Traitement du signal

Programme

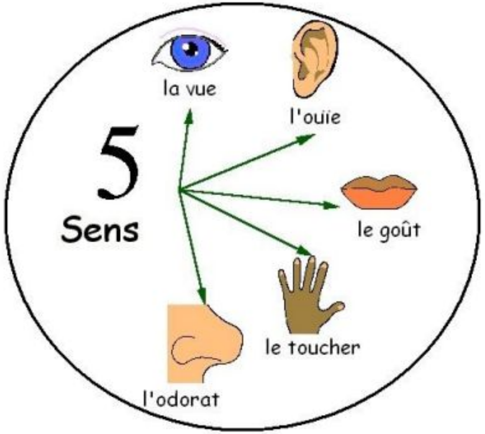
- Introduction
- Traitement du signal analogique
- Traitement du signal numérique
- Signal aléatoire

Introduction

Introduction

Homme et Signal :

✔ L'homme est le plus utilisateur des signaux.
✔ Pour percevoir son environnement, l'homme reçoit des signaux en utilisant ses 5 sens (capteurs).



Introduction

Homme et Signal :

✔ Or, ces capteurs possèdent des caractéristiques limitant la réception de tous les signaux.

Exemples :

- Oeil : est sensible seulement à certaines ondes lumineuses (visible) et ne peut voir directement l'infra-rouge et l'ultra-violet.
- Oreille: est sensible seulement pour les fréquences entre 5Hz à 20kHz.

Développer des instruments (autres capteurs) pour étendre sa perception du monde environnant.

Introduction

- Homme et Signal :

✔ Les instruments développés par l’homme ne sont pas parfait que ces 5 sens.

✔ Les signaux captés par ces instruments doivent être traités et interprétés.

Apparition d’une nouvelle discipline: traitement du signal fondée sur la théorie du signal.

Introduction

Le traitement de signal est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet **l'élaboration** ou **l'interprétation** des signaux porteurs d'information. Le but donc est de réussir à extraire un maximum d'information utile sur un **signal** perturbé par du **bruit**, on s'appuyant sur les ressource de l'électronique et l'informatique

Introduction

• Traitement du signal :

✔ Au traitement du signal, participent plusieurs composantes parmi lesquelles :

- Les mathématiques : largement utilisées, fournissent les outils conceptuels.
- La physique : notamment la physique des ondes, offre les moyens de la transmission de l'information.

✔ Le traitement du signal quand à lui participe activement au développement des techniques de pointe dans plusieurs domaines tels que : informatique, électronique ...

Introduction

C’est quoi un signal ?

En quoi consiste le traitement du signal ?

Introduction

Signal: est la représentation physique de l'information (support de l’information). C’est une grandeur physique accessible à la mesure par un capteur

Bruit: correspond à tout phénomène perturbateur

Remarque: Les notion de signal et bruit sont très relatives. exp: Technicien de télécommunication, Astronome

Introduction

En analytique: le signal est représenté par une fonction d’une ou plusieurs variables réelles. C’est une suite de nombres (réels, complexes, booléens, ...) qui dépendra des coordonnées d’espace et du temps :

$$signal \rightarrow f(x, y, z, t)$$

Introduction

Signal :

✔ La modélisation du signal se fait avec des fonctions mathématiques plus ou moins compliquées.
✔ Ces fonctions décrivent l'évolution du signal dans l'espace et le temps.
✔ En un point de l'espace, la fonction sera uniquement dépendante du temps :

$$signal \rightarrow f(t)$$

✔ Si le signal est une image fixe, la fonction devient :

$$image \rightarrow f(x), \qquad f(x,y) \quad ou \quad f(x,y,z)$$

✔ Si le signal est une image animée (vidéo):

$$vidéo \rightarrow f(x,t), \qquad f(x,y,t) \quad ou \quad f(x,y,z,t)$$

Introduction

Signal :

✔ Un signal est caractérisé par ses propriétés élémentaires comme l'intensité, la puissance, l'énergie ...
✔ Les capteurs, instruments de mesure du signal, sont sensibles à ces grandeurs.
Exemples :

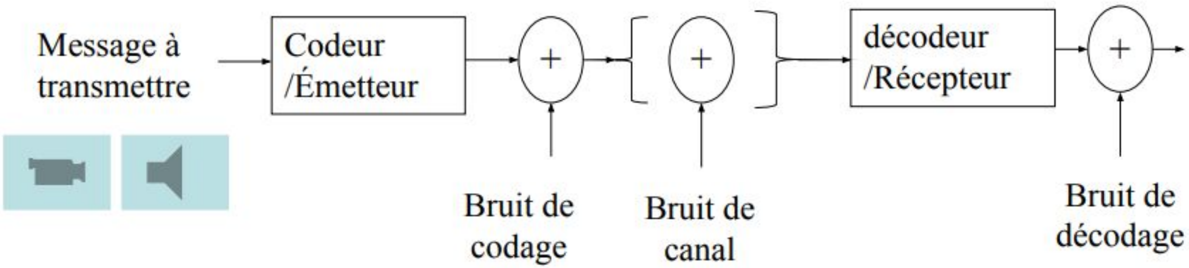
- Signal électrique : intensité du courant (ampères), la tension (volts), puissance (watts) ...
- Signal thermique : intensité (^{0}C, Kelvin), énergie (calorie ou joule).
- Signal magnétique : intensité (tesla).

Introduction

Traitement du signal:

Théorie permettant d'effectuer une modélisation et une analyse des signaux et des systèmes.

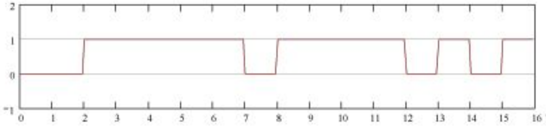
<u>Objectif</u> : réaliser et interpréter les signaux porteurs d’information.
<u>Exemple</u> : chaîne de communication



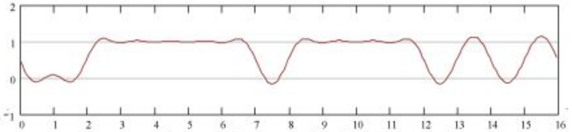
Le traitement du signal au niveau du récepteur permet d’extraire le signal du bruit.

Introduction

- Traitement du signal:

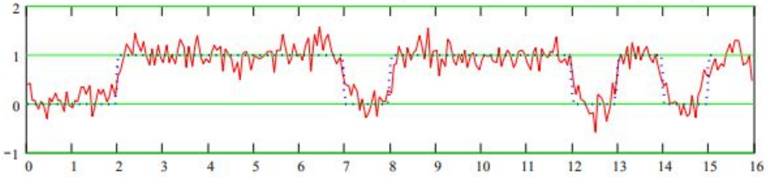


signal émis (séquence binaire)



signal modifié par le canal de transmission (échos, filtrages, ...)

signal bruité capté



Le problème posé : comment retrouver la séquence binaire contenue dans le signal émis ?

Introduction

- Applications :

  - Sciences d'observation :
    - les ondes électromagnétiques : astronomie, géophysique, télédétection, radar.
    - les ondes acoustiques : sonar, tomographie océanique.
    - les ondes élastiques : sondage sismique (prospection pétrolière).
  - Télécommunications :
    - téléphone
    - TV
    - radio
  - Militaire : (Guerre électronique)
    - détection, localisation et identification des cibles : RADAR (seconde guerre mondiale) et SONAR
    - communication sécurisée

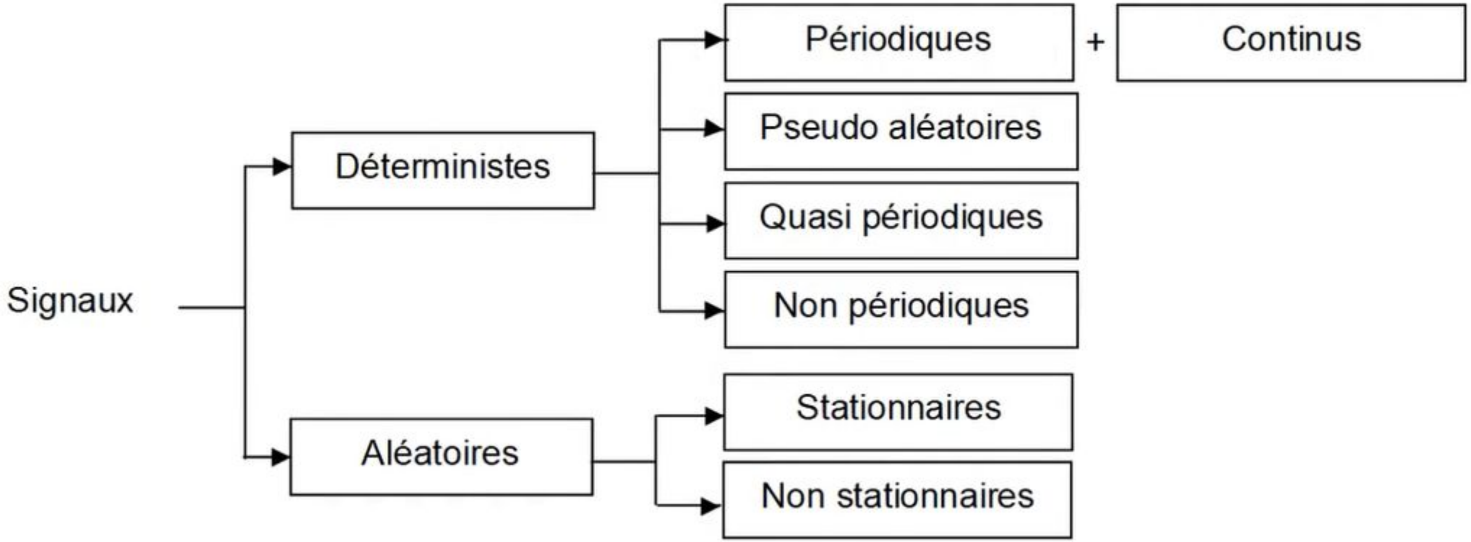
Principales fonctions du traitement de signal

- **L'analyse** : On cherche à isoler les composantes essentielles d'un signal de forme complexe, afin d'en mieux comprendre la nature et origines.
- **La mesure** : mesurer un signal, en particulier aléatoire, c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance.
- **Le filtrage** : c'est une fonction qui consiste à éliminer d'un signal certaines composantes indésirables. La
- **La régénération** : c'est une opération par laquelle on tente de redonner sa forme initiale à un signal ayant subi diverses distorsions.

