

## Introduction to Multiple Criteria Decision Analysis and the PROMETHEE methods

**Miłosz Kadziński**

Institute of Computing Science  
Poznan University of Technology, Poland



[1] Celem tego kursu jest wprowadzenia was w świat analizy decyzji. Dziedzinę tę można wykorzystać do rozwiązywania prostych problemów w życiu osobistym oraz złożonych problemów, które są istotne dla waszej pracy, a nawet funkcjonowania całego społeczeństwa. Dla potrzeb kursu starałem się wybrać tematy, które pozwolą na przegląd różnych zagadnień rozważanych w analizie decyzji. Dziś skupimy się na wprowadzeniu do wielokryterialnego wspomagania decyzji, w skrócie WWD. Dla niektórych z was pierwsza część wykładu będzie stanowiła przypomnienie tego, czego nauczyliście w trakcie studiów inżynierskich. W drugiej części będziemy mówić o rodzinie metod PROMETHEE. Poznacie podejścia, które można wykorzystać do wspomagania rozwiązywania problemów wielokryterialnego porządkowania i wyboru.

## What is Decision Analysis?



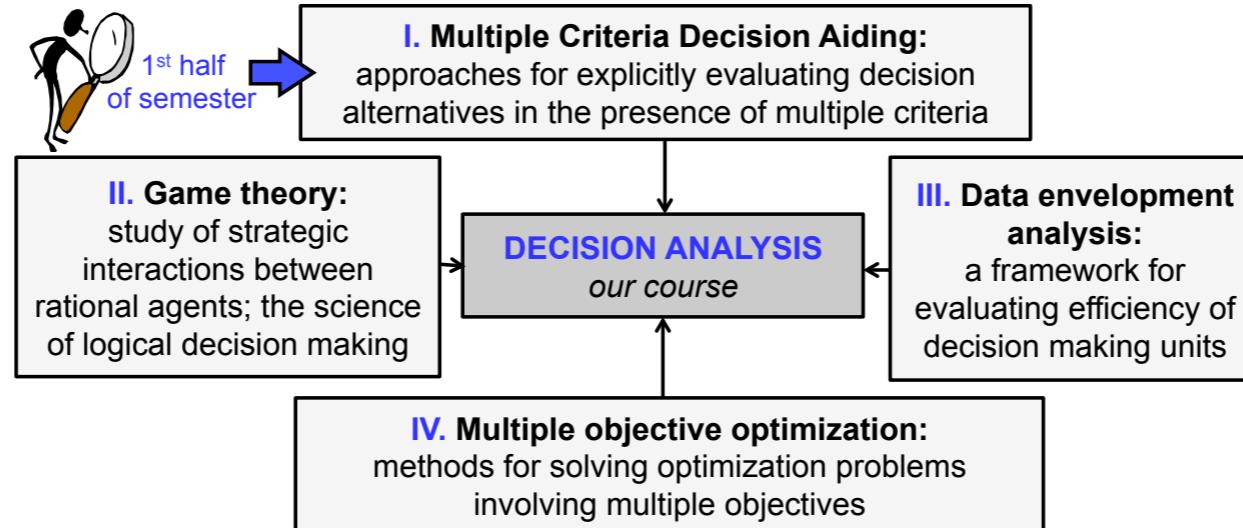
- **Operational Research (OR)**: “the science of better”; applying advanced analytical methods to help make better decisions
- **Decision Analysis (DA)** includes tools for identifying, representing, and formally assessing important aspects of a decision
  - DA has been historically considered as a *branch of OR*, but its links to Artificial Intelligence become stronger each year
  - DA is inherently *interdisciplinary* (computer science, mathematics, economics, philosophy, cognitive and political sciences)
- Traditionally, DA aims at giving an “objectively” best recommendation (prescribing a course of action maximizing the expected utility)
- More general definition: **philosophy, methodology, and professional practice necessary to address important decisions in a formal manner**
- There is no agreement for a unique meaning of “better” decision
  - Influenced by the operational approaches and the way of reaching the recommendation



[2] Po studiach inżynierskich wielu z was już wie, czym są badania operacyjne. Intuicyjnie można je zdefiniować jako naukę o lepszym. Jest tak, ponieważ dziedzina ta rozwija zaawansowane metody analityczne, które pomagają podejmować lepsze decyzje. W tym semestrze będziemy mówić o analizie decyzji, która historycznie była uważana za gałąź badań operacyjnych. Obejmuje ona metody i narzędzia do identyfikowania, reprezentacji i oceny ważnych aspektów problemów decyzyjnych. Ponieważ decyzje podejmowane są w każdym aspekcie naszego życia, wykorzystywane dla tego celu algorytmy muszą być coraz bardziej zaawansowane. To z kolei oznacza, że analiza decyzji z roku na rok wzmacnia swój związek ze sztuczną inteligencją. Poza tym dziedzina ta jest interdyscyplinarna. W jej rozwoju biorą udział informatycy, matematycy, filozofowie, ekonomiści, psychologowie i politologowie. Tradycyjna i wąska interpretacja analizy decyzji określa jej cel jako udzielenie obiektywnie najlepszej rekomendacji, która wynika z rozważenia wszystkich możliwych opcji i sugerowania wyboru tej, która maksymalizuje tzw. oczekiwany użyteczność. Choć niektórzy badacze wciąż są wierni tej interpretacji, w trakcie naszego kursu będziemy traktować analizę decyzji bardziej ogólnie, jako metodologię i praktykę niezbędne do formalnego podejmowania ważnych decyzji. Jest to bardziej zgodne z obecnym rozumieniem współcześnie rozważanych problemów, dla których trudno powiedzieć, że jakaś decyzja jest obiektywnie najlepsza.

# Our course on Decision Analysis - Agenda

- In a decision-making context, we **cannot** scientifically prove that the recommended decision is “the best one”
- The concepts, models, and methods **must not** be considered as a means of discovering pre-existing, universally accepted truth
- **Keys to doors** giving access to elements of **knowledge contributing to the acceptance of a final recommendation**



[3] W trakcie tego kursu skupimy się na koncepcjach, modelach i metodach, które nie mają na celu odkrycia jakiejś istniejącej wcześniej, powszechnie akceptowanej prawdy. Powinny one natomiast oferować wiedzę, która przyczyni się do akceptacji ostatecznej decyzji. Nasz kurs będzie podzielony na cztery części. Połowa semestru będzie wypełniona wielokryterialnym wspomaganiem decyzji, które zajmuje się oceną wariantów decyzyjnych w obecności wielu kryteriów. Jest to moje królestwo naukowe i jedna z gałęzi badań operacyjnych i sztucznej inteligencji, z której słynie Politechnika Poznańska. Wykłady dotyczące wspomagania decyzji będą miały przeplatać teorią gier. Tradycyjnie uważa się ją za naukę o strategicznych interakcjach między racjonalnymi agentami, ale obecnie częściej traktuje się ją jako naukę o logicznym podejmowaniu decyzji. Będziemy też mówili o analizie efektywności, która jest jednym z obszarów rozwijanych na przecięciu informatyki i ekonomii. Na koniec wróćmy do bardziej tradycyjnej analizy decyzji, skupiając się na problemach optymalizacji, gdzie należy odkryć rozwiązania dobre z punktu widzenia wielu istotnych celów. W połowie semestru i na jego końcu przeprowadzimy dwa testy zaliczeniowe.

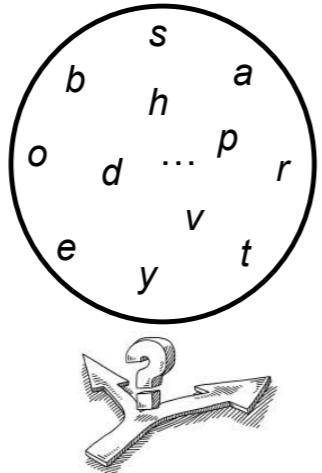


- Tools that support structuring, analysis, and solving **complex decision problems**, involving **multiple decision alternatives** and **multiple evaluation criteria**
- Models appropriate for **answering questions** asked by stakeholders in a decision making process
- **Decision Maker (DM)** – a stakeholder in whose name or for whom decision analysis is performed
- MCDA involves a **rich interplay** between human judgment, data analysis, and computational processes
- Processing **data and preferences to conclusions** useful in decision making
- It involves the DM in exploring, interpreting, debating, and arguing, to recommend a course of action that is consistent with the DM's objectives and values system

[4] Zacznijmy od krótkiego przypomnienia istoty wielokryterialnego wspomagania decyzji. Ma ono na celu opracowanie narzędzi wspomagających różne fazy złożonych problemów decyzyjnych, w tym strukturyzację, analizę i wypracowanie rekomendacji. Przystępna definicja WWD mówi, że jest ono zorientowane na udzielenie odpowiedzi na pytania zadawane przez osoby uczestniczące w procesie decyzyjnym. Odpowiedzi takie uzyskuje się poprzez przetwarzanie danych do wniosków i rekomendacji. Wśród nich najbardziej kluczową rolę odgrywają decydenci. To dla nich i w ich imieniu przeprowadzana jest analiza decyzji. WWD jest bardzo specyficzne wśród poddziedzin sztucznej inteligencji, ponieważ ludzie odgrywają w nim znaczącą rolę. Bez ich wkładu nie moglibyśmy efektywnie rozwiązać problemów decyzyjnych. Z tego powodu metody WWD opierają się na syntezie ludzkich opinii, analizy danych i algorytmów obliczeniowych. Pytanie, na którym teraz się skupimy dotyczy powodów złożoności rozważanych w praktyce problemów decyzyjnych.

# Multiple Criteria Decision Problem

$A$  = set of alternatives

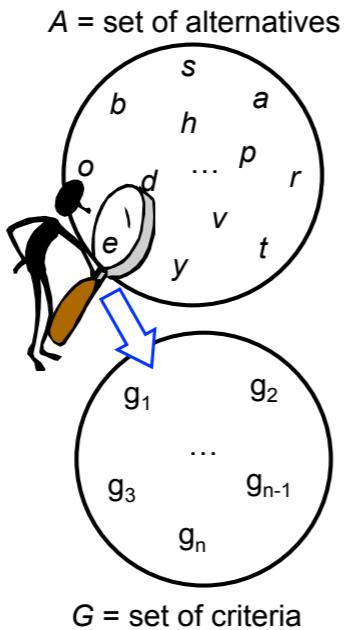


- There is an **objective** or objectives to be attained
- The **current state** (of the world or system) is **undesired**, and we are looking for ways to change this situation
- *Intuitive examples:* think of your (future) apartment, or financial portfolio management, or public transportation means, or service industry, or environmental pollution
- There are usually many alternative ways for attaining the goal(s) – they **constitute a set of alternatives A** (actions, solutions, variants, acts, ...)
- There exist **multiple pertinent factors** that affect a final decision (which can be formalized as evaluation criteria)



[5] Zaczniemy od intuicyjnego zdefiniowania, czym jest problem decyzyjny. Jest to scenariusz, w którym istnieje jakiś cel do osiągnięcia. Dlaczego jest to wymagane? Ponieważ obecny stan świata lub systemu jest niepożądany i musimy szukać sposobów na zmianę tej sytuacji. Rozważcie na przykład sytuację mieszkaniową - niektórzy z was mogą nie mieć własnego lokum, a inni mogą nie być zadowoleni ze swojego obecnego miejsca zamieszkania, ponieważ jest ono zbyt małe, źle zlokalizowane lub nie posiada miejsca parkingowego. Można też skupić się na potencjalnych wyborach inwestycyjnych lub decyzjach, które muszą podjąć władze miasta w sprawie zakupu nowych środków transportu. Wreszcie, można rozważyć cały kraj walczący o osiągnięcie celów zrównoważonego rozwoju lub Unię Europejską myślącą o zmniejszeniu zanieczyszczenia środowiska w realistycznych ramach czasowych. We wszystkich tych scenariuszach istnieje wiele alternatywnych sposobów na osiągnięcie celu. Na rynku dostępne są różne mieszkania, na giełdzie notowane są akcje tysięcy firm, a możliwych do realizacji jest wiele działań mających na celu przejście na społeczeństwo niskoemisyjne. Te różne sposoby będziemy nazywać wariantami, ale w literaturze można spotkać również inne nazwy, takie jak akcje, rozwiązania czy obiekty. Ich mnogość jest jednym z powodów leżących u podstaw złożoności rzeczywistych problemów decyzyjnych. Drugi powód odnosi się do istnienia wielu istotnych czynników, które wpływają na ostateczną decyzję.

## Criteria



**Criterion** is a function  $g_i$  defined on  $A$ , reflecting a worth/quality of alternatives from a particular point of view, such that in order to compare any two alternatives  $a, b \in A$  from this point of view, it is sufficient to compare two values:  $g_i(a)$  and  $g_i(b)$ , called **evaluations** or **performances**

### Scales of criteria:

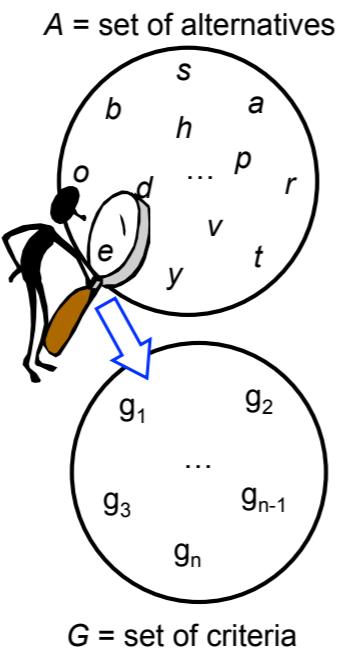
- *Ordinal* – only the order of values matters; a distance in ordinal scale has no meaning of intensity (e.g., school marks)
- *Cardinal* – a distance / difference has a meaning of intensity
  - *Interval scale* – “zero” has no absolute meaning, but one can compare differences (e.g., Celsius scale)
  - *Ratio scale* – “zero” has an absolute meaning, so a ratio of evaluations has a meaning too (e.g., weight)

### Criteria need to be monotonic with respect to preference:

- *Gain-type* – greater evaluations / performances are preferred (non-decreasing direction of preference)
- *Cost-type* – lesser evaluations / performances are preferred (non-increasing direction of preference)



[6] Porozmawiamy więc o kryteriach. Kryterium to funkcja zdefiniowana na zbiorze wariantów, odzwierciedlająca ich jakość z określonego punktu widzenia. Potrzebujemy jej, aby sensownie porównać warianty poprzez odwołanie się do ich ocen. Kryteria można opisywać na różnych poziomach, w tym w kontekście typów skali ocen i kierunków preferencji. Jeśli chodzi o skale, to mogą być one porządkowe lub liczbowe. Na skalach porządkowych można porównywać tylko kolejność tak, jak w przypadku ocen, które dostajecie na uczelni. Na skalach liczbowych, w tym przedziałowych i ilorazowych, można dodatkowo brać pod uwagę różnice lub odległości między ocenami, ponieważ mają one znaczenie intensywności. Dodatkowo skale ilorazowe pozwalają na porównywanie stosunków między ocenami, ponieważ uwzględniają one zero mające znaczenie bezwględne. Znajomość typu skali ma kluczowe znaczenie dla zapewnienia prawidłowego wykorzystania ocen, które są na niej wyrażone. Inną istotną cechą kryteriów uwzględnianych w WWD jest monotoniczność preferencji. Oznacza to, że preferowane są albo wyższe oceny, co często ma miejsce przy rozpatrywaniu miar jakości, albo niższe oceny, co zawsze ma miejsce, gdy rozważamy cenę. Takie cechy formalnie nazywamy kryteriami typu zysk lub koszt. Co ważne, oba typy dopuszczają, że preferencja pozostaje stała w pewnym zakresie ocen, ale nie może ona naruszać ustalonego kierunku preferencji.



