Il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ in approssimazione di Born nel Modello Standard

Mario Ciacco
Matricola 835681

In questo *essay* si sono calcolati i termini d'interazione fermione-antifermione-scalare nel Modello Standard necessari per il calcolo completo dell'ampiezza del processo ed è verificata l'invarianza di gauge dell'elemento di matrice S all'ordine perturbativo più basso. Viene poi presentato il calcolo della sezione d'urto differenziale in cui si trascurano i contributi dell'interazione con il campo scalare. In conclusione si calcola l'ampiezza relativa al diagramma con linea del campo di Higgs come esempio di interazione fermione-scalare.

I Introduzione

Le interazioni elettrodeboli sono descritte in modo unificato nella lagrangiana con gruppo di simmetria $SU(2) \times U(1)$. In tale modello, i leptoni interagiscono con i quattro campi di gauge $W^{\pm}_{\mu}$, Z_μ e A_μ, e con il doppietto scalare complesso Φ necessario per l'introduzione dei termini di massa. Nel caso particolare del processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni, la parte di lagrangiana d'interazione $\mathcal{L}_{int}$ da considerare è formata da due contributi separati. Il primo è il termine di correnti neutre

$$\mathcal{L}_{nc} = \sum_{i=e,\mu} \left\{ \frac{g}{4\cos\theta_W} \bar{\ell}_i \gamma^\mu (4\sin^2\theta_W - 1 + \gamma^5) \ell_i Z_\mu - e\bar{\ell}_i \gamma^\mu \ell_i A_\mu \right\} \tag{1}$$

da cui si estrae il vertice a tre linee con il campo Z_μ (risp. A_μ) e la coppia leptone-antileptone, di valore $(2\pi)^4 i(g/4c)\gamma^\mu(V+\gamma^5)$ (risp. $-(2\pi)^4 ie\gamma^\mu$) nello spazio degli impulsi. Si è posto $c \equiv \cos\theta_W$ e $V \equiv 4\sin^2\theta_W + 1$. Il secondo contributo è dato dall'interazione dei campi dell'elettrone e del muone con le componenti del campo Φ.

II L'interazione con il campo scalare

La lagrangiana del campo scalare è

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - \frac{\lambda}{4!}\left(|\Phi|^2 - F^2\right)^2, \qquad \lambda > 0 \text{ e } F \neq 0 \tag{2}$$

dove D_μ è la derivata covariante in termini dei campi di gauge e dei generatori del gruppo di simmetria. La costante F determina il valore di aspettazione sul vuoto del campo Φ, classicamente corrispondente al valore assunto da $|\Phi|$ nel minimo del potenziale. Si parametrizza Φ in termini di F e se ne esprime la seconda componente attraverso una combinazione del campo fisico di Higgs H e del campo ϕ^0. Il fattore $2^{-\frac{1}{2}}$ permette di ottenere i corretti termini cinetici per i campi reali

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\phi_1 \\ H + i\phi^0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

L'interazione con i campi fermionici è descritta attraverso gli accoppiamenti di Yukawa

$$\mathcal{L}_{sf} = -\sum_{i=e,\mu} \left\{ y_i \bar{\psi}_{i,L} \Phi \psi_{i,R} + h.c. \right\} \tag{4}$$

dove y_j è la costante di accoppiamento di Yukawa, proporzionale al rapporto tra la massa m_j del fermione e la massa M_W dei bosoni $W^\pm$