Principales fonctions du traitement de signal

- **La détection** : par cette opération on tente d'extraire un signal utile du bruit de fond qui lui est superposé.
- **L'identification** : c'est un procédé souvent complémentaire qui permet d'effectuer un classement du signal observé.
- **La synthèse** : opération inverse de l'analyse, consiste à créer un signal de forme appropriée en procédant, par exemple, à une combinaison de signaux élémentaires.
- **Le codage** : outre sa fonction de traduction en langage numérique, est utilisé soit pour lutter contre le bruit de fond, soit pour tenter de réaliser des économies de largeur de bande ou de mémoire d'ordinateur.

Classification phénoménologique:



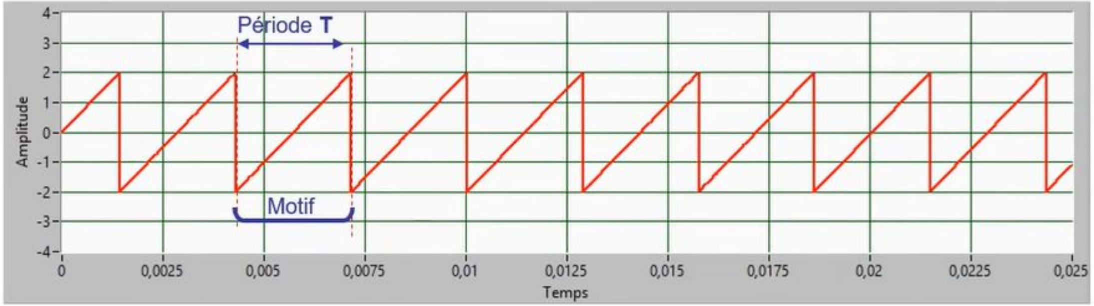
Signaux déterministes

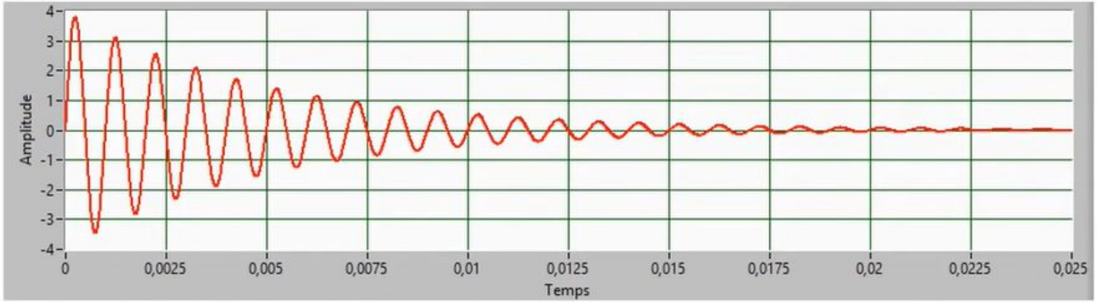
Signaux certains (déterministes) Sont des signaux dont l'évolution en fonction du temps est bien décrite par un modèle mathématique.

- Ce type de signaux provient des phénomènes pour lesquels les lois physiques correspondantes et les conditions initiales sont bien connue □ on peut prévoir le résultat.
- Les signaux certains peuvent en principe être reproduits rigoureusement identiques à eux-mêmes.

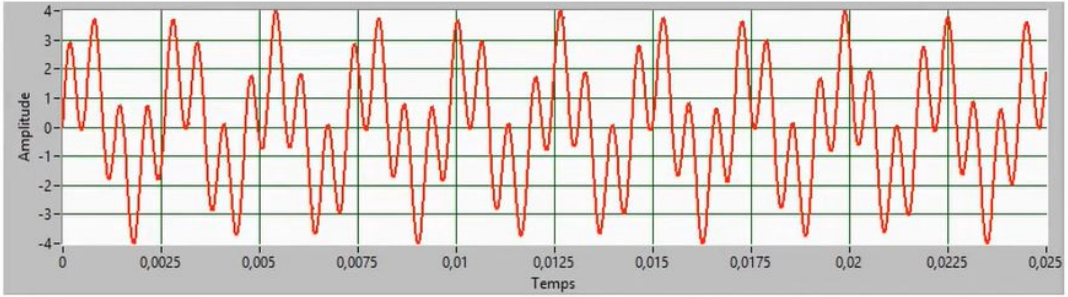
exemple: sinusoïdes, rectangulaire, porte, …

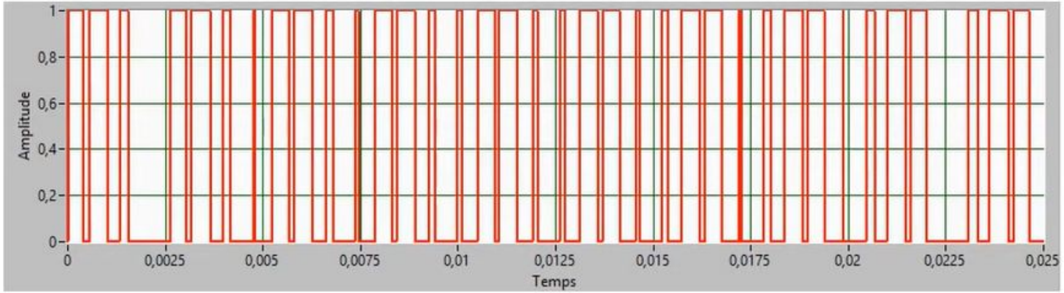
Signaux déterministes





Signaux déterministes





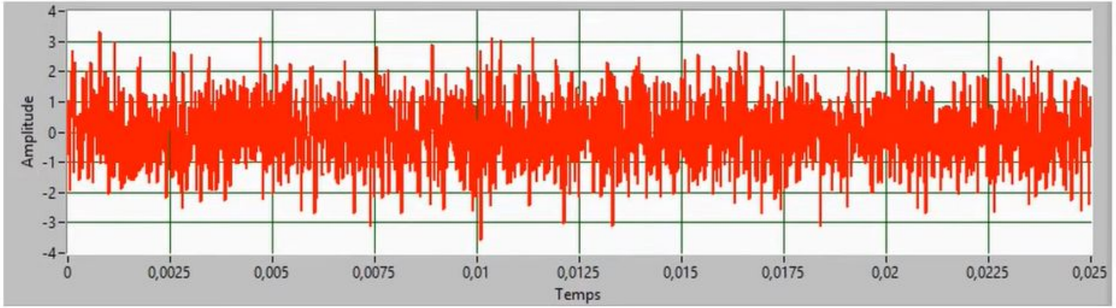
Signaux aléatoires

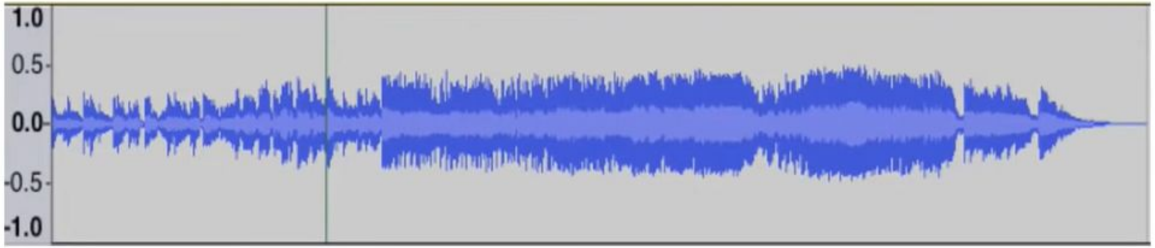
Signaux aléatoires (ou probabilistes, stochastiques) Sont des signaux qui ne peuvent pas être décrits par un modèle certain.

- En général, ce type de signaux est traité en utilisant des calculs statistiques.

exemple: signaux de parole, bruit thermique, différence de potentiel aux bornes d'un circuit électrique ....

Signaux aléatoires





Signaux périodiques

On parle ici seulement de signaux déterministes.

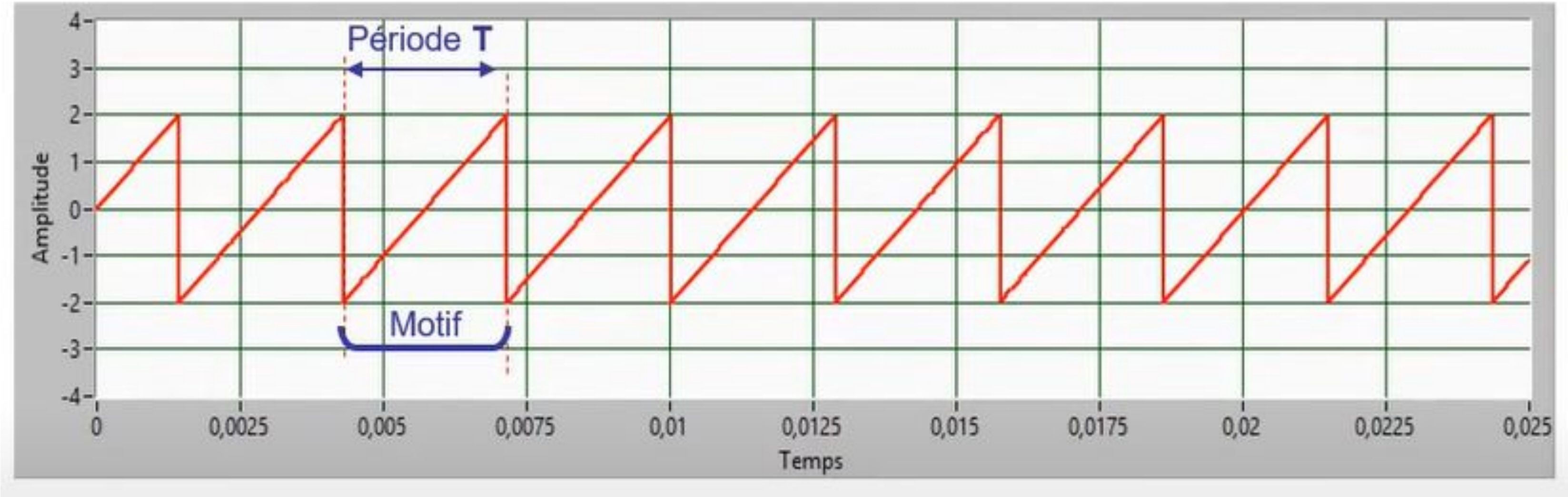
✔ Les signaux périodiques peuvent être continus ou discrets.
✔ Les signaux périodiques sont caractérisés par leur période telle que :

$$\forall k \in Z, \qquad s(t+kT) = s(t)$$

T : période du signal s(t)
Exemple:

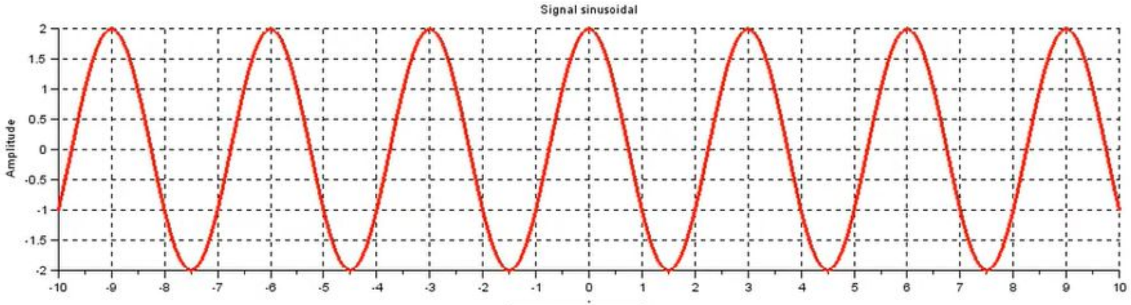
$$s(t) = A\sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{Avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Signaux périodiques



Quelque signaux périodique

Signal sinusoïdal:

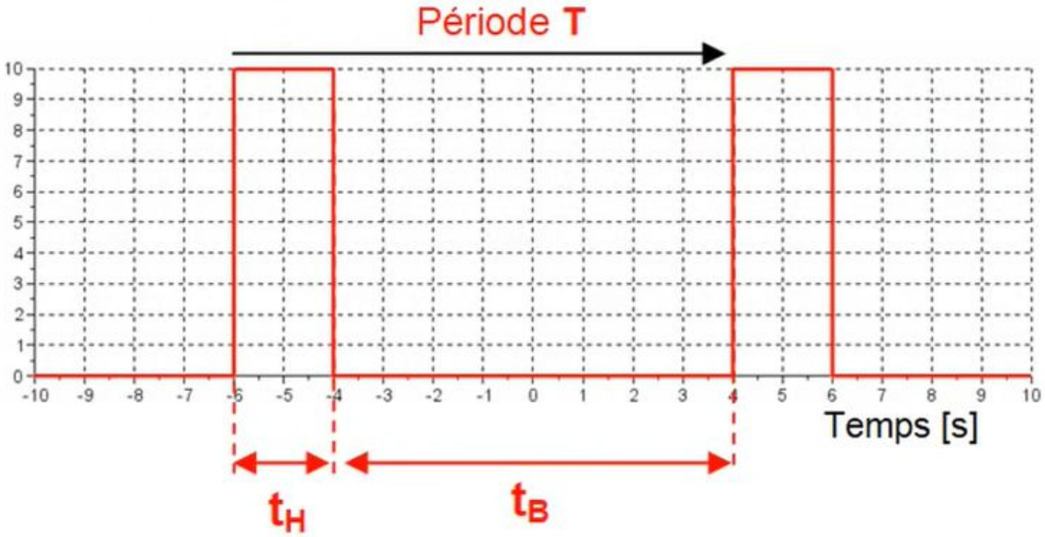


Période **T** Fréquence $\boxed{f = \frac{1}{T}}$ Pulsation $\boxed{\omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T}}$

$$x(t) = X_{MAX}.\sin(\omega.t + \varphi)$$

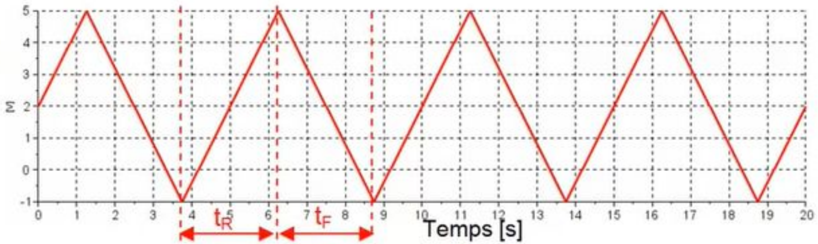
Quelque signaux périodique

Signal rectangulaire:

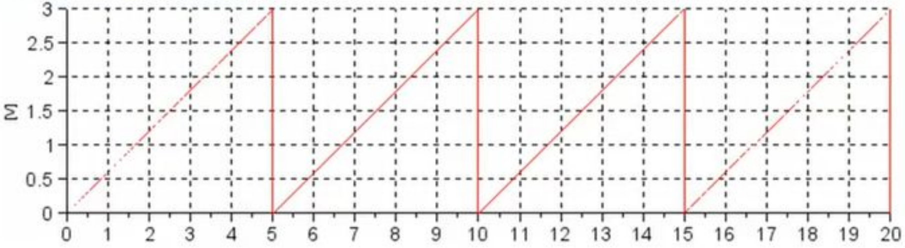


Quelque signaux périodique

Signal triangulaire



Signal « dents de scie »



Continus vs. Discrets :

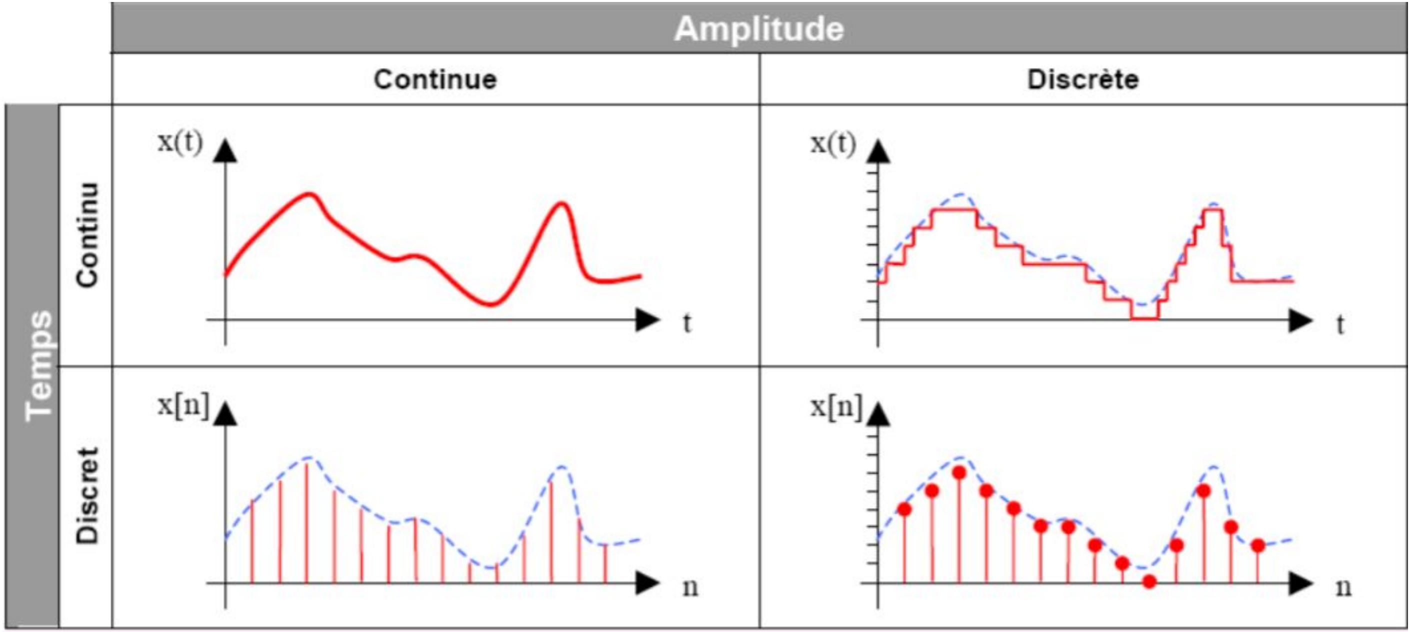
- ✔ Les signaux sont caractérisés par deux paramètres essentiels : le temps et l’amplitude.
- ✔ On distingue deux classes de signaux selon la morphologie temporelle :
  - signaux à temps continus (signaux continus).
  - signaux à temps discrets (signaux discrets ou échantillonnés).
- ✔ L’amplitude peut elle aussi être continue ou discrète.

En total, quatre formes de signaux peuvent être distinguées.

Continus vs. Discrets :

- Les signaux analogiques dont l'amplitude et le temps sont continus
- Les signaux quantifiés dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- Les signaux échantillonnés dont l'amplitude est continue et le temps discret
- Les signaux numériques dont l'amplitude et le temps sont discrets

Continus vs. Discrets :



Signaux pairs et impairs :

- ✔ Un signal est pair si : $s(t) = s(-t)$

  Exemple $\cos(wt)$
- ✔ Un signal est impair si : $s(t) =- s(-t)$

  Exemple $\sin(wt)$

Signaux causaux

- ✔ Un signal est dit causal s’il est nul pour toute valeur négative du temps .

  $s(t) = 0 , t<0$
- ✔ Un signal est dit anti-causal s’il est nul pour toute valeur positive du temps.