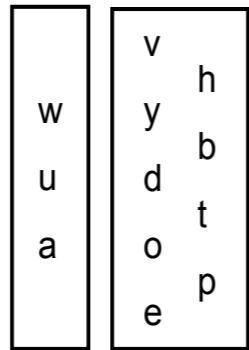
- In many problems, one needs to consider economic, technological, environmental, social, education, ... criteria
  - It makes no sense, and it is not fair to decide based only on a single evaluation criterion; **diversity of relevant viewpoints**
- Consistent family of criteria**  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ :
- **Complete (exhaustive)**: if two alternatives have the same performances on all criteria, they have to be indifferent
  - **Monotonic**: if alternative  $a$  is preferred to alternative  $b$ , and there is alternative  $c$  with at least as good performances as  $a$  on all criteria, then  $c$  needs to be preferred to  $b$
  - **Non-redundant**: *elimination of any criterion from the family  $G$  should violate at least one of the above properties*
  - **Conflicting criteria are typical**: cost or price and some measure of quality are easily in conflict
  - The diversity and conflicting character of criteria imply that there is usually no single objectively best solution or decision

[7] Dla większości problemów decyzyjnych istnieją różne istotne dla nich punkty widzenia. Często musimy wyważyć aspekty ekonomiczne, technologiczne, środowiskowe czy społeczne. Gdy zbierzemy różne kryteria dla danego problemu, utworzą one rodzinę. Rodzina taką musi być skonstruowana sensownie, spełniając trzy warunki spójności. Kompletność oznacza, że jeśli dwa warianty mają takie same oceny na wszystkich kryteriach, to muszą być nieroróżnialne, czyli równoważne w odniesieniu do rozważanego problemu. Oznacza to, że wszystkie istotne kryteria zostały w rodzinie uwzględnione i nie ma atrybutu wpływającego na decyzję, który został pominięty. Definicja monotoniczności dotyczy przestrzegania kierunków preferencji. Odnosi się przy tym do trzech wariantów  $a$ ,  $b$  oraz  $c$ . Jeśli  $a$  jest preferowane nad  $b$ , będąc uważane za lepsze w kontekście rozważanego problemu, to każdy wariant  $c$  z co najmniej tak dobrymi ocenami na wszystkich kryteriach jak wariant  $a$ , musi też być preferowany nad  $b$ . Wreszcie, nienadmiarowość mówi, że eliminacja dowolnego kryterium z rodziny powinna naruszyć co najmniej jeden z dwóch pozostałych warunków. Oznacza to, że rodzina musi zawierać tylko te punkty widzenia, które są istotne dla danego problemu i pozwalają na różnicowanie wariantów. Problem z kryteriami uwzględnionymi w rodzinie polega na tym, że zazwyczaj są one konfliktowe. Przykładowo, w prawie wszystkich problemach trzeba zapłacić więcej za lepszą jakość. Różnorodność i konfliktowość kryteriów to właśnie czynniki, które sprawiają, że zazwyczaj nie ma jednego obiektywnie najlepszego rozwiązania lub decyzji.

## Types of Decision Problems (1) - Choice

*How to choose  
the best, most preferred  
(subset of) alternatives?*

**choice**



*sometimes a single  
alternative needs  
to be selected*

- Whenever you buy some product, you solve a multiple criteria choice problem (without even realizing it)
- Choice of a **cloud service provider**: reliability, throughput, response time, reputation, price, security
- **Project selection** based on budget, principal investigator evaluation, scientific excellence, justification for forming a new team, and the possibility of realizing the project
- **Supplier selection** based on *economic* (e.g., cost, quality performance, relationship, and communication), *environmental* (e.g., environmental management, pollution control, green product), and *social* (e.g., employment practices, human rights, ethics) *criteria*
- Annual maintenance of **infrastructure assets** or funding new infrastructure investments at the state level

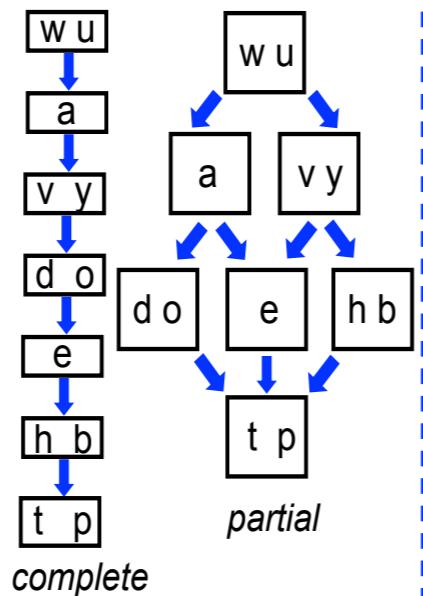


[8] Skupmy się teraz na różnych typach problemów decyzyjnych. W WWD wyróżniamy trzy takie typy: wybór, ranking i sortowanie. W problemach wyboru musimy wskazać najlepszy, najbardziej preferowany podzbiór wariantów i odrzucić pozostałe. W szczególnym przypadku chcemy wybrać tylko jedną opcję. Dzięki problemom wyboru powinniście postrzegać wspomaganie decyzji jako najbliższą wam poddziedzinę sztucznej inteligencji. Takich problemów rozwiążujecie bowiem mnóstwo w każdym tygodniu, gdy kupujecie jakiekolwiek produkty. Jako bardziej konkretny przykład możecie rozważyć wybór dostawcy usług chmurowych. Jest to problem wielokryterialny, ponieważ musimy w nim uwzględnić cenę, niezawodność, czas reakcji, bezpieczeństwo czy reputację. Inne problemy wyboru wymienione na slajdzie uświadamiają nam, że decydenci nie muszą być osobami fizycznymi. Narodowe Centrum Nauki regularnie wybiera projekty, które będą finansowane; firmy muszą wybierać dostawców, a państwa lub miasta decydują o podzbiorze inwestycji infrastrukturalnych, które będą finansowane w przyszłym roku w ramach ograniczonego budżetu.

## Types of Decision Problems (2) - Ranking

How to order alternatives from the best to the worst?

ranking



- Rankings of **universities** (scientific efficiency, graduates in the job market, scientific potential, internationalization, prestige, learning conditions, and innovation)
- "Learning to rank" for information retrieval based on query dependent (e.g., TF-IDF) and independent (e.g., PageRank) features
- Rankings of programming languages, scholars, airports, saving accounts, touristic destinations, credit offers, car insurance quotes, pension funds
- **International rankings** on world competitiveness, ease of doing business (*economy*), climate change performance, sustainability, happy planet index (*environment*), press freedom, corruption perception, level of democracy (*politics*), human development, quality of life (*society*), Webometrics, educational achievements (*education*)



[9] W problemach rankingowania celem jest uporządkowanie wariantów od najlepszego do najgorszego. Otrzymany ranking może być zupełny (kompletny), gdzie wszystkie pary wariantów są porównywalne, lub częściowy (niepełny), który dopuszcza pewną nieporównywalność. Najbardziej znanymi wariantami, które podlegają porządkowaniu są uczelnie wyższe. W tym kontekście, często omawiany w mediach jest tzw. ranking szanghajski. W zastosowaniach internetowych bardzo popularny jest tzw. learning to rank problem. Celem jest tu uszeregowanie stron internetowych przy uwzględnieniu cech zależnych i niezależnych od zapytania użytkownika. Inne warianty rozważane w ramach popularnych rankingów to języki programowania, konta oszczędnościowe, oferty kredytowe czy oferty ubezpieczeń samochodowych. Istnieją również słynne rankingi na poziomie światowym, które porównują kraje pod względem łatwości prowadzenia działalności gospodarczej, wolności prasy czy jakości życia. Charakterystyka kryteriów w tych problemach jest różnorodna, a ich liczba często bardzo wysoka.

## Types of Decision Problems (3) - Sorting

How to assign alternatives to pre-defined and ordered decision classes?

### sorting

C <sub>3</sub>	w	u	a		
C <sub>2</sub>	v	y	d	o	e
C <sub>1</sub>	h	b	t	p	

↓ C<sub>3</sub>=good    C<sub>3</sub>=leading  
↓ C<sub>2</sub>=med.    C<sub>2</sub>=average  
↓ C<sub>1</sub>=bad    C<sub>1</sub>=poor

- **Financial management:** credit risk assessment for countries, firms, and consumers; business failure prediction; stock evaluation
- **Marketing:** customer satisfaction measurement
- **Medicine:** diagnosis (e.g., the severity of illness), **Environmental and energy management, ecology:** assessment of the environmental impact of human activity on the ecosystem, efficiency of energy policies, level of pollution
- **Education:** Parametric evaluation of research units: A<sup>+</sup>, A, B and C
- Safety classes, technical diagnosis, attractiveness, implementation priorities, exposure level
- *In standard classification, the classes are pre-defined though non-ordered in terms of preference*



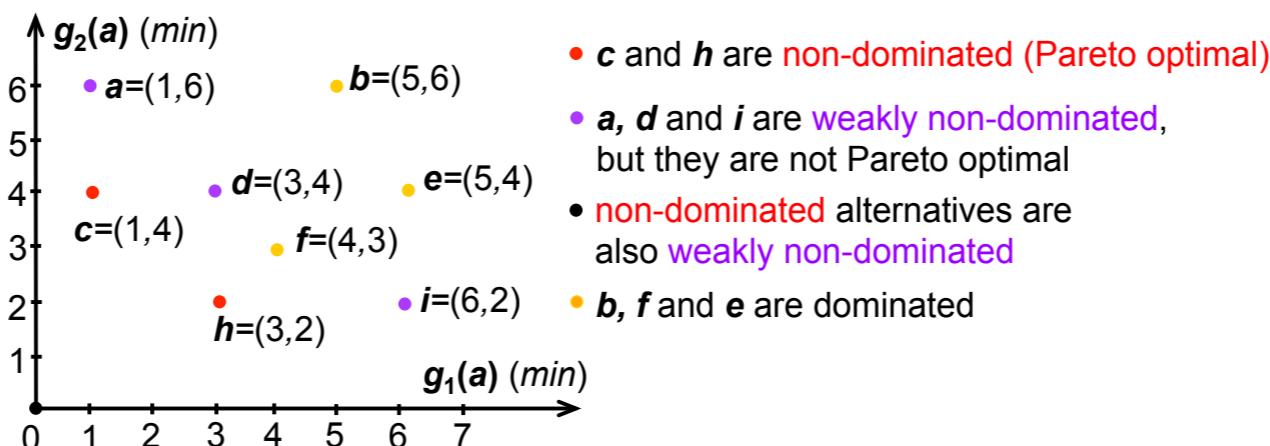
[10] Wreszcie w problemach sortowania chodzi o przypisanie wariantów do predefiniowanych i uporządkowanych klas decyzyjnych. Problem ten jest związany z klasyfikacją i grupowaniem. Jednak w klasyfikacji klasy nie muszą być uporządkowane, a w grupowaniu klastry nie są predefiniowane, lecz wynikają z analizy. Najbardziej znanym problemem sortowania jest ocena ryzyka kredytowego, która może być przeprowadzona dla osób, firm, a nawet państw. W marketingu często oceniamy satysfakcję klientów; w zarządzaniu środowiskiem - wpływ działalności człowieka na ekosystem; a w szkolnictwie wyższym - jednostki naukowe. We wszystkich tych scenariuszach warianty otrzymują etykietę uporządkowaną pod względem preferencji. Dzięki temu opcje przypisane do lepszej klasy są bardziej preferowane i kompleksowo wypadają lepiej niż te z gorszych kategorii.

