



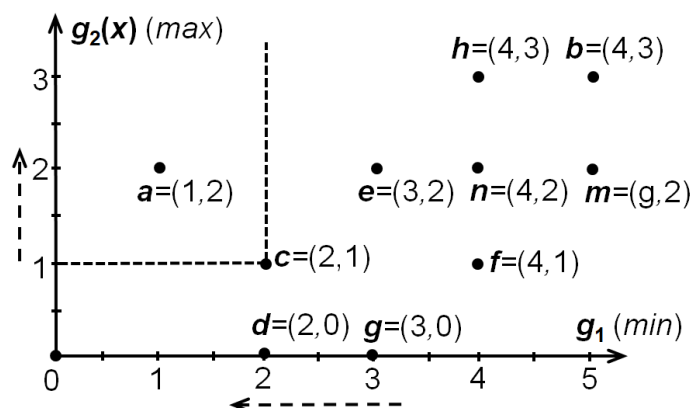
Fundusze Europejskie
Polska Cyfrowa

Unia Europejska
Europejski Fundusz
Rozwoju Regionalnego



INTELIGENTNE SYSTEMY WSPOMAGANIE DECYZJI – LABORATORIUM I

I. Spośród wariantów oznaczonych symbolami a-n, przedstawionych na poniższym rysunku, wskaż warianty **niezdominowane w sensie silnym i słabym**, jeśli kryterium g_1 jest typu **koszt** (im niższa ocena, tym lepsza), a kryterium g_2 typu **zysk** (im wyższa ocena, tym lepsza).



Warianty niezdominowane w **silnym** sensie:

Warianty niezdominowane w **słabym** sensie:

II. Rozważ dwa warianty $a = (15, 10, 10)$ oraz $b = (10, 12, 12)$ ocenione na trzech kryteriach typu zysk. Załóżmy, że wagi poszczególnych kryteriów są następujące: $w = (w_1, w_2, w_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Oblicz wartości dla poszczególnych wariantów lub par zgodnie z założonym modelem.

Wstaw odpowiednią relację zachodzącą dla pary wariantów a,b na podstawie obliczonych wyników.

Rozważ model preferencji w postaci sumy ważonej, tj. sumy iloczynów ocen i wag dla poszczególnych kryteriów $U(a) = w_1g_1(a) + w_2g_2(a) + w_3g_3(a)$:

$$U(a) = 11\frac{2}{3} \quad U(b) = \quad \rightarrow a \quad b$$

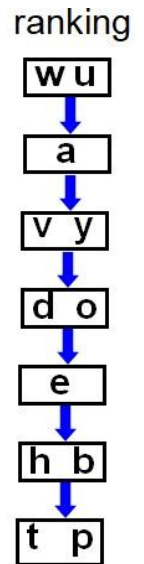
Rozważ model preferencji w postaci agregacji typu Condorceta, tj. sumy wag kryteriów, na których jeden wariant jest co najmniej tak dobry jak drugi:

$$\sum_{j:a \geq b} w_j = \frac{1}{3} \quad \sum_{j:b \geq a} w_j = \quad \rightarrow a \quad b$$

III. Zapoznaj się z przykładowym problem wyboru lokalizacji elektrowni. Tabela przedstawia zbiór sześciu wariantów (krajów) ocenionych na trzech kryteriach: MOC i BEZP typu zysk (\uparrow) oraz KOSZT typu koszt (\downarrow).

Kryterium	ITA	BEL	GER	SWE	AUT	FRA
MOC \uparrow	90	58	66	82	74	98
BEZP \uparrow	4	0	7	10	8	6
KOSZT \downarrow	600	200	400	1000	600	800

IV. Metoda UTA służy do wspomagania problemów porządkowania (tworzenia rankingu). Modeluje ona jakość wariantów poprzez **addytywną funkcję użyteczności** zdefiniowaną jako sumę użyteczności cząstkowych na poszczególnych kryteriach: $U(a) = \sum_{j=1}^n u_j(a)$. UTA jest oparta na **paradygmacie dezagregacji-agregacji**. Na wejście metody podaje się **ranking wariantów referencyjnych** oraz określa się **liczbę odcinków liniowych** dla funkcji użyteczności cząstkowych. Na tej podstawie UTA formułuje **problem regresji porządkowej**, który definiuje ograniczenia na przebieg funkcji użyteczności tak, by odtwarzały one ranking referencyjny. Ostateczny ranking jest wypracowywany na podstawie jednej funkcji użyteczności wybranej zgodnie z domyślną regułą lub bezpośrednio przez użytkownika w sposób interaktywny.



