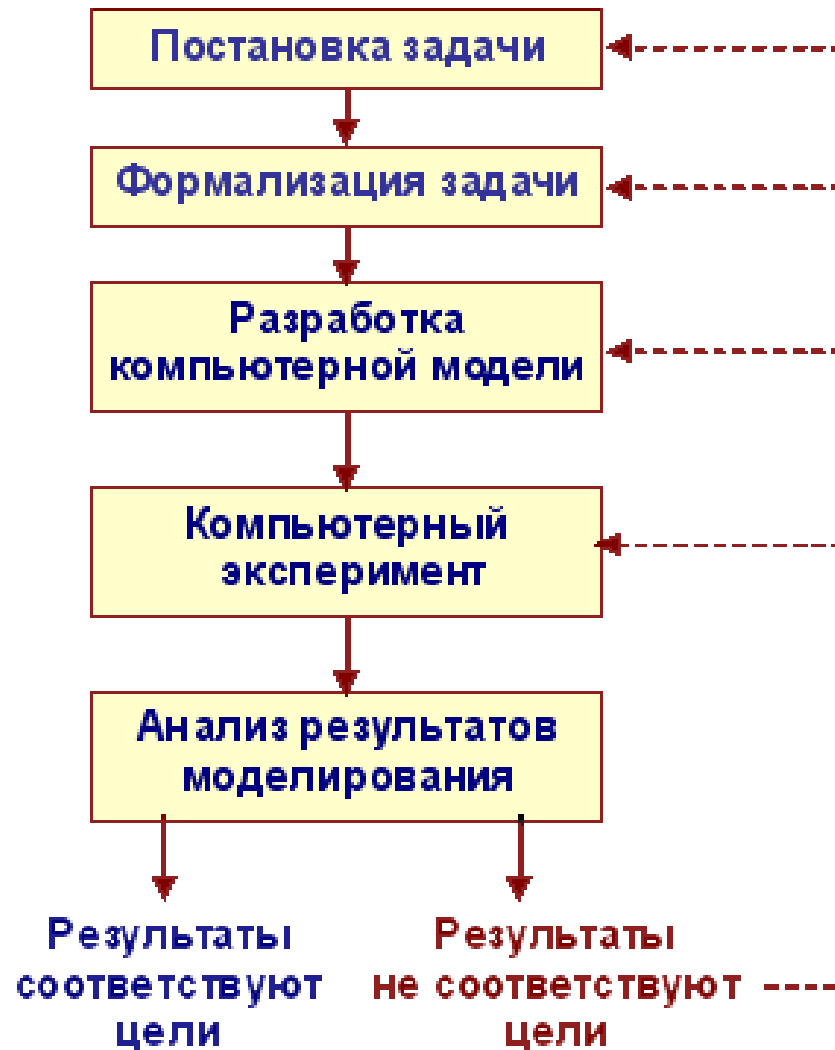
- Что она делает (узнать поведение, функцию системы);
- Как она устроена (выяснить структуру системы);
- Каково ее качество (насколько хорошо она выполняет свои функции).

Анализ: от объекта → к модели





Этапы моделирования





Первый этап — постановка задачи
включает в себя стадии:

- *описание задачи,*
- *определение цели моделирования,*
- *анализ объекта.*

**Хорошо поставить задачу – наполовину
решить ее**



Описание задачи

- К первой группе можно отнести задачи, в которых требуется исследовать, как изменятся характеристики объекта при некотором воздействии на него, *«что будет, если?...»*
- .
Что будет, если повысить проходной балл в университет?
- Что будет, если резко увеличить плату за проезд в общественном транспорте?
- В задачах, относящихся ко второй группе, требуется определить, какое надо произвести воздействие на объект, чтобы его параметры удовлетворяли некоторому заданному условию, *«как сделать, чтобы?...»*.
Например, как надо построить курс моделирования, чтобы студентам было интересно учиться?



Определение цели моделирования



- На этой стадии необходимо среди многих характеристик (параметров) объекта выделить *существенные*.
- Для одного и того же объекта при разных целях моделирования существенными будут считаться разные свойства.