## Dominance and Pareto Optimality



Vilfredo Pareto

- Alternative  $a \in A$  is **non-dominated (Pareto optimal)** iff there is no other alternative  $b \in A$  such that:  
 $b$  is at least as good as  $a$  on all criteria  $g_i, i=1, \dots, n$ , and  
 $b$  is strictly better than  $a$  for some criterion,  $g_i, i \in \{1, \dots, n\}$
- Alternative  $a \in A$  is **weakly non-dominated (weakly Pareto optimal)** iff there is no other alternative  $b \in A$  such that  
 $b$  is strictly better than  $a$  on all criteria  $g_i, i=1, \dots, n$



[11] Jak rozwiązywać takie problemy decyzyjne? Pierwszym pomysłem powinno być odniesienie się do ocen wariantów. Jeśli niektóre warianty byłyby oceniane co najmniej tak dobrze jak inne na wszystkich kryteriach, może to pomóc nam wykluczyć złe opcje i zidentyfikować te najbardziej interesujące. Takie opcje nazywane są niezdominowanymi, przy czym wyróżniamy w tym względzie dwa pojęcia. Pewien wariant nazywamy niezdominowanym lub Pareto optymalnym, jeśli nie ma innego, który byłby co najmniej tak samo dobry na wszystkich kryteriach i ścisłe lepszy na co najmniej jednym kryterium. Jeśli rozważamy osiem wariantów na slajdzie, ocenianych na podstawie dwóch kryteriów typu koszt, to tylko c oraz h są niezdominowane. Drugie pojęcie odnosi się do bycia niezdominowanym w słabym sensie. W tym przypadku wymóg jest nieco łagodniejszy, ponieważ nie może istnieć żaden inny wariant ścisłe lepszy pod względem wszystkich kryteriów. Dla naszego przykładu, a, d oraz i są niezdominowane w słabym sensie, ale nie są Pareto optymalne. Zwróćcie uwagę, że jeśli jakiś wariant jest niezdominowany, to jest też niedominowany w słabym sensie, więc ta własność obowiązuje również dla c oraz h. Warianty, które są zdominowane, takie jak b, e oraz f, są mniej atrakcyjne dla naszego problemu decyzyjnego. Wiemy bowiem, że możemy znaleźć jakąś opcję, która jest jednocześnie co najmniej tak samo dobra lub nawet ścisłe lepsza na wszystkich istotnych kryteriach.

## Preference Information

Alt.	$g_1$	.	$g_m$
a	$g_1(a)$		$g_m(a)$
b	$g_1(b)$		$g_m(b)$
...	...		...
n	$g_1(n)$		$g_m(n)$

PERFORMANCE  
TABLE



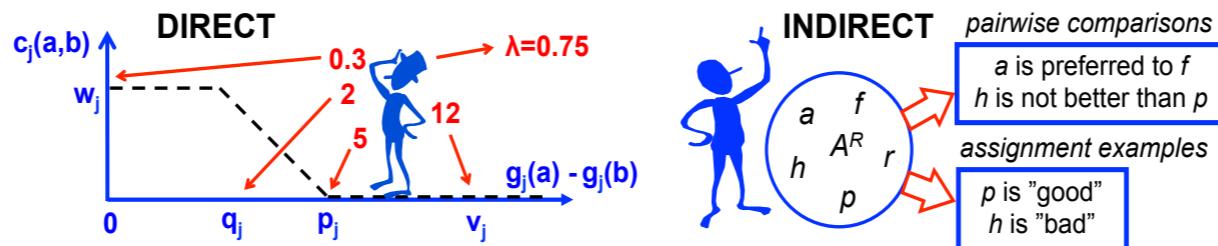
- Decision problems involving multiple criteria (e.g., identifying an alternative optimizing all criteria at the same time) are **ill-posed**
- **Dominance relation is too poor** – it leaves many alternatives incomparable
- One can "enrich" the dominance relation, using **preference information**
  - Preferences represent the DM's value system, needs, aspirations, or requirements are needed to provide useful decision aid
- Preference information permits to build a **preference model** that aggregates the evaluations of each alternative
  - Due to the aggregation, the alternatives in A become more comparable
  - A proper exploitation of the preference model leads to a **final recommendation**
- The **solution** of multiple criteria problems depends on both the **basic data** included in the performance (evaluation) table and the **DM's preferences**



[12] Dla niemal wszystkich problemów decyzyjnych nie istnieje jeden wariant optymalizujący wszystkie kryteria jednocześnie. W szerszej perspektywie, relacja dominacji jest w praktyce zbyt uboga, bo pozostawia wiele wariantów nieporównywalnymi. Potrzebujemy więc sposobu na jej wzbogacenie. Zrobimy to, wykorzystując informację preferencyjną. Jest to pewna subiektywna opinia decydentów, która odzwierciedla ich wartości, potrzeby, aspiracje lub wymagania, które są istotne dla danego problemu. Takie preferencje pozwalają na zbudowanie modelu, który agreguje oceny wariantów na różnych kryteriach. Dzięki temu jesteśmy w stanie uzyskać rekomendację, która jest wystarczająco informatywna i decyzyjna, uwzględniając zarówno oceny wariantów, jak i preferencje użytkowników.

## Types of Preference Information

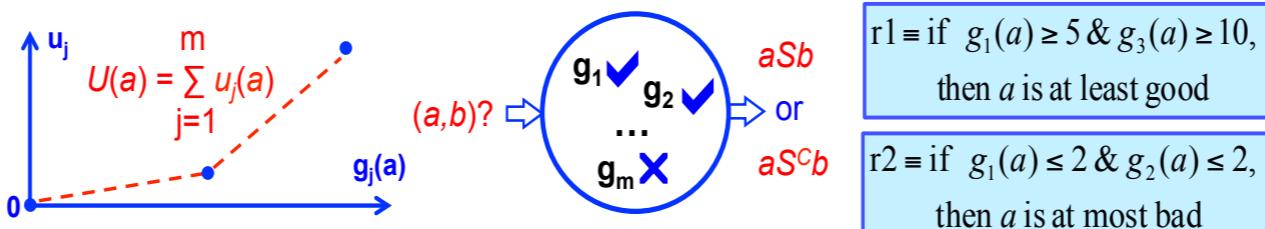
- Elements of the DM's value system or decision policy used to compare alternatives
- **Direct elicitation** of numerical values of model parameters by DMs:
  - Weights giving the relative importance of criteria, substitution rates (trade-offs between criteria), thresholds fixing preference limits or critical differences, ...
  - Direct elicitation demands rather high cognitive effort
- **Indirect elicitation** through holistic judgments, i.e., decision examples
  - Pairwise preferences between alternatives, classification examples, ...
  - Decision aiding based on decision examples is gaining popularity because ...
    - Decision example is a relatively "easy" preference information
    - Decisions can be observed without the active participation of DMs



[13] Informacja preferencyjna musi uchwycić elementy systemu wartości decydentów, które uczynią warianty bardziej porównywalnymi. Preferencje są tłumaczone do wartości pewnych parametrów założonego modelu preferencji. Implikuje to ich dwa główne rodzaje – preferencje bezpośrednie lub pośrednie. Przy pozyskiwaniu bezpośrednich preferencji oczekuje się, że decydent poda liczbowe wartości parametrów. Najbardziej intuicyjnym z takich parametrów są wagи kryteriów. Natomiast preferencje pośrednie mają postać holistycznych, całościowych ocen wariantów. Ich najbardziej standardowe typy to porównania wariantów parami w przypadku rankingu i wyboru oraz przykładowe przydzielały do klas w przypadku sortowania. Następnie takie przykłady decyzji są tłumaczone do spójnych wartości parametrów modelu preferencji, które pozwalają na odtworzenie uprzednio dostarczonych holistycznych ocen. Pośrednia informacja o preferencjach jest uważana za bardziej przyjazną dla użytkownika i mniej wymagającą pod względem poznawczym.

## Preference Models

- A mathematical tool for representing the DM's preferences within the method
- Its application on the set of alternatives leads to a recommendation consistent with the DM's viewpoint through aggregating the performances of alternatives
- **Three families of preference modeling (aggregation) methods:**
- **Multiple Attribute Value (Utility) Theory (MAVT, MAUT)** using a value function, assigning a score / utility to each alternative
  - e.g.,  $U(a) = \sum_{j=1, \dots, n} w_j \cdot g_j(a)$ ;  $U(a) = \sum_{j=1, \dots, n} u_j(a)$ ; Choquet integral
- **Outranking methods** using an outranking relation  $S$  based on pairwise comparisons
  - $aSb$  = "a is at least as good as b"
- **Decision rule approach** using a set of "if ... then ..." decision rules
  - **Decision rule model is the most general of all three**



[14] Niezależnie od rodzaju preferencji są one kluczowe dla parametryzacji modelu. Model preferencji jest narzędziem matematycznym służącym do wypracowania rekomendacji spójnej z punktem widzenia użytkowników. W WWD istnieją trzy podstawowe rodziny modeli. W modelu opartym na wartościach, ideą jest obliczenie wyniku lub użyteczności dla każdego wariantu, która wskazywałaby jak dobry lub zły jest on, biorąc pod uwagę wszystkie cechy. Podczas tego kursu poznacie model sumy ważonej, addytywną funkcję wartości oraz całkę Choquet. W modelu opartym na relacjach warianty są porównywane parami. Najpopularniejszym modelem w tej grupie jest relacja przewyższania, która jest interpretowana jako bycie co najmniej tak samo dobrym jak inna opcja. Wreszcie, podejście oparte na regułach decyzyjnych reprezentuje preferencje i agreguje wyniki poprzez reguły typu "jeżeli ..., to ...". Wiążą one zbiór warunków do spełnienia z sugerowaną rekomendacją. Model regułowy jest wysoce interpretowalny i, jak wskazują wyniki teoretyczne, najbardziej ogólny ze wszystkich.

## Preference Structure

To establish a realistic model of DM's preference, **four basic relations** are sufficient:

- **Indifference** ( $\sim, I$ ) – being “the same” with respect to a decision problem
- **Strict preference** ( $>, P$ ) – being “better” with respect to a decision problem
- **Weak preference** ( $\triangleright, Q$ ) – an intermediate level between indifference and strict preference or being at least as good
- **Incomparability** ( $?, R$ ) – lack of sufficiently strong arguments supporting either side

### Axiom of limited comparability

“Whatever the alternatives considered, the criteria used to compare them, and the information available, one can develop a satisfactory model of DM's preferences by assigning one or a group of two or three of the four basic situations, to any pair of alternatives”

**Value function**  $U$  distinguishes only two possible relations between alternatives

- preference:  $a > b$  ( $a P b$ ) iff  $U(a) > U(b)$  and indifference:  $(a \sim b)$  ( $a I b$ ) iff  $U(a) = U(b)$

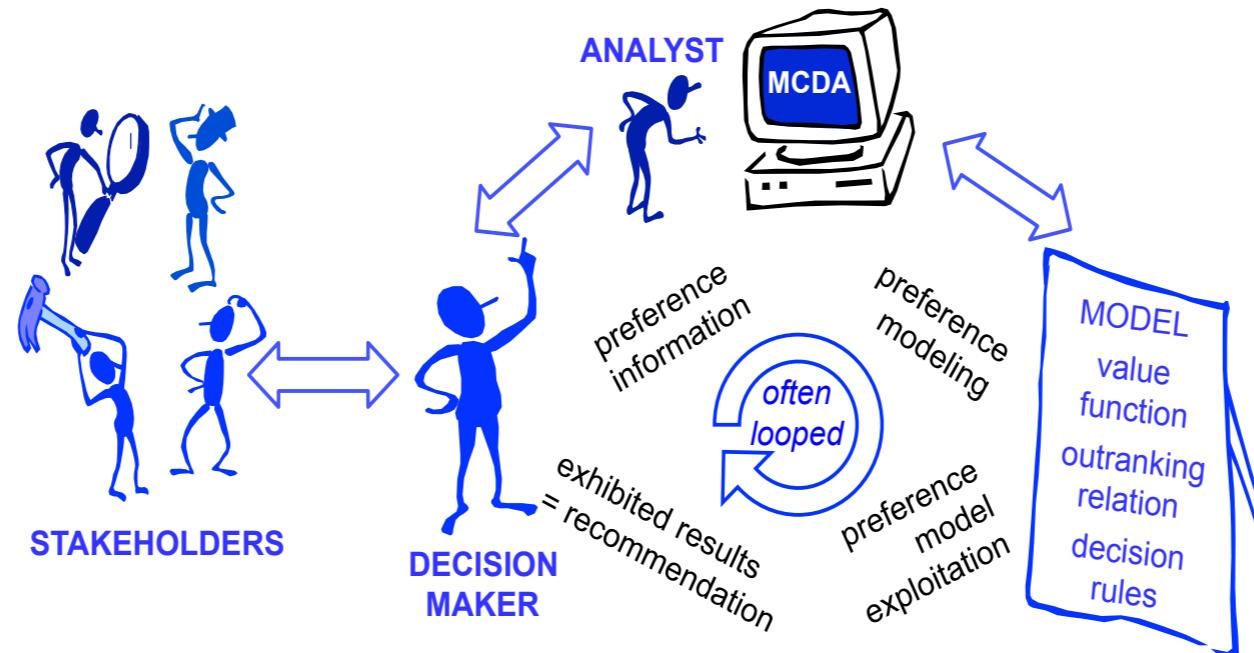
**Outranking relation**  $S$  groups three basic preference relation  $S = \{I, P, Q\}$

- It allows to model incomparability in case  $\text{not}(a S b)$  and  $\text{not}(b S a)$



[15] Odpowiednio sparametryzowany model może być wykorzystany do narzucenia na zbiór wariantów relacji preferencji. Wyróżniamy cztery podstawowe relacje. Do niektórych z nich odwoływałem się już na poprzednich slajdach. Mówiłem, że nieroróżnialność to bycie takim samym względem rozwiązania problemu decyzyjnego, natomiast ścisła preferencja to formalna nazwa na bycie lepszym. Poziomem pośrednim między tymi dwoma relacjami jest słaba preferencja. Wreszcie nieporównywalność wskazuje na wahanie we wskazaniu lepszego wariantu, warunkowane brakiem przekonujących lub wystarczająco silnych argumentów przemawiających za któryś z opcji. Zgodnie z aksjomatem ograniczonej porównywalności, te cztery relacje są wystarczające do reprezentacji modelu preferencji jakiegokolwiek decydenta. Zauważmy jednak, że nie wszystkie modele dopuszczają te relacje. Na przykład, przypisując każdemu wariantowi pojedynczą wartość, wynikającą z zastosowania funkcji użyteczności, możemy zamodelować tylko preferencję i nieroróżnialność. Z kolei nieporównywalność jest możliwa do zrealizowania przy zastosowaniu relacji przewyższania, wtedy gdy nie zachodzi ona dla danej pary w żadną ze stron.

