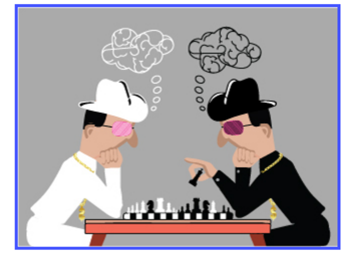
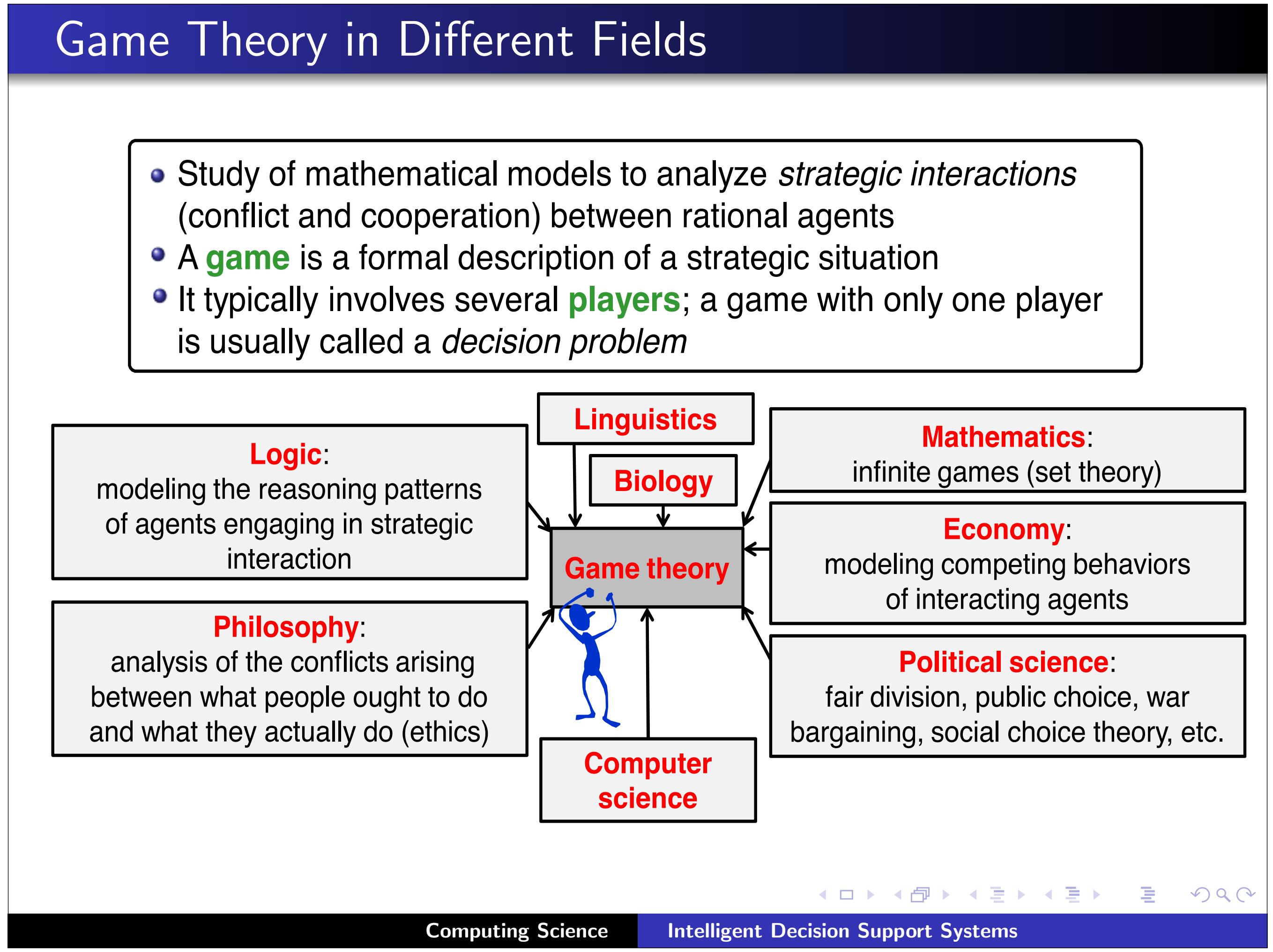
	A	B
A	-10 \ -10	-25 \ 0
B	0 \ -25	-20 \ -20



