Radio FM

$x(t)$ - rzeczywisty (nie zespolony!) sygnał radiowy (L+R, P, L-R, RDS), patrz normy oraz program fm_koder.m.

Mamy takie samo widmo dla częstotliwości dodatnich i ujemnych, (a)symetria widma .

##############

NADAJNIK

##############

Ver. 1

Modulator FM sygnału o częstotliwości nośnej f_0=f_c [MHz} (K_{V2F} – *voltage-to-freq coef*; nazywany też K_{VCO}), czyli od razu także UP-konwerter na wybraną częstotliwość nośną f_c:

$$x_{FM-UP}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_{V2F}\int_0^t x(t)\,\mathrm{dt}\right) = \cos\left(2\pi f_c t + \varphi(t)\right) \tag{1}$$

UWAGA dot. analogowego odbiornika. Odtworzenie sygnału $x(t)$ poprzez różniczkowanie $x_{FM-UP}(t)$:

$$\frac{dx_{FM-UP}(t)}{dt} = -\left(2\pi f_c + 2\pi K_{V2F}x(t)\right)\cdot\sin\left(2\pi f_c t + 2\pi K_{V2F}\int_0^t x(t)\,\mathrm{dt}\right)$$

Sin() jest szybkozmienny. Przeprowadzamy detekcję jego wolnozmiennej obwiedni. Skąd otrzymujemy $\left(2\pi f_c + 2\pi K_{V2F}x(t)\right)$, a stąd $x(t)$. Filtr różniczkujący powinien być tylko w interesującym nas zakresie częstotliwości (wokół f_c), poza nim – pasmo zaporowe.

Ver. 2

Najpierw modulator FM sygnału o częstotliwości nośnej f_0=0 Hz (baseband), wokół 0 Hz. Z tego powodu musimy pracować na zespolonym sygnale analitycznym aby nie było „kopii" (przenikania): częstoliwości dodatnie ↔ ujemne. Równania:

$$z_{FM}(t) = \exp\left(j\cdot 2\pi\left(0\cdot t + K_{V2F}\int_0^t x(t)dt\right)\right) = \exp\left(j\cdot 2\pi K_{V2F}\int_0^t x(t)dt\right) = \exp\left(j\cdot\varphi(t)\right)$$

$$z_{FM}(t) = e^{j\varphi(t)} = \cos\left(\varphi(t)\right) + j\sin\left(\varphi(t)\right) = I(t) + jQ(t), \qquad \varphi(t) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Q}{I}\right)$$

Potem UP-konwerter częstotliwości sygnału zespolonego (bez „kopii" częstotliwości ujemnych):

$$z_{FM-UP}(t) = z_{FM}(t)e^{j2\pi f_c t} = e^{j\varphi(t)}e^{j2\pi f_c t} = e^{j(2\pi f_c t + \varphi(t))}$$

Potem pozostawiamy tylko część rzeczywistą sygnału:

$$x_{FM-UP}(t) = \mathrm{Re}\left(z_{FM-UP}(t)\right) = \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) \tag{2a}$$

czyli pojawia się kopia widma w częstotliwościach ujemnych. Otrzymujemy to samo co w (1). W eterze jest sygnał o wartościach rzeczywistych.

Układowo realizuje się konwersję do wyższych częstotliwości za pomocą pomnożenia cos($\varphi(t)$) przez cos($2\pi f_c t$) a sin($\varphi(t)$) przez −sin($2\pi f_c t$):

$$x_{FM-UP}(t) = \cos(\varphi(t))\cos(2\pi f_c t) + \sin(\varphi(t))(-\sin(2\pi f_c t)) \quad (2b)$$

##############

ODBIORNIK

##############

DOWN-konwerter częstotliwości (pomnożenie sygnału odebranego osobno przez **cos() oraz -sin()**):

$$y_I(t) = x_{FM-UP}(t)\cos(2\pi f_n t + \theta) = \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))\cos(2\pi f_n t + \theta)$$

$$y_Q(t) = x_{FM-UP}(t)\left(-\sin(2\pi f_n t + \theta)\right) = -\cos(2\pi f_c t + \varphi(t))\sin(2\pi f_n t + \theta)$$

