Il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ in approssimazione di Born nel Modello Standard

Mario Ciacco
Matricola 835681

In questo *essay* sono calcolati i termini d'interazione fermione-antifermione-scalare nel Modello Standard necessari per il calcolo completo dell'ampiezza del processo ed è verificata l'invarianza di gauge dell'elemento di matrice S all'ordine perturbativo più basso. Viene poi presentato il calcolo della sezione d'urto differenziale in cui si trascurano i contributi dell'interazione con il campo scalare. In conclusione si calcola l'ampiezza relativa al diagramma con linea del campo di Higgs come esempio di interazione fermione-scalare.

I Introduzione

Le interazioni elettrodeboli sono descritte in modo unificato nella lagrangiana con gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$. In tale modello, i leptoni interagiscono con i quattro campi di gauge $W^\pm$, Z e A, e con il doppietto scalare Φ necessario per l'introduzione dei termini di massa. Nel caso particolare del processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la parte di lagrangiana d'interazione da considerare è formata da due contributi separati. Il primo è il termine di correnti neutre

$$\mathcal{L}_{nc} = \sum_{i=e,\mu} \left\{ \frac{g}{4\cos\theta_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma^5) \ell_i Z_\mu - e \bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu \right\} \tag{1}$$

da cui si estrae il vertice a tre linee con il campo Z (risp. A) e la coppia leptone-antileptone, di valore $i(g/4c)\gamma^\mu(V + \gamma^5)$ (risp. $-ie\gamma^\mu$), avendo posto $c \equiv \cos\theta_W$ e $V \equiv 4\sin^2\theta_W + 1$. Il secondo contributo è dato dall'interazione dei campi dell'elettrone e del muone con le componenti del campo Φ.

II L'interazione con il campo scalare

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi + \frac{\lambda}{4!} \left(|\Phi|^2 - F^2 \right)^2, \quad \lambda > 0 \tag{2}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_1 \\ H + i\phi^0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_{sf} = - \sum_{i=e,\mu} \left\{ y_i \bar{\psi}_{i,L} \Phi \psi_{i,R} + h.c. \right\} \tag{4}$$

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{2}} g \frac{m_j}{M_W} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sf} \Longrightarrow & \frac{y_j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_j & \bar{\ell}_j \end{pmatrix} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \begin{pmatrix} - \\ \sqrt{2}F + H + i\phi^0 \end{pmatrix} \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right) \ell_j + h.c. \\ = & y_j \bar{\ell}_j F \ell_j + \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j H \ell_j + i \frac{y_j}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_j \gamma^5 \phi^0 \ell_j \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{m_\mu}{M_W} \simeq 10^{-3} \tag{7}$$

III L'invarianza di gauge dell'elemento di matrice S

$$|M|^2 = |M_1 + M_2 + M_3 + M_4|^2 \tag{8}$$

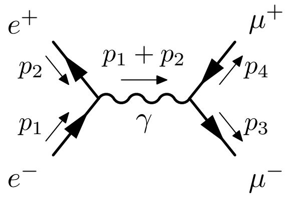
$$iG_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - M_Z^2}\left\{g^{\mu\nu} - (1-\xi^2)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi^2 M_Z^2}\right\}; \qquad i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} M_2 + M_3 \Rightarrow &-\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{i(1-\xi^2)}{s^2 - M_Z^2}\frac{(p_1+p_2)^\mu (p_3+p_4)^\nu}{s - \xi^2 M_Z^2}\bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V+\gamma^5)u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V+\gamma^5)v(p_4) \\ &+\left(\frac{g}{2}\right)^2\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\frac{i}{s-\xi^2 M_Z^2}\bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} M_2 \Rightarrow -\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{i(1-\xi^2)}{s^2 - M_Z^2}\frac{1}{s-\xi^2 M_Z^2}\Big\{ &m_e[-\bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V+\gamma^5)u(p_2) + \bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V-\gamma^5)u(p_2)] \\ &\times m_\mu[\bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V+\gamma^5)v(p_4) - \bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V-\gamma^5)v(p_4)]\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

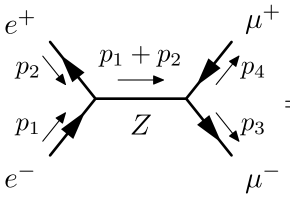
$$M_2 + M_3 \Rightarrow \left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{4im_e m_\mu}{s-\xi^2 M_Z^2}\left\{\frac{M_Z^2 - \xi^2 M_Z^2 + s - M_Z^2}{M_Z^2(s - M_Z^2)}\right\}\bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4) \tag{12}$$