Модель самолета – признаки для:

- кассира по продаже авиабилетов
- авиадиспетчера
- технолога цеха по сборке самолетов

Определение цели моделирования

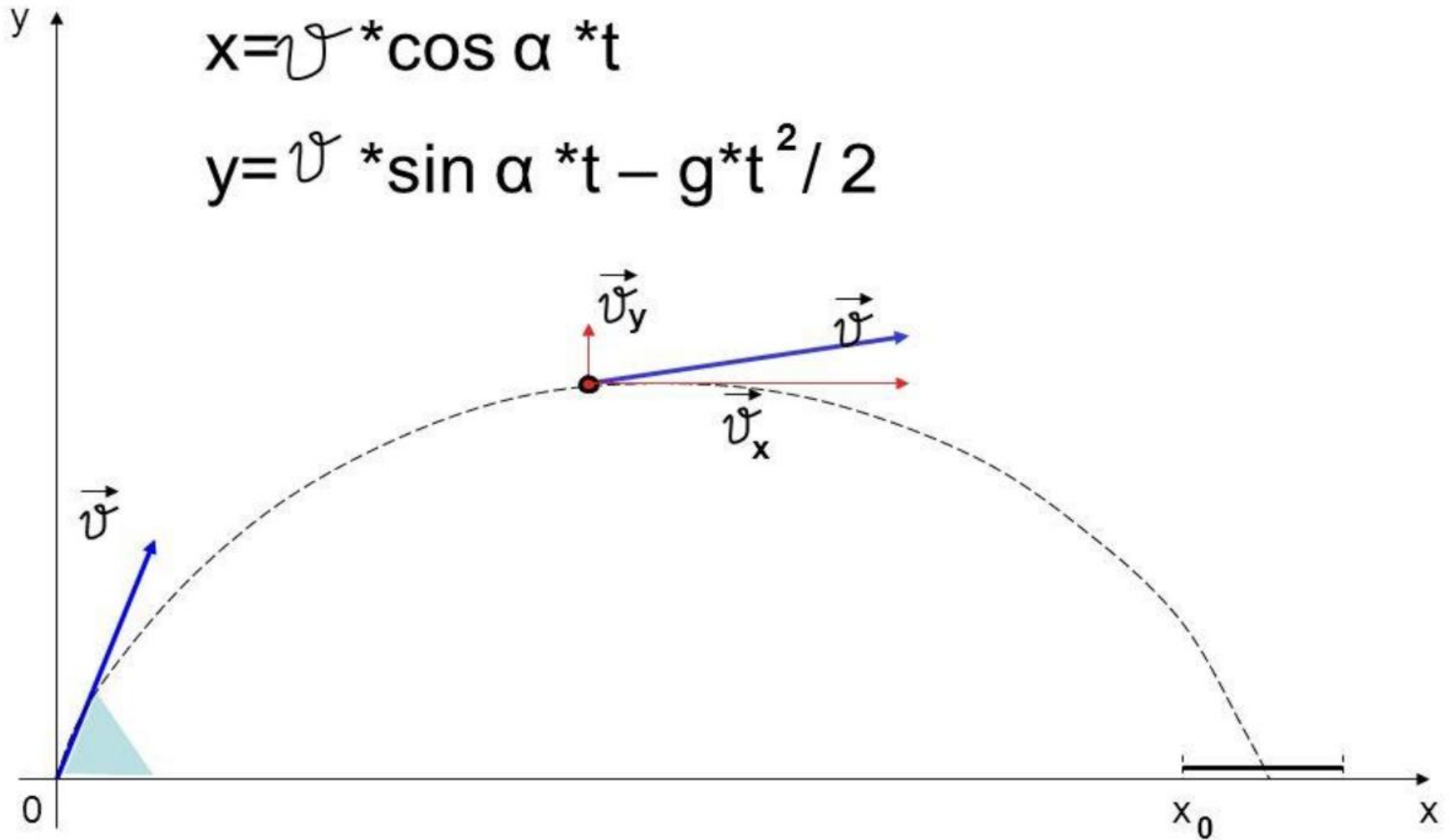


- Определение цели моделирования позволяет четко установить, какие данные являются исходными, что требуется получить на выходе и какими свойствами объекта можно пренебречь. Таким образом, строится *словесная модель задачи*.
- **Анализ объекта** подразумевает четкое выделение моделируемого объекта и его основных свойств.