  $s(t) = 0, t>0$

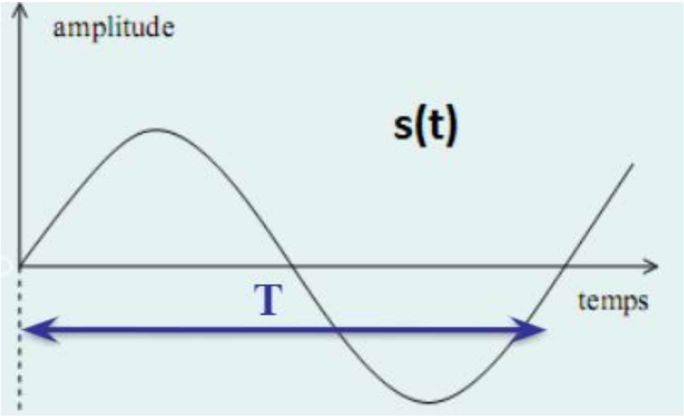
Quelques signaux théoriques

- Signal sinusoidal
- Signal signe : sgn(t)
- Signal échelon d'Heaviside : ε (t)
- Signal rampe : ra(t)
- Signal rectangulaire : rect(t)
- Dirac : δ (t)
- Peigne de Diracs : δT (t) = ∑k δ (t-kT)

Signal sinusoidal

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

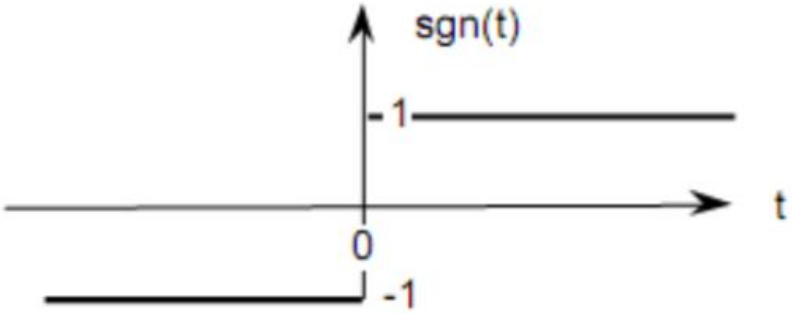
- A amplitude de la sinusoide
- φ la phase à l'origine (t=0)
- ω la pulsation ($\omega=2\pi f$)
- f=1/T : fréquence



Signal signe : sgn(t)

Ce signal est défini sous la formulation suivante :

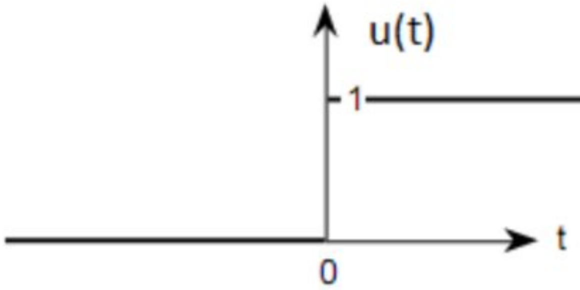
$$\mathrm{sgn}(t) = \left\{ \frac{t}{|t|} \right. \qquad \forall t \neq 0$$



Signal échelon d'Heaviside : ε (t)

Ce signal peut être défini à partir du signal signe :

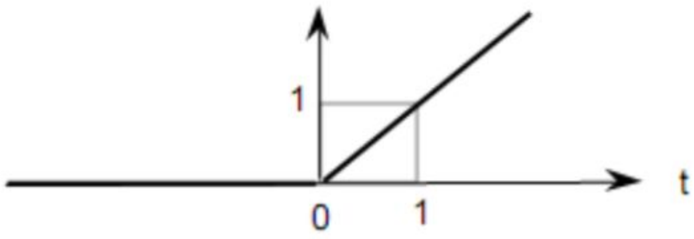
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



Signal rampe : ra(t)

Ce signal peut être défini à partir du signal échelon :

$$ra(t) = tu(t)$$

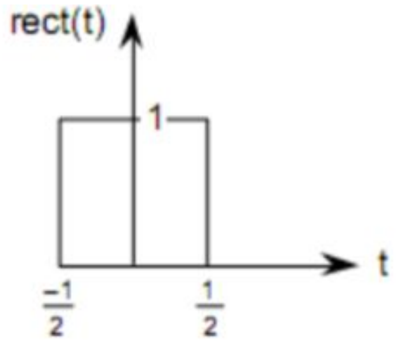


Signal rectangulaire : rect(t)

Ce signal est défini par la fonction rectangulaire normalisée (integrale unité) ou fonction porte de la manière suivante:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \frac{-1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sin}\,on \end{cases}$$

$$rect(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$$



Signal rectangulaire : rect(t)

- La fonction rect peut être déplacée sur l'instant t0 et on note rect(t- t0).
- La fonction rect peut être alongée par un changment de variable :

$$t1 = t/T$$

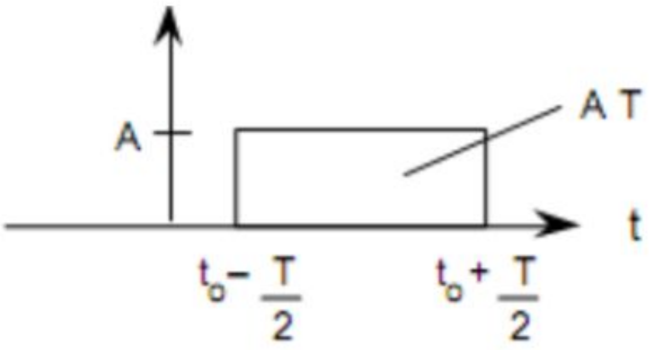
- La fonction rectangulaire généralisée :

$$arect(t) = A \bullet rect((t - t_0)/T)$$

On parle d'impulsion rectangulaire de durée T, d'amplitude A et centrée sur t= t0

Signal rectangulaire : rect(t)

L'impulsion rectangulaire (on parle aussi de fenêtre rectangulaire) est souvent utilisée tronquer un signal dans le temps.



Delta ou Dirac : δ (t)

- On parle de distribution de Dirac.
- Le signal Delta est formellement défini tel que :

$$\langle x(t), \delta(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

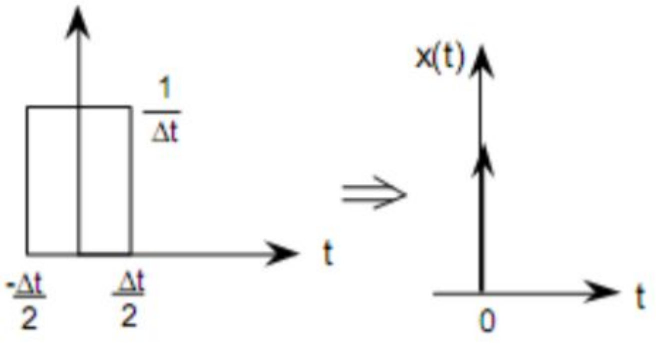
- C'est un opérateur qui restitue la valeur du signal à un instant donné :

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt$$

Delta ou Dirac : δ (t)

La distribution de Dirac peut être considérée comme la limite d'une impulsion de durée Δt et de hauteur 1/ Δt lorsque Δt □0.

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{1}{\Delta t}\, rect\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right)$$



Delta ou Dirac : δ (t)

Propriétés du Dirac :

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad \forall t \neq t_0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0)dt = 1 \qquad t_1 < t_0 < t_2$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

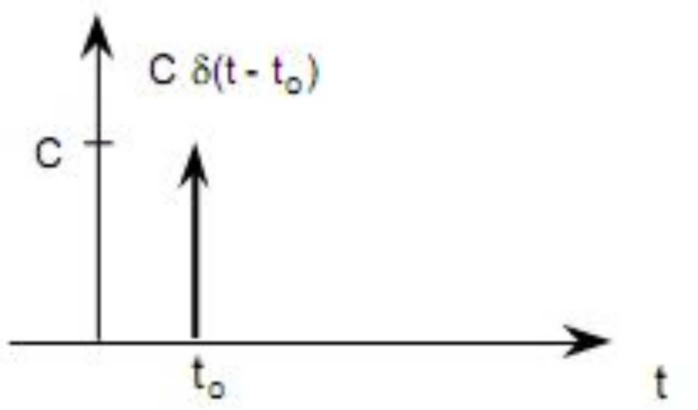
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

A condition que x(t) soit continue en t=0 et t=t0 .

Delta ou Dirac : δ (t)

Représentation graphique du Dirac :

- A noter que la valeur de δ(t-t0) à t0 est indéterminée.
- Donc, on représente : C δ(t-t0)

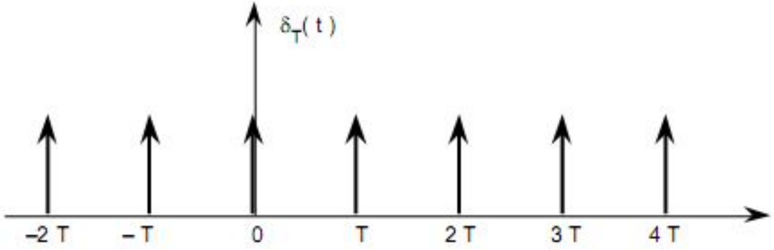


Delta ou Dirac : δ (t)

Suite périodique d'impulsions de Dirac:

- C'est une suite d'impulsions de Dirac se répétant sur l'axe du temps avec une période T.
- On note cette suite δT(t) et souvent appelée "peigne de Diracs".

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$



Exercices

Construire les signaux suivants:

- $\delta(t+2)$, $\delta(t-2)$, $2\delta(t-1)$
- $u(t-1)$, $2\,u(t+2)$, $u(2-t)$
- $s1(t) = u(t-1) - 2u(t-2)$
- $s2(t) = r(t-1) -2r(t-2)+r(t-3)$
- $s3(t) = rect(t-½) + rect((t-2)/2)$

Donner une autre écriture de s2 et s3 en fonction des rampes et des échelons

Traitement du signal analogique

1. Signaux continus
2. Energie et puissance
3. Fonctions de corrélation
4. Convolution des signaux
5. Représentation fréquentielle des signaux

Signaux continus

Un signal continu est un signal connu a chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

t: temps (souvent exprimé en secondes)

Ex: onde électromagnétique, signal électrique (tout signal analogique)

Signaux continus

Les signaux continus x(t) ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc..

Les signaux discrets xn au contraire peuvent etre stockes et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs xn. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs tn des instants ou l'on connaıt le signal.

Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier au TP sont donc des signaux discrets (et même numériques). Les signaux continus seront également étudiés en TD avec des calculs théoriques.