IV La sezione d'urto differenziale



$$\Longrightarrow M_1 = (-ie)^2\,\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4) \tag{13}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_1|^2 = \frac{2e^4}{s^2}\{(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)s\} \tag{14}$$



$$\Longrightarrow M_2 = \left(\frac{ig}{4c}\right)^2\bar{v}(p_1)\gamma^\mu(V+\gamma^5)u(p_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2 - M_Z^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(V+\gamma^5)v(p_4) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{spin}|M_2|^2 = 2\left(\frac{g}{4c}\right)^4\frac{1}{(s-M_Z^2)^2}\{&[(V^2+1)^2 + 4V^2](u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &+[(V^2+1)^2 - 4V^2](t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &+2(V^4-1)[(m_\mu^2 + m_e^2)s - 4m_\mu^2 m_e^2] \\ &+8m_\mu^2 m_e^2 (V^2-1)^2\} \end{aligned} \tag{16}$$

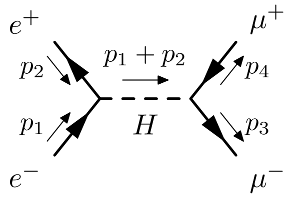
$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{spin}M_1 M_2^\dagger = 2e^2\left(\frac{g}{4c}\right)^2\frac{1}{s(s-M_Z^2)}\{&(V^2+1)(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &+(V^2-1)(t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 \\ &+2V^2(m_e^2 + m_\mu^2)s\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= (2\pi)^{4-6}\cdot F\cdot\int \mathrm{d}\underset{2\to2}{PS}\cdot\frac{1}{4}\sum_{spin}|M|^2\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{2s^{\frac12}(s-4m_e^2)^{\frac12}}\cdot\frac{\pi}{2s^{\frac12}(s-4m_e^2)^{\frac12}}\cdot\frac{1}{4}\sum_{spin}\Big\{|M_1|^2+|M_2|^2+2M_1M_2^\dagger\Big\}\end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(s-4m_e^2)^{\frac12}(s-4m_\mu^2)^{\frac12}}{2}\frac{d\sigma}{dt} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{32\pi s}\left(\frac{s-4m_\mu^2}{s-4m_e^2}\right)^{\frac12}\Bigg\{\frac{e^4}{s^2}\Big\{s^2+(s-4m_\mu^2)(s-4m_e^2)\cos^2\theta+4(m_e^2+m_\mu^2)s\Big\}\\ &+\left(\frac{g}{4c}\right)^4\frac{1}{(s-M_Z^2)^2}\Big\{(V^2+1)^2\left[s^2+(s-4m_e^2)(s-4m_\mu^2)\cos^2\theta\right]+4V^2s(s-4m_e^2)^{\frac12}(s-4m_\mu^2)^{\frac12}\cos\theta\\ &+2(V^4-1)\left[(m_\mu^2+m_e^2)s-4m_\mu^2m_e^2\right]+8m_\mu^2m_e^2(V^2-1)^2\Big\}\\ &+2e^2\left(\frac{g}{4c}\right)^2\frac{1}{s(s-M_Z^2)}\Big\{V^2\left[s^2+(s-4m_e^2)(s-4m_\mu^2)\cos^2\theta\right]+2s(s-4m_e^2)^{\frac12}(s-4m_\mu^2)^{\frac12}\cos\theta\\ &+4V^2(m_e^2+m_\mu^2)\Big\}\Bigg\}\end{aligned} \tag{20}$$

V L'ampiezza del diagramma con linea interna di Higgs



$$\Longrightarrow M_H = \left(\frac{ig}{2}\right)^2\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\bar{v}(p_1)u(p_2)\frac{i}{(p_1+p_2)^2-M_H^2}\bar{u}(p_3)v(p_4) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_H|^2 = \left(\frac{ig}{2}\right)^4\left(\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\right)^2\frac{1}{(s-M_H^2)^2}\{&(s-2m_e^2)(s-2m_\mu^2)\\ &-2(m_e^2+m_\mu^2)s+8m_e^2m_\mu^2\}\end{aligned} \tag{22}$$

Riferimenti bibliografici

[1] George Sterman. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.

[2] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge University Press, 1994.