ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: получить практические навыки решения задачи распределения ресурсов методом динамического программирования.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задача распределения ресурсов имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = C$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$$,

где n - число технологических процессов, между которыми нужно распределить сырье в объеме C, с целью получения максимальной прибыли;

x_i – количество сырья, выделяемое на i-й процесс;

$f_i(x_i)$ – прибыль получаемая в i-ом процессе при использовании в нем сырья в объеме x_i, $i = \overline{1,n}$.

Так как целевая функция и ограничения в задаче сепарабельны, то к ней применим метод динамического программирования.

Пусть C – целое число и x_i, $i = \overline{1,n}$ – могут принимать лишь целые неотрицательные значения. В этом случае для задачи удобно использовать следующую табличную реализацию метода динамического программирования.

Таблица 4.1

Табличная реализация метода динамического программирования

y / $B(y)$	1	2	…	k	…	C
$B_1(y)$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	…	$B_1(k)$	…	$B_1(C)$
$B_2(y)$	$B_2(1)$ [$x_2(1)$]	$B_2(2)$ [$x_2(2)$]	…	$B_2(k)$ [$x_2(k)$]	…	$B_2(C)$ [$x_2(C)$]
...	…	…	…	…	…	…
$B_n(y)$	$B_n(1)$ [$x_n(1)$]	$B_n(2)$ [$x_n(2)$]	…	$B_n(k)$ [$x_n(k)$]	…	$B_n(C)$ [$x_n(C)$]

Рассчитываем функцию Беллмана $B_k(y)$ путем последовательного решения уравнения Беллмана

$$B_k(y) = \max_{0 \le z \le y}[f_k(z) + B_{k-1}(y-z)]$$
$$0 \le y \le C$$

с начальным условием

$$B_1(y) = f_1(y), 0 \le y \le C.$$

Данные заносим в таблицу, имеющую c+1 столбцов и n+1 строк.

При заполнении таблицы в ее клетке вместе со значениями $B_k(y)$, $1 \le k \le n, 1 \le y \le n$ записывается также (в квадратных скобках) и величину $x_k(y)$, определяемое как то число z, $0 \le z \le y$, на котором в уравнении Беллмана достигается максимум (если таких чисел несколько, записываем все).

1. Определяем оптимальное значение целевой функции задачи. Максимальная прибыль равна величине $B_n(C)$.

2. Определяем оптимальное распределение сырья между процессами x_i, $i = \overline{1,n}$.

Из таблицы последовательно находим

$$x_n^0 = x_n(C),$$
$$x_n^0 = x_i\left(C - \sum_{j=n}^{1} x_j^0\right), i = n-1, \dots, 2; x_i^0 = C - \sum_{j=n}^{2} x_0^0$$

Решений $x_i^0 = \left\{x_i^0, i = \overline{1,n}\right\}$ может оказаться несколько.

Замечание: Описанную выше табличную реализацию удобно применять в случае изменения условий задачи: при сокращении или при упрощении либо количества сырья C, либо чисел n технологических процессов. При сокращении чисел C или n для подсчета решения новой задачи рассматривается соответствующая часть таблицы, получаемая путем вычеркивания ненулевых столбцов или строк. При увеличении C или n для получения решения новой задачи таблицу следует нарастить.

Задание

Записать задачу в виде задачи распределения ресурсов.

1. Решить задачу распределения ресурсов при C=6, n=3

2. Найти по таблице решение в случае сокращения ресурсов на одну единицу, C=5.

3. Эффективно ли введение еще одного дополнительного технологического процесса f_4 ?

Номер варианта выбирается по таблице ниже.

Таблица 4.2

Варианты к заданию

Номер по порядку i	f_1	f_2	f_3	f_4
1-10	$А_i$	$Б_\mathrm{i}$	$В_i$	$Б_\mathrm{i}$+1
11-17	$А_i$ -10	$Б_i$ -9	$В_i$ -8	$Б_\mathrm{i}$ -8
18-24	$А_i$ -17	$Б_i$ -15	$В_i$ -16	$Б_\mathrm{i}$ -14
25-28	$А_i$ -24	$Б_i$ -21	$В_i$ -20	$Б_\mathrm{i}$ -20

i – порядковый номер студента по журналу.

Варианты функций прибыли см. в таблице ниже $f(x)$=0, x=0:

Таблица 4.3

Варианты к заданию для А

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$\begin{cases} x^2-1, x=1,2,3 \\ 2x+1, x=4,5,6 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 4+x^2-2x, x=1,2,3 \\ 2x+3, x=4,5,6 \end{cases}$
3		4	$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+2x, x=1,2,3 \\ x+6, x=4,5,6 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3^{x-2}, x=1,2,3 \\ 2^x-2, x=4,5,6 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x-2, x=1,2,3 \\ 2^{x-3}+3, x=4,5,6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x^2, x=1,2,3 \\ 9, x=4,5,6 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \frac{x^3}{3}+1, x=1,2,3 \\ x+2, x=4,5,6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x+1, x=1,2,3 \\ \frac{x^2}{4}+3, x=4,5,6 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x, x=1,2,3 \\ 10, x=4,5,6 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 4+x^2-2x, x=1,2,3 \\ 2x+3, x=4,5,6 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \frac{x^2}{2}+2x, x=1,2,3 \\ 2x-6, x=4,5,6 \end{cases}$

13	$\begin{cases} \frac{x^3}{3}+1, x=1,2,3 \\ 3x+8, x=4,5,6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x^2, x=1,2,3 \\ x-1, x=4,5,6 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+x, x=1,2,3 \\ x+2, x=4,5,6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3^{x-2}, x=1,2,3 \\ 2^x+1, x=4,5,6 \end{cases}$

Таблица 4.4

Варианты к заданию для Б

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание
1	$\frac{1}{2}(x^2-3x)$	2	$\frac{1}{18}(x^3-x^2)$
3	$0,3(2^x-(x-1)^2)$	4	$2(7x-x^2)$
5	$2x$	6	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$
7	$\frac{1}{2}x$	8	$0,2(x^2+3x)$
9	$0,05(3^{x-1}-\frac{(x-1)^2}{3})$	10	$0,3(x^2+2x)$
11	x^2+3x	12	$2^x-(x-1)^2$
13	$\frac{1}{18}(x^3-x^2)$	14	
15	x^2+2x	16	$3^{x-1}-\frac{(x-1)^2}{3}$

Таблица 4.5

Варианты к заданию для В

x №	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	2	4	8
2	2	3	4	5	8	11
3	2	2	4	5	6	9
4	2	4	6	8	8	8
5	0	4	5	5	9	10
6	1	1	4	6	8	11
7	2	3	5	7	9	10
8	1	3	5	7	9	10
9	0	2	4	6	8	12
10	0	0	3	5	7	9
11	0	0	1	2	4	8
12	2	3	4	5	8	11
13	2	2	4	5	6	9
14	2	4	6	8	8	8
15	0	4	5	5	9	10
16	1	1	4	6	8	11

Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- цель работы;
- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- подробное описание выполнения задания 1 – 3, включая таблицы с исходными данными задач, математические модели, копии экранов документов с подробными комментариями по выполняемым действиям (листинг кода, полученные результаты);
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Понятие динамическое программирование.
2. Основные этапы решения задачи.
3. Идея метода динамического программирования.
4. Принцип оптимальности Беллмана.