Game Theory: Solution Concepts in Strategic Games

Miłosz Kadziński
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology, Poland

[1] Wykład będzie poświęcony wprowadzeniu do teorii gier, która tradycyjnie zajmowała się strategicznymi interakcjami między agentami. Dziś częściej traktuje się ją jako naukę o logicznym podejmowaniu decyzji. Skupimy się na grach strategicznych. Dokonamy przeglądu różnych koncepcji rozwiązań służących do określenia lub przewidzenia wyniku takich gier. Naszym głównym bohaterem będzie równowaga Nasha. Omówimy ją w dwóch scenariuszach dla strategii czystych i mieszanych. Zajmiemy się również strategiami dominującymi lub eliminacją strategii ściśle zdominowanych. W ten sposób zilustrujemy, że niektóre pomysły są uniwersalne w tym sensie, że są rozważane w różnych podobszarach analizy decyzji i sztucznej inteligencji. Omawiając poszczególne pomysły, będziemy często zmieniać problemy. W szczególności poznacie dylemat więźnia, walkę płci czy grę w cykora.



[2] Teoria gier dotyczy analizy zachowań w sytuacjach strategicznych, w których pojawia się jakiś konflikt albo konieczność współpracy. Gra jest interpretowana jako sytuacja strategiczna wraz z jej formalnym opisem. Zazwyczaj bierze w niej udział wielu graczy. Mogą to być ludzie, grupy, firmy, a nawet zwierzęta, od których oczekuje się podjęcia pewnych decyzji. Wszyscy gracze muszą zdecydować się na realizację pewnej strategii, która prowadzi ich do otrzymania wypłaty interpretowanej jako użyteczność. Dyskusja nad tego typu grami rozpoczęła się już w XVII wieku. Jednak nowoczesna teoria gier została zapoczątkowana pracami von Neumanna, Morgensterna i Bernoulliego dopiero w pierwszej połowie XX wieku. Od tego czasu jest ona powszechnie uznawana za ważne narzędzie w wielu dziedzinach. Na przykład w logice badacze pracują nad modelowaniem schematów rozumowania agentów. W filozofii analizuje się konflikty między tym, co ludzie robią, a tym, co faktycznie powinni robić. W biologii wykorzystywano ją do badania zachowań zwierząt czy nawet procesu ewolucji. Teoria gier stanowi podstawę rozwoju ekonomii, gdzie była stosowana w kontekście modelowania zachowań agentów. Jednak nas, jako informatyków, najbardziej interesują bezpośrednie zastosowania teorii gier właśnie w tej dziedzinie.

