Álgebra Lineal Computacional - Primer Parcial

Primer cuatrimestre de 2021 (21/5/2020)

Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Sean $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por: $g(x, y, z) = (x-y, 2x+y+3z, x+z)$ y $S = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\}$.
   (a) Calcular Nú(g) e Im(g)
   (b) Definir, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(S) \subset \mathrm{Im}(g)$, $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Nú}(g)$.
   (c) Para la f hallada en (b), calcular Nú(f) y decidir si f es epi, mono o iso.

2. Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por la matriz:
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Hallar el valor de α para que $dim(\mathrm{Nú}(g)) = 1$.
   (b) Probar que $Cond_\infty(\boldsymbol{A}) \to \infty$ cuando α se aproxima al valor hallado.
   (c) Para el valor de α hallado, calcular la descomposición LU de la matriz.
   (d) Para el valor de α hallado dar las matrices de los proyectores ortogonales sobre Nú(g) y sobre Nú$(g)^\perp$.

3. Dada la matriz
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   (a) determinar los autovalores y autovectores de $\boldsymbol{A}$ y determinar si la matriz es diagonalizable.
   (b) para el vector inicial $\boldsymbol{v}^{(0)} = (2, 1, 4)$, determinar si la iteración
$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|}, & \text{para } k \geq 1 \\ r_k = \dfrac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{v}^{(k)}} & \end{cases}$$
   da como resultado una sucesión r_k convergente, y en tal caso calcular dicho límite. ¿Converge también $\boldsymbol{v}^{(k)}$? ¿A qué vector? Explicar por qué.
   (c) si en cambio tomamos $\boldsymbol{v}^{(0)} = (1, 1, 4)$, determinar si la iteración
$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|}, \quad \text{para } k \geq 1$$
   da como resultado una sucesión $\boldsymbol{v}^{(k)}$ convergente, y en tal caso calcular dicho límite.