

IL PROCESSO $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ IN APPROSSIMAZIONE DI BORN NEL MODELLO STANDARD

MARIO CIACCO
MATRICOLA 835681

In questo *essay* sono calcolati i termini d'interazione fermione-antifermione-scalare nel Modello Standard necessari per il calcolo completo dell'ampiezza del processo ed è verificata l'indipendenza dalla scelta di gauge dell'elemento di matrice S all'ordine perturbativo più basso. È infine presentato il calcolo della sezione d'urto differenziale.

I INTRODUZIONE

Le interazioni elettrodeboli sono descritte in modo unificato nella lagrangiana con gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$. In tale modello, i leptoni interagiscono con i quattro campi di gauge W_μ^\pm , Z_μ e A_μ , e con il doppietto scalare complesso Φ necessario per l'introduzione dei termini di massa. Nel caso particolare del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la parte di lagrangiana d'interazione \mathcal{L}_{int} da considerare è formata da due contributi separati. Il primo è il termine di correnti neutre

$$\mathcal{L}_{nc} = \sum_{i=e,\mu} \left\{ \frac{g}{4 \cos \theta_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (4 \sin^2 \theta_W - 1 + \gamma^5) \ell_i Z_\mu - e \bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu \right\} \quad (1)$$

da cui si estrae il vertice a tre linee con il campo Z_μ (risp. A_μ) e la coppia leptone-antileptone, di valore $(2\pi)^4 i(g/4c)\gamma^\mu(V + \gamma^5)$ (risp. $-(2\pi)^4 ie\gamma^\mu$) nello spazio degli impulsi. Si è posto $c \equiv \cos \theta_W$ e $V \equiv 4 \sin^2 \theta_W + 1$. Il secondo contributo è dato dall'interazione dei campi dell'elettrone e del muone con le componenti del campo Φ .

II L'INTERAZIONE CON IL CAMPO SCALARE

La lagrangiana del campo scalare è

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4!} (|\Phi|^2 - F^2)^2, \quad \lambda > 0 \text{ e } F \neq 0 \quad (2)$$

dove D_μ è la derivata covariante in termini dei campi di gauge e dei generatori del gruppo di simmetria. La costante F determina il valore di aspettazione sul vuoto del campo Φ , classicamente corrispondente al valore assunto da $|\Phi|$ nel minimo del potenziale. Si parametrizza Φ in termini di F e se ne esprime la seconda componente attraverso una combinazione del campo fisico di Higgs H e del campo ϕ^0 . Il fattore $2^{-\frac{1}{2}}$ permette di ottenere i corretti termini cinetici per i campi reali

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_1 \\ H + i\phi^0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'interazione con i campi fermionici è descritta attraverso gli accoppiamenti di Yukawa

$$\mathcal{L}_{sf} = - \sum_{i=e,\mu} \{ y_i \bar{\psi}_{i,L} \Phi \psi_{i,R} + h.c. \} \quad (4)$$

dove y_j è la costante di accoppiamento di Yukawa, proporzionale al rapporto tra la massa m_j del fermione e la massa M_W dei bosoni W^\pm

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{2}} g \frac{m_j}{M_W} \quad (5)$$

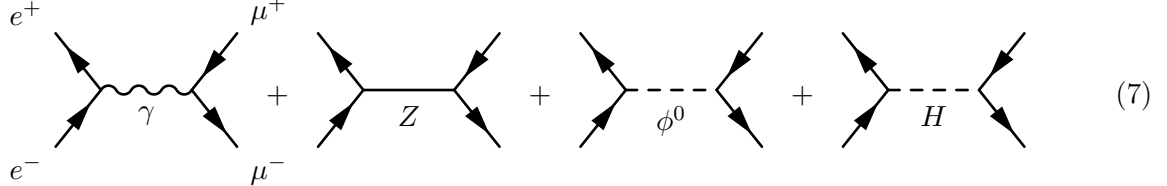
I campi fermionici sono introdotti in (4) con $\bar{\psi}_{j,L} = 2^{-1} (\bar{\nu}_j, \bar{\ell}_j) (1 + \gamma^5)$ e $\psi_{j,R} = 2^{-1} (1 + \gamma^5) \ell_j$. Inserendo la parametrizzazione (3) nella lagrangiana d'interazione (4), isolando la seconda componente del doppietto, si esplicitano i termini di lagrangiana d'interazione per i singoli campi.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sf} \Rightarrow & -\frac{y_j}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_j \quad \bar{\ell}_j) \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \left(\sqrt{2}F + H + i\phi^0 \right) \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \ell_j \\ & -\frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \left(-\sqrt{2}F + H - i\phi^0 \right) \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \begin{pmatrix} \nu_j \\ \ell_j \end{pmatrix} \\ & = -y_j \bar{\ell}_j F \ell_j - \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j H \ell_j - i \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \gamma^5 \phi^0 \ell_j \end{aligned} \quad (6)$$