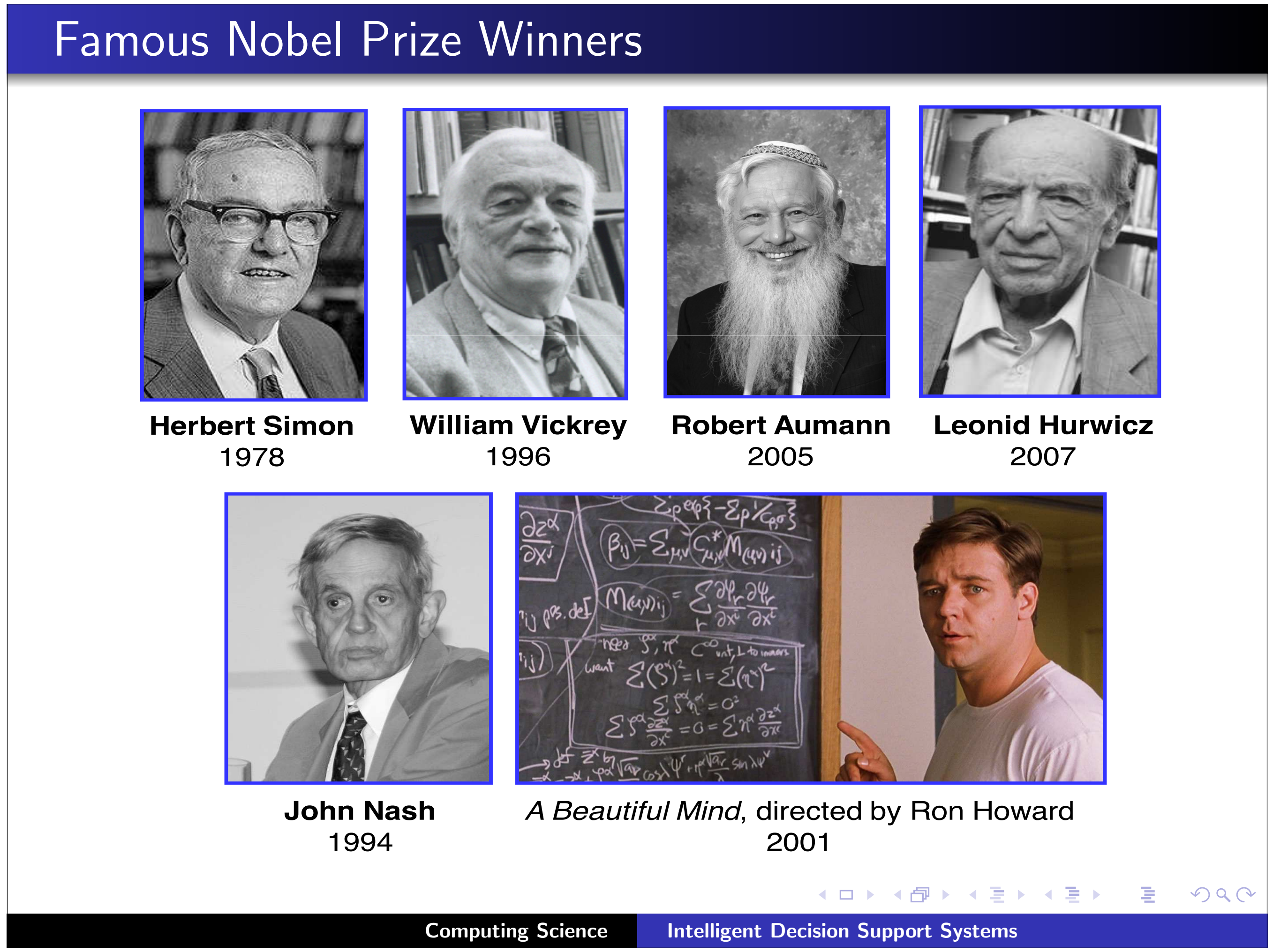
- **Algorithms** for predicting what the outcome might be
- Analysis of **complexity** of computing the equilibria of a game
- **Artificial Intelligence**: studying interaction between the software agents in a multiagent system

P. Stone et al. **Articial Intelligence and Life in 2030**.
One Hundred Year Study on Artificial Intelligence. *Stanford*, 2016

Hot topics in AI

- large-scale machine learning
- reinforcement learning
- deep learning
- robotics
- computer vision
- natural language processing
- internet of things
- collaborative systems
- neuromorphic computing
- crowdsourcing and human computation
- **algorithmic game theory and computational social choice**

[3] W tym zakresie chcę wyróżnić trzy główne kierunki. Po pierwsze, informatycy pracują nad algorytmami przewidującymi wyniki gier. Po drugie, wielu badaczy bada złożoność obliczeniową procedur obliczenia wyników gier na gruncie teoretycznym. Po trzecie, pojawienie się Internetu zmotywowało badaczy do rozwoju metod poszukiwania rozwiązań na rynkach, aukcjach, systemach peer-to-peer, bezpieczeństwa czy informacji. Duże wyzwanie stanowią również scenariusze, w których interakcje pojawiają się nie między ludźmi, ale między agentami programowymi. Na liście jedenastu topowych tematów w sztucznej inteligencji opublikowanej przez Stanford kilka lat temu znalazły się m.in. uczenie maszynowe, uczenie głębokie, widzenie komputerowe, przetwarzanie języka naturalnego czy Internet rzeczy. Jednak jedna z pozycji wprost odnosi się do algorytmicznej teorii gier, co tylko podkreśla znaczenie znajomości choćby podstaw tej dziedziny.

