6

Corrigió Ignacio

Nombre y apellido: Joaquin Matulaley

Número de libreta: 521/21

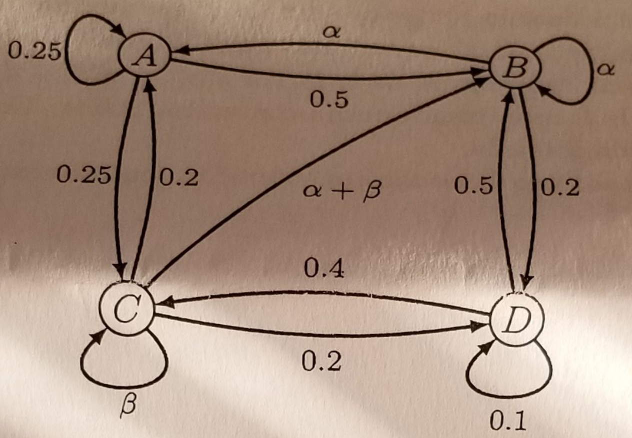
1	2	3	Calificación
3	X	3	6

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 8 de julio de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4.

Ejercicio 1. En un país existen cuatro destinos turísticos importantes: A, B, C y D. El siguiente esquema muestra la dinámica de viaje diario de los turistas. El valor en cada flecha representa qué proporción de turistas viajan diariamente. Por ejemplo, por día el 50% de los turistas que se encuentran en A viajan a B, mientras que el 25% decide permanecer en A.



a) (1 pt.) Escribir la matriz de transición P.

b) (0.5 pts.) Si inicialmente hay 400 turistas en A, 500 en B, 500 en C y 600 en D. Luego de 3 días, ¿aproximadamente cuántos turistas habrá en A? ¿Cuántos habrá en D luego de 5 días?

c) (0.5 pts.) Decidir si para el estado inicial correspondiente a la situación del ítem b) existe estado límite. En caso afirmativo, calcularlo.

d) (1 pt.) Decidir si existe P^∞. En caso afirmativo, calcularla.

Ejercicio 2. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, notamos $A = D + L + U$, donde D es diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta. Sea $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz identidad.

a) (0.5 pts.) Mostrar que si la siguiente iteración converge a x^*, entonces x^* es solución de $Ax = b$:

$$(2D + I)\,x^{(k+1)} = (-L + I - U + D)\,x^{(k)} + b$$

b) (1 pt.) Considerar el método iterativo del ítem anterior:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

donde $B = (2D + I)^{-1}(-L + I - U + D)$ y $c = (2D + I)^{-1}\,b$.
Mostrar que λ es autovalor de B si y sólo si λ cumple:

$$\det\left(-L + I - U + D - \lambda(2D + I)\right) = 0$$

c) (1.5 pts.) Considerar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el método propuesto en b) converge.

d) (1 pt.) Fijando $\alpha = 0.5$, decidir si el método de Gauss-Seidel converge. En caso afirmativo, ¿converge en general más rápido que el método del ítem b)?

Ejercicio 3. A los largo de los años, en un río cercano a un complejo industrial se han tomado muestras de agua para medir la presencia de cierto contaminante. Los datos han sido resumidos en la siguiente tabla, donde x representa el año desde el inicio de la toma de las muestras e y representa la concentración del contaminante en mg/L:

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
y	0.13	0.68	1.49	1.6	1.85	1.96	2.2	2.27

a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

b) (1.5 pts.) Ajustar una función de la forma $g(x) = \ln(d_0 + d_1 x)$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

c) (0.5 pts.) Para cada uno de los ajustes obtenidos, ¿cuánto contaminante se espera hallar en el año 8?

9

Joaquin Machulsky 521/21

HOJA N° 1

FECHA 8/7

(1)

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0.25 & \alpha & 0.2 & 0 \\ B & 0.5 & \alpha & \alpha+\beta & 0.5 \\ C & 0.25 & 0 & \beta & 0.4 \\ D & 0 & 0,2 & 0.2 & 0.1 \end{array}$$

* Para que la columna B sume 1 necesito que $\alpha = 0.4$

$1 = 2\alpha + 0.2$

$\frac{0.8}{2} = \alpha$

→ Con esto, actualizo la columna C

0.2
$0.4+\beta$
β
0.2

y para que esto sume 1 necesito que $\beta = 0.1$

$1 = 0.2 + 0.4 + 2\beta + 0.2$

$\frac{0.2}{2} = \beta$

(a)

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Matriz de transición P

(b) $V_0 = (400, 500, 500, 600)$

Quiero calcular V_3 y devolver la primer posición, es decir, la que corresponde a A y también V_5 y devolver la ultima posición, que corresponde a D

~~[illegible] luego, multiplico~~

Para conseguir V_3, multiplique primero V_0 con P y obtuve V_1, luego V_1 con P y obtuve V_2 y así hasta V_3, de igual manera con V_5.

NOTA

• Respondiendo a la pregunta, luego de 3 días, habrá aproximadamente 550 turistas en A, y luego de 5 días habrá aproximadamente turistas en D 262.

~~valores que me dieron fueron 550.1 para A y para~~

ⓒ Para ver rapidamente si existía, utilicé una función que había definido y lo que si me convenció. Luego lo hice de manera formal.

Busqué el autovector asociado al autovalor = 1, lo dividí por su norma 1 y lo hice positivo, lo llamé w. = (0.279, 0.455, 0.136, 0.131)

Para obtener el estado límite de V_0, multipliqué w por la norma 1 de V_0, obteniendo así el estado límite de V_0

$= (557.214, 909.091, 271.370, 262.325)$

ⓓ Existe P^∞ y es la matriz la cual tiene a w en todas sus 4 columnas

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 0.279 & 0.279 & 0.279 & 0.279 \\ 0.455 & 0.455 & 0.455 & 0.455 \\ 0.136 & 0.136 & 0.136 & 0.136 \\ 0.131 & 0.131 & 0.131 & 0.131 \end{pmatrix}$$

NOTA

Joaquín Madrulsky 521/21 | HOJA N° 2 | FECHA 8/7

③ ⓐ armé mi matriz A

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 4 \\
1 & 3 & 9 \\
1 & 4 & 16 \\
1 & 5 & 25 \\
1 & 6 & 36 \\
1 & 7 & 49
\end{pmatrix}
$$

obtuve mis valores de C calculado en python

$\equiv C_0 = 0.1825$

$C_1 = 0.619$

$C_2 = -0.047$

ⓑ

* lo que hice fue llevar $g(x) = \ln(d_0 + d_1 x)$

a algo más lindo para trabajar,

$$y = \ln(d_0 + d_1 x)$$

$$e^y = e^{\ln(d_0 + d_1 x)}$$

$$e^y = d_0 + d_1 x$$

a partir de eso hice mi matriz $A = \begin{pmatrix}
1 & 0 \\
1 & 1 \\
1 & 2 \\
1 & 3 \\
1 & 4 \\
1 & 5 \\
1 & 6 \\
1 & 7
\end{pmatrix}$

y obtuve mis valores de d

$d_0 = 1.232$

$d_1 = 1.243$

luego volví a ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ por tomar ln( ) a ambos miembros de la ecuación

$$\ln(e^y) = \ln(d_0 + d_1 x)$$

$$y = \ln(d_0 + d_1 x)$$ y ~~así~~ grafique.

(c) Para cada ajuste reemplace evalué tomado $x = 8$ y obtuve que para el ajuste del item A, en el año 8 se ~~[illegible]~~ espera bayer 2.41 y según el ajuste del item B se espera bayer 2.41