## General Scheme of MCDA Methods



[16] Kolejny slajd przedstawia ogólny schemat działania metod WWD. Wszystko zaczyna się od dostarczenia przez decydenta informacji preferencyjnej. Służy ona do parametryzacji modelu preferencji, którego podstawową rolą jest agregacja ocen wariantów. Taki model może być następnie wykorzystany do wypracowanie rekomendacji w funkcji problemu wyboru, porządkowania czy sortowania. Proces ten jest często zapętlony, tak że decydent analizuje wyniki, a następnie koryguje lub wzbogaca preferencje, aby skonstruować bardziej satysfakcjonujący model i uzyskać bardziej spójne wyniki. Wyniki te zawsze wiążą się z pewnym poziomem subiektywności, wynikającym z uwzględnienia preferencji decydenta. Ten ostatni jest uczestnikiem procesu decyzyjnego, który musi zapewnić istotny wkład w jego przebieg tak, by podjęta decyzja została następnie wdrożona w praktyce. Oprócz decydenta w rozważanym problemie może istnieć więcej stron, które albo wpływają na decyzję, albo są nią dotknięte. Na przykład w biznesie mogą to być inwestorzy, pracownicy, klienci lub dostawcy, wewnętrzni lub zewnętrzni wobec organizacji. Kolejnym ważnym aktorem w procesie decyzyjnym jest analityk. Służy on jako interfejs pomiędzy decydentem a światem wspomagania decyzji. Zna on formalne metody, rozumie jak przeprowadzić interakcję, jakie pytania zadawać oraz jak pomagać w interpretacji wyników. Moją ambicją jest, abyście po tym kursie posiadali przynajmniej podstawowe umiejętności analityka.

Aggregation of vector evaluation in line with the DM's preferences, i.e., **preference modeling**:

- Till early 80's: "**model-centric**": model first, then preference information in terms of model parameters
- Since 80's: more and more "**human-centric**": PC allowed human-computer interaction – "trial-and-error"
- In the 21<sup>st</sup> century: "**knowledge-driven**": more data about human choice; holistic preference information first, then model building; explanation of past decision, and prediction of future decision

**Focus on "fair" aggregation:**

- Ensure faithful representation of a value system of the DM
- Act in a constructive and transparent way
- Handle "imperfect" information



[17] Dziedzina wspomagania decyzji ewoluowała na przestrzeni lat. Do początku lat 80. ubiegłego wieku była ona modelo-centryczna. Oznacza to, że decydent musiał dostosować się do specyficznych wymagań modelu wykorzystywanego w danej metodzie. Następnie centrum zainteresowania przeniesiono na ludzi. Było to związane głównie z opracowywaniem systemów wspomagania decyzji, które umożliwiły bardziej zaawansowaną interakcję. Nowatorskie metody opracowane już w tym wieku są napędzane wiedzą. Wynika to z faktu, że obecnie dysponujemy większą ilością danych o ludzkich wyborach, holistyczne preferencje są łatwiejsze do pozyskania, a modele możemy budować pośrednio, odkrywając intencje użytkowników i wykorzystując je do rekomendacji lub nawet przewidywania przyszłych decyzji. Wszystkie te nurty są nadal obecne we wspomaganiu decyzji, a w kolejnych tygodniach przedstawię metody, które są dla nich reprezentatywne. To, co nie zmieniło się przez lata w WWD, to nacisk na wierne odwzorowanie preferencji decydentów, radzenie sobie z różnymi niedoskonałościami tych preferencji oraz stosowanie przejrzystych i intuicyjnych modeli, które dostarczają zrozumiałych i interpretowalnych rekomendacji.

## What Can One Reasonably Expect from MCDA?

- **Analyzing the decision making** context by identifying the actors, the various alternatives (possibilities of actions), their consequences, and the stakes
- Taking into account a **broad spectrum of points of view** liable to structure a decision making process for all the relevant actors, while preserving the original concrete meaning of the corresponding evaluation
- Clearing the way for a discussion on the respective **roles that each criterion may play** during the decision aiding process
  - e.g., weight, veto, aspiration level, rejection level
- **Organizing** how the **decision making process** will unfold to increase consistency between the values underlying the objectives and the quality of the final decision
- **Drawing up recommendations** based on results from models and computational procedures designed with respect to some working hypotheses
- Participating in the process to legitimate the final decision

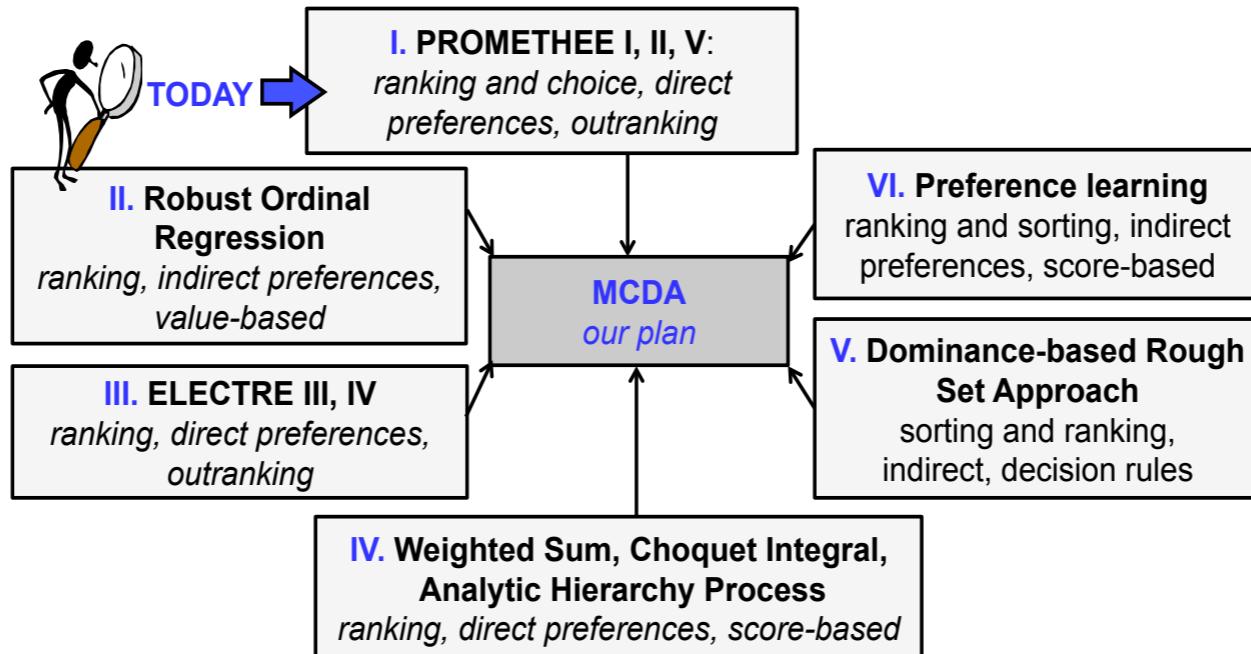
STRUCTURE → PROGRESS → RECOMMENDATION



[18] Czego można oczekwać od dziedziny wspomagania decyzji na różnych etapach procesu decyzyjnego? Po pierwsze, pomaga ona ustrukturyzować problem poprzez identyfikację aktorów, wariantów i ich konsekwencji. Ten etap uwzględnia szerokie spektrum kryteriów, zachowując ich pierwotne znaczenie i umożliwiając dyskusję na temat roli, którą odgrywają. Po drugie, wspiera osiągnięcie postępu w podejmowaniu decyzji, zapewniając spójność pomiędzy dostarczonymi preferencjami a rekomendowaną decyzją. To ostatnie wynika z zastosowania odpowiednich modeli i procedur obliczeniowych oraz aktywnego zaangażowania użytkowników w interakcję z metodą. Doświadczenie w zakresie strukturyzacji czy organizacji procesów decyzyjnych przychodzi z czasem i nie można się go nauczyć w ciągu jednego semestru. Dlatego podczas tego kursu skupimy się na metodach pozwalających na wypracowanie rekomendacji, które tolerują subiektywne preferencje i respektują pewne hipotezy robocze. Ponad wszystko postaram się pokazać, że wspomaganie decyzji to jednocześnie sztuka i nauka.

# Our Course on MCDA - Agenda

- Hundreds of MCDA methods have been proposed over the last decades
- They vary according to preference information, preference model, and type of delivered recommendation



[19] W ciągu ostatnich dekad zaproponowano setki metod wspomagania decyzji. Wyzwaniem było wybranie ich niewielkiego podzbioru tak, aby zapoznać was z różnymi rodzajami informacji, modelami preferencji czy dostarczonymi rekomendacjami. Pokażę najsławniejsze metody wspomagania decyzji takie jak PROMETHEE czy Analytical Hierarchy Process, podejścia, z których słynie nasza uczelnia na świecie, jak odporna regresja porządkowa czy teoria zbiorów przybliżonych oparta na relacji dominacji, a także metody, które stanowią rozszerzenie lub uzupełnienie podejść, które choć niektórzy z was poznali na studiach inżynierskich, jak ELECTRE III oraz IV. Dzięki temu poznacie algorytmy przeznaczone do rozwiązywania problemów porządkowania, wyboru i sortowania, uwzględniające bezpośrednie lub pośrednie preferencje, wykorzystujące modele oparte na funkcji wartości, relacji przewyższania lub regułach. W środku semestru zrobimy krok w bok, aby porozmawiać o dziedzinie uczenia preferencji powstającej na przecięciu wspomagania decyzji i uczenia maszynowego.

- Preference Ranking Organization **METHOD** for Enrichment
- **Outranking-based methods** (preference model = outranking relation); though deriving **comprehensive scores in the end**
- **Ranking:** PROMETHEE I, II, III, PROMETHEE<sup>GKS</sup>
- **Choice:** PROMETHEE V
- **Sorting:** FlowSort, PromSort, SORT-PROMETHEE
  - *Our focus today*



Jean-Pierre Brans      Bertrand Mareschal  
*first presentation in 1982*

## Basic prerequisites

- The method should be understandable for DMs to **avoid the “black box” effect**
- Technical parameters of the method should have practical (economic) significance
- The **differences between the evaluations** of alternatives should be taken into account
- The **scales** in which the evaluations are expressed cannot influence conclusions
- Preference, indifference, and **incomparability** are admissible (the incomparabilities may be reduced, but not when it is unrealistic)

[20] Pierwszy wykład będzie poświęcony rodzinie metod PROMETHEE, wykorzystujących model preferencji w postaci relacji przewyższania. Została ona zapoczątkowana przez Bransa i Mareschala w latach 80-tych. Istnieją metody PROMETHEE dedykowane dla każdego typu problemu, ale my skupimy się na PROMETHEE I i II zorientowanym na problemy porządkowania oraz PROMETHEE V zorientowanym na wybór. Konstruując te podejścia, autorzy postawili kilka warunków wstępnych. Po pierwsze, metoda powinna być zrozumiała dla człowieka, co wiąże się z zastosowaniem intuicyjnych parametrów, które mają znaczenie praktyczne. Po drugie, warianty powinny być porównywane parami. Na tym etapie skale kryteriów nie mogą wpływać na wyprowadzane wnioski. Wreszcie, jeśli chodzi o wyniki, dopuszczalne są preferencja, nierozróżnialność i nieporównywalność. Liczba nieporównywalności może być zmniejszana, ale tylko wtedy, gdy jest to pożądane i realistyczne.

## Our Running Example

### INPUT DATA

- finite set of actions  $A=\{a, b, c, \dots, h\}$
- consistent family of criteria  $G=\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$

Alt.	$g_1$	...	$g_m$
<b>a</b>	$g_1(a)$		$g_m(a)$
<b>b</b>	$g_1(b)$		$g_m(b)$
<b>c</b>	$g_1(c)$		$g_m(c)$
<b>d</b>	$g_1(d)$		$g_m(d)$
...	...		...
<b>n</b>	$g_1(n)$		$g_m(n)$

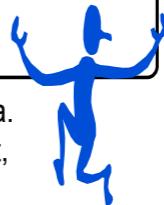
Alt.	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$	$g_3 \downarrow$
<b>ITA</b>	98	8	400
<b>BEL</b>	58	0	800
<b>GER</b>	66	5	1000
<b>SWE</b>	74	3	600
<b>AUT</b>	80	7	200
<b>FRA</b>	82	10	600

### AIM

Build an additional electric plant in Europe

### ALTERNATIVES AND CRITERIA

- Six possible locations (countries) evaluated in terms of 3 criteria
- $g_1$  (gain) – Power (in Megawatt)
- $g_2$  (gain) – Safety level (0-10 scale)
- $g_3$  (cost) – Construction cost (in million USD)



For illustrative purposes, we simplify the problem by taking into account only three criteria. Other relevant criteria include: manpower for running the plant, annual maintenance cost, or ecology (number of villages to evacuate).



[21] Problem, które wykorzystamy do zilustrowania sposobu działania PROMETHEE dotyczy wyboru kraju, w którym zostanie zbudowana elektrownia. Jako warianty decyzyjne rozważymy sześć możliwych lokalizacji, począwszy od Włoch po Francję, które są oceniane na trzech kryteriach: moc, która ma być maksymalizowana, poziom bezpieczeństwa typu zysk oraz koszt budowy, który ma być minimalizowany. Dla celu wykładu upraszczam ten problem, rozważając tylko te aspekty. W realnym świecie należałoby uwzględnić także siłę roboczą, koszty utrzymania czy ekologię. Z tabeli wynika, że Włochy i Francja mają dość korzystne oceny na wszystkich kryteriach, natomiast Belgia i Niemcy są nieco gorsze. Mimo to relacja dominacji jest zbyt słaba, aby narzucić ranking zupełny na zbiór wariantów.

## Main principle: pairwise comparisons

- PROMETHEE is not allocating a utility to each alternative, neither globally nor on each criterion
- **The preference structure of PROMETHEE is based on pairwise comparisons**
- Usually, for small differences, the DM will allocate a small preference to a better alternative (possible even no preference)
- The more significant the difference, the larger the preference

Alt.	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$	$g_3 \downarrow$
BEL	58	0	800
GER	66	5	1000

Concerning  $g_1$  – Power, **GER** is better than **BEL**

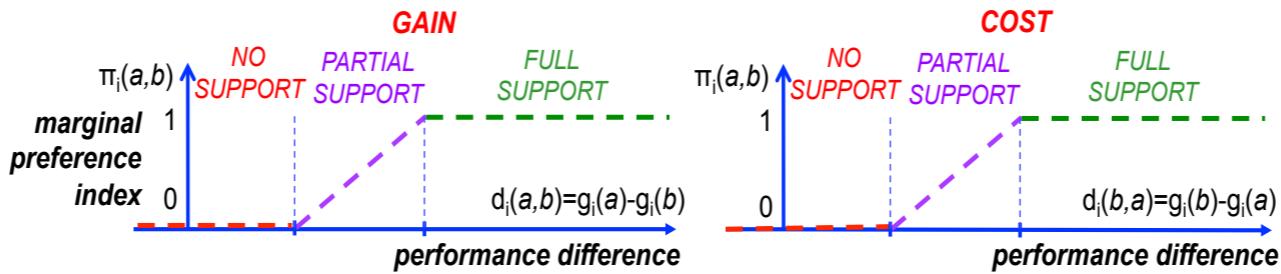
How can we quantify this advantage?