Valeurs caractéristiques des signaux à temps continu

- **Valeur moyenne**

Signal non-périodique

$$\bar{s} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt$$

Signal périodique de période T0

$$\bar{s} = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} s(t)\,dt$$

- **Valeur efficace**

Le carré de la valeur efficace d'un signal s(t) est défini par :

Signal non-périodique

$$S_{eff}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^2(t)\,dt$$

Signal périodique de période T0

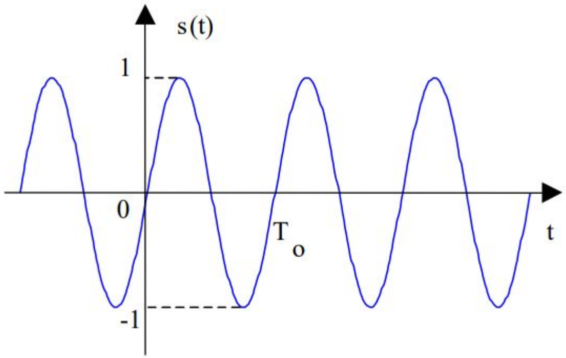
$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} s^2(t)\,dt$$

Exemple

Soit un signal sinusoïdal de période To tel que :

$$s(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$$

Calculer la valeur moyenne et efficace de ce signal

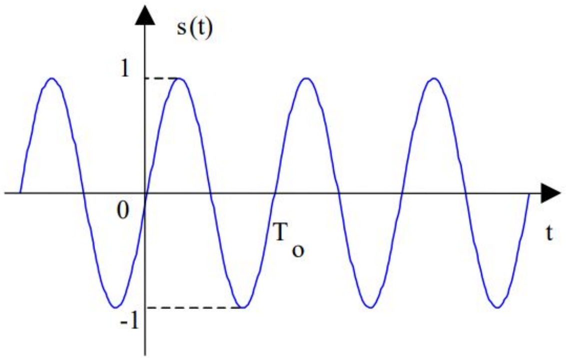


Exemple

Soit un signal sinusoïdal de période To tel que :

$$s(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T_o}t\right)$$

Calculer la valeur moyenne et efficace de ce signal



$$\bar{s} = 0$$

$$S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

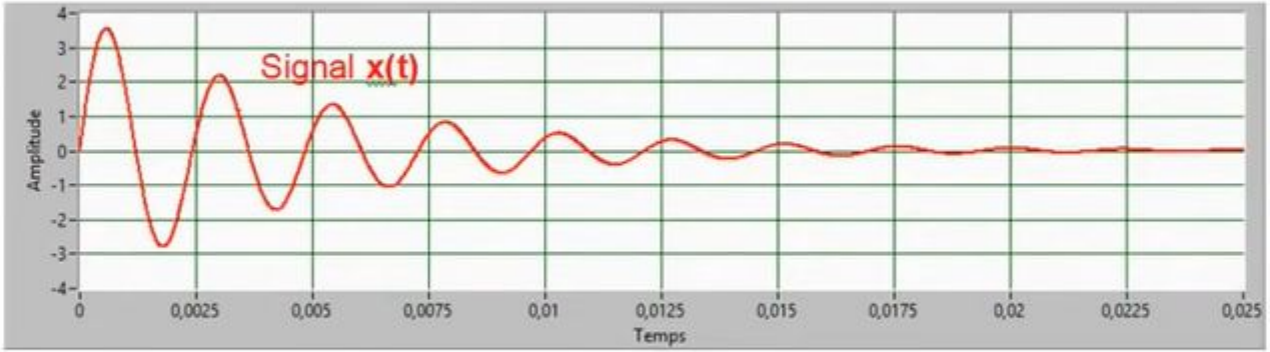
Energie et puissance

- L’énergie d’un signal est proportionnelle à une énergie physique.
- La transmission de l’information est équivalente à la transmission de l’énergie.
- L’énergie d’un signal est liée à la quantité d’information représentée.

Donc, on peut définir l’énergie total d’un signal par :

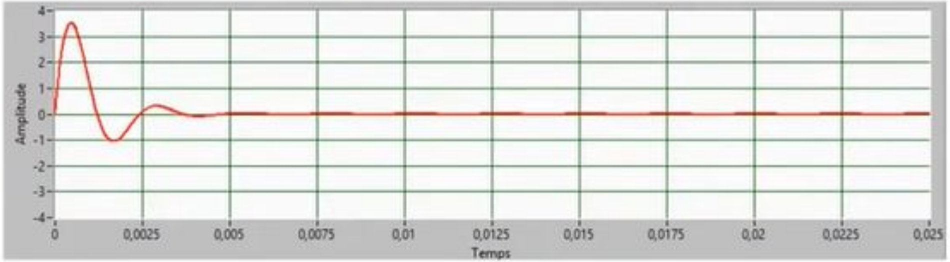
$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}$$

Il s’agit d’une notion mathématique. C’est une valeur constante pour un intervalle donné. Elle peut correspondre a une vraie énergie au sens physique; elle s’exprime alors en Joules (J), comme toutes les énergies.

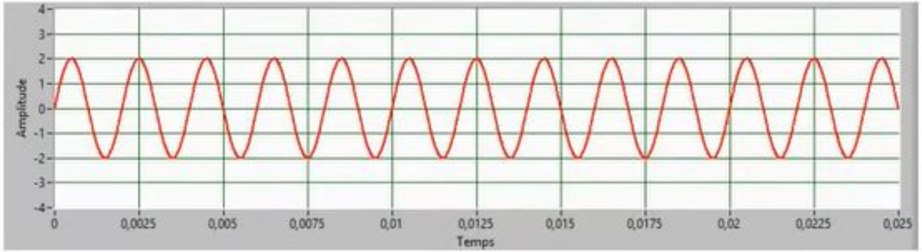

Signal x(t)
Amplitude
Temps

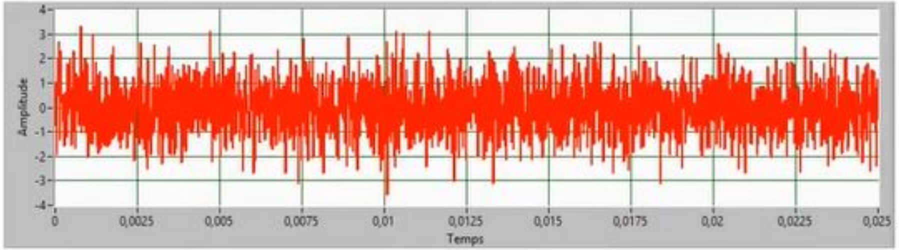

Allure de |x²|
Tracé 0
W = aire du tracé du signal |x(t)|²
Amplitude
Temps (s)

Signaux **à énergie finie**:



Signaux **à énergie infinie**:





Energie et puissance

Puissance d'un signal

La puissance moyenne du signal exprime la quantité d'énergie transférée en moyenne par unité de temps

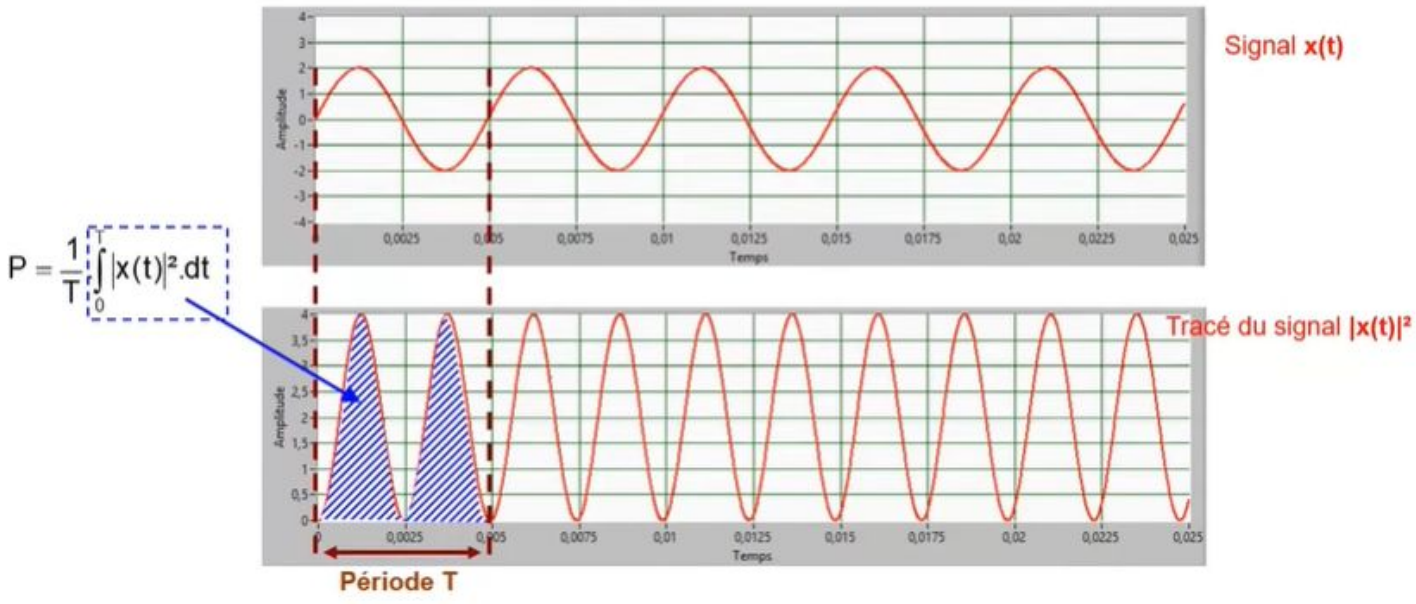
Ainsi, on définit que la puissance moyenne P0->Δt du signal x(t) de la date 0 jusqu'à une date Δt en [s] peut être déterminé par:

$$\boxed{P_{0\rightarrow\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{0}^{\Delta t} |x(t)|^2 . dt}$$

Par extension, la puissance totale du signal x(t), usuellement appelée puissance x(t) est

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{0}^{\Delta t} |x(t)|^2 . dt}$$