V. Dany jest następujący ranking referencyjny: AUT > ITA > BEL (AUT jest preferowana na ITA, które są preferowane nad BEL). Na kryterium mocy (zakres zmienności ocen $g_1 \in [58; 98]$) oraz bezpieczeństwa ($g_2 \in [0; 10]$) funkcje są **liniowe** (dwa punkty charakterystyczne), a na kryterium kosztu ($g_3 \in [200; 10000]$) funkcja jest **odcinkami liniowe** (trzy punkty charakterystyczne).

Zapisz problem regresji porządkowej. Funkcja użyteczności ma postać addytywną:

$U(a) = u_1(a) + u_2(a) + u_3(a)$. Poniższy problem programowania matematycznego przedstawia funkcję celu oraz zbiór ograniczeń, pozwalające na sprawdzenie spójności informacji preferencyjnej z założonym modelem preferencji, tj. weryfikację istnienia co najmniej jednej funkcji użyteczności odtwarzającej ranking referencyjny decydenta.

[funkcja celu] **max ϵ** (ϵ to zmienna pozwalająca zamodelować silną preferencją)

[O1] **$U(\text{AUT}) = u_1(74) + u_2(8) + u_3(600) \geq u_1(90) + u_2(4) + u_3(600) + \epsilon = U(\text{ITA}) + \epsilon$**
(AUT > ITA, więc $U(\text{AUT}) > U(\text{ITA})$)

[O2] **$U(\text{ITA}) = u_1(90) + u_2(4) + u_3(600) \geq u_1(\quad) + u_2(\quad) + u_3(\quad) + \epsilon = U(\text{BEL}) + \epsilon$**
(ITA > BEL, więc $U(\text{ITA}) > U(\text{BEL})$)

[O3] $u_1(58) = 0$ (g_1 typu zysk, więc najmniejsza wartość), $u_2(0) = 0$ (g_2 typu zysk),
 $u_3(1000) = 0$ (g_3 typu koszt, więc największa wartość),

[O4] $u_1(\quad) + u_2(\quad) + u_3(\quad) = 1$
(normalizacja; użyteczności w najlepszych wartościach sumują się do 1)

[O5] $u_1(98) \geq u_1(58)$ (g_1 typu zysk, zaczynamy od najwyższej oceny), $u_2(10) \geq u_2(0)$ (g_2 typu zysk)

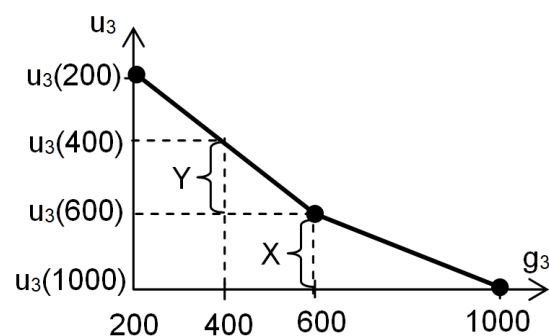
[O6] $u_3(\quad) \geq u_3(\quad) \geq u_3(\quad)$ (g_3 typu koszt, zaczynamy od najmniejszej oceny)

Kiedy istnieje funkcja spójna z preferencjami decydenta?

Co z użytecznościami cząstkowymi wariantów?

Na razie zamodelowaliśmy tylko użyteczności w punktach charakterystycznych. Poniższa równość przedstawia zamodelowanie użyteczności cząstkowej dla oceny 400, która wypada pomiędzy punktami charakterystycznymi 200 i 600:

$$u_3(400) = X + Y = u_3(600) + [u_3(200) - u_3(600)] \cdot (600-400)/(600-200)$$



VI. Przykładowe wykresy funkcji użyteczności cząstkowych spójne z preferencjami decydenta:

AUT > ITA > BEL. Dorysuj wykres na kryterium trzecim tak, by spełniał założenia metody UTA (normalizacja i monotoniczność funkcji) oraz odtwarzał ranking referencyjny. W poniższej tabeli zaprezentowano wartości dla takiego przykładowego przebiegu.