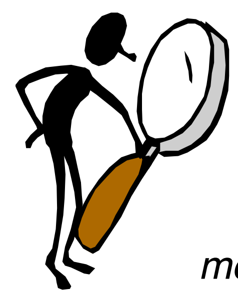


[4] Jest też inny, bardziej pragmatyczny powód, dla którego warto się nią zainteresować. Dla informatyków specjalizacja w teorii gier jest prawdopodobnie najkrótszą drogą do zdobycia Nagrody Nobla. Do 2020 roku piętnastu teoretyków gier zdobyło tę nagrodę w dziedzinie ekonomii. Na tym slajdzie chcę przypomnieć pięciu z nich. Badania Herberta Simona udowodniły, że ludzie nie są nieskończenie inteligentni, racjonalni, a to znacząco wpływa na ich decyzje. William Vickrey jako pierwszy wykorzystał narzędzia teorii gier do wyjaśnienia dynamiki aukcji i opracował teorię bodźców w warunkach asymetrycznej informacji. Robert Aumann otrzymał nagrodę za pracę nad konfliktami i współpracą przez pryzmat teorii gier. Mieliśmy przyjemność gościć go w Poznaniu przy okazji organizacji konferencji EURO poświęconej badaniom operacyjnym w 2016 roku. Leonid Hurwicz jest jednym z tych noblistów, o których rzadko się w Polsce mówi, mimo że posiadają polskie korzenie. Hurwicz wychował się i zdobył wykształcenie w Polsce, a w czasie II wojny światowej emigrował do Stanów Zjednoczonych. Nagrodę otrzymał za wkład w projektowanie mechanizmów, pokazując, jak odkryć najlepsze i najbardziej efektywne środki do osiągnięcia pożądanego celu, biorąc pod uwagę wiedzę jednostek i ich własny interes. Jednak najważniejszym noblistą dla tego wykładu będzie John Nash. Być może słyszeliście o nim, oglądając film „Piękny umysł” w reżyserii Rona Howarda. Jego postać zagrał Russell Crowe. Dziś poznacie podstawowy wkład Nasha w rozwój teorii gier.

Example: Split or Steal (1)

The split-or-steal game in the British television show "**Golden Balls**", particularly the one aired on 14 March 2008, is a good example:
http://youtu.be/p3Uos2fzIJ0

- The normal form of this **strategic** and **non-cooperative** game
- This is a one-shot game with **perfect information**



players ⇨ **actions** ⇨

A \ B	Split	Steal
Split	50k \ 50k	0 \ 100k
Steal	100k \ 0	0 \ 0

outcomes (utilities) ⇧

money, satisfaction, chances for transferring genes, etc.

[5] Skupimy się na specyficznym rodzaju gry. Dobrze reprezentuje go gra split-or-steal, która była częścią brytyjskiego programu telewizyjnego "Golden Balls". Chciałbym Was prosić o zatrzymanie wykładu na YouTube i obejrzenie materiału, który wyodrębniłem z jednego z odcinków Golden Balls. Dostarczyłem go Wam wraz z materiałami do wykładu. Musicie go uważnie obejrzeć zgodnie z instrukcją.
Gry są obiektami matematycznymi. Aby gra była w pełni zdefiniowana, musi określać następujące elementy: graczy - w naszej grze mamy dwóch; nazwijmy ich A i B; akcje dostępne dla każdego gracza - tutaj są to podział (split) i kradzież (steal), oraz wypłaty (użyteczności) dla każdego scenariusza. Na przykład, gdy obaj gracze wybiorą "split", dostaną po 50 tysięcy; gdy jeden wybierze "steal", a drugi "split", pierwszy dostanie 100 tysięcy, podczas gdy drugi pozostanie z niczym. W naszym przypadku użyteczności odpowiadają pieniądzom, ale mogą one również reprezentować np. satysfakcję lub nawet szanse na przekazanie genów. Grze split-or-steal można przypisać cztery cechy, które determinują zakres zainteresowania tego wykładu. Po pierwsze, jest to gra równoczesna, którą można reprezentować w postaci normalnej, a więc wszyscy gracze podejmują swoje akcje jednocześnie lub przynajmniej nie znając akcji innych. Jest również grą bez współpracy (niekooperacyjną), co oznacza, że gracze działają we własnym interesie, aby zmaksymalizować swoją użyteczność. Dalej, jest to gra z pełną informacją – każdy gracz zna innych, ich możliwe akcje, konsekwencje, czy wcześniej wykonane ruchy. Wreszcie, jest to gra jednorazowa („one-shot"), ponieważ nie jest iteracyjnie powtarzana kilka razy.