What does it mean?



[22] Przejdzmy do omówienia kroków metody. Struktura preferencji w PROMETHEE jest oparta na porównaniach parami. W szczególności rozważane są różnice pomiędzy ocenami wariantów na każdym kryterium. Z małymi różnicami decydent powinien skojarzyć niewielką preferencję dla lepszego wariantu, a nawet brak preferencji, jeśli uzna, że ta różnica jest zaniedbywalna. Przy bardziej znaczących różnicach preferencja powinna stać się większa. W naszym problemie Niemcy są lepsze od Belgii na pierwszym kryterium. Istotne pytanie brzmi: jak liczbowo ująć tę przewagę o 8 jednostek pod względem mocy? Co to oznacza dla preferencji Niemiec nad Belgią?

## Preference Function

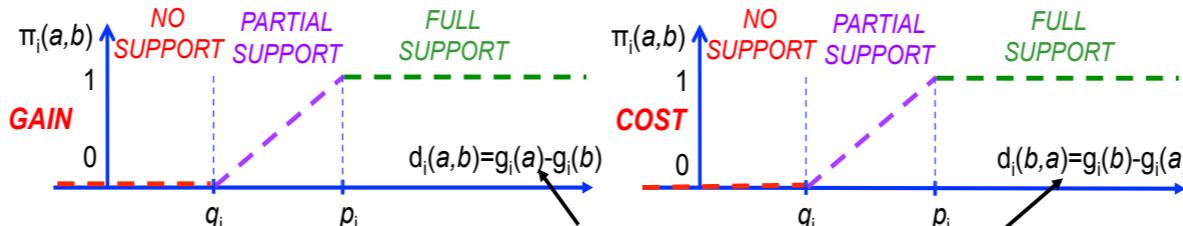


- The preferences are considered to be real numbers varying between 0 and 1
- This means that for each criterion of gain type the DM has in mind a **preference function**:  

$$\pi_i(a,b) = F_i[d_i(a,b)]$$
 in the range [0,1], where  $d_i(a,b) = g_i(a) - g_i(b)$
- $\pi_i(a,b)$  gives the **preference of a over b** for observed performance difference on criterion  $g_i$
- $\pi_i(a,b)$  is called a **marginal preference index** (marginal preference degree)
- For criterion of cost type:  $\pi_i(a,b) = F_i[d_i(b,a)]$
- The pair  $\{g_i, \pi_i(a,b)\}$  is called a **generalized criterion** associated with  $g_i$
- In order to facilitate the identification of a **preference function**, six types have been proposed

[23] Racjonalnie można przyjąć, że preferencje są modelowane z wykorzystaniem liczb rzeczywistych między 0 a 1. Dla każdego kryterium rozważymy funkcję preferencji, która tłumaczy przewagę jednego wariantu nad drugim na stopień preferencji. Na osi x mamy różnicę ocen, a na osi y współczynnik cząstkowej preferencji. Dwie charakterystyczne cechy tej funkcji to fakt, że dla różnic niedodatnich wartości preferencji są równe zeru, a ich ogólny trend jest niemalejący. Oznacza to, że przy większej przewadze wariantu a nad wariantem b stopień preferencji nie może się zmniejszyć. Para złożona z kryterium i cząstkowej funkcji preferencji nazywana jest uogólnionym kryterium. Aby ułatwić definiowanie funkcji preferencji w PROMETHEE, zaproponowano sześć ogólnych typów.

## Indifference and Preference Thresholds



the difference in favor of a (first alternative in the pair  $(a,b)$ ) when compared to b (second alternative)

- Always: when one alternative is not better than another, the preference degree is equal to 0
- In some cases, the difference in evaluations on  $g_i$  in favor of one alternative exists, but it is so small that in the eyes of DM, it does not justify any preference
- **Indifference threshold  $q_i$**  is the maximal difference in performances on  $g_i$ , which is negligible w.r.t. preference
- An immediate transition from no preference to strict (full) preference on  $g_i$  is unrealistic
- **Preference threshold  $p_i \geq q_i$**  is the minimal difference in performances on  $g_i$ , which is considered as sufficient to generate a full preference of one alternative over another on  $g_i$

example  
indifference  
and preference  
thresholds

	$q_i$	$p_i$
$g_2$	0	2
$g_3$	100	300

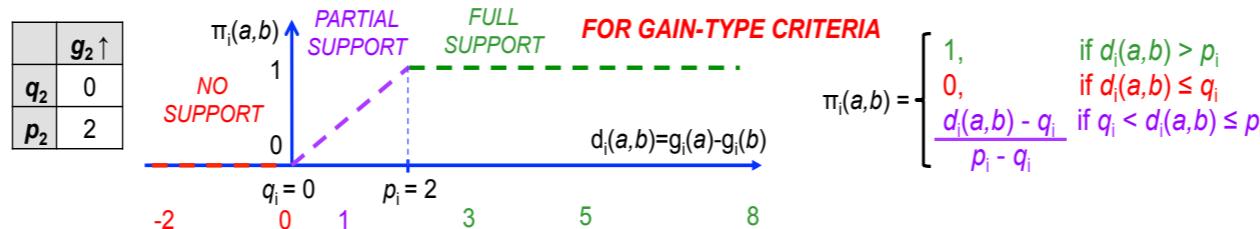
	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
$g_2 \uparrow$	8	0	5	3	7	10
$g_3 \downarrow$	400	800	1000	600	200	600



[24] Zaczniemy od omówienia najbardziej standardowego typu. Wymaga on podania dwóch parametrów. Z jednej strony, w niektórych sytuacjach istnieje przewaga w ocenach na korzyść jednego z wariantów, ale jest ona tak niewielka, że nie powinna implikować żadnej preferencji. Taka maksymalna nieistotna różnica nazywana jest progiem nieroróżnialności, oznaczanym przez  $q$ . Z drugiej strony, powinno być również możliwe określenie minimalnej różnicy w ocenach, która generowałaby ścisłą, pełną preferencję. Taka przewaga nazywana jest progiem preferencji, oznaczanym przez  $p$ . Strefa pomiędzy progami nieroróżnialności i preferencji implikuje częściowe wsparcie na rzecz preferencji. Na dole slajdu widać progi, które ustawiłem dla kryteriów  $g_2$  i  $g_3$ .

## Preference Function for Gain-type Criterion

- a is better than b by more than preference threshold  $p_i$ , implying a strict preference:  $\pi_i(a,b) = 1$
- a is not better than a or it is better by not more than indif. threshold  $q_i$ , implying no preference:  $\pi_i(a,b) = 0$
- a is better than a by more than indifference threshold  $q_i$  but not more than preference threshold  $p_i$ , implying weak preference:  $\pi_i(a,b)$  between 0 and 1



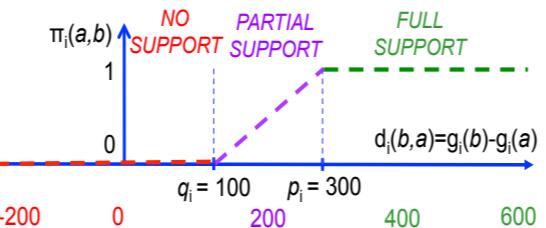
Let us compare ITA with all the remaining alternatives on  $g_2$  given the marginal preference function

Alt. (b)	$g_2 \uparrow$	$d_2(\text{ITA},b)$	$\pi_2(\text{ITA},b)$
ITA	8	0	0
BEL	0	8	1
GER	5	3	1
SWE	3	5	1
AUT	7	1	0.5
FRA	10	-2	0

[25] Omawiając funkcję preferencji dla kryterium typu zysk, będę odwoływał się do kryterium  $g_2$  jako przykładu. Przyjmę też Włochy jako wariant a i porównam je ze wszystkimi pozostałymi krajami, z których każdy posłuży jako wariant b. Próg nieroróżnialności dla  $g_2$  jest równy 0, a próg preferencji 2. Zacznijmy od najkorzystniejszego scenariusza dla wariantu a. Jeśli jego ocena jest lepsza od oceny wariantu b o co najmniej próg preferencji, to mamy ścisłą preferencję, a cząstkowy współczynnik preferencji jest równy 1. Dotyczy to porównania Włoch z Belgią, Niemcami i Szwecją. Odwrotnie, jeśli a nie jest lepsze niż b lub jest lepsze o nie więcej niż próg nieroróżnialności, interpretujemy to jako brak preferencji i przypisujemy cząstkowy indeks równy 0. Można to zaobserwować, gdy porównujemy Włochy z nimi samymi lub Francją. Wreszcie, gdy a jest lepsze od b o więcej niż próg nieroróżnialności i nie więcej niż próg preferencji, mamy słabą preferencję i indeks pomiędzy 0 i 1 z dokładną wartością zależną od porównania różnicy ocen z dwoma progami. Na przykład Włochy są lepsze od Austrii na  $g_2$  o 1, czyli dokładnie pomiędzy progami nieroróżnialności i ścisłej preferencji. To z kolei implikuje indeks cząstkowy równy 0.5.

## Preference Function for Cost-type Criterion

	$g_3 \downarrow$
$q_3$	100
$p_3$	300



FOR COST-TYPE CRITERIA

$$\pi_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_i(b,a) > p_i \\ 0, & \text{if } d_i(b,a) \leq q_i \\ \frac{d_i(b,a) - q_i}{p_i - q_i}, & \text{if } q_i < d_i(b,a) \leq p_i \\ \end{cases}$$

Let us compare ITA with all the remaining alternatives on  $g_3$  given the marginal preference function

Alt. (b)	$g_3 \downarrow$	$d_3(b,ITA)$	$\pi_3(ITA,b)$
ITA	400	0	0
BEL	800	400	1
GER	1000	600	1
SWE	600	200	0.5
AUT	200	-200	0
FRA	600	200	0.5

- $\pi_3(ITA,BEL) = 1$ , because  $g_3(BEL) - g_3(ITA) = 800 - 400 = 400 > 300$   
ITA is better than BEL by 400, which is greater than  $p_3 = 300$
- $\pi_3(ITA,AUT) = 0$ , because  $g_3(AUT) - g_3(ITA) = 200 - 400 = -200 \leq 300$   
ITA is worse than AUT by 200, i.e., it is not better by at least  $q_3 = 100$
- $\pi_3(ITA,SWE) = 0.5$ , b.c.  $100 < g_3(SWE) - g_3(ITA) = 600 - 400 = 200 \leq 300$   
ITA is better than SWE by 200, which is greater than  $q_3 = 100$   
and less than  $p_3 = 300$  (between the two, exactly in half)

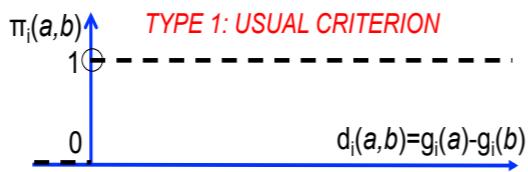
So far, we have used just the most standard marginal preference function. Where are the 6 types?



[26] Dla kryterium typu koszt, interpretacja jest podobna. Musimy tylko pamiętać, że teraz mniejsze oceny są bardziej preferowane i aby określić liczbowo przewagę a nad b, musimy odjąć ocenę a od oceny b. Jest to zilustrowane dla kryterium  $g_3$  z progiem nierozróżnialności 100 i progiem preferencji 300. Włochy mają mniejszą ocenę niż Belgia i Niemcy o więcej niż próg preferencji, co oznacza całkowite wsparcie dla preferencji. Przeciwnie, Włochy mają większą ocenę niż Austria, co oznacza brak poparcia dla preferencji. Wreszcie, przewaga Włoch nad Szwecją czy Francją wynosi 200. Ponownie jest to w strefie słabej preferencji, co prowadzi do częściowego wsparcia preferencji równego 0.5. Kilka minut temu wspomniałem, że w PROMETHEE istnieje sześć rodzajów funkcji preferencji, a jak dotąd pokazałem tylko jeden.