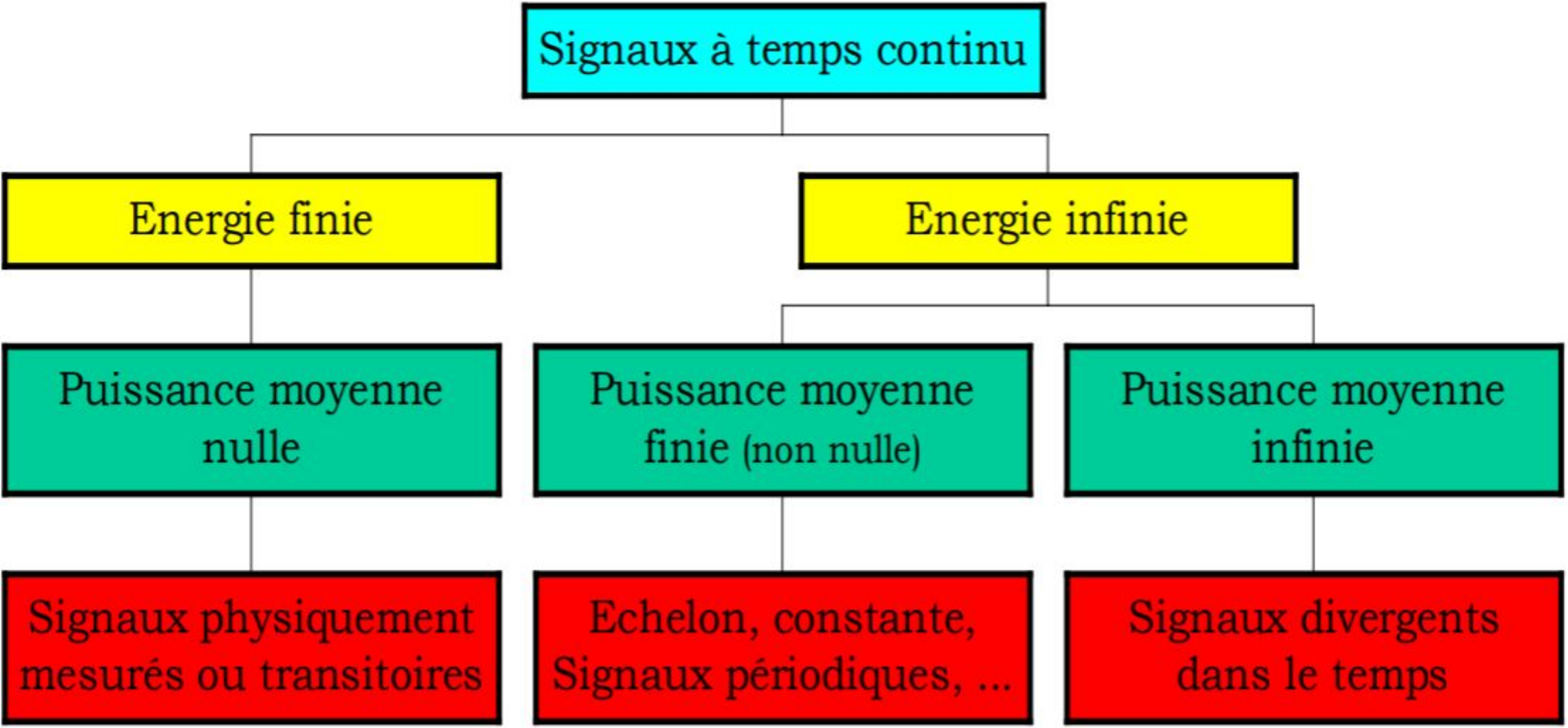
Energie et puissance



Energie et puissance

Notes importantes :

- Les signaux à énergie finie ont une puissance moyenne nulle.
- Les signaux à puissance moyenne finie ont une énergie infinie.

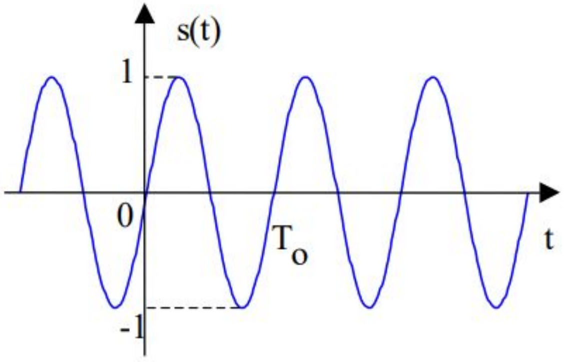

Signaux à temps continu
Energie finie
Energie infinie
Puissance moyenne nulle
Puissance moyenne finie (non nulle)
Puissance moyenne infinie
Signaux physiquement mesurés ou transitoires
Echelon, constante, Signaux périodiques, ...
Signaux divergents dans le temps

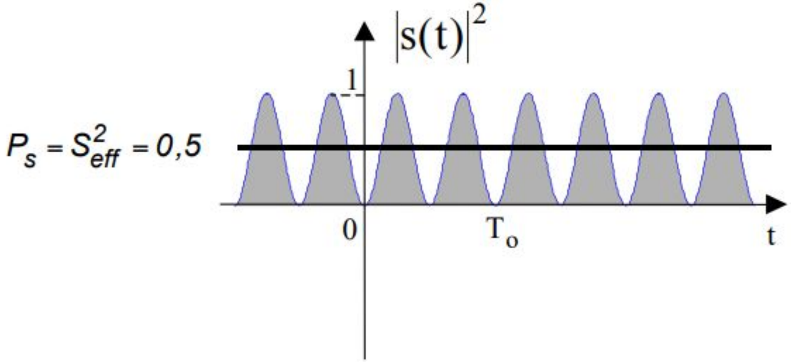
Exemple

Soit un signal sinusoïdal de période To tel que : $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t\right)$

Calculer l’énergie et la puissance de ce signal

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt \qquad P_s = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt = S_{eff}^2$$





Exemple

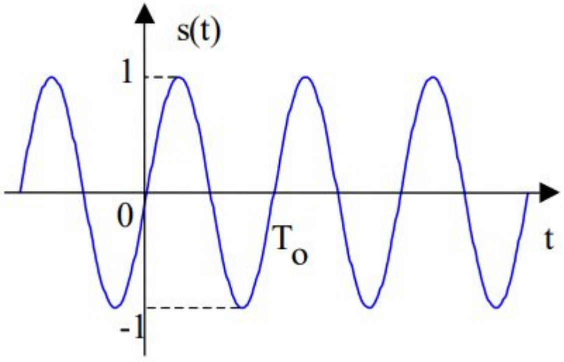
Soit un signal sinusoïdal de période To tel que : $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t\right)$

Calculer l'énergie et la puissance de ce signal

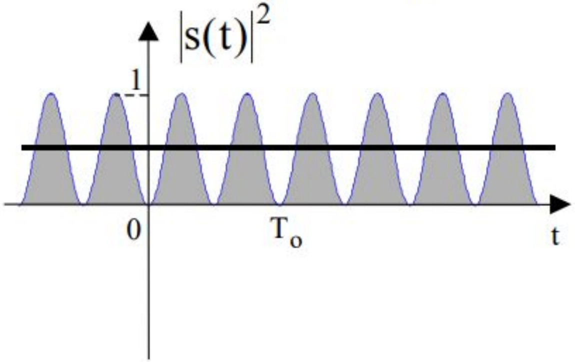
$$\bar{s} = 0 \quad S_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt \qquad P_s = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} |s(t)|^2 \, dt = S_{eff}^2$$

$$E_s = \infty \qquad P_s = S_{eff}^2 = 0{,}5$$

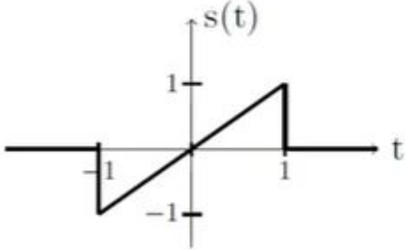


$$P_s = S_{eff}^2 = 0{,}5$$



Exercice

- Soit s(t) un signal donné par la figure ci contre.



1. Donner l'équation mathématique , l'énergie et la puissance moyenne du signal s(t).
2. Déduire le signal s(t) à l'aide des sommes où et des différences des rampes unitaires décalées de la forme $(t \pm t_0).u(t \pm t_0)$ et des echelons unitaires décalées de la forme $u(t \pm t_0)$.
3. Déterminer le signal $s(t).\delta_{T_0}(t)$, avec $T_0 = 0.5$.

Corrélation

L'opération de corrélation est très utilisée en traitement du signal; elle permet de mesurer le degré de dépendance entre deux signaux. Lorsque cette opération est appliquée à un seul signal, on parle alors d'autocorrection.

La fonction de corrélation est définie par :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

Signaux à énergie finie

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)\, y^*(t-\tau)\, dt$$

Signaux à puissance moyenne finie

Corrélation

Autocorrélation d'un signal :

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

Signaux à énergie finie

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T->+\infty} \frac{1}{T} \int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

Signaux à puissance moyenne finie

Corrélation

Autocorrélation d'un signal :

Propriétés :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^{*}(-\tau)$$

Symétrie :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^{*}(-\tau)$$

Pour le cas des signaux réels, l'autocorrélation est paire:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$$

On a aussi :

$$\forall \tau \quad R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0) \quad valeur \max imale\ à\ t = 0$$

Corrélation

Autocorrélation d'un signal :

Signification de Rxx (0): pour le retard nul

Signaux à énergie finie

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energie du signal

Signaux à puissance moyenne finie

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Puissance du signal

Exercice

Calculer la fonction d'autocorrélation des signaux suivants :

1. Echelon unité

2. Impulsion de Dirac x(t)

3. signal y(t) défini par :

$$y(t) = e^{-\alpha t}.u(t)$$

Et calculer l'intercorrélation entre x(t) et y(t).

Convolution

“When you convolve two functions, you're basically combining them in such a way that tracks their interaction throughout time”

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Cette relation s’appelle convolution entre x et y.

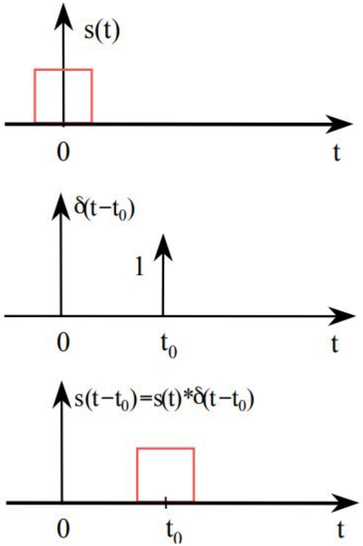
Propriétés du produit de convolution

- Commutativité: $x(t)^{*} y(t) = y(t)^{*} x(t)$
- Associativité: $x(t) * (y(t)^{*} z(t)) = (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * y(t) * z(t)$
- Distributivité sur « + » et « - »: $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
- Elément neutre : impulsion de Dirac: $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