Example: Split or Steal (2)

- The normal form of this **strategic** and **non-cooperative** game
- This is a **one-shot** game with **perfect information**

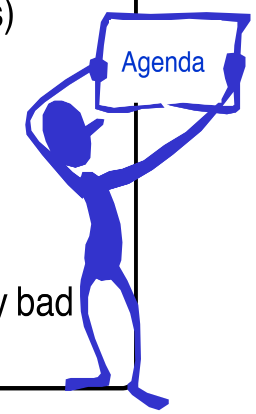
A \ B	Split	Steal
Split	50k \ 50k	0 \ 100k
Steal	100k \ 0	0 \ 0

- Other games (like chess) can also be modeled using the **extensive** form (as a ”game tree")
- In a **coalitional (cooperative)** game, we might instead ask players to find a split that fairly reflects individual contributions or form coalitions to attain their common goals
- When the information is **incomplete**, the players do not have perfect knowledge of actions and/or utilities

[6] Oczywiście wszystkie te atrybuty mają swoje odpowiedniki prowadzące do innych scenariuszy. W szczególności forma ekstensywna (rozległa) jest używana w grach z sekwencją ruchów, gdzie akcje następują jedna po drugiej. Takie gry są zwykle reprezentowane za pomocą drzew. W grach kooperacyjnych gracze są w stanie podejmować wiążące ich zobowiązania lub tworzyć koalicje. Tutaj uwaga skupia się na tym, jakie koalicje tworzyć, jakie wspólne działania podejmą grupy i jakie są wynikające z tego użyteczności. Wreszcie, gra z niepełną informacją jest rozgrywana, gdy gracze nie znają wszystkich ruchów już wykonanych przez przeciwników. Na innym wykładzie skupimy się na grach rozległych tak byście poznali też nieco inną perspektywę.

Plan for Today: Strategic Games in Normal Form

- Examples for and formal definition of **normal-form games**
- A definition of **stability** of an outcome (rational for all individuals)
- A definition of **efficiency** of an outcome (good for the group)
- **Pure and mixed Nash equilibria**
- How to compute the Nash equilibria for small games
- The existence of Nash equilibria for arbitrary games
- Equilibrium in **dominant strategies**: do what's definitely good
- **Elimination of dominated strategies**: don't do what's definitely bad
- **Correlated equilibrium**: follow some external recommendation



K. Leyton-Brown and Y. Shoham. Essentials of Game Theory: A Concise, Multi-disciplinary Introduction. *Morgan & Claypool Publishers*, 2008

[7] W trakcie tego wykładu przedstawimy przykłady i formalną definicję gry w postaci normalnej. Poznacie pojęcia stabilności i efektywności, czyli inaczej mówiąc, co jest racjonalne dla każdego gracza i co jest dobre dla całej grupy. Zdefiniujemy czyste i mieszane równowagi Nasha, pokażemy jak je obliczyć dla małych gier oraz omówimy twierdzenia o ich istnieniu. Oprócz tego wspomnimy o trzech innych koncepcjach, które można wykorzystać do rozwiązywania gier. Należą do nich wybór strategii dominujących oraz eliminacja strategii zdominowanych. W prostych słowach odnoszą się one do robienia tego, co jest zdecydowanie dobre i nierobienia tego, co jest zdecydowanie złe. Na koniec odniesiemy się do równowag skorelowanych, które wymagają od graczy podążania za zewnętrznymi sygnałami lub zaleceniami. Ten ostatni temat można jednak potraktować jako ciekawostkę.

Prisoner's Dilemma (1)

*Two hardened criminals, **Oliwia** and **Mateusz**, got caught by police and are being interrogated in separate cells. The police only have evidence for some of their minor crimes. Each is facing this dilemma:*