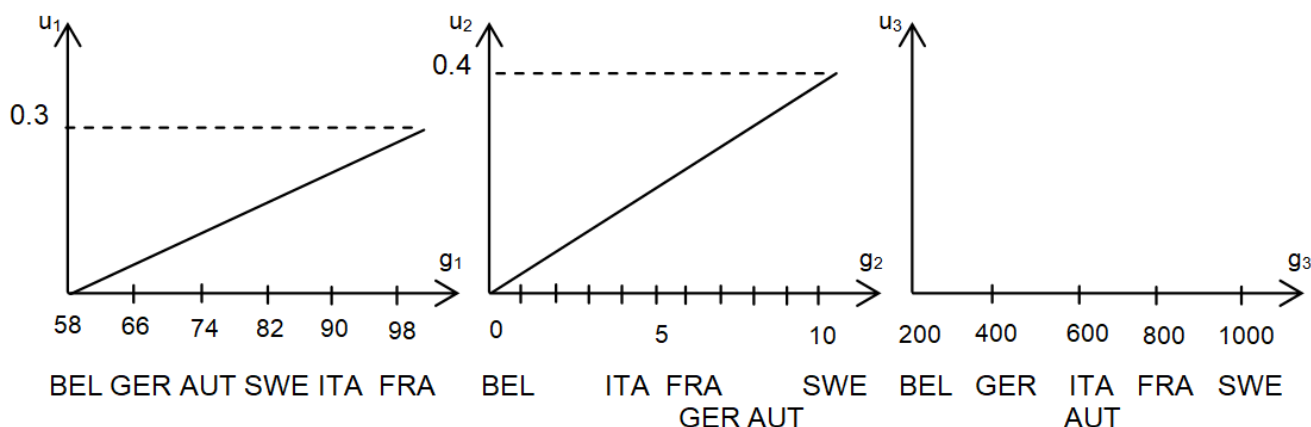


Tabela przedstawia użyteczności cząstkowe u_j oraz globalne U , a także rankingi dla poszczególnych wariantów i przykładowego przebiegu funkcji użyteczności, spełniającego założenia metody UTA.

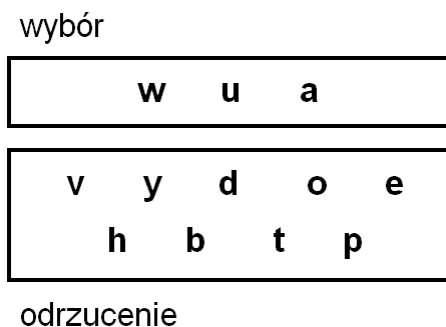
Wariant	$u_1(a)$	$u_2(a)$	$u_3(a)$	$U(a)$	Ranking
ITA	0.24	0.16	0.15	0.55	5
BEL	0.00	0.00	0.30	0.30	6
GER	0.06	0.28	0.225	0.565	4
SWE	0.18	0.40	0.00	0.58	3
AUT	0.12	0.32	0.15	0.59	2
FRA	0.30	0.24	0.075	0.615	1

Założmy alternatywne przebieg funkcji użyteczności na trzecim kryterium, bez zmiany dla dwóch pozostałych. Gdy: $u_3(200) = 0.3$, $u_3(600) = 0.3$, $u_3(1000) = 0$, to ostateczny ranking jest następujący (pozycja (użyteczność)):

1. AUT (0.74), 2. ITA (0.7), 3. FRA (0.69), 4. GER (0.64), 5. SWE (0.58), 6. BEL (0.3).

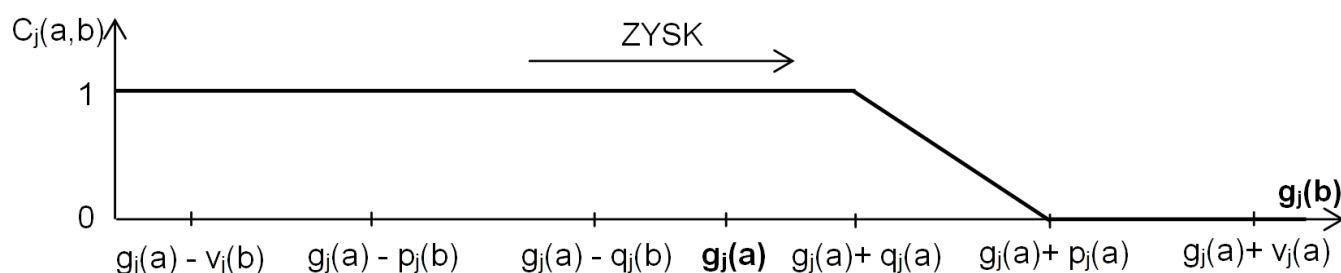
Ranking jest więc inny dla pierwotnie rozważanej funkcji, pomimo że wykorzystaliśmy ten sam ranking referencyjny oraz parametryzację metody UTA.

