ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Цель работы: получить практические навыки решения задач целочисленного программирования методом ветвей и границ.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод ветвей и границ – один из комбинаторных методов. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, и отбрасывании бесперспективных вариантов.

Метод ветвей и границ состоит в следующем: множество допустимых решений (планов) некоторым способом разбивается на подмножества, каждое из которых этим же способом снова разбивается на подмножества. Процесс продолжается до тех пор, пока не получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи.

Для задач линейного программирования решение ищется следующим образом.

Первоначально находим оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных. Пусть им является план X_0. Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи и $F_{\max} = F(X_0)$. Если же среди компонент плана X_0 имеются дробные числа, то X_0 не удовлетворяет условию целочисленности и необходимо осуществить упорядоченный переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи. Покажем, как это можно сделать, предварительно отметив, что $F(X_0) \geq F(X)$ для всякого последующего плана X.

Предполагая, что найденный оптимальный план X_0 не удовлетворяет условию целочисленности переменных, тем самым считаем, что среди его компонент есть дробные числа. Пусть, например, переменная x_{i_0} приняла в плане X_0 дробное значение. Тогда в оптимальном целочисленном плане ее значение будет по крайней мере либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_{i_0}, либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_{i_0} + 1$. Определяя эти числа, находим решение двух задач линейного программирования:

$$(I)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, (t=\overline{1,m}) \\ x_{t0} \le K_t \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}) \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j = b_t, (t=\overline{1,m}) \\ x_{t0} \ge K_t + 1 \\ x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}) \end{cases}$$

Возможен один из следующих четырех случаев решения задач линейного программирования (I) и (II):

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции на нем и дают решение исходной задачи.

2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет оптимальный план, среди компонент которого есть дробные числа. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу, и строим две задачи, аналогичные задачам (I) и (II).

3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции на этих планах и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и он вместе со значением целевой функции на нем дает искомое решение. Если же значение целевой функции больше на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то следует взять одно из таких чисел и для задачи, план которой рассматривается, необходимо построить две задачи, аналогичные (I) и (II).

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда вычисляем значение целевой функции на данных оптимальных планах и рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. В оптимальном плане этой задачи выбираем одну из компонент, значение которой является дробным числом, и строим две задачи, аналогичные (I) и (II).

Таким образом, описанный выше итерационный процесс может быть представлен в виде некоторого дерева, на котором исходная вершина отвечает оптимальному плану X_0 задачи, а каждая соединенная с ней ветвью вершина отвечает оптимальным планам задач (I) и (II). Каждая из этих вершин имеет свои ветвления. При этом на каждом шаге выбирается та вершина, для которой значение функции является наибольшим. Если на некотором шаге будет получен план, имеющий целочисленные компоненты, и значение функции на нем окажется больше или равно, чем значение функции в других возможных для ветвления вершинах, то данный план является оптимальным планом исходной задачи целочисленного программирования и значение целевой функции на нем является максимальным.

Итак, процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ включает следующие основные этапы:

1. Находят решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляют дополнительные ограничения для одной из переменных, значение которой в оптимальном плане задачи является дробным числом.
3. Находят решение задач (I) и (II), которые получаются из предыдущей задачи в результате присоединения дополнительных ограничений.
4. В случае необходимости составляют дополнительные ограничения для переменной, значение которой является дробным, формулируют задачи, аналогичные задачам (I) и (II), и находят их решение. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая целочисленному плану задачи и такая, что значение функции в этой вершине больше или равно значению функции в других возможных для ветвления вершинах.

Задание

С помощью средств Visual Studio применяя метод ветвей и границ, решить задачу коммивояжера и построить полное дерево ветвления с матрицей расстояний, заданной таблицей. Варианты смотри в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Варианты заданий

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание

1

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	48	27	31	43
	2	33	–	28	44	43
	3	41	28	–	40	36
	4	37	35	29	–	46
	5	48	48	25	29	–

2

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

3

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

4

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	48	27	31	43
	2	33	–	28	44	43
	3	41	28	–	40	36
	4	37	35	29	–	46
	5	48	48	25	29	–

5

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

6

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

7

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	48	27	31	43
	2	33	–	28	44	43
	3	41	28	–	40	36
	4	37	35	29	–	46
	5	48	48	25	29	–

8

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

9

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

10

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	48	27	31	43
	2	33	–	28	44	43
	3	41	28	–	40	36
	4	37	35	29	–	46
	5	48	48	25	29	–

Окончание табл. 2.1

Вар-т	Задание	Вар-т	Задание

11

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

12

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

13

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

14

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

15

		До города			
		1	2	3	4
От города	1	–	27	44	28
	2	47	–	43	36
	3	29	26	–	29
	4	34	35	34	–

		До города				
		1	2	3	4	5
От города	1	–	32	37	37	29
	2	40	–	40	28	31
	3	41	34	–	34	37
	4	36	37	33	–	27
	5	31	39	33	38	–

Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– цель работы;
– номер варианта;
– исходные данные варианта;
– подробное описание выполнения всех заданий, включая таблицы с исходными данными задач, математические модели, копии экранов документов с подробными комментариями по выполняемым действиям (листинг программы и полученные результаты), полное дерево ветвления;
– выводы.

Контрольные вопросы

1. Назвать основные классы задач дискретного программирования.
2. Общая постановка задачи целочисленного программирования.
3. Метод ветвей и границ.
4. Дайте определение терминам: «ветвление» и «оценивание».
5. Виды стратегий ветвления. Дать описание.
6. Постановка задачи о коммивояжере.
7. Алгоритм решения задачи о коммивояжере методом ветвей и границ.