

IL PROCESSO $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ IN APPROSSIMAZIONE DI BORN NEL MODELLO STANDARD

MARIO CIACCO
MATRICOLA 835681

In questo *essay* sono calcolati i termini d'interazione fermione-antifermione-scalare nel Modello Standard necessari per il calcolo completo dell'ampiezza del processo ed è verificata l'invarianza di gauge dell'elemento di matrice S all'ordine perturbativo più basso. Viene poi presentato il calcolo della sezione d'urto differenziale in cui si trascurano i contributi dell'interazione con il campo scalare. In conclusione si calcola l'ampiezza relativa al diagramma con linea del campo di Higgs come esempio di interazione fermione-scalare.

I INTRODUZIONE

Le interazioni elettrodeboli sono descritte in modo unificato nella lagrangiana con gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$. In tale modello, i leptoni interagiscono con i quattro campi di gauge W_μ^\pm , Z_μ e A_μ , e con il doppietto scalare complesso Φ necessario per l'introduzione dei termini di massa. Nel caso particolare del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la parte di lagrangiana d'interazione da considerare è formata da due contributi separati. Il primo è il termine di correnti neutre

$$\mathcal{L}_{nc} = \sum_{i=e,\mu} \left\{ \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 + \gamma^5) \ell_i Z_\mu - e \bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu \right\} \quad (1)$$

da cui si estrae il vertice a tre linee con il campo Z_μ (risp. A_μ) e la coppia leptone-antileptone, di valore $i(g/4c)\gamma^\mu(V + \gamma^5)$ (risp. $-ie\gamma^\mu$). Si è posto $c \equiv \cos \theta_W$ e $V \equiv 4 \sin^2 \theta_W + 1$. Il secondo contributo è dato dall'interazione dei campi dell'elettrone e del muone con le componenti del campo Φ .

II L'INTERAZIONE CON IL CAMPO SCALARE

La lagrangiana del campo scalare è

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4!} (|\Phi|^2 - F^2)^2, \quad \lambda > 0 \text{ e } F \neq 0 \quad (2)$$

dove D_μ è la derivata covariante in termini dei campi di gauge e dei generatori del gruppo di simmetria. La costante F determina il valore di aspettazione sul vuoto del campo Φ , classicamente corrispondente al valore assunto da $|\Phi|$ nel minimo del potenziale. Si parametrizza Φ in termini di F e se ne esprime la seconda componente attraverso una combinazione del campo fisico di Higgs H e del campo ϕ^0

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_1 \\ H + i\phi^0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'interazione con i campi fermionici è descritta attraverso gli accoppiamenti di Yukawa

$$\mathcal{L}_{sf} = - \sum_{i=e,\mu} \{ y_i \bar{\psi}_{i,L} \Phi \psi_{i,R} + h.c. \} \quad (4)$$

dove y_j è la costante di accoppiamento di Yukawa, proporzionale al rapporto tra la massa m_j del fermione e la massa M_W dei bosoni W^\pm

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{2}} g \frac{m_j}{M_W} \quad (5)$$

I campi fermionici sono introdotti in (4) con $\bar{\psi}_{j,L} = 2^{-1} (\bar{\nu}_j, \bar{\ell}_j) (1 + \gamma^5)$ e $\psi_{j,R} = 2^{-1} (1 + \gamma^5) \ell_j$. Inserendo la parametrizzazione (3) nella lagrangiana d'interazione (4) si esplicitano i termini di lagrangiana d'interazione per i singoli campi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sf} &\Rightarrow \frac{y_j}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_j \quad \bar{\ell}_j) \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \left(\sqrt{2} F + H + i\phi^0 \right) \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \ell_j + h.c. \\ &= y_j \bar{\ell}_j F \ell_j + \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j H \ell_j + i \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \gamma^5 \phi^0 \ell_j \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{m_\mu}{M_W} \simeq 10^{-3} \quad (7)$$

