1	2	3	Calificación
2,25	4	3	9,25

(Queda 7)

Corrigió: Naza

Nombre y apellido: Joaquin Machulsky

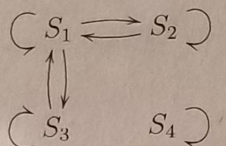
Número de libreta: 521/21

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio del Segundo Parcial – 22 de julio de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4.

Ejercicio 1. Una población se mueve por año según el diagrama:



donde los individuos pueden permanecer en el mismo sector o cambiarse a uno de los sectores conectados por flechas y todas las opciones tienen la misma probabilidad.

0,75 a) (1.5 pts.) Hallar la matriz de transición A del proceso y, en caso de que exista, A^∞.

0,5 b) (0.5 pts) Sabiendo que inicialmente hay 160 individuos en el sector S_1, 20 en el sector S_2, 10 en el sector S_3 y 80 en el sector S_4, hallar la distribución de la población transcurridos tres años.

1 c) (1 pt.) Hallar, si existe, el estado límite para el estado inicial correspondiente a la situación del ítem b).

Ejercicio 2. Se quiere resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

2 a) (2 pts.) Demostrar que el método de Jacobi converge cualquiera sea el vector inicial **si y solo si** Gauss-Seidel converge cualquiera sea el vector inicial.

0,5 b) (0.5 pts.) Determinar TODOS los valores de α para los cuales ambos métodos convergen y decidir cuál de los dos métodos eligiría y porqué.

1,5 c) (1.5 pts.) Para $\alpha = 2/3$ se aplica el método SOR cuya iteración viene dada por la fórmula

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = ((1-\omega)D - \omega U)x^{(k)} + \omega b,$$

tomando $\omega = 3/4$. ¿Resulta convergente este método? ¿Cuál método elegiría en este caso?

Ejercicio 3. Durante varios días, se mide la distancia de un objeto desconocido que se acerca a la Tierra. Los datos han sido resumidos en la siguiente tabla, donde x representa la cantidad de días transcurridos desde el día en que se detectó el objeto e y representa la distancia a la Tierra en kilometros:

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	40.0	27.5	19.8	15.0	6.1	3.8

1 a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

1,5 b) (1.5 pts.) Ajustar una función de la forma $g(x) = (d_0 + d_1x)^2$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

0,5 c) (0.5 pts.) Para cada uno de los ajustes obtenidos, ¿cuál será la distancia estimada del objeto a la Tierra luego de 6 días?

Joaquin Machulsky 521/21

HOJA Nº 1

FECHA 22/7/22

1 a

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

No está bien justificado cómo calculaste A^{∞} ¿por qué $A^{\infty} = (w_1 | w_1 | w_1 | w_2)$? La simulación no es una justificación suficiente.

~~No existe A^{∞} pues para λ autovalor de A, $\lambda = 1$, tiene multiplicidad mayor a 1. Calcule los autovalores con python.~~

~~* No hay un solo autovalor 1.~~

b $V_0 = (160, 20, 10, 80)$

para hallar la distribución de la población transcurridos tres años debo hallar V_3, el cual consigue multiplicando V_0 con A y luego ese resultado multiplicado por A y así hasta haber repetido eso 3 veces. Para no hacerlo a mano definí una funcion en python y calcule $V_3 = (81.06, 55.09, 53.84, 80)$ ✓

pero como hablamos de población ~~tratandose~~ a entero.

$V_3 = (81, 55, 54, 80)$ ✓

c El estado limite para V_0 existe y es el siguiente

$= (81.43, 54.29, 54.29, 80)$

*multiplique A^{∞} por V_0

2 c

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$SOR = \left(D + \tfrac{3}{4}L\right)x^{(k+1)} = \left[\left(1 - \tfrac{3}{4}\right)D - \tfrac{3}{4}U\right]x^{(k)} + \tfrac{3}{4}b$$ ✓

luego $B = M_S = \left(D + \frac{3}{4}L\right)^{-1}\left(\frac{1}{4}D - \frac{3}{4}U\right)$

* la calculo facil usando python

NOTA

$$M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Quiero ver que converge, luego necesito que $\rho(M_I) < 1$:

• Busco autovalores, λ / $\det(M_I - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left[\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - 0\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)\left[0 - \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{8}\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{8}\right)\right) = 0.$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{64} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0.09549$$

$$\lambda_2 = 0.6545$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}$$

Como todos los autovalores son menores a 1 el método resulta convergente.