VII. Metody z rodziny **ELECTRE** wykorzystują model w postaci **relacji przewyższania**. Prawdziwość relacji przewyższania **aSb** dla pary (a,b) sprawdza się z wykorzystaniem testów zgodności i niezgodności. Ten pierwszy polega na badaniu siły koalicji kryteriów zgodnych z hipotezą aSb., a ten drugi weryfikuje istnienie co najmniej jednego takiego kryterium (lub w ogólności siły koalicji kryteriów), dla których a jest zdecydowanie (krytycznie) gorsze niż b. Testy odwołują się do progów nierozróżnialności q, preferencji p oraz veta v. W pierwszej kolejności omówimy metodę **ELECTRE Is** wspomagającą rozwiązanie problemu wielokryterialnego wyboru.



VIII. W metodzie **ELECTRE Is** porównuje się **każdy wariant z pozostałymi wariantami** i na tej podstawie konstruuje się **graf relacji przewyższania**. Jako zbiór najlepszych wariantów podaje się jądro tego grafu, tj. zbiór wierzchołków spełniających własności stabilności wewnętrznej oraz stabilności zewnętrznej.

Wykres pozwalający na obliczenie wartości cząstkowego współczynnika zgodności dla pary (a,b):



Wzór pozwalający na obliczenie wartości globalnego współczynnika zgodności $C(a,b)$ oraz sprawdzenie warunku zaliczenia testu zgodności $C(a,b)$ przez porównanie z progiem odcięcia λ :

$$C(a,b) = \sum_{j=1}^n k_j \cdot C_j(a,b) / \sum_{j=1}^n k_j \geq \lambda$$

Warunek veta dla kryterium typu zysk (ocena wariantu b musi być większa od oceny wariantu a o co najmniej próg veta): $g_j(b) - g_j(a) \geq v_j(a)$

Warunek veta dla kryterium typu koszt: $g_j(a) - g_j(b) \geq v_j(a)$

Relacja przewyższania S jest prawdziwa dla danej pary, o ile zaliczony jest test zgodności i nie zachodzi veto na żadnym kryterium. Na podstawie prawdziwości relacji S dla par (a,b) oraz (b,a), można dla nich określić bardziej szczegółową relację:

jeżeli aSb oraz bSa to a/b (nierozróżnialność)

jeżeli aSb oraz not(bSa) to a>b (preferencja)

jeżeli not(aSb) oraz not(bSa) to a?b (nierporównywalność)

IX. Przeprowadź **test zgodności i niezgodności** (parametry podane poniżej) dla wariantów SWE oraz AUT.

Kryterium	SWE	AUT
$g_1 \uparrow$	82	74
$g_2 \uparrow$	10	8
$g_3 \downarrow$	1000	600

Charakterystyki kryteriów:

$g_1 - k=2, q=8, p=16, v=32$

$g_2 - k=3, q=1, p=3, v=7$

$g_3 - k=5, q=100, p=200, v=700$

$\lambda=0.8$

k = waga kryterium

q = próg nierozróżnialności

p = próg preferencji

v = próg veta

λ = próg odcięcia

Obliczenia:

$$C_1(\text{SWE}, \text{AUT}) = 1$$

$$C_2(\text{SWE}, \text{AUT}) = 1$$

$$C_3(\text{SWE}, \text{AUT}) = 0$$

$$C(\text{SWE}, \text{AUT}) = 0.5$$

Veto: BRAK

BRAK

BRAK

$$C_1(\text{AUT}, \text{SWE}) =$$

$$C_2(\text{AUT}, \text{SWE}) =$$

$$C_3(\text{AUT}, \text{SWE}) =$$

$$C(\text{AUT}, \text{SWE}) =$$

Veto:

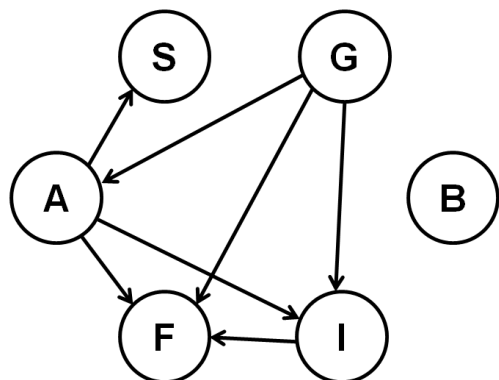
Ostatecznie: $\text{not}(\text{SWE } S \text{ AUT})$ oraz $(\text{AUT } S \text{ SWE})$

X. Po przeprowadzeniu testów zgodności i niezgodności wypełniono odpowiednie macierze wynikowe. Macierz z lewej strony przedstawia wartości globalnych współczynników zgodności, zaś (F) oznacza brak veta na jakimkolwiek kryterium dla określonej pary. Macierz z prawej strony jest macierzą relacji przewyższania S (1 oznacza w niej prawdziwość tej relacji, zaś 0 - fałsz). Określ **prawdę lub fałsz** brakujących relacji przewyższania. Podaj **jądro** wynikowego grafu.

$C(a,b) / \text{veto}$	I	B	G	S	A	F
I	1	0.5	0.2	0.7	0.7	0.85
B	0.5	1	0.7	0.5	0.5	0.5
G	0.8 (F)	0.5	1	0.5	1 (F)	0.8 (F)
S	0.5	0.5	0.5	1	0.5	0.3
A	0.8 (F)	0.5	0.5	0.85	1	0.8 (F)
F	0.5	0.5	0.5	0.7	0.35	1

S	I	B	G	S	A	F
I	1	0	0	0	0	1
B	0	1	0	0	0	0
G						
S	0	0	0	1	0	0
A	1	0	0	1	1	1
F	0	0	0	0	0	1

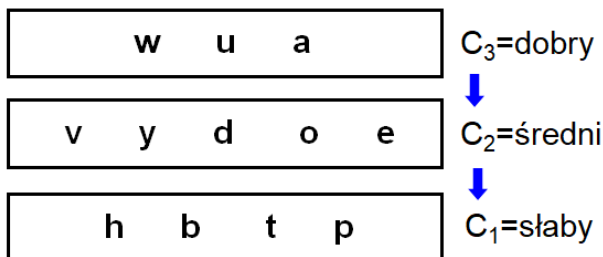
Graf relacji przewyższania:



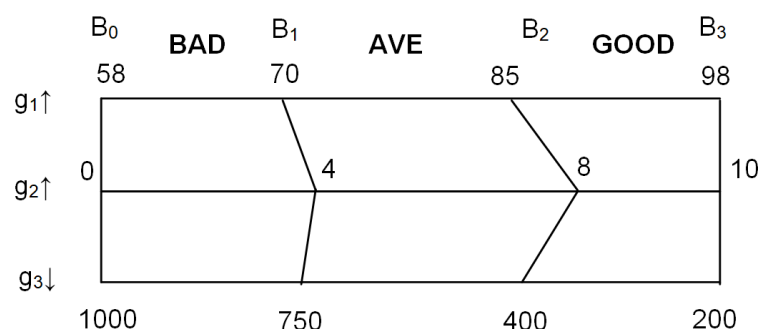
Kernel = Jądro = { }

XI. Metoda ELECTRE TRI służy do przydziału wariantów do klas decyzyjnych, które są określone za pomocą ograniczających je **profilu**. Porównuje się w niej **warianty z profilami** poprzez weryfikację prawdziwości relacji przewyższania (w obydwie strony), i na tej podstawie wnioskuje się o preferencji, nierozróżnialności lub nieporównywalności. Miarą siły relacji przewyższania w tej metodzie jest współczynnik **wiarygodności** tej relacji, który agreguje argumenty za, jak i przeciw tej relacji. Progi wykorzystywane w tej metodzie są stałe, podawane dla każdego profilu na każdym kryterium. Przydziału do klas dokonuje się na podstawie **procedury optymistycznej i pesymistycznej**.

sortowanie



XII. Zdefiniowano profile $B_0 - B_3$ ograniczające klasy BAD, AVE i GOOD, wagi kryteriów k , progi nierozróżnialności q , preferencji p i veto v oraz odcięcia λ . Dla niektórych kryteriów veto nie jest rozważane.