Формализация задачи



- **Второй этап** — формализация задачи связан с созданием *формализованной модели*, то есть модели, записанной на каком-либо формальном языке.
- Для решения задачи на компьютере больше всего подходит язык математики.
- В такой модели связь между исходными данными и конечными результатами фиксируется с помощью различных формул, а также накладываются ограничения на допустимые значения параметров.



Условие попадания мячика в площадку:

$x_0 < x < x_0 + L$, при L – длина
 площадки

Разработка компьютерной модели



- **Третий этап** — разработка компьютерной модели начинается с выбора инструмента моделирования, другими словами, программной среды, в которой будет создаваться и исследоваться модель.
- От этого выбора зависит *алгоритм* построения компьютерной модели, а также форма его представления.
- В среде программирования это *программа*, написанная на соответствующем языке.
- В прикладных средах (электронные таблицы, СУБД, графических редакторах и т. д.) это *последовательность технологических приемов*, приводящих к решению задачи.

Компьютерный эксперимент



Четвертый этап — компьютерный эксперимент включает две стадии:

- тестирование модели;
- проведение исследования.



Тестирование модели — процесс проверки правильности построения модели.

Исследование модели

К этой стадии компьютерного эксперимента можно переходить только после того, как тестирование модели прошло успешно, и есть уверенность, что создана именно та модель, которую необходимо исследовать.



Анализ результатов

- **Пятый этап** — анализ результатов является ключевым для процесса моделирования. Именно по итогам этого этапа принимается решение: продолжать исследование или закончить.
- Если результаты не соответствуют целям поставленной задачи, значит, на предыдущих этапах были допущены ошибки.
- В этом случае необходимо *корректировать модель*, то есть возвращаться к одному из предыдущих этапов.
- Процесс повторяется до тех пор, пока результаты компьютерного эксперимента не будут отвечать целям моделирования.

Технические объекты моделирования, параметры объектов



- Параметры объектов - это величины характеризующие качество, свойства или режимы работы объекта.

Различают

- выходные,
- внутренние,
- внешние параметры.

Технические объекты моделирования, параметры объектов*



- Выходные параметры - это показатели качества объекта (системы).
- По ним можно судить о правильности функционирования системы и ее качестве.
- Они позволяют сравнивать однотипные по назначению системы, сделать выбор подходящего варианта.
- Выходных параметров обычно много и их принято представлять вектором:

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Выходные параметры промышленных роботов



- крутящий момент,
 - усилие, развиваемый исполнительным механизмом,
 - погрешностью позиционирования,
 - погрешностью отработки траектории
- и т .д.

Технические объекты моделирования, параметры объектов*



- **Внутренние параметры** - это параметры структурных (внутренних) элементов системы:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Технические объекты моделирования, параметры объектов*



- **Внешние параметры** - это параметры внешней среды, оказывающие влияние (обычно отрицательное) на функционирование системы.
 $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

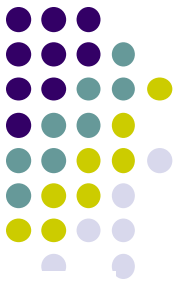
Технические объекты моделирования, параметры объектов*



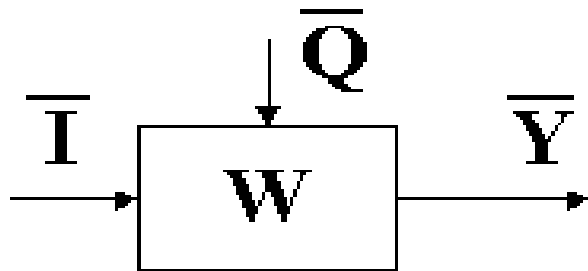
- Параметры входных воздействий иногда выделяют в отдельную группу и называют **входными параметрами**:

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

Технические объекты моделирования, параметры объектов*

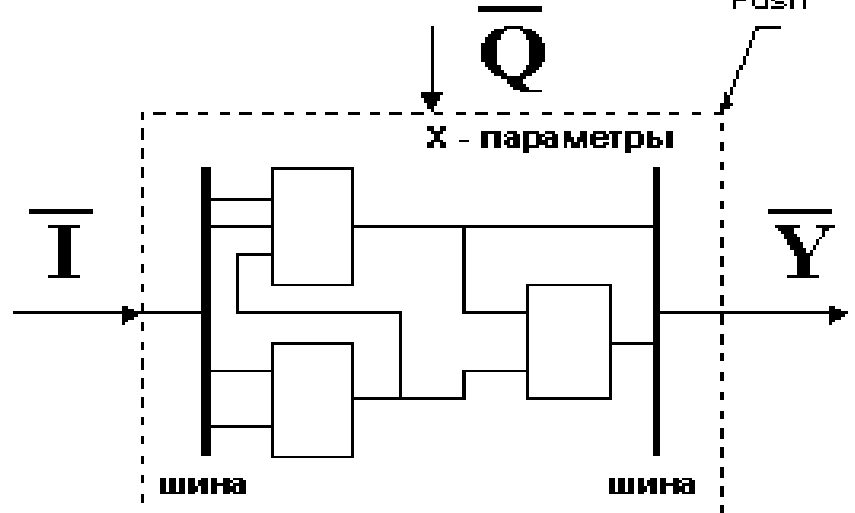


Представление
объекта черным
ящиком (СТП)



$$\bar{Y} = W(\bar{I}, \bar{Q});$$

Представление
объекта системой



$$\bar{Y} = W_c(\bar{I}, \bar{Q}, \bar{X});$$

Технические объекты моделирования, параметры объектов



Выходные параметры объекта зависят от:

- входных воздействий,
- параметров внешней среды,
- качества составляющих объект элементов (Х-параметров).

Технические объекты моделирования, параметры объектов



- Такая зависимость представляется в аналитической форме и называется

глобальной функцией объекта
(оператором) W .



- В случае черного ящика мы ничего не знаем о составляющих объект элементах, то есть нам неизвестны его X-параметры.
- Поэтому глобальная функция объекта записывается в упрощенном виде, как его реакция на внешние воздействия I и Q

$$Y = Wc(I, Q) - \text{черный ящик}$$



- ***В случае системы X-параметры известны***

$Y = Wc(I, Q, X)$ - система

Технические объекты моделирования, параметры объектов



Для динамических объектов в глобальную функцию добавляется еще одна координата - время t .

- $Y = Wc(I, Q, t)$ - *черный ящик или*
- $Y = Wc(I, Q, X, t)$ – *система*



Существование глобальной функции еще не означает, что она известна исследователю или проектировщику объекта.

Задача как раз и заключается в том, чтобы отыскать эту функцию.



Классификация математических моделей

1) по назначению

Структурные
(статические)

Функциональные
(динамические)

Структурно-
функциональные

2) по характеру функционирования

Детерминированные
(неслучайные)

Стохастические
(вероятностные)