• Tomando $\alpha = \frac{2}{3}$ tenemos que $\rho(M_I) = 0.6545$

$$\rho(M_J) = \frac{2}{3}$$

$$\rho(M_{GS}) = \frac{4}{9}$$

luego elegiría Gauss-Seidel pues $\rho(M_{GS}) < \rho(M_I) < \rho(M_J)$

NOTA

Joaquin Machulsky 521/21

HOJA N° 2

FECHA 22/7/22

(2) (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* rdo: $M_J = -D^{-1}(L+U)$
$M_{GS} = -(D+L)^{-1}U$

Calculo ambas matrices y luego quiero ver si resultan convergentes

$M_J = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \cancel{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cancel{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Calculo autovalores

quiero $\det(M_J - \lambda I) = 0$ $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & -\cancel{\lambda} & 0 \\ -\alpha & 0 & -\cancel{\lambda} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 0) - \alpha(0 - (\lambda\alpha)) = 0$

$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda\alpha^2 = 0$

$\lambda(-\lambda^2 + \alpha^2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$

$\hookrightarrow \lambda^2 = \alpha^2 \rightarrow \lambda_2 = \alpha$, $\lambda_3 = -\alpha$ ✓

$M_{GS} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$

Calculo autovalores. quiero que $\det(M_{GS} - \lambda I) = 0$.

$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \lambda \end{pmatrix}$ $\rightarrow (\alpha^2 - \lambda)(\lambda^2 - 0) = 0$ ✓

$\alpha^2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

$\lambda^2(\alpha^2 - \lambda) = 0 \rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \alpha^2$

NOTA

Recordemos que si quiero que converjan ~~[illegible]~~ se debe cumplir que ~~[illegible]~~ ⊛ ~~[illegible]~~ autovalor de modulo maximo sea menor que 1 es decir $\rho(M) < 1$, luego, quiero ver que se cumpla que Jacobi converge si y solo si Gauss-Seidel converge.

⊛ el modulo del

· los autovalores de Jacobi son: $\{0, \alpha, -\alpha\}$, ~~[illegible]~~

· los autovalores de Gauss-Seidel son: $\{0, 0, \alpha^2\}$

~~[illegible]~~

tomo $|\alpha|$ como el modulo del autovalor de modulo maximo para M_J y $|\alpha^2|$ para M_{GS}

luego quiero que $|\alpha| < 1$ y $\alpha^2 < 1$, pero sabemos que $\alpha^2 < 1 \leftrightarrow |\alpha| < 1$ luego podemos afirmar que el metodo de Jacobi converge cualquiera sea el vector inicial si y solo si Gauss-Seidel tambien converge cualquiera sea el vector inicial.

(b) Ambos metodos convergen para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ entre -1 y 1 sin incluir.

Eligiria Gauss-Seidel pues converge más rapido.

NOTA

NOTA

Joaquin Machulsky   521/21   HOJA N° 3   FECHA 22/7/22

(3) (a) Armo mi matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

luego resolví con python para obtener mis coeficientes, evalué y grafiqué la función.

(b) La idea que tuve fue tomar raíz a ambos lados de la ecuación y así poder ajustar para $d_0 + d_1 x$, eso lo pude hacer ya que me tenía inconvenientes con los números negativos, luego volví a elevar al cuadrado a ambos miembros y grafiqué.

(c) Para el ajuste del punto a me dio $= 1.399 \sim 1.4$
Para el ajuste del punto b me dio $= 0.949 \sim 0.9$

(1) (a) La Matriz A^∞ existe, para calcularla primero veo los autovectores.
Encontré 2 autovalores $= 1$, los dos autovectores asociados los divido por su norma 1 y armo mi matriz inf $= A^\infty$

$$A^\infty = \begin{pmatrix} 0.43 & 0.43 & 0.43 & 0 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 & 0 \\ 0.29 & 0.29 & 0.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No necesariamente los autovectores son las columnas de A^∞ (podría tener como columnas a combinaciones lineales de los autovectores asociados a $\lambda = 1$). En este caso particular vale, pero no vale en general.