Dla $y_I(t)$ stosujemy wzór:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta):$$

i otrzymujemy:

$$y_I(t) = \cos(2\pi(f_c - f_n)t + (\varphi(t) - \theta)) - \sin(2\pi f_c t + \varphi(t))\sin(2\pi f_n t + \theta) \quad (3a)$$

Dla $y_Q(t)$ stosujemy wzór:

$$-\cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

i otrzymujemy:

$$y_Q(t) = \sin(2\pi(f_c - f_n)t + (\varphi(t) - \theta)) - \sin(2\pi f_c t + \varphi(t))\cos(2\pi f_n t + \theta) \quad (3b)$$

Dalej (LPF()=Low Pass Filter odcinający drugie, szybkozmienne składniki we wzorach na $y_I(t)$ (3a) i $y_Q(t)$ (3b):

$$y_I^{LP}(t) = LPF\left(y_I(t)\right) = \cos(2\pi(f_c - f_n)t + (\varphi(t) - \theta)) \quad (4a)$$

$$y_Q^{LP}(t) = LPF\left(y_Q(t)\right) = \sin(2\pi(f_c - f_n)t + (\varphi(t) - \theta)) \quad (4b)$$

Ponieważ teraz ponownie sygnał jest modulowany w częstotliwości wokół 0 Hz (lub blisko niej), musimy pracować na zespolonym sygnale analitycznym, aby nie było „kopii" (przenikania): częstotliwości dodatnie ↔ ujemne:

$$y_{IQ}^{LP}(t) = y_I^{LP}(t) + j \cdot y_Q^{LP}(t) = e^{j\alpha(t)}, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha(t) = (2\pi(f_c - f_n)t + (\varphi(t) - \theta)) \quad (4c)$$

Wersja 1. Potem demodulacja (odtworzenie kąta fazowego $\alpha(t)$ tak jak w modulacjach PSK):

$$\alpha(t) = \text{arctg}\left(\frac{\text{Re}\left(y_{IQ}^{LP}(t)\right)}{\text{Im}\left(y_{IQ}^{LP}(t)\right)}\right) = \text{arctg}\left(\frac{y_Q^{LP}(t)}{y_I^{LP}(t)}\right) \quad (5)$$

a następnie odtworzenie częstotliwości chwilowej (przypadek radia FM), metodą różniczkowania kąta $\alpha(t)$:

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\alpha(t)}{dt} = (f_c - f_n) + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi(t)}{dt} = (f_c - f_n) + x(t) \quad (6)$$

skąd:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\alpha(t)}{dt} - (f_c - f_n) \quad (6)$$

Różnica ($f_c - f_n$) nas „nie boli”, gdyż składowa stała „nie gra” w przetwarzaniu dźwięku.

W postaci cyfrowej mamy (wykorzystanie (5), zaniedbujemy ($f_c - f_n$)): (7)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\alpha(n)}{dn} == \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha(n)-\alpha(n-1)}{1} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y_Q^{LP}(n)}{y_I^{LP}(n)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y_Q^{LP}(n-1)}{y_I^{LP}(n-1)}\right)\right)$$

Wersja 2. Wzór (7) można uprościć do postaci:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\cdot \measuredangle\left[y_{IQ}^{LP}(n)\cdot\left(y_{IQ}^{LP}(n-1)\right)^{*}\right] \tag{8}$$

ponieważ:

$$d\alpha(n) = \measuredangle\left[y_{IQ}^{LP}(n)\cdot\left(y_{IQ}^{LP}(n-1)\right)^{*}\right] = \measuredangle\left[e^{j\alpha(n)}e^{-j\alpha(n-1)}\right] = \measuredangle\left[e^{j(\alpha(n)-\alpha(n-1))}\right] = \measuredangle e^{jd\alpha(n)} \tag{9}$$

Wniosek. W analogowo-cyfrowym odbiorniku analogowego radia FM otrzymujemy na wejściu jego części cyfrowej sekwencje próbek $y_I^{LP}(n)$ i $y_Q^{LP}(n)$, z których tworzymy sygnał zespolony (4c), a następnie korzystamy z (8) w celu wykonania demodulacji częstotliwościowej. Sygnał (4c)(10) jest sztucznym tworem umożliwiającym proste odtworzenie $x(n)$.