Zestaw przykładowych parametrów:

$k_1 = 5, k_2 = 3, k_3 = 2, \lambda = 0.8$

$q_1(B_1) = 2, p_1(B_1) = 5, v_1(B_1) = 10,$

$q_2(B_1) = 0, p_2(B_1) = 1, v_2(B_1) = 3,$

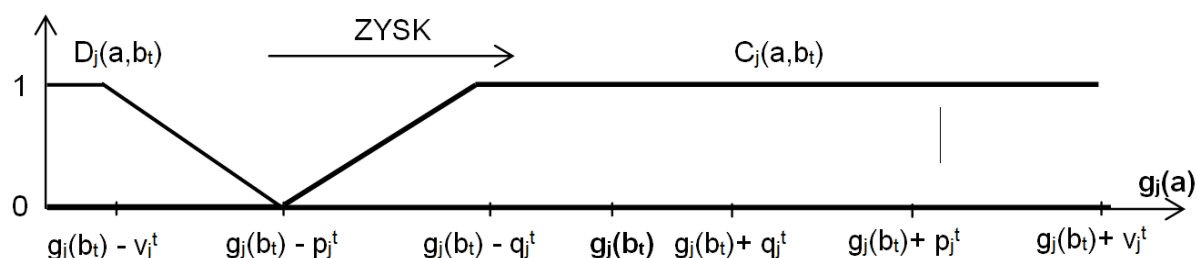
$q_3(B_1) = 50, p_3(B_1) = 100, v_3 \text{ nierozważane}$

$q_1(B_2) = 2, p_1(B_2) = 5, v_1(B_2) = 10,$

$q_2(B_2) = 0, p_2(B_2) = 1, v_2(B_2) = 3,$

$q_3(B_2) = 50, p_3(B_2) = 100, v_3 \text{ nierozważane}$

Wykres pozwalający na obliczenie wartości cząstkowego współczynnika zgodności C_j oraz cząstkowego współczynnika niezgodności D_j dla pary wariantów (a, b) zgodnie z założeniami metody ELECTRE TRI:



Wzór pozwalający na obliczenie wartości wiarygodności relacji przewyższania na podstawie wartości globalnego współczynnika zgodności C oraz cząstkowych współczynników niezgodności D_i :

$$\sigma(a, b_t) = C(a, b_t) \prod_{i \in F} \frac{1 - D_i(a, b_t)}{1 - C(a, b_t)} \quad \text{gdzie } F = \{i : D_i(a, b_t) > C(a, b_t)\}$$

Porównaj wariant ITA z profilem B2, przy czym dla przypomnienia: g_1 typu zysk: $g_1(ITA)=90$, $g_1(B_2)=85$, g_2 typu zysk: $g_2(ITA)=4$, $g_2(B_2)=8$, g_3 typu koszt: $g_3(ITA)=600$, $g_3(B_2)=400$.

Obliczenia dla pary (ITA, B₂):

$$\begin{array}{lll} c_1(ITA, B_2) = & c_2(ITA, B_2) = & c_3(ITA, B_2) = \\ D_1(ITA, B_2) = & D_2(ITA, B_2) = & D_3(ITA, B_2) \text{ nierozważane} \\ C(ITA, B_2) = & \sigma(ITA, B_2) = & \end{array}$$

Obliczenia dla pary (B₂, ITA):

$$\begin{array}{lll} c_1(B_2, ITA) = 0 & c_2(B_2, ITA) = 1 & c_3(B_2, ITA) = 1 \\ D_1(B_2, ITA) = 0 & D_2(B_2, ITA) = 0 & D_3(B_2, ITA) \text{ nierozważane} \\ C(B_2, ITA) = 5/10 & \sigma(B_2, ITA) = 5/10 & \end{array}$$

Ostatecznie: (ITA B₂) oraz $\text{not}(B_2 \succ ITA)$, a więc (ITA B₂)

XIII. Podaj przydział do klas dla rozważanych wariantów zgodnie z **procedurą pesymistyczną i optymistyczną** metody ELECTRE TRI.