Il primo termine è responsabile della massa dei fermioni. I termini d'interazione relativi rispettivamente a H e ϕ^0 sono dati dal prodotto di campi non equivalenti, pertanto i vertici corrispondenti si deducono in modo diretto dalla lagrangiana. Utilizzando l'espressione (5) per la costante di accoppiamento, si ottengono rispettivamente i valori $-(2\pi)^4 i [2^{-1} g(m_j/M_W)]$ e $(2\pi)^4 2^{-1} g(m_j/M_W) \gamma^5$ nello spazio degli impulsi.

III L'INDIPENDENZA DELL'ELEMENTO DI MATRICE S DALLA SCELTA DI GAUGE

La teoria che si sta considerando è una teoria di gauge, pertanto la sua quantizzazione richiede l'introduzione di un termine *gauge fixing* secondo il metodo di Faddeev-Popov. In analogia a quanto sviluppato per il modello di Higgs abeliano, è possibile introdurre una condizione dipendente da un parametro ξ e definire così la famiglia di gauge R_ξ . In questo caso ϕ^0 è il campo non fisico, presente nello spettro della teoria con ξ di valore generico, associato al campo Z_μ . In generale, quindi, data la lagrangiana d'interazione complessiva $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{nc} + \mathcal{L}_{sf}$, si isolano i seguenti diagrammi di Feynman indipendenti all'ordine $O(g^2)$ ($\sim O(e^2)$, essendo $e = g \sin \theta_W$) dello sviluppo perturbativo dell'elemento di matrice S



Per calcolare l'elemento di matrice S si parte dal calcolo dell'ampiezza, in cui si media sullo spin dei fermioni entranti e si somma sullo spin dei fermioni uscenti

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_1 + M_2 + M_3 + M_4|^2 \quad (8)$$

dove gli indici degli elementi M_i si riferiscono ai diagrammi precedenti nell'ordine con cui sono riportati. In analogia ai risultati del calcolo nel modello di Higgs abeliano, si possono esprimere i propagatori dei campi Z_μ e ϕ^0 nello spazio degli impulsi come

$$iG_{F,Z}^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_Z^2} \left\{ g^{\mu\nu} - (1 - \xi^2) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \right\}; \quad i\Delta_{F,\phi}(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \quad (9)$$

Data la dipendenza da ξ dei propagatori, sia M_2 sia M_3 dipendono dal valore di ξ . Affinché la teoria sia consistente, si deve verificare l'indipendenza dell'elemento di matrice S dalla scelta del gauge. Si considera quindi la somma di questi due termini e in particolare si isolano le parti dipendenti dal parametro ξ . Si trascurano da qui i fattori $(2\pi)^4$ presenti nei vertici e nei propagatori.

$$\begin{aligned} M_2 + M_3 \Rightarrow & -\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{i(1 - \xi^2)}{s^2 - M_Z^2} \frac{(p_1 + p_2)^\mu (p_3 + p_4)^\nu}{s - \xi^2 M_Z^2} \bar{v}(p_1) \gamma_\mu (V + \gamma^5) u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma_\nu (V + \gamma^5) v(p_4) \\ & + \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \frac{i}{s - \xi^2 M_Z^2} \bar{v}(p_1) \gamma^5 u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma^5 v(p_4) \end{aligned} \quad (10)$$

In (10) si sono associati i quadrimpulsi p_i ($i = 1, \dots, 4$) alle linee esterne del diagramma e si è applicata la conservazione del quadrimpulso nei vertici interni del diagramma. Si è inoltre utilizzato l'invariante di Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$ per esprimere il quadrato del quadrimpulso associato alle linee interne. Considerando esclusivamente il termine M_2 si utilizzano le equazioni di Dirac $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $\not{p}v(p) = -mv(p)$ e quelle rispettive per gli spinori $\bar{u}(p)$ e $\bar{v}(p)$ per eliminare i quadrimpulsi p_i nell'espressione (10) ed esplicitare la dipendenza dalle masse m_e e m_μ rispettivamente dell'elettrone e del muone

$$M_2 \Rightarrow -\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{i(1-\xi^2)}{s^2 - M_Z^2} \frac{1}{s - \xi^2 M_Z^2} \left\{ m_e [-\bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V + \gamma^5)u(p_2) + \bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V - \gamma^5)u(p_2)] \right. \\ \left. \times m_\mu [\bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V + \gamma^5)v(p_4) - \bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V - \gamma^5)v(p_4)] \right\} \quad (11)$$