PODSUMOWANIE

NADAJNIK w pełni analogowy

$x(t)$ – hybrydowy sygnał stacji radia FM

$\varphi(t) = 2\pi K_{V2F}\int_0^t x(t)dt$ - zmienny kąt

$x_{FM}(t) = e^{j\varphi(t)}$ - modulacja FM wokół 0 Hz

Potem UP-konwerter częstotliwości:

$$x_{FM-UP}(t) = \operatorname{Re}\left(e^{j\varphi(t)}e^{j2\pi f_c t}\right) = \cos(2\pi f_c t + \varphi(t)) = \cos(\varphi(t))\cdot\cos(2\pi f_c t) + \sin(\varphi(t))\cdot(-\sin(2\pi f_c t))$$

ODBIORNIK w pełni analogowy

DOWN-konwerter częstotliwości:

$$y_I^{LP}(t) = \operatorname{LowPass}\left[x_{FM-UP}(t)\cos(2\pi f_c t)\right]$$

$$y_Q^{LP}(t) = \operatorname{LowPass}\left[x_{FM-UP}(t)\left(-\sin(2\pi f_c t)\right)\right]$$

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\left(y_{IQ}^{LP}(t)\right)}{\operatorname{Re}\left(y_{IQ}^{LP}(t)\right)}\right)$$

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\alpha(t)}{dt} \quad \text{(estymata } x(t)\text{)}$$

NADAJNIK

Część cyfrowa

$x(n)$ – hybrydowy sygnał stacji radia FM

$$\varphi(n) = 2\pi K_{V2F} \sum_{k=0}^{n} x(n)$$ - zmienny kąt

$$x_{FM}(n) = e^{j\varphi(n)}$$ - modulacja FM wokół 0 Hz

Matlab (patrz program fm_koder.m)

```
x=(L+R)+c19+(L-R).*cos(c38)+...
fi=2*pi*K*cumsum(x)
xfm = exp(j*fi)
```

Część analogowa

$$x_{FM}(t) = D/A\{x_{FM}(n)\}$$

Potem UP-konwerter częstotliwości:

$$x_{FM-UP}(t) = \mathrm{Re}\left(x_{FM}(t)e^{j2\pi f_c t}\right) = \mathrm{Re}\left(x_{FM}(t)\right)\cdot\cos(2\pi f_c t) + \mathrm{Im}\left(x_{FM}(t)\right)\cdot(-\sin(2\pi f_c t))$$

ODBIORNIK

Część analogowa

$$y_I^{LP}(n) = A/D\left\{\mathrm{LowPass}\left[x_{FM-UP}(t)\cos(2\pi f_c t)\right]\right\}$$

$$y_Q^{LP}(n) = A/D\left\{\mathrm{LowPass}\left[x_{FM-UP}(t)\left(-\sin(2\pi f_c t)\right)\right]\right\}$$

Część cyfrowa:

Wejście: $y_I^{LP}(n)$ i $y_Q^{LP}(n)$

$$y_{IQ}^{LP}(n) = y_I^{LP}(n) + j\cdot y_Q^{LP}(n)$$

$$d\alpha(n) = \sphericalangle\left[y_{IQ}^{LP}(n)\cdot\left(y_{IQ}^{LP}(n-1)\right)^*\right]$$

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\cdot d\alpha(n)$$

MATLAB

```
IQ = I + j*Q;
dfi = atan2( imag(IQ(1:end-1)), real(IQ(2:end));
x = dfi/(2*pi);
```