3) по характеру изменения состояний

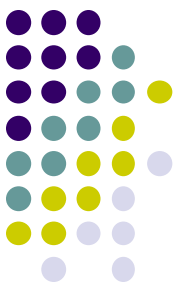
Непрерывные

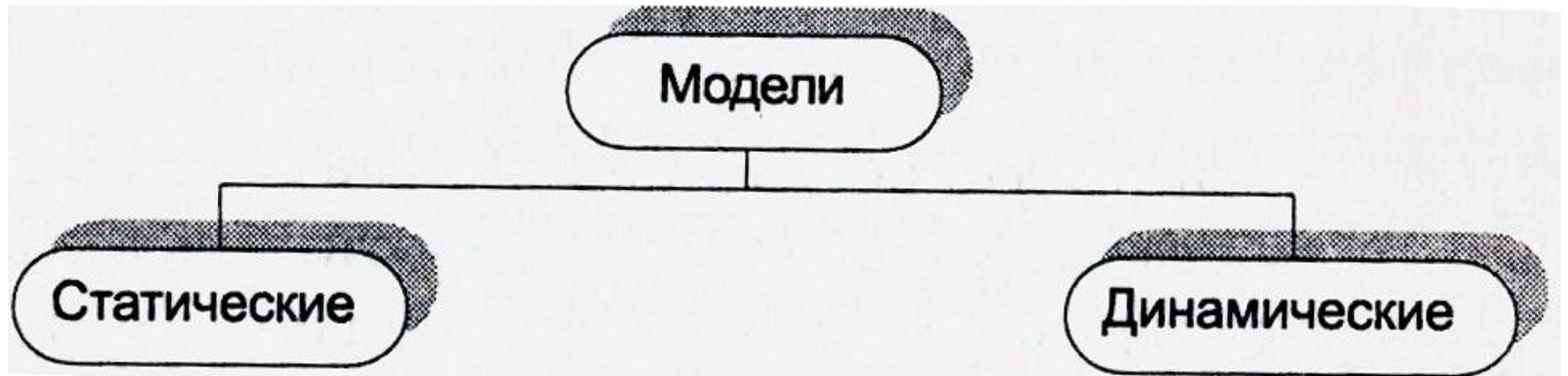
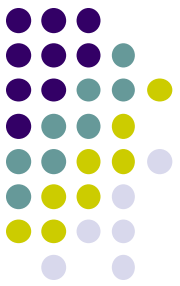
Дискретные

4) по режиму функционирования

Стационарные

Нестационарные







Задачи моделирования

- С помощью моделирования решаются две глобальные задачи:
- Исследование (изучение, анализ) естественных материальных объектов и процессов.
- Проектирование (разработка, синтез) искусственных материальных объектов и процессов



Задачи моделирования

Задачи синтеза делятся на две группы:

- Синтез структуры технических систем (структурный синтез)
- Синтез параметров технических систем (параметрический синтез)



Задачи моделирования

В процессе исследования или проектирования могут ставиться более конкретные цели и задачи, такие как:

- Выбор оптимального варианта решения;
- Усовершенствование базового варианта решения;
- Прогноз;
- Планирование;
- Управление;
- Обучение.



Задачи моделирования

- Если среди вариантов структуры ищется не любой приемлемый вариант, а наилучший, то задача синтеза называется структурной оптимизацией
- Расчет внутренних параметров, оптимальных с позиции некоторого критерия, называется параметрической оптимизацией



Задачи моделирования

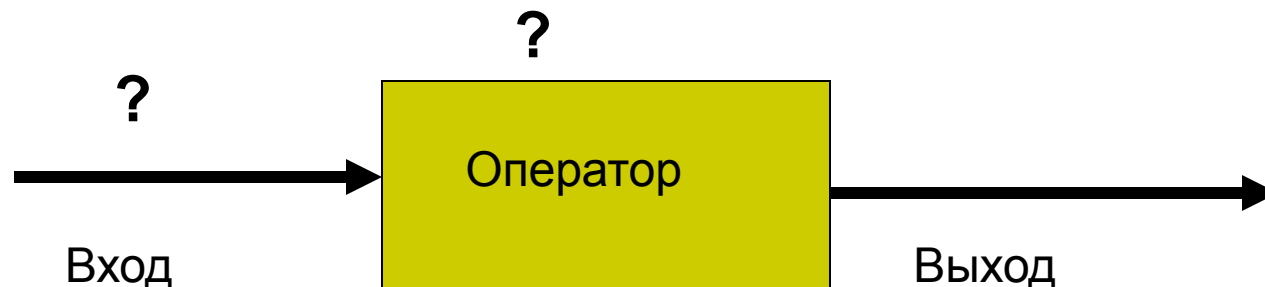
- Задачи анализа: по заданному входному воздействию и оператору системы исследовать закон изменения выходного сигнала