Si elimina la dipendenza dai termini di accoppiamento vettoriale e si mette in evidenza un fattore $m_e m_\mu$ comune anche a M_3 . In M_3 si utilizza la relazione $M_W = cM_Z$ che lega le masse dei bosoni W^\pm e Z . La somma dei due contributi è infine esprimibile come

$$M_2 + M_3 \Rightarrow \left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{4im_e m_\mu}{s - \xi^2 M_Z^2} \left\{ \frac{M_Z^2 - \xi^2 M_Z^2 + s - M_Z^2}{M_Z^2(s - M_Z^2)} \right\} \bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4) \quad (12)$$

Il numeratore in parentesi è uguale al denominatore ad esso precedente e questi sono gli unici termini dipendenti dal parametro ξ . Si verifica pertanto a quest'ordine perturbativo l'indipendenza dalla scelta di ξ . Si osserva inoltre che il termine ottenuto nell'espressione (12) corrisponde all'elemento M_3 che si calcolerebbe con la scelta di gauge normalizzabile $\xi = 1$ o alternativamente, riutilizzando le equazioni di Dirac, al termine di M_2 dovuto alla parte in $p^\mu p^\nu / M_Z^2$ del propagatore del campo Z_μ nel gauge unitario ($\xi \rightarrow \infty$).

IV LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE

Si procede nel calcolo dell'elemento di matrice S scegliendo $\xi = 1$. Si riportano i valori di M_j relativi ai diagrammi (7). I propagatori del fotone e del campo di Higgs fisico H sono rispettivamente $iG_{F,A}^{\mu\nu}(k) = -ig^{\mu\nu}/k^2$ e $i\Delta_{F,H}(p) = i/(p^2 - M_H^2)$, data M_H la massa del bosone di Higgs.

$$M_1 = (-ie)^2 \bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4) \quad (13)$$

$$M_2 = \left(\frac{ig}{4c}\right)^2 \bar{v}(p_1)\gamma^\mu(V + \gamma^5)u(p_2) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 - M_Z^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\nu(V + \gamma^5)v(p_4) \quad (14)$$

$$M_3 = \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - M_Z^2} \bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4) \quad (15)$$

$$M_4 = \left(\frac{-ig}{2}\right)^2 \frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \bar{v}(p_1)u(p_2) \frac{i}{(p_1 + p_2)^2 - M_H^2} \bar{u}(p_3)v(p_4) \quad (16)$$

I termini di pura elettrodinamica e di pura interazione debole

Poiché si è interessati alla sezione d'urto non polarizzata, si somma sullo spin dei fermioni uscenti e si media sullo spin dei fermioni entranti la quantità $|M_1|^2$, ottenendo

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |M_1|^2 = \frac{1}{4} e^4 \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_1 - m_e)\gamma^\mu\} \\ \times \text{tr}\{(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\nu(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu\} \quad (17)$$

Svolgendo l'algebra delle tracce di matrici di Dirac ed esprimendo il risultato in termini degli invarianti di Mandelstam s , t e u si ottiene

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} |M_1|^2 = \frac{2e^4}{s^2} \{(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)s\} \quad (18)$$

Analogamente si ottiene il termine $|M_2|^2$ relativo all'interazione debole

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_2|^2 = 2 \left(\frac{g}{4c} \right)^4 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \{ & [(V^2 + 1)^2 + 4V^2](u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ & + [(V^2 + 1)^2 - 4V^2](t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ & + 2(V^4 - 1)[(m_\mu^2 + m_e^2)s - 4m_\mu^2 m_e^2] \\ & + 8m_\mu^2 m_e^2 (V^2 - 1)^2 \} \end{aligned} \quad (19)$$

In entrambi i termini sono presenti combinazioni degli invarianti t e u che determinano una dipendenza dagli angoli dei fermioni uscenti.

Il contributo dei campi scalari ϕ^0 e H

A partire dalle espressioni (15) e (16) si calcolano le ampiezze per i diagrammi relativi alle interazioni con i campi scalari

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_3|^2 = \left(\frac{g}{2} \right)^4 \left(\frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \right)^2 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \{ & (s - 2m_e^2)(s - 2m_\mu^2) \\ & + 2(m_e^2 + m_\mu^2)s - 4m_e^2 m_\mu^2 \} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |M_4|^2 = \left(\frac{ig}{2} \right)^4 \left(\frac{m_e m_\mu}{M_W^2} \right)^2 \frac{1}{(s - M_H^2)^2} \{ & (s - 2m_e^2)(s - 2m_\mu^2) \\ & - 2(m_e^2 + m_\mu^2)s + 12m_e^2 m_\mu^2 \} \end{aligned} \quad (21)$$

Differentemente da quanto si è verificato per i contributi (18) e (19), i risultati ottenuti sono esprimibili in termini del solo invariante di Mandelstam s . La dipendenza angolare è in questo caso uniforme: questo fatto è riconducibile all'assenza di spin sulle linee interne dei diagrammi.