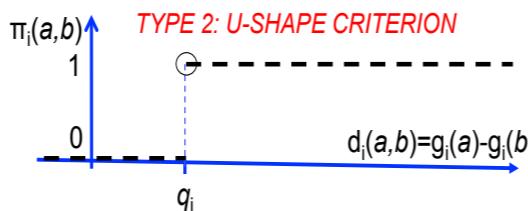
# Six Types of Preference Functions (1)

The intensity of preference of  $a$  over  $b$  on criterion  $g_i$  is a function  $\pi_i(a,b)$  of the difference (amplitude)  $d_i(a)-g_i(b)$



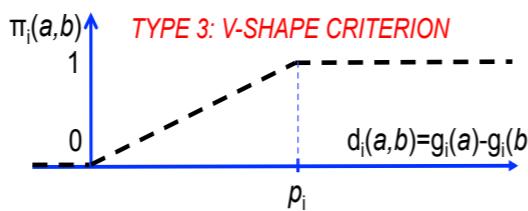
$$\pi_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_i(a,b) > 0 \\ 0, & \text{if } d_i(a,b) \leq 0 \end{cases}$$

No parameters to be determined  
Immediate strict preference  
Useful for ordinal performance scales



$$\pi_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_i(a,b) > q_i \\ 0, & \text{if } d_i(a,b) \leq q_i \end{cases}$$

There exists an indifference  $q_i$  threshold which must be fixed



$$\pi_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } d_i(a,b) > p_i \\ 0, & \text{if } d_i(a,b) \leq 0 \\ \frac{d_i(a,b)}{p_i}, & \text{if } 0 \leq d_i(a,b) \leq p_i \end{cases}$$

Preference increases up to a preference threshold  $p_i$   
to be determined

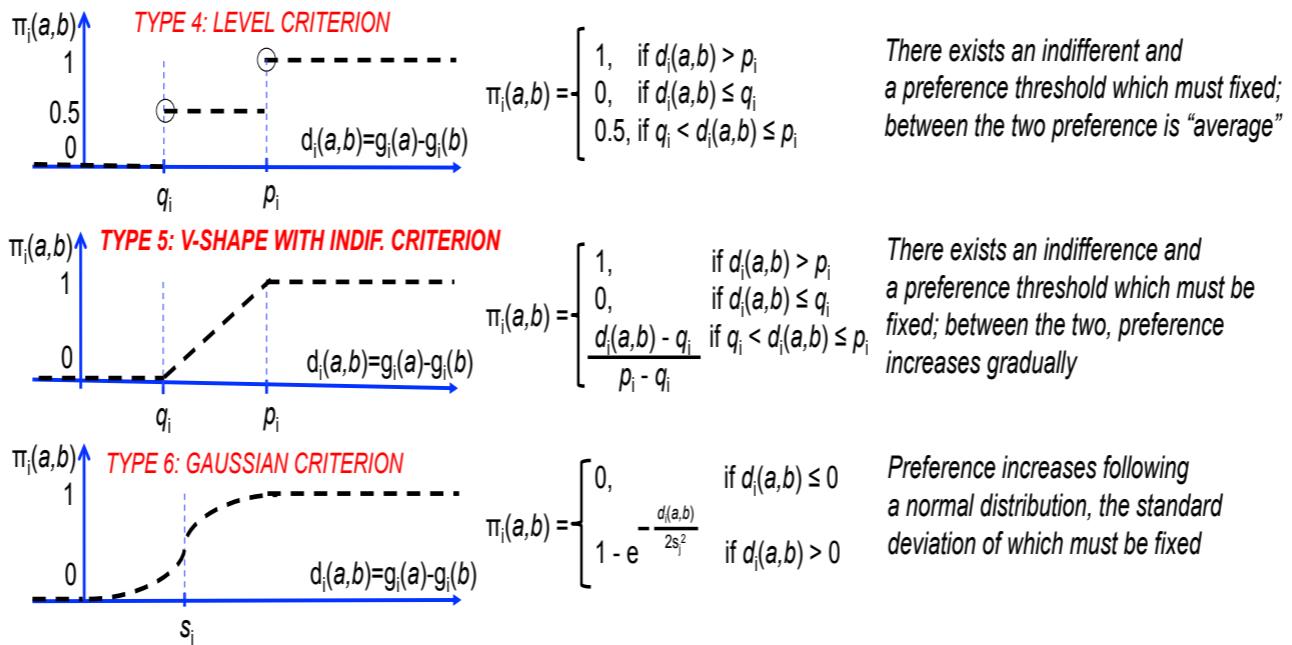
Always, i.e., for all types of preference functions, when  $a$  is not better than  $b$ , then  $\pi_i(a,b) = 0$



[27] Na następnym slajdzie widać kolejne trzy typy. Wszystkie one przekładają różnice ocen na intensywność preferencji wyrażoną na skali od 0 do 1. Pierwszy typ nie wiąże się z żadnymi parametrami, implikując ścisłą preferencję, gdy  $a$  osiąga lepszą ocenę niż  $b$ . W funkcji U-ksztaltnej rozważamy jedynie próg nieroróżnialności, który stanowi granicę między brakiem preferencji a pełnym dla niej poparciem. Z kolei w przypadku funkcji o kształcie V współczynnik preferencji rośnie liniowo od 0 dla braku różnicy do 1 dla różnicy równej progiowi preferencji. To wartość tego ostatniego trzeba podać dla tej funkcji.

## Six Types of Preference Functions (2)

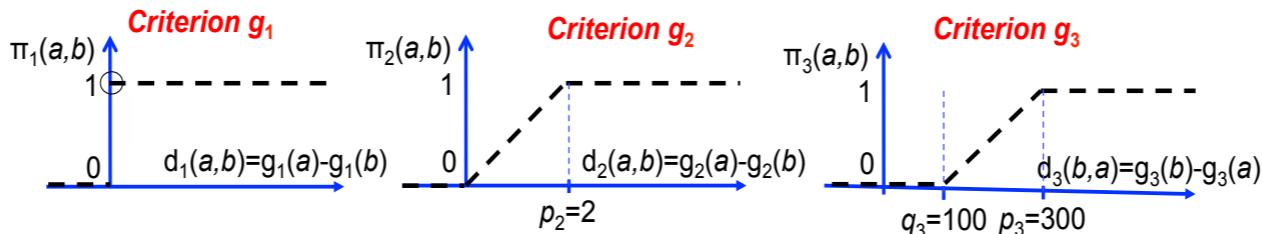
The intensity of preference of  $a$  over  $b$  on criterion  $g_i$  is a function  $\pi_i(a,b)$  of the difference (amplitude)  $d_i(a)-g_i(b)$



[28] Kolejne dwa typy funkcji wykorzystują zarówno próg nieroróżnialności, jak i preferencji. Dla funkcji poziomu preferencja między dwoma progami jest stała i arbitralnie zakłada się, że jest równa 1/2. Piąty typ funkcji, ten, który omawialiśmy dokładniej na poprzednich slajdach, nazywa się formalnie funkcją V-ksztaltną z nieroróżnialnością. Ostatni typ zakłada, że preferencja rośnie zgodnie z rozkładem normalnym, a parametrem, którego wartość należy ustalić, jest odchylenie standardowe. W praktyce jest on jednak rzadko stosowany.

## Marginal Preference Indices - Example

Concerning  $g_1$  – Power, **GER** is better than **BEL**. How can we quantify this advantage? Well ...



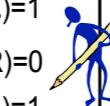
Let us compare **BEL** and **GER** all criteria given the marginal preference functions

Alt.	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$	$g_3 \downarrow$
<b>BEL</b>	58	0	800
<b>GER</b>	66	5	1000

Prefer. index	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$\pi_i(\text{BEL}, \text{GER})$	0	0	0.5
$\pi_i(\text{GER}, \text{BEL})$	1	1	0

- $g_1$ : **BEL** is not better than **GER**  $\rightarrow \pi_1(\text{BEL}, \text{GER})=0$   
**GER** is better than **BEL** by 8  $\rightarrow \pi_1(\text{GER}, \text{BEL})=1$
- $g_2$ : **BEL** is not better than **GER**  $\rightarrow \pi_2(\text{BEL}, \text{GER})=0$   
**GER** is better than **BEL** by 5  $\rightarrow \pi_2(\text{GER}, \text{BEL})=1$
- $g_3$ : **BEL** is better than **GER** by 200  $\rightarrow \pi_3(\text{BEL}, \text{GER})=0.5$   
**GER** is not better than **BEL**  $\rightarrow \pi_3(\text{GER}, \text{BEL})=0$



**Properties:**  $\pi_i(a,b)$  is expressing with which degree  $a$  is preferred to  $b$  on criterion  $g_i$   
For all  $(a,b)$  and for all  $i$ :  $\pi_i(a,a)=0$ ;  $0 \leq \pi_i(a,b)$ ,  $\pi_i(b,a) \leq 1$  and  $0 \leq \pi_i(a,b) + \pi_i(b,a) \leq 1$



[29] Wróćmy teraz do bezpośredniego porównania Niemiec i Belgii. Pytaliśmy, jak liczbowo określić przewagę Niemiec na pierwszym kryterium, a teraz rozszerzymy to pytanie na trzy kryteria z funkcjami preferencji zdefiniowanymi na slajdzie. Dla pierwszego kryterium stosujemy zwykłą funkcję bez parametrów. Skoro Niemcy są lepsze od Belgii, to współczynnik preferencji jest równy 1, a dla pary odwrotnej (Belgia, Niemcy) jest równy 0. Dla drugiego kryterium stosujemy funkcję w kształcie litery V z progiem preferencji równym 2. Skoro Niemcy są lepsze od Belgii o 5, to preferencja cząstkowa musi wynosić 1, a przy porównywaniu Belgii z Niemcami ustawiamy ją na 0. Dla trzeciego kryterium stosujemy najbardziej standardową funkcję z dwoma progami. Teraz Niemcy nie są lepsze od Belgii, więc wskaźnik preferencji wynosi 0. Z kolei Belgia jest lepsza od Niemiec o 200, co znajduje się dokładnie pomiędzy progami nieroróżnicialności i preferencji, więc wskaźnik preferencji wynosi 0.5. Dwie podstawowe własności cząstkowych współczynników preferencji są następujące. Jeśli wariant jest porównywany z samą sobą, to preferencja wynosi zero, natomiast suma indeksów preferencji cząstkowych dla par  $(a,b)$  i  $(b,a)$  zawsze mieści się w przedziale od 0 do 1.

## Marginal Preference Indices - Need for Aggregation

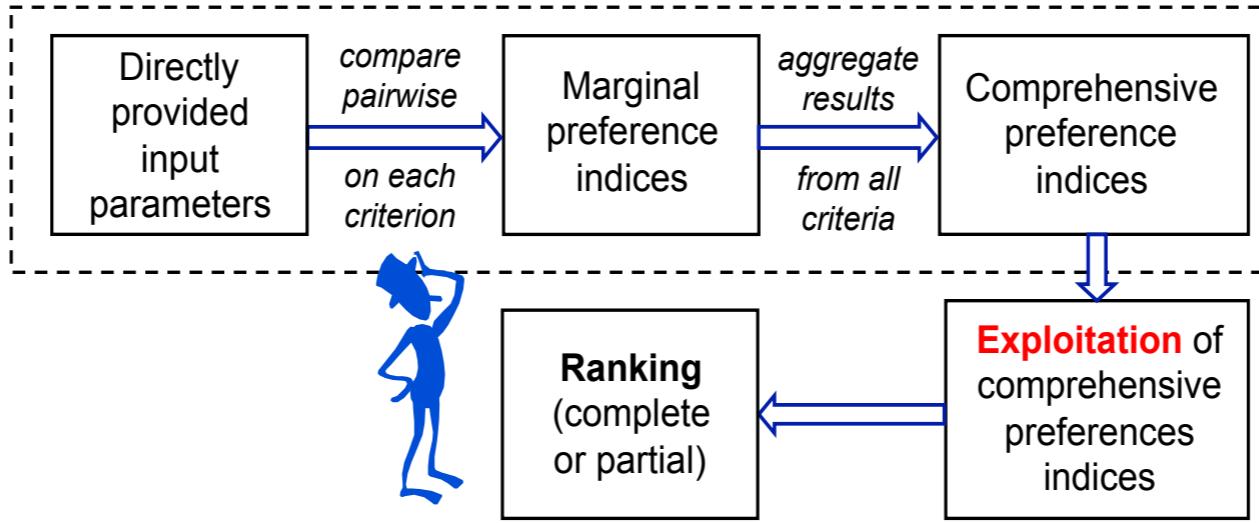
$\pi_1(.,.)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
ITA	0	1	1	1	1	1
BEL	0	0	0	0	0	0
GER	0	1	0	0	0	0
SWE	0	1	1	0	0	0
AUT	0	1	1	1	0	1
FRA	0	1	1	1	0	0

$\pi_2(.,.)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
ITA	0	1	1	1	0.5	0
BEL	0	0	0	0	0	0
GER	0	1	0	1	0	0
SWE	0	1	0	0	0	0
AUT	0	1	1	1	0	0
FRA	1	1	1	1	1	0

$\pi_3(.,.)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
ITA	0	1	1	0.5	0	0.5
BEL	0	0	0.5	0	0	0
GER	0	0	0	0	0	0
SWE	0	0.5	1	0	0	0
AUT	0.5	1	1	1	0	1
FRA	0	0.5	1	0	0	0

- In view of the marginal preference indices, what is the **comprehensive support** given to the hypothesis that  $a$  is preferred to  $b$ ?
- $AUT$  seems to be very strong compared to  $BEL$
- $SWE$  seems to be very weak compared to  $FRA$
- For  $ITA$  and  $AUT$  the results are not univocal
- In the real world, in most cases there are criteria on which  $a$  is better than  $b$ , and criteria on which  $b$  is better than  $a$

[30] Na kolejnym slajdzie przedstawiłem preferencje cząstkowe dla wszystkich par wariantów i wszystkich kryteriów. Żółtym i pomarańczowym kolorem wyróżniłem indeksy, które były wprost rozpatrywane na ostatnich slajdach. Przyglądając się różnym parametrom, możemy dojść do skrajnych wniosków. Na przykład Austria jest bardzo silna w porównaniu z Belgią, ponieważ na wszystkich kryteriach preferencja cząstkowa wynosi 1. Z kolei Szwecja wypada źle w porównaniu z Francją, nie otrzymując żadnego wsparcia na jakimkolwiek kryterium. Z kolei porównanie Włoch i Austrii nie jest jednoznaczne. g1 w pełni popiera Włochy, g2 optuje za Włochami słabo, ale g3 daje już częściowe poparcie Austrii. Bez wątpienia potrzebujemy środków do określenia całościowej preferencji w przekroju wszystkich kryteriów.

**Construction** of an outranking relation

[31] PROMETHEE składa się z dwóch dużych etapów. W pierwszym z nich, który rozważaliśmy do tej pory, konstrujemy relację przewyższania dla wszystkich par wariantów. Wiecie już, że wymaga to bezpośredniej informacji preferencyjnej, która służy do obliczenia cząstkowych indeksów preferencji dla wszystkich kryteriów. Indeksy te zostaną zagregowane w bardziej kompleksowe miary służące jako dane wejściowe dla drugiego etapu. Polega on na wykorzystaniu relacji przewyższania do wypracowania rankingu. Omówimy dwie ściśle związane ze sobą metody, PROMETHEE I i II, które prowadzą do uzyskania odpowiednio częściowego lub zupełnego rankingu.

