03 **Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów**
Analiza częstotliwościowa - podstawy
prof. dr hab. inż. Tomasz Zieliński, dr inż. Jarosław Bułat

2016.02.17

1. DFT sygnału harmonicznego (1 pkt)

Wyznacz macierz *A* transformacji DFT:

$$A(k,n)=\frac{1}{\sqrt{N}}W_N^{-kn} \quad \text{, gdzie} \quad W_N=e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad , \quad k,n=0,\ldots,N-1 \quad \text{to wiersze i kolumny macierzy } \mathbf{A}$$

dla N=100 i oblicz DFT ($\mathbf{X}=\mathbf{A}\mathbf{x}$)[1] następującego sygnału $\mathbf{x}$:

$$x(t)=A_1\cos(2\pi f_1 t+\phi_1)+A_2\cos(2\pi f_2 t+\phi_2)$$

spróbkowanego z częstotliwością f_s=1000 Hz, mającego N=100 próbek i będącego sumą dwóch kosinusoid, o częstotliwościach f_1=100 Hz i f_2=200 Hz, amplitudach A_1=100 i A_2=200 oraz kątach fazowych $\varphi_1=\pi/7$ i $\varphi_2=\pi/11$.

Narysuj widmo $\mathbf{x}$ (część rzeczywista, urojona, moduł, faza), wyskaluj oś częstotliwości w hercach. Zauważ, że część rzeczywista współczynnika widmowego mówi ile w sygnale jest kosinusa o danej częstotliwości, a część urojona – ile sinusa (do składowych sygnału zastosuj wzór na kosinusa sumy kątów: $cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b)$). Zauważ, że część rzeczywista jest symetryczna (to samo) względem częstotliwości $f_s/2$ (próbka $N/2+1$), a część urojona – asymetryczna (wartość zanegowana).

Wyznacz macierz rekonstrukcji $\mathbf{B}$ jako wynik sprzężenia zespolonego i transpozycji macierzy $\mathbf{A}$ (`B=A'`). Zrekonstruuj sygnał na podstawie $\mathbf{X}$ ($\mathbf{x_r}=\mathbf{BX}$) i porównaj go z oryginałem $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x_r}==\mathbf{x}$?). Zastąp operację `X=Ax` poprzez `X=fft(x)`, zaś `xr=BX` – przez `xr=ifft(X)`. Czy $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x_r}$ są takie same jak poprzednio? O ile wartości nowego $\mathbf{X}$ są różne od poprzednich i czy jest to związane z wartością N? Zmień f_1=100 Hz na f_1=125 Hz, oblicz i wyświetl widmo jak poprzednio.

2. DtFT (1 pkt)

Ustaw f_1=125 Hz i przyjmij $\mathbf{X_1}=\mathbf{X}$ (z poprzedniego ćwiczenia). Następnie zwiększ rozdzielczość częstotliwości poprzez dołączenie M=100 zer na końcu sygnału $\mathbf{x}$ (otrzymujemy sygnał $\mathbf{x_z}$) oraz wykonaj skalowanie `X2=fft(xz)./(N+M)` (otrzymujemy $\mathbf{X_2}$), które jest obliczane według wzoru:

$$X_2(k)=\frac{1}{N+M}\sum_{n=0}^{N+M-1} x_z(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

gdzie $k=0,1,\ldots,N+M$. Zwróć uwagę, że sygnał $\mathbf{x_z}$ ma teraz długość $N+M$ próbek i jest rozszerzony M zerami.

Następnie oblicz X_3 stosując wzór na DtFT(x):

$$X_3(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{f}{fs}n}$$

stosując wartości f=0:0.25:1000 Hz. Wyznacz trzy widma:

- $\mathbf{X_1}$ czyli DFT o długości N, sygnału próbkowanego częstotliwością f_s gdzie wektor częstotliwości można wyliczyć jako: `fx1=fs*(0:N-1)/N`
- $\mathbf{X_2}$ (DFT z dodaniem zer), wyznacz odpowiedni wektor `fx2`
- $\mathbf{X_3}$ (DtFT), wyznacz odpowiedni wektor `fx3`.

Narysuj wartości bezwzględne tych widm na jednym rysunku za pomocą instrukcji: `plot(fx1,X1,'o',fx2,X2,'bx',fx3,X3,'k-')`. Następnie oblicz $\mathbf{X_3}$ dla f=-2000:0.25:2000 Hz ($-2f_s:df:2f_s$) i ponownie narysuj trzy widma $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, $\mathbf{X_3}$ na jednym rysunku. Jak widać obliczone widma $\mathbf{X_1}$ i $\mathbf{X_2}$ są (a)symetryczne, a widmo $\mathbf{X_3}$ jest okresowe. Dlatego wystarczy rysować widma tylko dla $f=0:df:f_s/2$.