Convolution

Convoluer un signal s(t) par une impulsion de Dirac positionnée en to revient à décaler le signal de to

$$s(t) * \delta(t - t_o) = s(t - t_o)$$



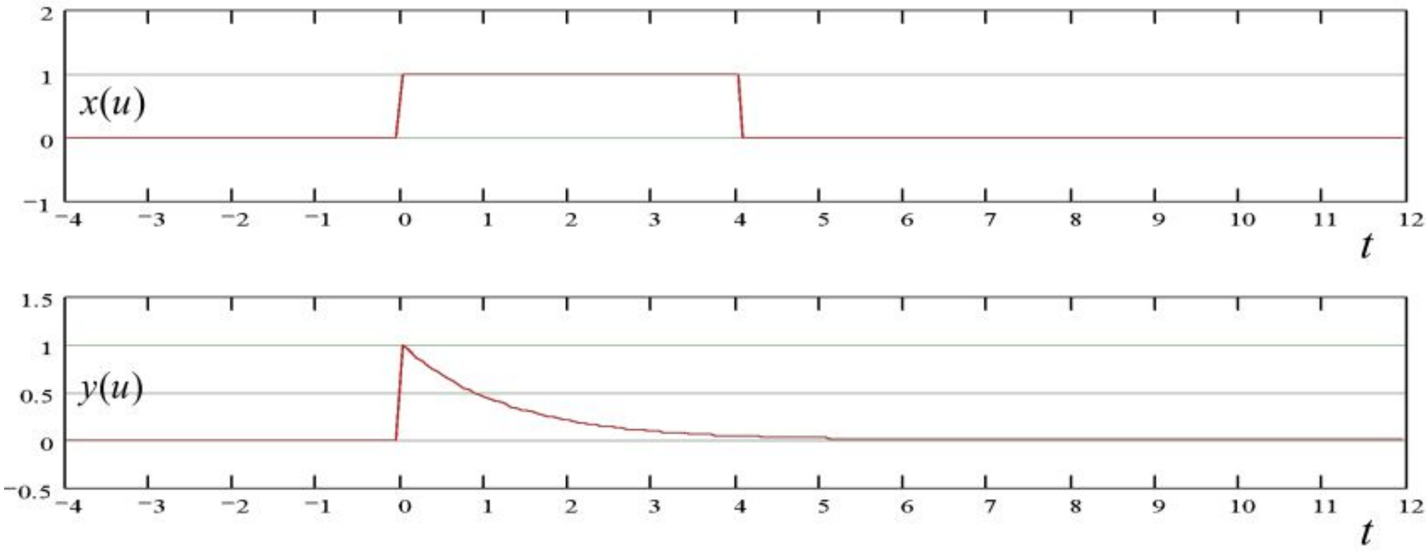
Convolution

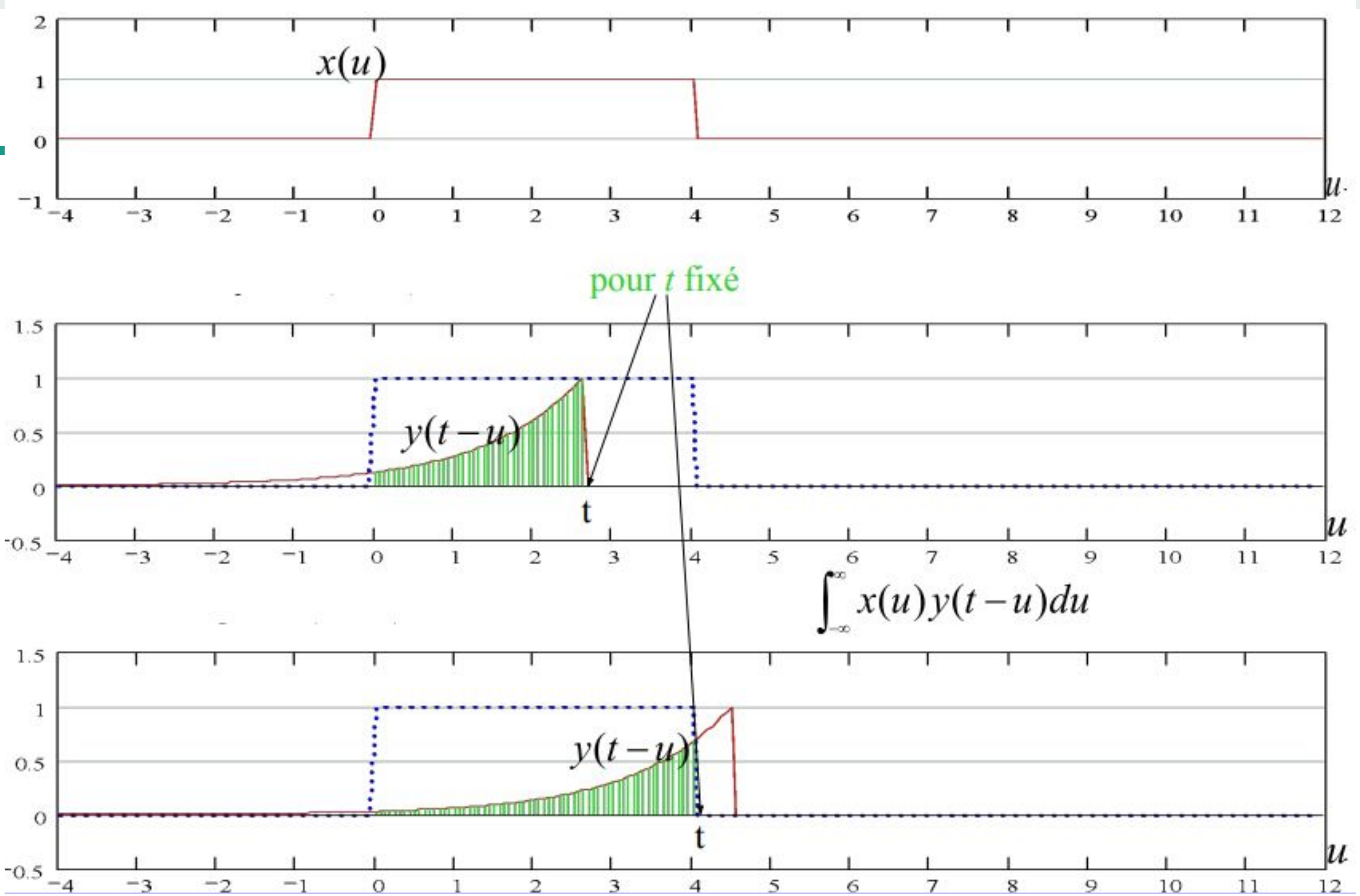
Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(u)y(t-u)$.

$y(t-u)$ est simplement le signal initial $y(u)$, retourné dans le temps pour donner $y(-u)$ puis translaté de t.

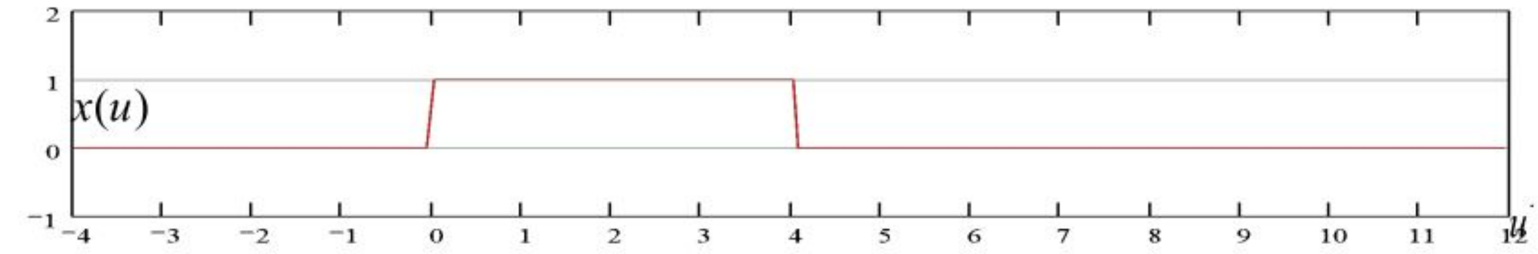
le produit de convolution pour tout t est l'ensemble des surfaces obtenues en faisant glisser y (pour tous les décalages de t).

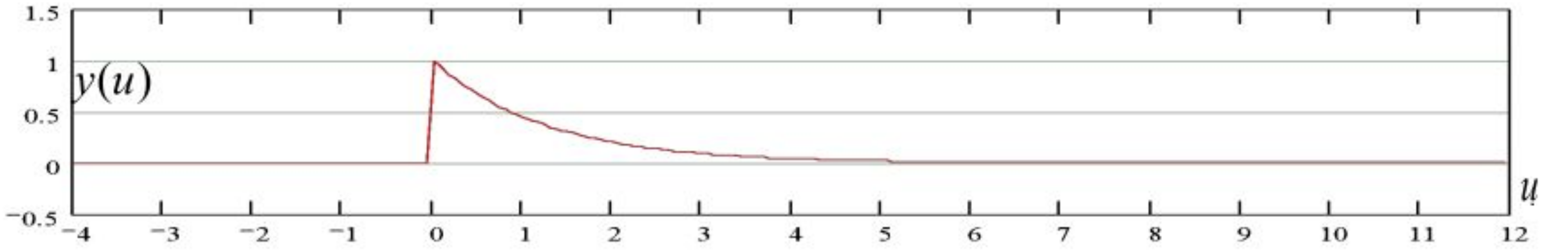
Interprétation graphique de la convolution :



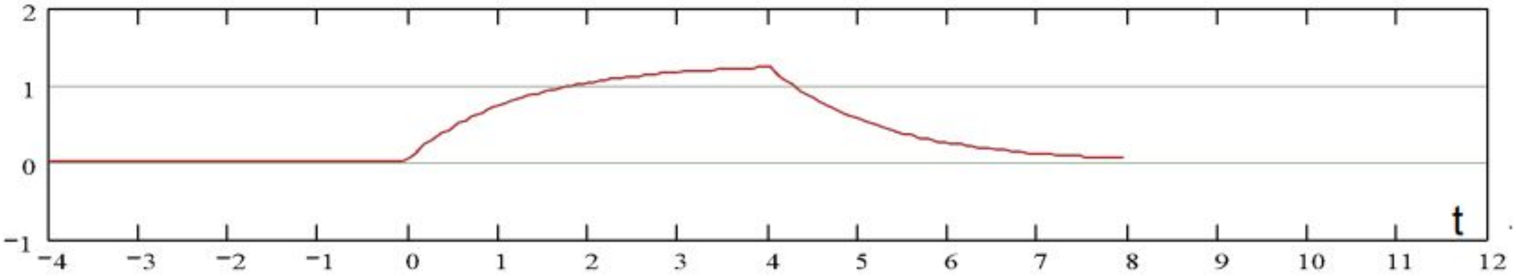


$x(u)$
pour t fixé
$y(t-u)$
t
$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$
$y(t-u)$
t
u





$$[x * y](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, y(t-u)\, du$$



Convolution

Relation entre convolution et corrélation :

<u>Convolution :</u> $[x * y](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du$

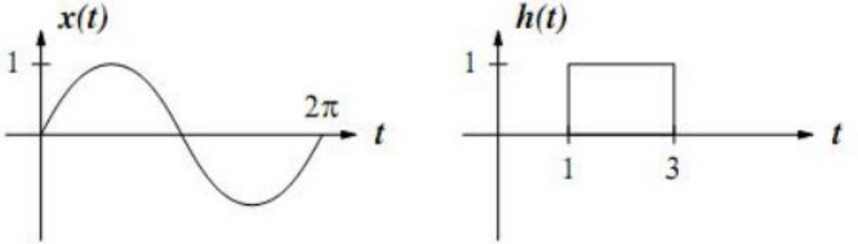
<u>Corrélation :</u> $R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y^{*}(u-t)du$

La corrélation n'est donc qu'une convolution dans laquelle y(t) a été retourné dans le temps et conjugué.

$$R_{xy}(\tau) = [x * y^{(-)*}](\tau) \quad avec \quad y^{(-)}(t) \stackrel{\Delta}{=} y(-t)$$

Exercice

Soit les deux signaux représentés ci-dessous :



1. Donner les expressions analytiques de ces deux signaux.
2. Calculer la convolution entre ces deux signaux.

Représentation fréquentielle des signaux

Le spectre permet de représenter le signal dans une autre base :

- base temporelle $\longrightarrow$ base fréquentielle
- $t \in R$(en secondes) $\longrightarrow f \in R$(en Hertz).

