1	2	3	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 27 de Mayo de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4 y al menos un ejercicio debe estar completamente correcto.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle (1,1,1,1), (1,2,1,0) \rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle (2,0,-2,0), (-2,1,0,1), (2,1,-4,1) \rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall\, v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) (1 pt.) Sea $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de $\mathrm{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

Ejercicio 2. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \qquad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) (1.5 pts.) Probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\mathrm{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

b) (1 pt.) Para $n = 10^4$, hallar la descomposición LU de A.

c) (1 pt.) Para $n = 10^4$, utilizar la descomposición LU hallada para resolver el sistema $Ax = b$ utilizando aritmética de 4 dígitos (en base 10).

d) (0.5 pt.) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = \left(0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ y calcular, para $n = 10^4$, el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\ \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\ \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t B v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

a) (1 pt.) Calcular los autovalores y los autovectores de A y de B. Corroborar que para la matriz A se cumplen las hipótesis del Método de la Potencia. Determinar si para la matriz B existe algún $v^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ tal que la sucesión r_k sea convergente.

b) (1 pt.) Para la matriz B y el vector inicial $v^{(0)} = (-2, 0, 2)$, calcular $\lim_{k\to\infty} v^{(k)}$ y deducir $\lim_{k\to\infty} r_k$

c) (1 pt.) Para la matriz A y el vector inicial $v^{(0)} = (-2, 3, -5)$, calcular $\lim_{k\to\infty} v^{(2k+1)}$ y $\lim_{k\to\infty} r_{(2k+1)}$. En este caso, ¿el método logró obtener otro autovalor de la matriz? ¿por qué?