Задачи моделирования

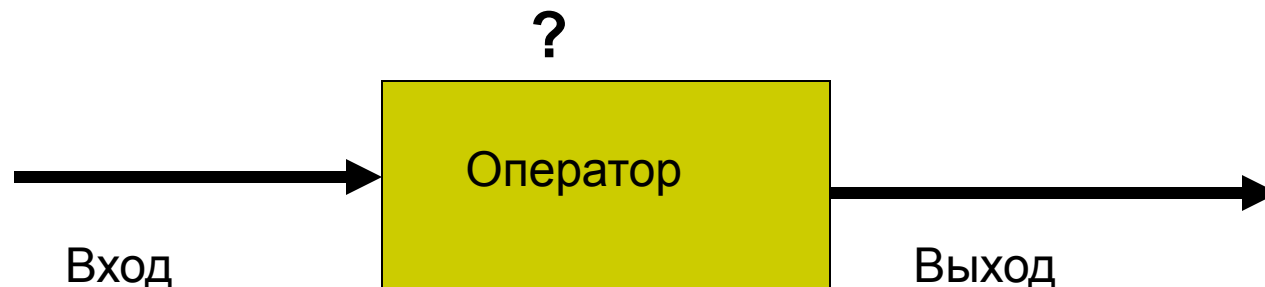
- Задачи синтеза: по желаемому выходу найти входной сигнал и оператор системы (неопределенные параметры оператора)





Задачи моделирования

- Задачи идентификации: по заданному входному воздействию и выходному сигналу определить оператор системы





Принципы и требования



Каждая модель строится на следующих принципах.

- **1. Полноты.**

Модель должна быть полной, чтобы предоставлять экспериментатору различные наборы характеристик;

- **2. Изменяемости.**

Модель должна быть достаточно гибкой, чтобы имелась возможность воспроизводить различные ситуации.

- **3. Модульности.**

Модель должна быть блочной, т.е. допускается возможность замены, добавления и исключения некоторых частей без переделки модели;

Принципы и требования



- **4. Адекватности.**

Модель должна допускать возможность выбора необходимой точности задания ее параметров; Адекватность - это воспроизведение моделью с необходимой полнотой и точностью всех свойств объекта, существенных для целей данного исследования.

- **5. Эффективности.**

Модель должна обеспечивать эффективное (по быстродействию и памяти) функционирование программы модели, удобство общения с нею.

Обзор методов построения математических моделей.



- При построении и исследовании математических и компьютерных моделей можно выделить несколько подходов и методов.
- Устойчивой их классификации нет, так как выбор метода зависит и от типа модели и инструментария ее реализации.

«Мозговая атака» «Сценарий» «Экспертные оценки» «Дерево целей» ...

«Математическая логика» «Теория множеств» «Статистические методы» «Аналитические методы»

6

Методы моделирования систем

Методы, направленные на активизацию интуиции и опыта специалистов

Специальные методы. Методики постепенной формализации задачи

Методы формализованного представления систем (МФПС)

Комплексированные методы

Методы организации сложных экспертиз

Экспертные оценки

Морфологические методы

Методы структуризации (типа «дерева целей» и др.)

Методы типа «Дельфи»

Методы типа «сценариев»

Методы типа «мозговой атаки» и выборки коллективных решений

Философско-методологические методы. Диалектическая логика

Имитационное динамическое моделирование

Ситуационное моделирование

Структурно-лингвистическое моделирование

Когнитивный подход

Постепенная формализация моделей принятия решения

Информационный подход к анализу систем

Графические

Семиотические

Лингвистические (математическая лингвистика)

Логические (математическая логика)

Теорико-множественные

Статистические

Аналитические методы оптимизации (классическая математика)

Графо-семиотическое моделирование

Топология

Комбинаторика

Обзор методов построения математических моделей



Математическая модель может быть получена:

- **аналитически** (закономерности протекающих в объекте процессов полностью известны),
- **по результатам экспериментального исследования** входных и выходных переменных объекта без изучения его физической сущности.