Représentation fréquentielle des signaux

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e = \underset{n \to \infty}{Lim}\left\{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n\right\} = 2.7182818284$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos(\omega t)$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j\sin(\omega t)$$

Représentation fréquentielle des signaux

Jusqu'ici, on a représenté les signaux en fonction du temps, dans le domaine temporel. On peut aussi présenter l'information contenue dans le signal dans le domaine fréquentiel : il s'agit de représenter les fréquences, contenus dans le signal.

Exemple

On prend l'exemple du signal harmonique de la figur, constitué de quatre sinusoïdes, et dont l'expression est donnée par :

$$x_h(t) = \sum_{k=0}^{3} A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

Tableau 2. caractéristiques du signal harmonique $x_h(t)$ donné en exemple

sinusoïde	**fréquence f_k (Hz)**	**amplitude A_k**	**phase ϕ_k (rad/s)**
k = 0	1 Hz	6	0
k = 1	2 Hz	10	$\pi/4$
k = 2	5 Hz	4	$\pi/2$
k = 3	9 Hz	2	0

Exemple

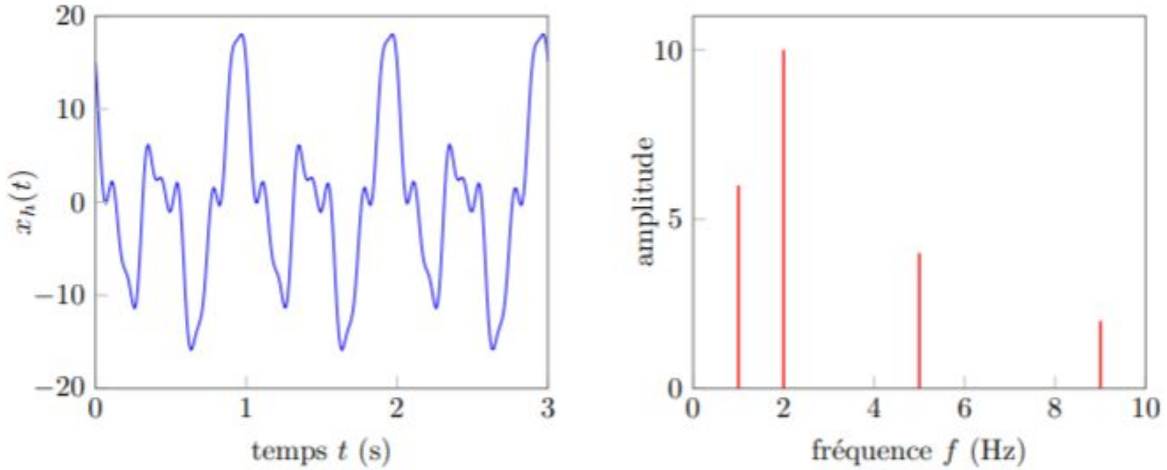
A partir du tableau , on peut écrire l'expression du signal et le représenter dans le domaine temporel.

Le tableau contient également toutes les informations permettant de représenter le signal dans le domaine fréquentiel : pour chaque fr´equence, on connaıt l'amplitude correspondante.

On peut donc représenter les amplitudes en fonction des fréquences contenues dans le signal.

Ce type de représentation est appelé spectre ; elle permet de mettre en évidence le contenu fréquentiel du signal. Ici, il s'agit plus particulièrement d'un spectre d'amplitude.

Exemple



20
10
0
−10
−20
$x_h(t)$
0
1
2
3
temps t (s)
10
5
0
amplitude
0
2
4
6
8
10
fréquence f (Hz)

(a) (b)

Exemple

Sur l’exemple simple traité ici, il est possible d’obtenir directement le spectre car le signal est un signal écrit sous forme d’une somme de sinusoıdes. Pour un signal quelconque, dont on ne connaıt pas nécessairement l’expression analytique, il est possible d’obtenir directement le spectre grâce à **l’analyse de Fourier**.

Principe du Transformée de Fourier

Nous avons vu que pour un signal harmonique dont on possède l'équation analytique, l’obtention du spectre d’amplitudes est immédiate: en effet, les amplitudes et les fr´equences des sinusoıdes sont directement visibles dans l'équation algébrique.

Fourier a d´emontr´e que toutes les fonctions (ou signaux) deterministes pouvaient être exprimées sous la forme suivante :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier permet de calculer le spectre du signal étudié.

$$x(t) \in \mathbb{C} \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \in \mathbb{C}$$

- $|X(f)|$ est le spectre d'amplitude.
- $\arg\{X(f)\}$ est le spectre de phase.
- En théorie f parcourt R. Les interprétations physiques pourront se contenter des fréquences positives.

Transformée de Fourier

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{TF}} X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot e^{-2j\pi f t}\, dt$$

Transformée de Fourier inverse :

$$X(f) \xrightarrow{\mathrm{TF}^{-1}} x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \cdot e^{+2j\pi t f}\, df$$

- La transformée de Fourier permet de décrire le signal dans le domaine fréquentiel.
- A chaque fréquence f est associée une amplitude |X(f)| et une phase arg{X(f)}.

Transformée de Fourier

Calculer la TF des signaux suivants :

1. $Dirac: \quad \delta(t)$
2. $Dirac\ retard\acute{e}: \quad \delta(t-\tau)$
3. $Signal\ continu: \quad x(t)=1$
4. $Exponentielle\ complexe: \quad e^{2\pi j f_0 t}$

Propriétés

Linéarité $\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{\text{TF}} \alpha X(f) + \beta Y(f)$

Le retard n'induit pas une modification du spectre d'amplitude

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot e^{-2j\pi t_0 f}$$

Pour f = 0, on a $X(0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, dt$

$$x(t) \cdot e^{2j\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$$

Propriétés

- $x(at) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$.
- Dérivée : $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{TF}} j2\pi f X(f)$;
- dérivée : $\frac{d^n x(t)}{d^n t} \xrightarrow{\text{TF}} (j2\pi f)^n X(f)$;
- $tx(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{dX(f)}{df}$;
- $t^n x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(f)}{df}$.

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier du produit de convolution est le produit des transformées de Fourier

$$x * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) \cdot Y(f)$$

$$x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f) * Y(f)$$

Transformée de Fourier

Théorème de Parseval:

Soient x(t) et y(t) deux signaux admettant pour transformées de Fourier X(f) et Y(f) respectivement, alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

et dans le cas particulier y(t)=x(t) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

Transformée

Application du théorème de Parseval: Calculer les intégrales suivants :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin c(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin c^2(t)dt$$

Densité spectrale d'énergie

La DSE permet de connaître la répartition en fonction de la fréquence f de l'énergie du signal x(t).

- La DSE s'exprime en $J\ Hz^{-1}$.
- La DSE de x(t), notée $S_x(f)$, est la transformée de Fourier de l'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ du signal x(t).
- Il s'agit par ailleurs de $|X(f)|^2$.
- L'égalité de Parseval indique que

$$E = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\, df$$

Calcul de la DSE

$$\begin{tikzcd}
 & X(f) \arrow[dr, "|\cdot|^2"] & \\
x(t) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"] \arrow[dr] & & S_x(f) = |X(f)|^2 \\
 & \gamma_x(\tau) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"'] &
\end{tikzcd}$$

Signal constant

- On ne peut pas calculer directement la transformée de Fourier du signal constant x(t) = A, R R Ae−j2πft dt.
- Par dualité des formules de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier inverse
- et de la transformée de Fourier du Dirac, on en déduit :

$$x(t) = 1 \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f)$$

On en déduira que

$$x(t) = e^{2j\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} \delta(f - f_0)$$

Densité spectrale de puissance

La DSP permet de connaître la répartition en fonction de la fréquence f de la puissance du signal x(t).

- La DSP s'exprime en W Hz−1 .
- La DSP de x(t) est la transformée de Fourier de l'autocorrélation γx (τ) du signal x(t).
- Il s'agit par ailleurs de |X(f)|^2 .

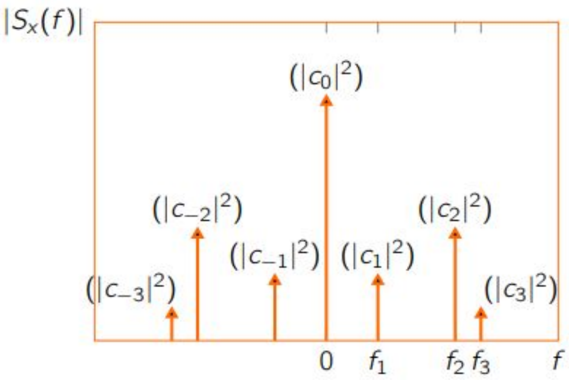


Figure : DSP d'un signal à puissance finie

Calcul de la DSP

$$\begin{tikzcd}
 & X(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \delta(f - f_n) \arrow[dr, "|\cdot|^2"] & \\
x(t) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"] \arrow[dr] & & S_{xx}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \, \delta(f - f_n) \\
 & \gamma_x(\tau) \arrow[ur, "\mathrm{TF}"'] &
\end{tikzcd}$$

- On aura $P = \sum_n |c_n|^2$.