## Weights

- In many methods, aggregation of results from various criteria requires incorporation of weights
- In PROMETHEE, weights represent the **relative importance** of different criteria independent from their measurement units
- **The greater  $w_i$ , the more important criterion  $g_i$**
- Weights are **inter-criteria parameters** (information between criteria)
- A single weight cannot be interpreted alone; it has a meaning only in the context of all other weights being specified



Weight	$g_1$	$g_2$	$g_3$
$w_i$	3	2	5

- $g_3$  is the most important criterion, whereas the least important one is  $g_2$
- $g_1$  is one and a half times as important as  $g_2$
- Users are allowed to introduce arbitrary (non-normalized) numbers for the weights
- The weights do not need to sum up to 1 (they are normalized later in any case)

[32] Aby zagregować odpowiedzi z poszczególnych kryteriów, musimy uwzględnić ich wagę. W PROMETHEE wagę te reprezentują współczynniki istotności, a więc większe wartości są związane z bardziej znaczącymi kryteriami. W przeciwieństwie do progów, wagi są parametrami międzykryterialnymi decydującymi o roli każdego kryterium w całej rodzinie. Pojedyncza waga nie może być interpretowana samodzielnie, ponieważ jej konkretna wartość ma sens dopiero w zestawieniu z innymi wagami. Dla naszego przykładu największą wagę przypisujemy trzeciemu kryterium, a najmniejszą drugiemu. Moje wagi są wybrane arbitralnie. Nie sumują się one do jedynki i nie muszą, bo później i tak zostaną znormalizowane przez metodę.

# Comprehensive Preference Index

## COMPREHENSIVE PREFERENCE INDEX

$$\pi(a,b) = \frac{\sum_{i=1,\dots,m} w_i \cdot \pi_i(a,b)}{\sum_{i=1,\dots,m} w_i}$$

- Criteria have different impacts on the value of  $\pi(a,b)$ , dependent on their weights
- $\pi(a,b)$  is in the range [0,1]
- 1 = all criteria strongly support that  $a$  is preferred to  $b$
- 0 = none criterion supports that  $a$  is preferred to  $b$  weakly or strongly
- $\pi(a,b)$  quantifies the strength of the coalition of criteria supporting that  $a$  is preferred to  $b$
- For all pairs of alternatives  $(a,b)$ :  
 $\pi(a,a)=0; 0 \leq \pi(a,b), \pi(b,a) \leq 1$   
 $0 \leq \pi(a,b) + \pi(b,a) \leq 1$

$\pi(\dots)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
ITA	0	1	1	0.75	0.4	0.55
BEL	0	0	0.25	0	0	0
GER	0	0.5	0	0.2	0	0
SWE	0	0.75	0.8	0	0	0
AUT	0.25	1	1	1	0	0.8
FRA	0.2	0.75	1	0.5	0.2	0

	$g_1$	$g_2$	$g_3$
weight $w_i$	3	2	5
$\pi_i(BEL,GER)$	0	0	0.5
$\pi_i(GER,BEL)$	1	1	0

$$\pi(BEL,GER) = \frac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0.5}{3 + 2 + 5} = 0.25$$

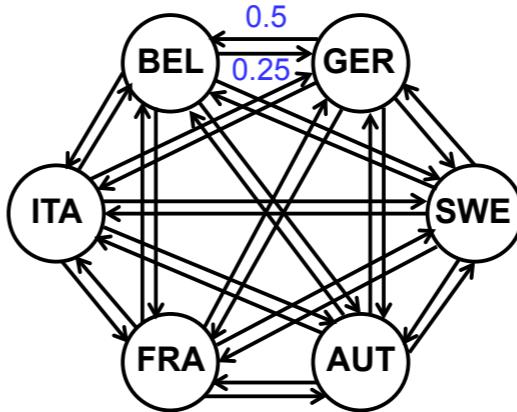
$$\pi(GER,BEL) = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{3 + 2 + 5} = 0.50$$



[33] Wagi dostarczone przez decydenta są uwzględnione przy obliczeniu globalnego współczynnika preferencji. Dla danej pary wariantów jest on średnią ważoną cząstkowych współczynników preferencji na wszystkich kryteriach. W ten sposób, ważniejsze kryteria mają większy wpływ na całkowite wsparcie udzielone relacji preferencji. W podanym po prawej stronie przykładzie widać, że globalny współczynnik preferencji Niemiec nad Belgią wynosi 0.5, podczas gdy współczynnik dla pary odwrotnej wynosi 0.25. W ogólności, wartość ta mieści się zawsze w przedziale od 0 do 1, a dokładna liczba określa siłę koalicji kryteriów wspierających relację preferencji. Wartość 1 oznacza, że wszystkie kryteria silnie wspierają preferencję, a 0 oznacza całkowity brak wsparcia dla tej relacji przez jakiekolwiek kryterium. Właściwości globalnych współczynników są podobne do tych na poziomie cząstkowym. Ich wartość dla każdego wariantu porównywanego z samym sobą to 0. Natomiast suma współczynników preferencji dla dowolnej pary  $(a,b)$  i pary odwrotnej  $(b,a)$  mieści się zawsze w przedziale od 0 do 1.

## Preference Graph

- $\pi(a,b)$ ,  $\pi(b,a)$  are real numbers (without units) completely **independent of the scales of criteria**
- $\pi(a,b)$  can be interpreted as a **valued outranking relation**
- It can be represented as a graph with an arc flow equal to  $\pi(a,b)$  from node  $a$  to node  $b$  (i.e., two arcs between each pair of nodes)



How can we exploit this graph  
 (matrix of preference degrees)  
 in order to obtain a ranking  
 (complete or partial)?



$\pi(\dots)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
ITA	0	1	1	0.75	0.4	0.55
BEL	0	0	0.25	0	0	0
GER	0	0.5	0	0.2	0	0
SWE	0	0.75	0.8	0	0	0
AUT	0.25	1	1	1	0	0.8
FRA	0.2	0.75	1	0.5	0.2	0



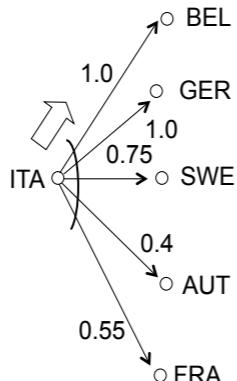
[34] Co ważne, współczynniki preferencji są liczbami rzeczywistymi, bez jednostek. Nie mają na nie wpływu skale ocen na poszczególnych kryteriach. Macierz takich liczb można interpretować jako rozmytą relację preferencji. Jest ona przedstawiona w prawym dolnym rogu. Alternatywnie, taką macierz można przedstawić jako wartościowy graf przewyższania, zawierający warianty jako wierzchołki oraz dwa łuki dla każdej pary. W przypadku naszego problemu wartości uzyskane dla rozważanych par są bardzo zróżnicowane. Na głównej przekątnej mamy same zera. Takie zerowe wsparcie preferencji obserwujemy również dla innych par, na przykład Belgii i Włoch czy Szwecji i Francji. Na drugim biegunie, mamy sześć par z maksymalnym całkowitym wsparciem preferencji i kilka innych par z częściowym wsparciem. W szczególności, gdy porównujemy Francję z Austrią, wsparcie to jest stosunkowo niewielkie, podczas gdy wskaźnik dla Szwecji i Niemiec sugeruje dość silne wsparcie. Istotne zagadnienie to, w jaki sposób można wykorzystać taką macierz lub graf do wypracowania rankingu.

# Positive and Negative Flows

- Each alternative is facing  $(n-1)$  other alternatives (note that  $\pi(a,a)$  is always 0)
- The positive (outgoing) outranking flow** expresses how an alternative is outranking all the others:  

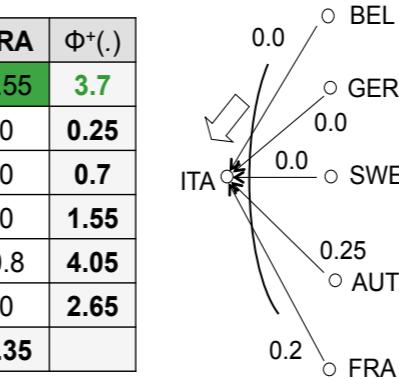
$$\Phi^+(a) = \sum_{j=1,\dots,n} \pi(a,b)$$
- It is its power (strength); its outranking character; the higher  $\Phi^+(a)$ , the better alternative  $a$
- The negative (ingoing) outranking flow** expresses how an alternative is outranked by all the others:  

$$\Phi^-(a) = \sum_{j=1,\dots,n} \pi(b,a)$$
- It is its weakness; its outranked character; the lower  $\Phi^-(a)$ , the better alternative  $a$
- Sometimes, the flows are defined as averages and not sums (then, they need to be divided by  $(n-1)$ )



$\pi(.,.)$	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA	$\Phi^+(.)$
ITA	0	1	1	0.75	0.4	0.55	3.7
BEL	0	0	0.25	0	0	0	0.25
GER	0	0.5	0	0.2	0	0	0.7
SWE	0	0.75	0.8	0	0	0	1.55
AUT	0.25	1	1	1	0	0.8	4.05
FRA	0.2	0.75	1	0.5	0.2	0	2.65
$\Phi^-(.)$	0.45	4.0	4.05	2.45	0.6	1.35	

$$\Phi^+(ITA) = 1 + 1 + 0.75 + 0.4 + 0.55 = 3.7$$



$$\Phi^-(ITA) = 0 + 0 + 0 + 0.25 + 0.2 = 0.45$$



[35] Udzielimy dwóch powiązanych ze sobą odpowiedzi, które stanowią bazę dla metod PROMETHEE I i II. Ich wspólnym etapem jest obliczanie tak zwanych przepływów przewyższania. Przepływ pozytywny (dodatni) określa, jak dany wariant przewyższa wszystkie pozostałe. Definiuje się go jako sumę całkowitych stopni preferencji wariantu a nad wszystkimi pozostałymi wariantami. Patrząc na macierz preferencji, odpowiada to sumowaniu wartości w danym wierszu. Przepływ negatywny (ujemny) to miara przewagi wszystkich pozostałych nad danym wariantem. Jest on definiowany jako suma stopni preferencji wszystkich pozostałych wariantów nad daną opcją. W macierzy stopni preferencji sumujemy więc wartości w danej kolumnie. Tak zdefiniowane przepływy dodatnie i ujemne mogą być interpretowane jako odzwierciedlenie mocnych i słabych stron każdego wariantu.

# Ranking of PROMETHEE I (1)

Two complete rankings of the alternatives from A are built:

- Ranking following the decreasing order of the positive flows  $\Phi^+(a)$
- Ranking following the increasing order of negative flows  $\Phi^-(a)$

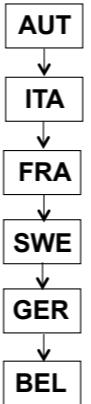
The PROMETHEE I **partial ranking** ( $P^I$ ,  $I^I$ ,  $R^I$ ) is obtained from the positive and negative flows:

- $P^I$  = preference;  $I^I$  = indifference;  $R^I$  = incomparability
- Both flows usually do not induce the same rankings
- **The ranking derived by PROMETHEE I is their intersection**

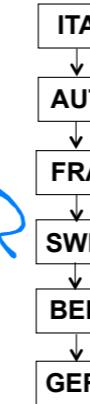
The greater  $\Phi^+(a)$ , the better  
The lesser  $\Phi^-(a)$ , the better

Alt.	$\Phi^+(.)$	$\Phi^-(.)$
ITA	3.70 (2)	0.45 (1)
BEL	0.25 (6)	4.00 (5)
GER	0.70 (5)	4.05 (6)
SWE	1.55 (4)	2.45 (4)
AUT	4.05 (1)	0.60 (2)
FRA	2.65 (3)	1.35 (3)

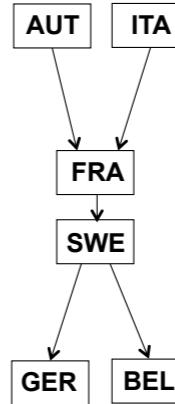
Ranking based on  $\Phi^+(.)$



Ranking based on  $\Phi^-(.)$



Ranking PROMETHEE I

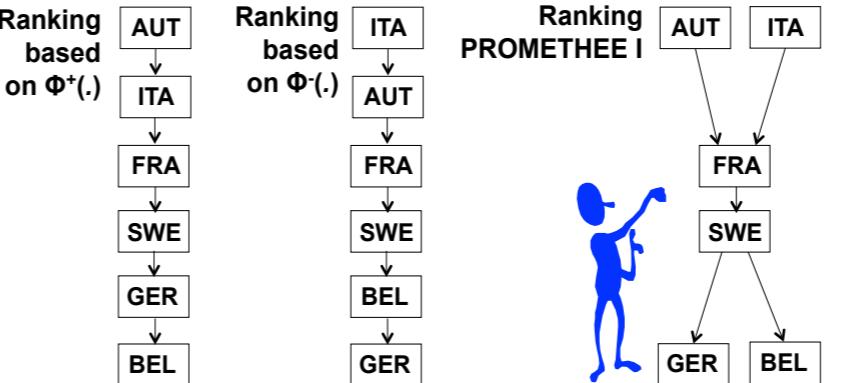


## Ranking of PROMETHEE I (2)

- **Preference  $P^l$** : better strength and weakness, or the same strength and better weakness, or the same weakness and better strength (overall, at least as good strength and better weakness or at least as good weakness and better strength)
- The information of both outranking flows is consistent and may therefore be considered as sure  
 $aP^l b$  iff  $[\Phi^+(a) > \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) < \Phi^-(b)]$  or  $[\Phi^+(a) = \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) < \Phi^-(b)]$   
or  $[\Phi^+(a) > \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) = \Phi^-(b)]$
- **Indifference  $I^l$** : both strengths and weaknesses are the same  
 $aI^l b$  iff  $[\Phi^+(a) = \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) = \Phi^-(b)]$
- **Incomparability  $R^l$** : better strength and worse weakness, or better weakness and worse strength (the information provided by both flows is inconsistent; the PROMETHEE I is prudent)  
 $aR^l b$  iff  $[\Phi^+(a) > \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) > \Phi^-(b)]$  or  $[\Phi^+(a) < \Phi^+(b) \text{ and } \Phi^-(a) < \Phi^-(b)]$

The greater  $\Phi^+(a)$ , the better  
The lesser  $\Phi^-(a)$ , the better

Alt.	$\Phi^+(.)$	$\Phi^-(.)$
ITA	3.70 (2)	0.45 (1)
BEL	0.25 (6)	4.00 (5)
GER	0.70 (5)	4.05 (6)
SWE	1.55 (4)	2.45 (4)
AUT	4.05 (1)	0.60 (2)
FRA	2.65 (3)	1.35 (3)



[37] Zdefiniujmy formalnie, co oznacza przecięcie dwóch rankingów opartych na pozytywnych i negatywnych przepływach. Musimy przy tym rozważyć trzy relacje. Jeśli chodzi o preferencję, jeden wariant jest preferowany nad innym, jeśli ma co najmniej tak samo dobrą siłę i lepszą słabość lub co najmniej tak samo dobrą słabość i lepszą siłę. Dotyczy to choćby Austrii w porównaniu z Francją, Szwecją, Niemcami czy Belgią, ponieważ ma ona większy przepływ pozytywny i mniejszy negatywny. Wymagania dotyczące nieroróżnialności są bardzo rygorystyczne, ponieważ wartości przepływów dodatnich i ujemnych muszą być takie same. W naszym przykładzie nie zachodzi to dla żadnej pary. Wreszcie, nieporównywalność ma miejsce, jeśli informacje dostarczane przez dwa przepływy są sprzeczne. Formalnie oznacza to lepszą siłę i gorszą słabość lub lepszą słabość i gorszą siłę. Można to zaobserwować dla dwóch par w naszym problemie. W szczególności Niemcy mają większy przepływ pozytywny niż Belgia, ale także większy przepływ negatywny.