I termini d'interferenza

Dovendo considerare 4 diagrammi indipendenti, si ottengono in principio $4! \cdot (2!)^{-1} = 12$ termini d'interferenza. Si verifica che i termini relativi alla stessa coppia di diagrammi sono equivalenti. Per simmetria restano pertanto 6 contributi indipendenti. Si considera per primo il termine d'interferenza dato da $M_3 M_1^\dagger$ e nel calcolo non polarizzato si trascurano le costanti

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} M_3 M_1^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_1 M_3^\dagger \Rightarrow \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_e)\gamma^5(\not{p}_1 - m_e)\gamma^\mu\} \text{tr}\{(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma^5(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu\} \quad (22)$$

Espandendo le parentesi si ottengono esclusivamente tracce della forma $\text{tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\}$, $\text{tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\}$ e $\text{tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\}$, tutte nulle. Analogamente si ottiene che il contributo $4^{-1} \sum_{spin} M_4 M_3^\dagger$ sono nulli per considerazioni analoghe sulle tracce di matrici di Dirac

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} M_3 M_4^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_4 M_3^\dagger \Rightarrow \text{tr}\{(\not{p}_2 + m_e)\gamma^5(\not{p}_1 - m_e)\} \text{tr}\{(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma^5(\not{p}_3 + m_\mu)\} = 0 \quad (23)$$

Si riportano di seguito i 4 contributi indipendenti non nulli restanti

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} M_2 M_1^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_1 M_2^\dagger = 2e^2 \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{1}{s(s - M_Z^2)} \{ & (V^2 + 1)(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ & + (V^2 - 1)(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ & + 2V^2(m_e^2 + m_\mu^2)s \} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} M_4 M_1^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_1 M_4^\dagger = - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{(m_e m_\mu)^2}{M_W^2} \frac{e^2}{s(s - M_H^2)} \{(u - m_e^2 - m_\mu^2) - (t - m_e^2 - m_\mu^2)\} \quad (25)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} M_3 M_2^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_2 M_3^\dagger = - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{(m_e m_\mu)^2}{M_W^2} \frac{e^2}{(s - M_Z^2)^2} \{(u - m_e^2 - m_\mu^2) + (t - m_e^2 - m_\mu^2)\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{spin} M_4 M_1^\dagger = \frac{1}{4} \sum_{spin} M_1 M_4^\dagger = - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \frac{(m_e m_\mu)^2}{M_W^2} \frac{e^2}{(s - M_Z^2)(s - M_H^2)} \{(u - m_e^2 - m_\mu^2) - (t - m_e^2 - m_\mu^2)\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= (2\pi)^{4-6} \cdot F \cdot \int dPS_{2 \rightarrow 2} \cdot \frac{1}{4} \sum_{spin} |M|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\pi}{2s^{\frac{1}{2}}(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{spin} \left\{ |M_1|^2 + |M_2|^2 + 2M_1 M_2^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} &= \frac{1}{32\pi s} \left(\frac{s - 4m_\mu^2}{s - 4m_e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{e^4}{s^2} \left\{ s^2 + (s - 4m_\mu^2)(s - 4m_e^2) \cos^2 \theta + 4(m_e^2 + m_\mu^2)s \right\} \right. \\ &+ \left(\frac{g}{4c} \right)^4 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \left\{ (V^2 + 1)^2 \left[s^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2) \cos^2 \theta \right] + 8V^2 s (s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}} (s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right. \\ &+ 4(V^4 - 1) \left[(m_\mu^2 + m_e^2)s - 4m_\mu^2 m_e^2 \right] + 16m_\mu^2 m_e^2 (V^2 - 1)^2 \left. \right\} \\ &+ 2e^2 \left(\frac{g}{4c} \right)^2 \frac{1}{s(s - M_Z^2)} \left\{ V^2 \left[s^2 + (s - 4m_e^2)(s - 4m_\mu^2) \cos^2 \theta \right] + 2s(s - 4m_e^2)^{\frac{1}{2}} (s - 4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right. \\ &+ 4V^2(m_e^2 + m_\mu^2) \left. \right\} \left. \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] George Stermann. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [2] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] *Appunti presi a lezione*.