- If we cooperate (**C**) and don't talk, then we each get 10 years for the minor crimes (*utility* = -10)
- If I cooperate (**C**) but my partner defects (**D**) and talks, then I get 25 years (*utility* = -25)
- If my partner cooperates (**C**) but I defect (**D**), then I go free (as crown witness) (*utility* = 0)
- If we both defect (**D**), then we share the blame and get 20 years each (*utility* = -20)

players

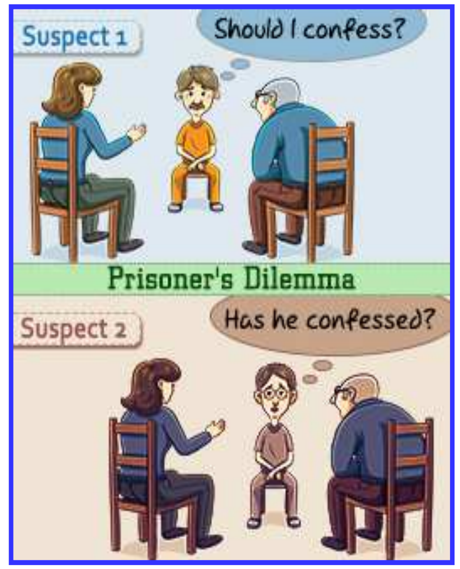
actions

O \ M	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20

outcomes (utilities)

[8] Skupmy się teraz na innej grze zwanej dylematem więźnia. Rozważmy dwóch przestępców, którym nadałem imiona moich dawnych studentów, Oliwia i Mateusz. Zostali oni złapani przez policję i są przesłuchiwani w osobnych celach. Każdy z nich stoi przed tym samym dylematem. Postawmy się w ich sytuacji. Jeśli będziemy współpracować z partnerem i nie będziemy rozmawiać z policją, to za drobne przestępstwa, na które policja ma dowody, dostaniemy 10 lat wyroku. Jeśli ja współpracuję, milcząc, ale mój partner zdradza, rozmawiając z policją, to ja dostanę 25 lat. Jeśli mój partner współpracuje ze mną i milczy, ale ja zdradzam, wtedy ja wychodzę na wolność i dostaję 0 lat. Wreszcie, jeśli obaj zdradzimy, rozmawiając z policją, otrzymamy wyrok 20 lat. Wyrok odzwierciedla karę, podczas gdy użyteczność powinna być maksymalizowana. Dlatego negujemy liczbę lat więzienia w macierzy wypłat.

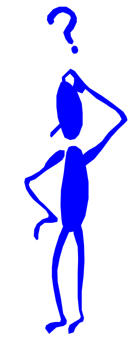
Prisoner's Dilemma (2)



What would you do? Why?

- ***Oliwia***: cooperate (**C**) or defect (**D**)
- ***Mateusz***: cooperate (**C**) or defect (**D**)

O \ M	**C**	**D**
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20



[9] Dylemat więźnia jest grą symetryczną, ponieważ wypłaty za wybór danej strategii, współpracy C lub zdrady D, zależą tylko od innych strategii, a nie od tego, kto je wybiera. To znaczy, gra jest symetryczna jeśli zamiana tożsamości graczy nie powoduje zmiany wypłat. Zanim przeanalizujemy tę grę, możecie wyobrazić sobie siebie w roli jednego z więźniów i zadać pytanie, co byście zrobili, współpracowali z partnerem, czy zdradzili, rozmawiając z policją. Z pewnością myślelibyście nie tylko o tym, co powinniście zrobić, ale także o tym, co najprawdopodobniej zrobiłby drugi więzień.

Prisoner's Dilemma (3)

assume **O** and ***M*** *cooperate* (***CC***):
for both of them, it would be better
to unilaterally defect (**D**)
they would get 0 rather than -10

Focus on:

- **stability** of an outcome
(rational for all individuals)

What would you do? Why?

O \ M	**C**	**D**
C	**-10** \ -10	-25 \ **0**
D	**0** \ -25	-20 \ -20

assume **O** defects and ***M*** *cooperates* (***DC***):
for ***M*** it would be better to unilaterally
change his assigned strategy (**D**)
he would get -20 rather than -25
analogously for ***CD***

assume **O** and ***M*** *defect* (***DD***):
for both of them there is no reason to
unilaterally change their assigned strategies
they would get -25 rather than -20