$$y_j = \frac{1}{\sqrt{2}} g \frac{m_j}{M_W} \tag{5}$$

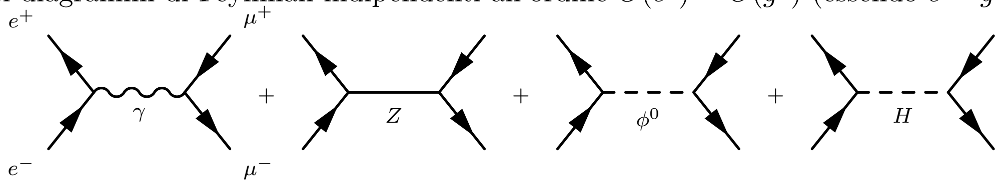
I campi fermionici sono introdotti in (4) con $\bar{\psi}_{j,L} = 2^{-1}\left(\bar{\nu}_j, \bar{\ell}_j\right)(1+\gamma^5)$ e $\psi_{j,R} = 2^{-1}(1+\gamma^5)\ell_j$. Inserendo la parametrizzazione (3) nella lagrangiana d'interazione (4), isolando la seconda componente del doppietto, si esplicitano i termini di lagrangiana d'interazione per i singoli campi.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sf} \Longrightarrow \quad & -\frac{y_j}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_j & \bar{\ell}_j\end{pmatrix}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\begin{pmatrix} - \\ \sqrt{2}F + H + i\phi^0\end{pmatrix}\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\ell_j \\
& -\frac{y_j}{\sqrt{2}}\bar{\ell}_j\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\begin{pmatrix} - & \sqrt{2}F + H - i\phi^0\end{pmatrix}\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\begin{pmatrix}\nu_j \\ \ell_j\end{pmatrix} \\
= & -y_j\bar{\ell}_j F\ell_j - \frac{y_j}{\sqrt{2}}\bar{\ell}_j H\ell_j - i\frac{y_j}{\sqrt{2}}\bar{\ell}_j\gamma^5\phi^0\ell_j
\end{aligned} \tag{6}
$$

Il primo termine è responsabile della massa dei fermioni. I termini d'interazione relativi rispettivamente a H e ϕ^0 sono dati dal prodotto di campi non equivalenti, pertanto i vertici corrispondenti si deducono in modo diretto dalla lagrangiana. Utilizzando l'espressione (5) per la costante di accoppiamento, si ottengono rispettivamente i valori $-(2\pi)^4 i[2^{-1}g(m_j/M_W)]$ e $(2\pi)^4 2^{-1}g(m_j/M_W)\gamma^5$ nello spazio degli impulsi.

III L'indipendenza dell'elemento di matrice S dalla scelta di gauge

La teoria che si sta considerando è una teoria di gauge, pertanto la sua quantizzazione richiede l'introduzione di un termine *gauge fixing* secondo il metodo di Faddeev-Popov. In analogia a quanto sviluppato per il modello di Higgs abeliano, è possibile introdurre una condizione dipendente da un parametro ξ e definire così la famiglia di gauge R_ξ. In questo caso ϕ^0 è il campo non fisico, presente nello spettro della teoria con ξ di valore generico, associato al campo Z_μ. In generale, quindi, data la lagrangiana d'interazione complessiva $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{nc} + \mathcal{L}_{sf}$, si isolano i seguenti diagrammi di Feynman indipendenti all'ordine $O(e^2) \sim O(g^2)$ (essendo $e = g\sin\theta_W$)



(7)

Per calcolare l'elemento di matrice S si parte dal calcolo dell'ampiezza, in cui si media sullo spin dei fermioni entranti e si somma sullo spin dei fermioni uscenti

$$
\frac{1}{4}\sum_{spin}|M|^2 = \frac{1}{4}\sum_{spin}|M_1 + M_2 + M_3 + M_4|^2 \tag{8}
$$

dove gli indici degli elementi M_i si riferiscono ai diagrammi precedenti nell'ordine con cui sono riportati. In analogia ai risultati del calcolo nel modello di Higgs abeliano, si possono esprimere i propagatori dei campi Z_μ e ϕ^0 nello spazio degli impulsi come

$$
iG_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - M_Z^2}\left\{g^{\mu\nu} - (1-\xi^2)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi^2 M_Z^2}\right\}; \qquad i\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - \xi^2 M_Z^2} \tag{9}
$$

Data la dipendenza da ξ dei propagatori, sia M_2 sia M_3 dipendono dal valore di ξ. Affinché la teoria sia consistente, si deve verificare l'indipendenza dell'elemento di matrice S dalla scelta del gauge. Si considera quindi la somma di questi due termini e in particolare si isolano le parti dipendenti dal parametro ξ

$$
\begin{aligned}
M_2 + M_3 \Rightarrow & -\left(\frac{g}{4c}\right)^2\frac{i(1-\xi^2)}{s^2 - M_Z^2}\frac{(p_1+p_2)^\mu(p_3+p_4)^\nu}{s - \xi^2 M_Z^2}\bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V+\gamma^5)u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V+\gamma^5)v(p_4) \\
& + \left(\frac{g}{2}\right)^2\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\frac{i}{s - \xi^2 M_Z^2}\bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4)
\end{aligned} \tag{10}
$$