## Ranking of PROMETHEE II

$\pi(\dots)$	$\Phi^+(\dots)$	$\Phi^-(\dots)$	$\Phi^-(\dots)$
ITA	3.7	0.45	3.25 (2)
BEL	0.25	4.0	-3.75 (6)
GER	0.7	4.05	-3.35 (5)
SWE	1.55	2.45	-0.90 (4)
AUT	4.05	0.6	3.45 (1)
FRA	2.65	1.35	1.30 (3)

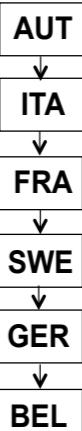
$$\Phi^+(\text{ITA}) = 3.7 - 0.45 = 3.25$$

- The net outranking flow is the **balance** between the positive and negative flows:  

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$
- For each alternative  $a$ :  

$$-(n-1) \leq \Phi(a) \leq n-1$$
- The higher the net flow, the better the alternative
- The sum of all net flows is zero:  

$$\sum_{j=1,\dots,n} \Phi(a) = 0$$



The ranking of PROMETHEE II consists of ( $P^{II}, I^{II}$ )

- Preference  $P^{II}$ :** better new flow implies a strict preference -  $aP^{II}b$  iff  $\Phi(a) > \Phi(b)$
- Indifference  $I^{II}$ :** the same flows imply indifference -  $aI^{II}b$  iff  $\Phi(a) = \Phi(b)$

When PROMETHEE II is considered, all the alternatives are comparable

- No incomparabilities, but the resulting information can be more disputable
- When  $\Phi(a) > 0$ ,  $a$  is more preferred over the remaining alternatives on all criteria
- When  $\Phi(a) < 0$ ,  $a$  is more outranked by the remaining alternatives on all criteria



[38] Tolerowanie nieporównywalności odpowiada działaniu z rozwagą i respektowaniu wahań we wskazaniu lepszego wariantu. W niektórych kontekstach decyzyjnych potrzebujemy jednak rankingu zupełnego. Oferuje go metoda PROMETHEE II, który oblicza dla każdego wariantu przepływ całkowity, net flow. Jest on zdefiniowany jako różnica pozytywnego i negatywnego przepływu. Odzwierciedla więc balans pomiędzy siłą i słabością. Im wyższy przepływ, tym lepszy wariant. Ponieważ z każdą opcją związana jest tylko jedna liczba, możliwe są teraz tylko dwie relacje. Preferencja ma miejsce, jeżeli przepływ jednego wariantu jest wyższy, a nierozróżnialność zachodzi, gdy przepływy są równe. Ranking konstruowany przez PROMETHEE II zachowuje wszystkie relacje preferencji i nierozróżnialności z PROMETHEE I. Nie ma już jednak par nieporównywalnych. Dla naszego przykładu, Austria okazała się teraz lepsza niż Włochy, ponieważ ma wyższy przepływ całkowity, a Niemcy są bardziej preferowane niż Belgia. Należy pamiętać, że suma wszystkich przepływów całkowitych musi wynosić zero, ponieważ siła jednego wariantu oznacza taką samą słabość innego. W ogólności, gdy przepływ danego wariantu jest dodatni, mówimy, że jest on średnio bardziej preferowany nad pozostałe warianty pod względem wszystkich kryteriów.

## Preference information ( $i=1,\dots,n$ )

- **Intracriteria:**

- 6 shapes of the intensity of preference on each criterion  
indifference thresholds  $q_i$ , preference thresholds  $p_i$ , standard deviation on Gaussian shape  $s_i$

- **Intercriteria:**

- importance coefficients (weights) of criteria  $w_i$

**Preference model:** an outranking relation in set  $A$  characterized by the comprehensive preference degrees  $\pi(a,b)$

**Recommendation:** complete or partial ranking based on the Net Flow Score procedures

- In real-world applications, it is recommended to consider both PROMETHEE I and PROMETHEE II
- The complete ranking is easy to use, but the analysis of incomparabilities often helps to finalize a proper decision
- *Samuel Karlin:* “The purpose of models is not to fit the data, but to sharpen the questions”

# PROMETHEE



[39] Podsumujmy główne cechy metody PROMETHEE. Wymaga ona bezpośredniej informacji preferencyjnej. Składa się ona z części wewnętrzkyterialnej, obejmującej funkcję preferencji, która może być parametryzowana za pomocą progów nieroróżnialności i preferencji lub odchylenia standardowego. Część międzykryterialna związana jest z wagami. Model preferencji wykorzystywany przez PROMETHEE jest wartościowaną relacją przewyższania. Ma ona postać globalnych stopni preferencji dla wszystkich par wariantów. Relacja ta jest wykorzystywana do uzyskania zupełnego lub częściowego rankingu przy użyciu procedur Net Flow Score. W rzeczywistym wspomaganiu decyzji zaleca się równoczesne wykorzystanie PROMETHEE I i II. Oczywiście, ranking zupełny jest łatwiejszy w interpretacji, ale analiza nieporównywalności oferuje bogatsze argumenty, które pomagają w podjęciu właściwej decyzji.

- PROMETHEE I and II are appropriate to select one alternative
- In some applications, **a subset of alternatives must be identified**
- Let  $\{a_i, i=1, \dots, n\}$  be the set of alternatives
- Associate a Boolean variable  $x_i$  to each alternative
  - $x_i = 1$ , if  $a_i$  is selected
  - $x_i = 0$ , if  $a_i$  is not selected
- Use PROMETHEE II to obtain net flows  $\Phi(a_i)$  (**neglect constraints**)
- Solve the following **binary linear programming model** accounting for additional constraints
 
$$\max \sum_{i=1, \dots, n} x_i \cdot \Phi(a_i)$$

*subject to:*

$$\sum_{i=1, \dots, n} \lambda_{p,i} \cdot x_i \{ \geq, =, \leq \} \beta_p, \quad p = 1, \dots, P$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

where  $\Phi(a_i)$  are the coefficients of the objective function are net flows  
and  $\lambda_{p,i}$  are the coefficients of the  $P$  linear constraints
- **Aim:** collect as much net flow as possible, while taking into account the constraints



[40] Metody PROMETHEE I i II dostarczają rankingi wariantów. W tym ujęciu są one również właściwe dla wyboru jednego wariantu lub niewielkiej liczby wariantów, które zajmują najwyższe miejsca w rankingu. Jednak w niektórych zastosowaniach należy wybrać podzbior wariantów, biorąc pod uwagę zbiór ograniczeń. Takim scenariuszem zajmuje się metoda PROMETHEE V. Wykorzystuje ona przepływy całkowite obliczone w PROMETHEE II. Jej idea polega na sformułowaniu binarnego problemu programowania matematycznego, który maksymalizuje sumę przepływów związanych z wybranymi wariantami. Aby zamodelować taki wybór, z każdym wariantem wiążemy zmienną binarną. Gdy przyjmuje ona wartość 1, wariant zostaje wybrany. Gdy przyjmie wartość 0, zostaje odrzucony. Optymalizacja odbywa się z uwzględnieniem zbioru ograniczeń liniowych, których lewa strona jest sumą ważoną zmiennych binarnych, przy czym wagą są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla danego ograniczenia, a prawa strona jest pewnym limitem.

## PROMETHEE V - Example

- The constraints may concern cardinality, budget, return, investment, marketing, ...
- They can be related to all alternatives, but possibly also only to some subsets (clusters)

Example:

- Consider the results of the previously conducted analysis with PROMETHEE II
- Select a subset of 2 alternatives with comprehensive maintenance cost not exceeding 40 million E.
- Having solved the binary linear program, a subset of alternatives  $a_i$  associated with  $x_i = 1$  is selected

$$\max 3.25 \cdot x_1 + (-3.75) \cdot x_2 + (-3.35) \cdot x_3 + (-0.90) \cdot x_4 + 3.45 \cdot x_5 + 1.30 \cdot x_6$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 2$$

$$22 \cdot x_1 + 17 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 + 28 \cdot x_4 + 20 \cdot x_5 + 18 \cdot x_6 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$$

Optimal solution: select **AUT** and **FRA**

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$$

$$\text{objective function} = 3.45 + 1.30 = 4.75$$

$$\text{cardinality} = 2 (x_5 = 1, x_6 = 1)$$

$$\text{comprehensive maintenance cost} = 20 + 18 = 38$$



Alternative	$\Phi(\cdot)$	Maintenance cost
ITA ( $a_1$ )	3.25	22
BEL ( $a_2$ )	-3.75	17
GER ( $a_3$ )	-3.35	25
SWE ( $a_4$ )	-0.90	28
AUT ( $a_5$ )	3.45	20
FRA ( $a_6$ )	1.30	18



[41] Ograniczenia mogą dotyczyć liczności wybranego podzbioru, maksymalnego budżetu, minimalnego zysku, czy też ograniczeń dotyczących kosztów inwestycyjnych. Jako przykład rozważmy wcześniej przeprowadzoną analizę z przepływami podanymi w tabeli w lewym dolnym rogu. Naszym celem jest wybór podzbioru co najwyżej dwóch wariantów, które nie przekroczyły kosztów utrzymania w wysokości 40 milionów euro. Aby rozwiązać ten problem, formułujemy problem zawierający sześć zmiennych binarnych, z których każda jest związana z innym wariantem. Funkcja celu maksymalizuje sumę tych zmiennych pomnożoną przez odpowiednie przepływy. Ograniczenia wskazują, że suma zmiennych wynosi co najwyżej dwa, a suma zmiennych pomnożona przez odpowiednie koszty utrzymania nie przekracza założonej górnej granicy. Po rozwiązaniu problemu wybieramy podzbiór wariantów związanych ze zmiennymi binarnymi, których wartości równe są 1. W naszym przypadku są to Austria i Francja, które rzeczywiście wspólnie nie przekraczają maksymalnej dopuszczalnej liczności ani kosztów.



**Review:** Behzadian, M., Kazemzadeh, R.B., Albadvi, A., Aghdasi, M., PROMETHEE: A comprehensive literature review on methodologies and applications, *European Journal of Operational Research*, 200(1), 198-215, 2010

- More than 200 papers published in more than 100 journals

The PROMETHEE bibliographic database: far over 2000 references

- <http://en.promethee-gaia.net/bibliographical-database.html>
- The success of the methodology is mainly due to its mathematical properties and particular friendliness of use
- **Major areas of application:** environmental management, hydrology and water management, business and financial management, chemistry, logistics and transport, energy management, health care, manufacturing and assembly, sports, ...



[42] Metody PROMETHEE zostały zainicjowane w 1982 roku. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat okazały się jedną z najbardziej przydatnych rodzin we wspomaganiu decyzji. Obszerny przegląd literatury z 2010 roku wymienił ponad 200 prac im poświęconych opublikowanych w ponad 100 różnych czasopismach. Od tego czasu postęp w ich rozwoju był jeszcze bardziej gwałtowny. Z wykorzystaniem PROMETHEE analizowano problemy w różnych dziedzinach zastosowań. Należą do nich m.in. ochrona środowiska i gospodarka wodna, bankowość, ochrona zdrowia, logistyka czy produkcja. Sukces tej rodziny metod wynika głównie z ich matematycznych właściwości oraz intuicyjności. Mimo, że są one oparte na porównaniach parami, to prowadzą do łatwo interpretowalnych wyników.

- Ranking the sites for radioactive waste disposal facilities in Croatia (Petras, 1997)
- Assessing Vietnamese rice quality according to its properties (Kokot and Phuong, 1999)
- Ranking forestry strategies on state-owned lands in Finland (Kangas et al., 2001)
- Ranking the various renewable energy technologies for the development of a wind park in Greece (Polatidis and Haralambopoulos, 2007)
- Selecting the best equipment milling machines to be purchased in an international company in Turkey (Dagdeviren, 2008)
- Prioritization of green suppliers in food supply chain in India (Govindan et al., 2017)



[43] Na końcu każdego wykładu poświęconego wspomaganiu decyzji przytoczę kilka przykładowych zastosowań danej metody. Powinno to wam uświadomić, jak ciekawy jest świat wspomagania decyzji, pozwalający analitykom dotykać zupełnie różnych dziedzin i wspierać ludzi o różnych doświadczeniach. W przypadku PROMETHEE najciekawsze zastosowania dotyczą zarządzania środowiskiem. Na przykład w Chorwacji metodę wykorzystano do wyboru miejsca składowania odpadów radioaktywnych, w Finlandii - do szeregowania strategii zarządzania lasem, a w Grecji - do wyboru technologii energii odnawialnej przy budowie farmy wiatrowej. W Wietnamie naukowcy użyli jej do oceny jakości różnych gatunków ryżu, a wiele indyjskich firm wykorzystywało ją do wyboru dostawców w przemyśle spożywczym lub motoryzacyjnym, biorąc pod uwagę kryteria ekonomiczne, społeczne i środowiskowe. Już ta krótka lista potwierdza różnorodność zastosowań i wysoką popularność PROMETHEE na całym świecie.