Последний подход особенно широко используется на практике, так как позволяет обойтись минимумом априорных сведений об объекте при построении его модели.

Обзор методов построения математических моделей.



- Наиболее достоверную математическую модель объекта можно найти аналитическим путем.
- Для этого необходимо располагать всесторонними сведениями об объекте (о конструкции, о законах, описывающих протекающие в нем процессы, об условиях функционирования и взаимодействия со средой).

Обзор методов построения математических моделей.



- Однако часто из-за отсутствия достаточных данных получить решение задачи таким путем не удастся.
- Трудности применения аналитических методов возникают и при описании реальных объектов, процессы в которых имеют сложный характер.

Обзор методов построения математических моделей.



- Поэтому в подобных случаях эти методы дополняются экспериментальными исследованиями.
- Преимуществом моделей, полученных теоретическим путем, как правило, является их достаточно общий вид, позволяющий рассматривать поведение объектов в различных возможных режимах.

Обзор методов построения математических моделей



С другой стороны построение математических моделей базируется на физическом или формальном подходах.

Физический подход основан на непосредственном применении физических законов (закон Гука, закон Фурье, закон Кирхгофа и т.д.).

Формальный подход использует общие математические принципы при описании физических свойств объектов.

Обзор методов построения математических моделей



Классификация методов построения моделей при таких подходах следующая:

Физический подход:

- узловый метод;
- контурный метод;
- метод переменных состояния;
- табличный метод.

Обзор методов построения математических моделей.



Контурный и узловый методы основаны на широко применяемых в технике методах:

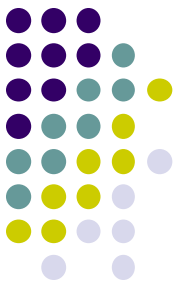
- метод контурных токов и узловых потенциалов в электрических системах;
- метод перемещения и метод сил в строительной механике и т.д.

Обзор методов построения математических моделей.



- Формальный подход предполагает применение различных численных методов при построении моделей.
- Непосредственная разработка численных методов относится к вычислительной математике.

Применение численных методов в математическом моделировании.



Можно привести следующую классификацию численных методов, использующихся в математическом моделировании:

- методы решения уравнений;
- методы решения систем уравнений;
- методы вычисления интегралов;
- методы аппроксимации и интерполяции;
- методы решения дифференциальных уравнений и систем;
- методы оптимизации и т.д.

Применение численных методов в математическом моделировании.



Для алгебраических и трансцендентных уравнений пригодны одни и те же методы уточнения приближенных значений действительных корней:

- метод половинного деления (метод дихотомии);
- метод простых итераций;
- метод Ньютона (метод касательных);
- модифицированный метод Ньютона (метод секущих);
- метод хорд и др.



Численное решение систем алгебраических уравнений реализуется следующими численными методами.

- Для систем линейных уравнений:
 - метод определителей Крамера;
 - матричный метод;
 - метод Гаусса.

Применение численных методов в математическом моделировании



- Для систем нелинейных уравнений:
 - метод Ньютона;
 - метод простых итераций и др.

Применение численных методов в математическом моделировании.



К методам вычисления определенного интеграла относятся:

- метод прямоугольников;
- метод трапеций;
- метод Симпсона.

Применение численных методов в математическом моделировании



К численным методам аппроксимации и интерполяции относятся следующие.

- Интерполяция:
 - метод линейной интерполяции;
 - метод сплайновой интерполяции;
 - метод тригонометрической интерполяции.
- Аппроксимация:
 - метод наименьших квадратов

Применение численных методов в математическом моделировании



Численные методы решения дифференциальных уравнений используются при моделировании динамических технических объектов.

Этот класс численных методов представлен следующими:

- метод последовательных приближений;
- конечно- разностные методы;
- методы Рунге-Кутта;
- методы прогноза и коррекции и т.д.

Применение численных методов в математическом моделировании



К численным методам оптимизации относятся следующие:

- метод «золотого сечения»;
- методы градиентного спуска;
- метод сопряженных градиентов;
- метод Ньютона и др.