Álgebra Lineal Computacional - Simulacro de Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2021

Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sean $S = \{2x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_2 + x_4)$.
   (a) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(\mathrm{Im}(f)) = S$ y $g(\mathrm{Nú}(f)) = \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Decidir si g es epi, mono o isomorfismo. Justificar.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$, consideramos la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostrar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposción $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.
   (b) Hallar una matriz de permutación adecuada $\boldsymbol{P}$ y calcular la descomposición $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$.
   (c) Probar que $Cond_\infty(\boldsymbol{A}) \to \infty$ cuando $a \to 1$.
   (d) ¿Qué ocurre con $Cond_2(\boldsymbol{A})$ cuando $a \to 1$?

3. Considerar las matrices

$$\text{(a) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

   (a) Determinar en cada caso si la iteración:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{v}^{(k)}} \end{cases}$$

   da como resultado una sucesión r_k convergente para algún vector inicial $\boldsymbol{v}^{(0)}$.
   (b) Para la matriz en (a), dar un subespacio S tal que r_k converja para todo $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. ¿Converge también $\boldsymbol{v}^{(k)}$ para los vectores en dicho subespacio?
   (c) Para la matriz en (b) y el vector inicial $v^{(0)} = (1, 4, 3)$, ¿existe $\lim_{k\to\infty} v^{(k)}$? ¿Y $\lim_{k\to\infty} v^{(2k)}$?