Procedura pesymistyczna PES: rozpoczynamy porównanie od góry, tj. od najlepszego profilu; zatrzymujemy się na pierwszym profilu B_i takim, że (**a S B_i**) (**S** zawiera w sobie relacje I lub >, tj. nierozróżnialności i preferencji); rekomendacja: klasa C_{i+1} (znajdująca się ponad profilem).

Procedura optymistyczna OPT: rozpoczynamy porównanie od dołu, tj. od najgorszego profilu; zatrzymujemy się na pierwszym profilu B_i takim, że (**B_i > a**); rekomendacja: klasa C_i (znajdująca się pod profilem).

W tabeli przedstawiono relacje zachodzące między wariantem a profilem (> oznacza relację preferencji wariantu nad profilem, ? oznacza relację nieporównywalności, I oznacza relację nierozróżnialności, a < oznacza relację preferencji profilu nad wariantem).

Wariant	Profile		Procedura	
	B ₁	B ₂	PES	OPT
ITA	>	?	AVE	GOOD
BEL	<	<	BAD	BAD
GER	?	<		
SWE	>	?		
AUT	>	<		
FRA	>	?	AVE	GOOD

BAD AVE GOOD

klasy decyzyjne znajdują się pomiędzy profilami separującymi

XIV. Dana jest tablica decyzyjna. Opisuje ona 10 wariantów oznaczonych symbolami BEL - FIN na 3 atrybutach warunkowych. Kody wykorzystywanych ocen są następujące: L – LOW, M – MEDIUM, H - HIGH. Tabela specyfikuje też klasę decyzyjną dla poszczególnych wariantów: BAD, AVE lub GOOD, tj. zbiór, do którego według zgromadzonej wiedzy warianty należą. Odcieniami szarości wyróżniono warianty z takim samym opisem na wszystkich atrybutach warunkowych.

Wariant	MOC	KOSZT	BEZP.	KLASA	
BEL	L	H	M	BAD	
NED	L	H	L	BAD	
LUX	L	M	L	BAD	
AUT	L	M	L	AVE	
GER	H	H	M	AVE	
ITA	M	M	M	AVE	
FRA	H	M	H	GOOD	
SWE	M	M	H	GOOD	
NOR	M	L	M	GOOD	
FIN	M	L	M	GOOD	

Przy założeniu, że $P=\{MOC, KOSZT, BEZP.\}$ jest zbiorem atrybutów warunkowych, a KLASA atrybutem decyzyjnym, wyznacz zadane przybliżenia: dolne (symbol \underline{P}) oraz górne (symbol \bar{P}).

$$\underline{P}(BAD) = \{ BEL, NED \}$$

$$\bar{P}(BAD) = \{ BEL, NED, LUX, AUT \}$$

$$\underline{P}(AVE) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\bar{P}(AVE) = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$\underline{P}(GOOD) = \{ FRA, SWE, NOR, FIN \}$$

$$\bar{P}(GOOD) = \{ FRA, SWE, NOR, FIN \}$$

Oblicz jakość klasyfikacji jako iloraz sumy licznosci dolnych przyblizen oraz licznosc całego zbioru danych: $\gamma_P(CI) = (2+2+4)/10 = 8/10$

XV. Wyindukuj minimalne deterministyczne (pewne) i przybliżone reguły decyzyjne z powyższej tablicy danych na podstawie zadanych przybliżeń.

Reguła deterministyczna indukowana z $\underline{P}(BAD) = \{BEL, NED\}$:

Jeżeli **to BAD**

Reguły deterministyczne indukowana z $\underline{P}(AVE) = \{GER, ITA\}$:

Jeżeli BEZP = M oraz MOC = H to AVE {GER}

Jeżeli MOC = M oraz KOSZT = M oraz BEZP = M to AVE {ITA}

Reguły deterministyczna indukowana z $\underline{P}(GOOD) = \{FRA, SWE, NOR, FIN\}$:

Jeżeli MOC = M oraz KOSZT = L to GOOD

Jeżeli BEZP = H to GOOD

Reguła przybliżona indukowana z brzegów klas BAD oraz AVE, czyli {LUX, AUT}:

Jeżeli BEZP. = L oraz KOSZT = M to BAD v AVE



Fundusze Europejskie
Polska Cyfrowa

Unia Europejska
Europejski Fundusz
Rozwoju Regionalnego