In (10) si sono associati i quadrimpulsi p_i ($i = 1, \ldots, 4$) alle linee esterne del diagramma e si è applicata la conservazione del quadrimpulso nei vertici interni del diagramma. Si è inoltre utilizzato l'invariante di Mandelstam $s = (p_1 + p_2)^2$ per il quadrato del quadrimpulso associato alle linee interne. Considerando esclusivamente il termine M_2 è possibile utilizzare le equazioni di Dirac $\not{p}u(p) = mu(p)$ e $\not{p}v(p) = -mv(p)$ e quelle rispettive per gli spinori $\bar{u}(p)$ e $\bar{v}(p)$ per eliminare i quadrimpulsi p_i nell'espressione (10) ed esplicitare la dipendenza dalle masse m_e e m_μ rispettivamente dell'elettrone e del muone

$$\begin{aligned} M_2 \Rightarrow -\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{i(1-\xi^2)}{s^2 - M_Z^2}\frac{1}{s - \xi^2 M_Z^2} \Big\{ & m_e[-\bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V+\gamma^5)u(p_2) + \bar{v}(p_1)\gamma_\mu(V-\gamma^5)u(p_2)] \\ & \times m_\mu[\bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V+\gamma^5)v(p_4) - \bar{u}(p_3)\gamma_\nu(V-\gamma^5)v(p_4)]\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

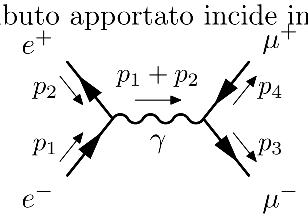
Si elimina la dipendenza dai termini di accoppiamento vettoriale e si può mettere in evidenza un fattore $m_e m_\mu$ comune anche a M_3. In M_3 si può utilizzare la relazione $M_W = cM_Z$ che lega le masse dei bosoni $W^\pm$ e Z. La somma dei due contributi è infine esprimibile come

$$M_2 + M_3 \Rightarrow \left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{4im_e m_\mu}{s - \xi^2 M_Z^2}\left\{\frac{M_Z^2 - \xi^2 M_Z^2 + s - M_Z^2}{M_Z^2(s - M_Z^2)}\right\}\bar{v}(p_1)\gamma^5 u(p_2)\bar{u}(p_3)\gamma^5 v(p_4) \tag{12}$$

Il numeratore in parentesi è uguale al denominatore ad esso precedente e questi sono gli unici termini dipendenti dal parametro ξ. Si verifica pertanto a quest'ordine perturbativo l'indipendenza dalla scelta di ξ. Si osserva inoltre che il termine ottenuto con queste manipolazioni corrisponde all'elemento M_3 che si calcolerebbe con la scelta di gauge normalizzabile $\xi = 1$ o alternativamente, riutilizzando le equazioni di Dirac, al termine di M_2 dovuto alla parte in $p^\mu p^\nu / M_Z^2$ del propagatore del campo Z_μ nel gauge unitario ($\xi \to \infty$).

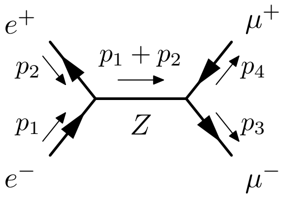
IV La sezione d'urto differenziale

Si procede nel calcolo dell'elemento di matrice S scegliendo $\xi = 1$. Si trascurano inoltre i diagrammi relativi ai contributi dei campi scalari. Tale approssimazione è giustificata dal valore della costante d'accoppiamento di Yukawa: questa infatti è proporzionale alla costante adimensionale g attraverso il rapporto m_j/M_W. Considerando elettroni e muoni, si verifica che $m_e/M_W < m_\mu/M_W \simeq 10^{-3}$. Poiché tale costante è presente elevata al quadrato nei termini d'interferenza di M_3 e M_4 con M_1 e M_2 e alla quarta potenza negli altri termini del calcolo di $|M|^2$, il contributo apportato incide in misura minima sul calcolo dell'elemento di matrice S.