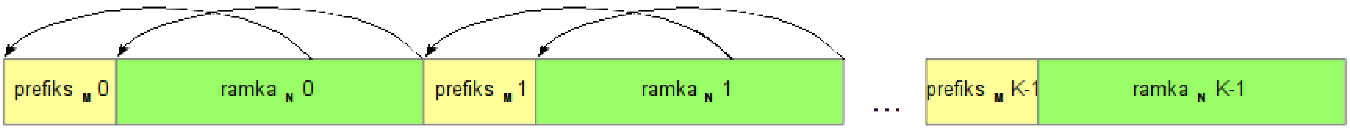
1 Konwencja zapisu transformaty Fouriera jest taka, że jej wynik (wektor $\mathbf{X}$) jest zapisywany dużą literą, natomiast wektor wejściowy $\mathbf{x}$ jest pisany małą literą. Jest to trochę mylące, ponieważ $\mathbf{X}$ sugeruje macierz, a w tym kontekście jest wektorem o rozmiarze takim samym jak $\mathbf{x}$.

3. DtFT, rola funkcji okien i liczby próbek (1 pkt)

Dla sygnału z ćwiczenia 1 ustaw `f=0:0.1:500` (dla DtFT), N=100, f_1=100 Hz i f_2=125 Hz, $A1$=1 i $A2$=0.0001. Oblicz DtFT i wyświetl widmo. Czy widzisz obie składowe sygnału? Następnie wymnóż próbki sygnału kolejno z oknem prostokątnym, Hamminga, Blackmana, Czebyszewa (tłumienie 100 dB) i Czebyszewa (tłumienie 120 dB), oblicz DtFT i wyświetl moduły pięciu widm na jednym rysunku. Następnie ustaw w ostatnim zadaniu N=1000 i powtórz go ale tylko dla różnych wartości tłumienia okna Czebyszewa.

4. Analiza częstotliwościowa sygnału ADSL (2 pkt)

Wykonaj analizę częstotliwościową dostarczonego sygnału ADSL. Sygnał zawiera K=8 ramek o długości N=512 próbek z prefiksem M=32 położonych jak na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Ramki sygnału ADSL

Każda ramka N próbek ma zaalokowanych kilkanaście różnych podkanałów częstotliwościowych czyli dane znajdują się na odpowiednich ,,harmonicznych''. Ramki sygnału rozpoczynają się od początku sygnału, tak więc m-ty prefiks rozpoczyna się w próbce $m*(N+M)+1$.

Zadania:

- wykonać *N*-punktowe DFT (FFT) każdej ramki (po usunięciu prefiksu)
- wyznaczyć, które harmoniczne były w niej używane.

Sygnał do analizy znajduje się w pliku `lab_03.mat`. Użyj sygnału ze wektora o nazwie `x_??` gdzie `??` jest liczbą otrzymaną jako rezultat wykonania: `mod(`*`twoj_numer_indeksu`*`, 16)+1`.

5. Analiza rzeczywistego sygnału DAB (opcjonalnie, +1 pkt)

W rzeczywistym sygnale DAB w przerwie zerowej (*Null Symbol*) może być przesyłana dodatkowa informacja. Jest to suma prostych sygnałów sinusoidalnych. W laboratorium 01 napisałeś program do detekcji próbek, należących do sygnału *Null Symbol*. Teraz dodaj do niego wywoływanie funkcji `fft(...)` na próbkach „zerowych", wyskaluj otrzymane widma częstotliwościowe i je wyświetl. Częstotliwość próbkowania fs=2.048 MHz.

Wykorzystując spostrzeżenia z zadania 5 z Lab02, wyznacz jakie według ciebie sekwencje bitów były przesyłane w sygnałach DAB, analizowanych w zadaniu 4 Lab1. Narysuj na jednym rysunku „konstelację obrotów" wykonywanych na jednej częstotliwości nośnej, czyli wszystkie obroty, które wykonano na wybranej częstotliwości w jednej ramce DAB (rysunek: `Imag()` w funkcji `Real()` kolejnych zespolonych liczb obracających, dla 76 bloków danych; bez linii łączących kolejne wartości kątów obrotu „o" oraz z tymi liniami). Narysuj na jednym rysunku zmienność wartości kąta obrotu dla wszystkich częstotliwości (w poziomie – numer obrotu, w pionie – jego wartość w stopniach; zaznacz wartości kąta symbolem „o", nie łącz początkowo tych symboli liniami, potem je połącz – otrzymasz wiele linii na jednym rysunku, każda dla innej częstotliwości - czyli tzw. wykres oczkowy)