ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: получить практические навыки решения задач целочисленного программирования.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дискретное программирование - раздел матпрограммирования, изучающий экстремальные задачи, в которых значения переменных принимают конечное или счетное множество.

Целочисленное программирование (ЦП) является частным случаем дискретного. Задачи оптимизации, переменные которых принимают лишь целые значения, называются задачами целочисленного программирования.

В математической модели задачи ЦП как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются *линейными*.

Можно выделить следующие основные классы задач дискретного программирования (краткая классификация математических моделей дискретного программирования):

1) транспортная задача и ее модификации;

2) задачи с неделимостями (задача о рюкзаке):

3) экстремальные комбинаторные задачи (задача о коммивояжере, о покрытии, линейный и нелинейный варианты задач о назначениях):

4) модели с булевыми переменными

(задача о назначениях):

5) задачи с разрывными целевыми функциями (транспортная задача с фиксированными доплатами);

6) задачи на неклассических областях.

В свою очередь, каждый тип моделей подразделяется на линейные и нелинейные, статические и динамические, детерминированные и стохастические и т. д.

Наиболее изучен класс задач ЦП детерминированного типа, в частности, детерминированная задача линейного ЦП.

Большинство целочисленных и комбинаторных типов задач, таких как задача с неделимостями, задача о коммивояжере, задача календарного планирования принадлежат к разряду так называемых «трудно решаемых задач». Это означает, что вычислительная сложность алгоритма их точного решения, т. е. зависимость числа элементарных операций (сложения или сравнения), необходимых для получения точного решения, от размерности задачи n, является показательной (порядка 2^n), т. е. сравнимой с трудоемкостью полного перебора вариантов. В качестве n, например, для задачи с неделимостями служит число целочисленных переменных и число ограничений, для задачи коммивояжера - число городов или узлов графа маршрутов, для задачи календарного планирования - число деталей и число станков. Такие задачи называют еще *NP*-трудными или *NP*-полными. Получение их точного решения не может быть гарантировано, хотя для некоторых задач данного типа существуют эффективные методы, позволяющие находить точное решение даже при больших размерностях.

Задачи с вычислительной сложностью, определяемой полиномиальной зависимостью от n, называются «эффективно решаемыми задачами». К ним относятся задачи транспортного типа и линейные задачи о назначениях.

Общая постановка задачи ЦП отличается от общей постановки ЗЛП лишь наличием дополнительных ограничений – требований целочисленности: значения всех или части переменных модели в оптимальном решении должны быть целыми неотрицательными числами.

Если требование целочисленности распространяется на все переменные, то задачу ЦП называют полностью целочисленной задачей. Если же требование целочисленности относится лишь к части переменных, то задачу называют частично целочисленной.

Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то говорят, что данная задача является задачей линейного ЦП.

ЗЛП, которая отличается от рассматриваемой задачи ЦП лишь отсутствием требования целочисленности, называют задачей с ослабленными ограничениями, соответствующей задаче ЦП.

В общем виде математическая модель задачи целочисленного линейного программирования имеет вид:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=\overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}$$

$$x_j - \textit{целые},\ \ j=1,2,\dots,n_1 \le n$$

Если $n_1 \le n$, то задача называется частично целочисленной, если $n_1 = n$ – полностью целочисленной. Линейная функция называется целевой функцией. Множество планов *X*, удовлетворяющих системе ограничений – множеством допустимых решений Ω, $X \in \Omega$. Допустимый план $X \in \Omega$, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется оптимальным планом.

Задание

Решить (см. общую постановку ЗЦП и таблицу вариантов ниже):

а) частично целочисленную задачу (x_1 – любое, x_2 – целочисленное);

б) полностью целочисленную задачу (x_1 и x_2 – целочисленные) средствами пакетов Mathcad (графическим методом и с помощью блока решения) и MS Excel (с помощью надстройки «Поиск решения»). Сравнить полученные результаты.

$$z(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \to \max$$
$$cx_1 + dx_2 \le e$$
$$fx_1 + gx_2 \le h$$
$$px_1 + rx_2 \ge q$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Таблица 1.1

Варианты заданий

Вариант	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**p**	**r**	**q**
1	6	5	7	-8	3	-7	6	5	2	3	1
2	7	6	5	-8	3	-7	6	5	2	3	2
3	5	6	7	-7	3	-7	6	5	2	3	2
4	4	5	6	-7	2	-7	6	5	2	3	2
5	5	4	5	-9	2	-7	6	5	2	3	3
6	3	2	4	-5	2	-7	6	5	2	3	3
7	3	2	4	-5	2	-6	7	5	2	3	3
8	2	2	2	-4	1	-6	7	5	2	3	3
9	3	3	3	-5	3	-6	7	5	2	3	3
10	4	4	4	-6	3	-6	7	5	2	3	4
11	5	5	5	-2	4	-6	7	5	2	3	4
12	6	5	6	-3	4	-6	7	5	2	2	4
13	7	6	8	-5	4	-6	7	5	2	2	4
14	17	6	5	-5	4	-6	7	5	2	2	3
15	9	16	5	-5	3	-6	8	7	2	5	3
16	8	15	5	-5	3	-6	8	15	2	5	5
17	8	5	5	-8	3	-6	8	15	20	5	7

Окончание табл. 1.1

Вариант	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**p**	**r**	**q**
18	8	5	5	-9	3	-6	8	15	20	5	9
19	8	-5	10	-9	3	-6	9	15	20	5	20
20	-6	8	10	-9	3	-6	9	15	20	5	20
21	-5	6	10	-9	3	-6	9	15	20	5	10
22	-3	9	10	-7	3	-6	9	15	20	5	10
23	-2	8	10	-7	3	-6	9	15	20	5	15
24	9	5	6	-7	3	-6	9	15	20	5	6
25	8	6	6	-7	3	-6	10	15	20	5	6
26	8	6	3	-3	4	-6	10	15	20	5	6
27	7	5	4	-1	4	-6	10	15	20	5	8
28	1	5	4	-1	10	-5	10	15	20	5	10
29	10	5	4	-1	10	-5	10	10	20	5	11
30	10	2	4	-10	12	-5	10	10	20	5	20

Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- цель работы;
- номер варианта;
- исходные данные варианта;
- подробное описание выполнения всех заданий, включая таблицы с исходными данными задач, математические модели, копии экранов документов с подробными комментариями по выполняемым действиям;
- результаты вычислений;
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Назвать основные классы задач дискретного программирования.
2. Общая постановка задачи целочисленного программирования.
3. Чем отличаются частично целочисленные от полностью целочисленных задач?
4. Математическая модель задачи целочисленного программирования.
5. Почему в задачах целочисленного программирования нельзя, в общем случае, получить целочисленное решение «округлением» нецелочисленного?