III L'INVARIANZA DI GAUGE DELL'ELEMENTO DI MATRICE S

$$|M|^2 = |M_1 + M_2 + M_3 + M_4|^2 \quad (8)$$

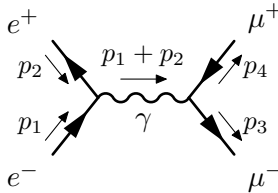
$$iG_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - M_Z^2} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi^2) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \right\}; \quad i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_2 + M_3 &\Rightarrow - \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{i(1 - \xi^2)}{s^2 - M_Z^2} \frac{(p_1 + p_2)^\mu (p_3 + p_4)^\nu}{s - \xi^2 M_Z^2} \bar{v}(p_1) \gamma_\mu (V + \gamma^5) u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma_\nu (V + \gamma^5) v(p_4) \\ &+ \left(\frac{g}{2} \right)^2 \frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \frac{i}{s - \xi^2 M_Z^2} \bar{v}(p_1) \gamma^5 u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma^5 v(p_4) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_2 &\Rightarrow - \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{i(1 - \xi^2)}{s^2 - M_Z^2} \frac{1}{s - \xi^2 M_Z^2} \left\{ m_e [-\bar{v}(p_1) \gamma_\mu (V + \gamma^5) u(p_2) + \bar{v}(p_1) \gamma_\mu (V - \gamma^5) u(p_2)] \right. \\ &\quad \left. \times m_\mu [\bar{u}(p_3) \gamma_\nu (V + \gamma^5) v(p_4) - \bar{u}(p_3) \gamma_\nu (V - \gamma^5) v(p_4)] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

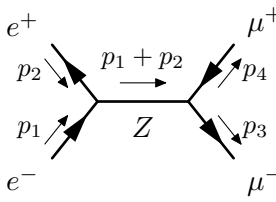
$$M_2 + M_3 \Rightarrow \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{4im_e m_\mu}{s - \xi^2 M_Z^2} \left\{ \frac{M_Z^2 - \xi^2 M_Z^2 + s - M_Z^2}{M_Z^2 (s - M_Z^2)} \right\} \bar{v}(p_1) \gamma^5 u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma^5 v(p_4) \quad (12)$$

IV LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE



$$\Rightarrow M_1 = (-ie)^2 \bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4) \quad (13)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |M_1|^2 = \frac{2e^4}{s^2} \{ (u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)s \} \quad (14)$$



$$\Rightarrow M_2 = \left(\frac{ig}{4c} \right)^2 \bar{v}(p_1) \gamma^\mu (V + \gamma^5) u(p_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 - M_Z^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu (V + \gamma^5) v(p_4) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_2|^2 &= 2 \left(\frac{g}{4c} \right)^4 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \{ [(V^2 + 1)^2 + 4V^2] (u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &\quad + [(V^2 + 1)^2 - 4V^2] (t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &\quad + 2(V^4 - 1) [(m_\mu^2 + m_e^2)s - 4m_\mu^2 m_e^2] \\ &\quad + 8m_\mu^2 m_e^2 (V^2 - 1)^2 \} \end{aligned} \quad (16)$$

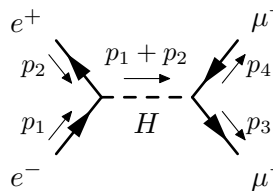
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} M_1 M_2^\dagger &= 2e^2 \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{1}{s(s - M_Z^2)} \{ (V^2 + 1)(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &\quad + (V^2 - 1)(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &\quad + 2V^2(m_e^2 + m_\mu^2)s \} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= (2\pi)^{4-6} \cdot F \cdot \int dP_{2 \rightarrow 2} \cdot \frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{2s^{\frac{1}{2}}(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{spin} \{ |M_1|^2 + |M_2|^2 + 2M_1 M_2^\dagger \} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{32\pi s} \left(\frac{s - 4m_\mu^2}{s - 4m_e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{e^4}{s^2} \left\{ s^2 + (s - 4m_\mu^2)(s - 4m_e^2) \cos^2 \theta + 4(m_e^2 + m_\mu^2)s \right\} \right. \\ &\quad + \left(\frac{g}{4c} \right)^4 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \left\{ (V^2 + 1)^2 [s^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2) \cos^2 \theta] + 4V^2 s(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right. \\ &\quad + 2(V^4 - 1) [(m_\mu^2 + m_e^2)s - 4m_\mu^2 m_e^2] + 8m_\mu^2 m_e^2 (V^2 - 1)^2 \} \\ &\quad + 2e^2 \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{1}{s(s - M_Z^2)} \left\{ V^2 [s^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2) \cos^2 \theta] + 2s(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. \left. + 4V^2(m_e^2 + m_\mu^2) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

V L'AMPIEZZA DEL DIAGRAMMA CON LINEA INTERNA DI HIGGS



$$M_H = \left(\frac{ig}{2} \right)^2 \frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \bar{v}(p_1) u(p_2) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - M_H^2} \bar{u}(p_3) v(p_4) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_H|^2 &= \left(\frac{ig}{2} \right)^4 \left(\frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \right)^2 \frac{1}{(s - M_H^2)^2} \{ (s - 2m_e^2)(s - 2m_\mu^2) \\ &\quad - 2(m_e^2 + m_\mu^2)s + 8m_e^2 m_\mu^2 \} \end{aligned} \quad (22)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] George Stermann. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [2] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge University Press, 1994.