$$\Longrightarrow M_1 = (-ie)^2\,\bar{v}(p_1)\gamma^\mu u(p_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4) \tag{13}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_1|^2 = \frac{2e^4}{s^2}\{(u - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + (t - m_e^2 - m_\mu^2)^2 + 2(m_e^2 + m_\mu^2)s\} \tag{14}$$



$$\Longrightarrow M_2 = \left(\frac{ig}{4c}\right)^2 \bar{v}(p_1)\gamma^\mu(V+\gamma^5)u(p_2)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2 - M_Z^2}\bar{u}(p_3)\gamma^\nu(V+\gamma^5)v(p_4) \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_2|^2 = 2\left(\frac{g}{4c}\right)^4 \frac{1}{(s-M_Z^2)^2}\{&[(V^2+1)^2+4V^2](u-m_e^2-m_\mu^2)^2 \\
&+[(V^2+1)^2-4V^2](t-m_e^2-m_\mu^2)^2 \\
&+2(V^4-1)[(m_\mu^2+m_e^2)s-4m_\mu^2 m_e^2] \\
&+8m_\mu^2 m_e^2(V^2-1)^2\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

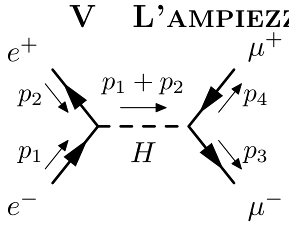
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spin}M_1 M_2^\dagger = 2e^2\left(\frac{g}{4c}\right)^2 \frac{1}{s(s-M_Z^2)}\{&(V^2+1)(u-m_e^2-m_\mu^2)^2 \\
&+(V^2-1)(t-m_e^2-m_\mu^2)^2 \\
&+2V^2(m_e^2+m_\mu^2)s\}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt} &= (2\pi)^{4-6}\cdot F\cdot\int \mathrm{d}\underset{2\to 2}{PS}\cdot\frac{1}{4}\sum_{spin}|M|^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}(s-4m_e^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\pi}{2s^{\frac{1}{2}}(s-4m_e^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{4}\sum_{spin}\left\{|M_1|^2+|M_2|^2+2M_1M_2^\dagger\right\}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(s-4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s-4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\frac{d\sigma}{dt}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{32\pi s}\left(\frac{s-4m_\mu^2}{s-4m_e^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg\{\frac{e^4}{s^2}\left\{s^2+(s-4m_\mu^2)(s-4m_e^2)\cos^2\theta+4(m_e^2+m_\mu^2)s\right\} \\
&+\left(\frac{g}{4c}\right)^4\frac{1}{(s-M_Z^2)^2}\Big\{(V^2+1)^2\left[s^2+(s-4m_e^2)(s-4m_\mu^2)\cos^2\theta\right]+4V^2 s(s-4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s-4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta \\
&+2(V^4-1)\left[(m_\mu^2+m_e^2)s-4m_\mu^2m_e^2\right]+8m_\mu^2m_e^2(V^2-1)^2\Big\} \\
&+2e^2\left(\frac{g}{4c}\right)^2\frac{1}{s(s-M_Z^2)}\Big\{V^2\left[s^2+(s-4m_e^2)(s-4m_\mu^2)\cos^2\theta\right]+2s(s-4m_e^2)^{\frac{1}{2}}(s-4m_\mu^2)^{\frac{1}{2}}\cos\theta \\
&+4V^2(m_e^2+m_\mu^2)\Big\}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

V L'ampiezza del diagramma con linea interna di Higgs



$$
\Longrightarrow M_H = \left(\frac{ig}{2}\right)^2\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\bar{v}(p_1)u(p_2)\frac{i}{(p_1+p_2)^2-M_H^2}\bar{u}(p_3)v(p_4)
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{spin}|M_H|^2 = \left(\frac{ig}{2}\right)^4\left(\frac{m_e m_\mu}{M_W^2}\right)^2\frac{1}{(s-M_H^2)^2}\{&(s-2m_e^2)(s-2m_\mu^2) \\
&-2(m_e^2+m_\mu^2)s+8m_e^2m_\mu^2\}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Riferimenti bibliografici

[1] George Sterman. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1993.

[2] Martinus Veltman. *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*. Cambridge University Press, 1994.

[3] *Appunti del corso*.