[10] Spróbujmy rozważyć tę grę bardziej formalnie. Skupimy się na stabilności wyników poprzez określenie, jaką strategię powinien wybrać gracz racjonalny. Załóżmy najpierw, że obaj gracze współpracują i otrzymują użyteczność -10. Dla każdego z nich lepszym rozwiązaniem byłoby jednostronne zdradzenie, ponieważ otrzymaliby wtedy 0. Załóżmy, że ty, jako gracz, zdradziłeś, a drugi gracz współpracuje. Wówczas ta druga osoba powinna jednostronnie zmienić swoją strategię na zdradę, ponieważ zwiększyłoby to wypłatę z -25 do -20. To samo dotyczy sytuacji, gdy role się odwrócą. Wreszcie załóżmy, że obaj gracze zdradzają i otrzymują -20. Dla żadnego z nich nie byłoby lepiej jednostronnie zmienić akcji na współpracę, ponieważ otrzymaliby -25 zamiast -20. To rozumowanie prowadzi nas do następującego wniosku. Jeśli twój partner współpracuje, to powinieneś zdradzić. Jeśli twój partner zdradza, to również lepiej dla ciebie zdradzić. Stąd wydaje się, że dla racjonalnego gracza zdrada jest najlepszą strategią.

Prisoner's Dilemma - Real-World Relevance

Variants of the Prisoner's Dilemma commonly occur in real life (often with more than two players):

- **countries agreeing to caps on greenhouse gas emissions**
- firms cooperating by not aggressively competing on price
- **NATO and the Warsaw Pact** had the choice to arm or disarm
- network users claiming only limited bandwidth
- doping / **cheating in sport**


[11] Dylemat więźnia został pierwotnie sformułowany przez Flooda i Dreshera w 1950 roku, a następnie sformalizowany przez Tuckera z użytecznościami w postaci liczby lat więzienia. Przykład może wydawać się abstrakcyjny, ale istnieje wiele rzeczywistych problemów, które mają tę samą macierz użyteczności. Dlatego też jest on przedmiotem zainteresowania w dziedzinach ekonomii, polityki, socjologii, etnologii, a nawet biologii ewolucyjnej. W studiach dotyczących środowiska dylemat jest widoczny w kryzysach takich jak globalne zmiany klimatyczne, gdzie państwa muszą wybrać między ograniczeniem emisji a utrzymaniem dotychczasowych zachowań. W polityce międzynarodowej, przeciwstawne sojusze mają wybór między zbrojeniem się a redukcją broni. Także reklamowanie produktu jest czasem przedstawiane w kontekście dylematu więźnia. Wyobraźcie sobie dwie firmy reklamujące ten sam produkt, jak papierosy. Jeśli obydwie zdecydują się reklamować swoje produkty w tym samym czasie, to ich reklamy będą się wzajemnie znosić, ich wpływy pozostają stałe, a wydatki wzrosną. Obie firmy skorzystałyby więc z ograniczenia reklamy. Inne przykłady odnoszą się do użytkowników sieci starających się o ograniczoną przepustowość lub rowerzystów zaangażowanych we wspólną ucieczkę podczas wyścigu kolarskiego.

Strategic Games in Normal Form

A normal-form game is a tuple $\langle N, A, u \rangle$ where:

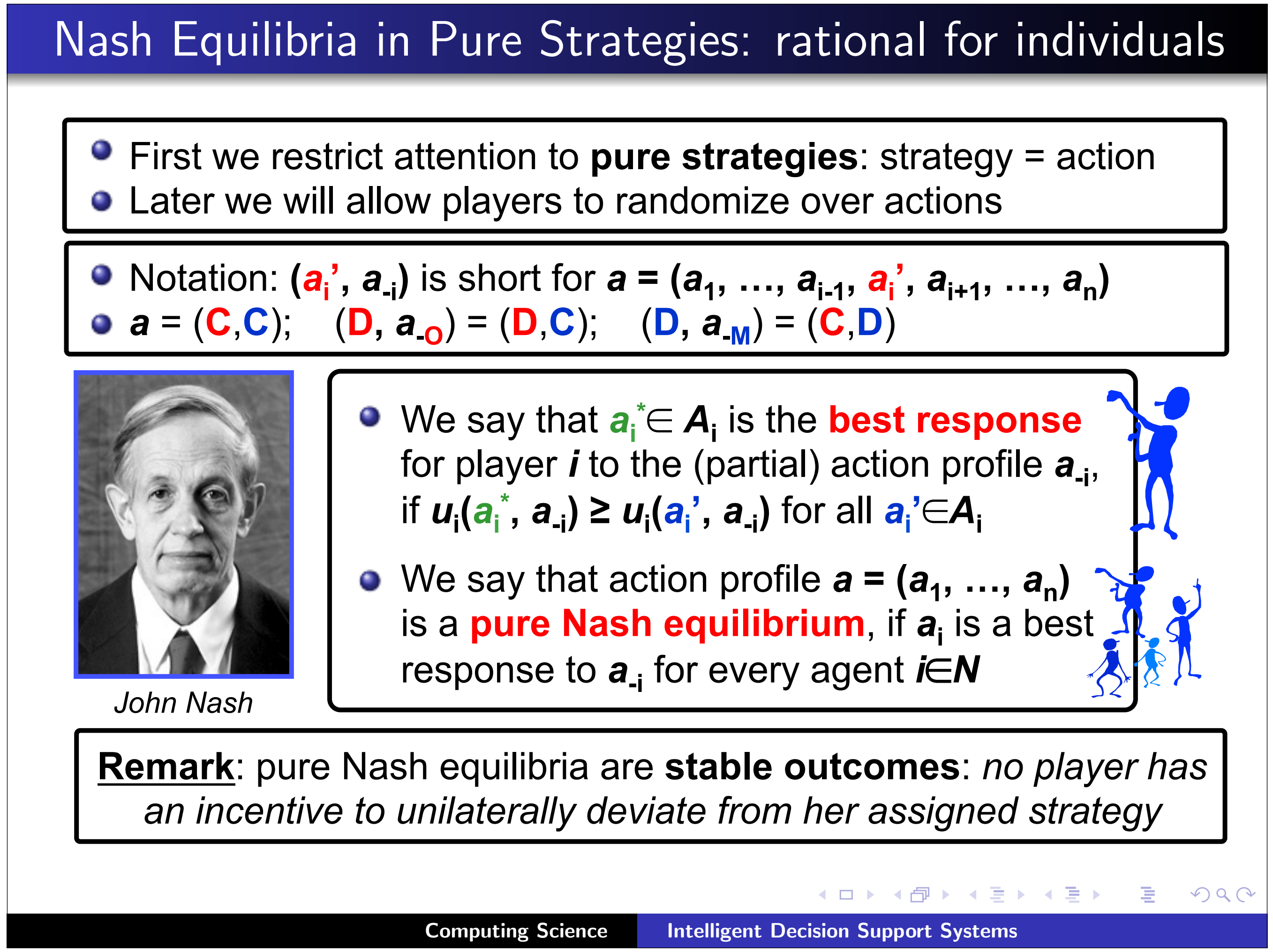
- $N = \{1, \ldots, n\}$ is a **finite set of players** (or agents)
- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ is a **finite set of action profiles** $a = (a_1, \ldots, a_n)$, with A_i being the **set of actions** available to player $i \in N$
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ is a **profile of utility functions** $u_i : A \rightarrow \mathbf{R}$

- Every player i chooses an action, say a_i, giving rise to the profile a
- Actions are played simultaneously
- Player i then receives payoff $u_i(a)$

O \ M	**C**	**D**
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20

- $N = \{O, M\}$
- $A_O = \{C,D\}$, $A_M = \{C,D\}$, $A = A_O \times A_M$
- *e.g.*, $a = (C,C)$
- *e.g.*, $u_O(C,C) = -10$, $u_O(C,D) = -25$, $u_O(D,C) = 0$, $u_O(D,D) = -20$

[12] Przykłady są świetne, ale na pewnym etapie musimy wprowadzić formalizmy. Zdefiniujmy grę w postaci normalnej jako krotkę zawierającą trzy elementy. N to skończony zbiór graczy - w naszej grze są to Oliwia i Mateusz. A jest skończonym zbiorem profili akcji, gdzie profil akcji tworzy jedna akcja wybrana przez każdego gracza ze zbioru akcji, które są dla niego dostępne. Dla dylematu więźnia zbiór A składa się z czterech profili akcji: wszystkich możliwych kombinacji "współpracuj" i "zdradź" dla dwóch graczy. Możemy powiedzieć, że każdy gracz wybiera akcję, która daje początek profilowi. Wreszcie, u jest profilem funkcji użyteczności, po jednej dla każdego gracza, które tłumaczą profile akcji na liczby rzeczywiste, zwane wypłatami lub użytecznościami. Na przykład, gdy obaj gracze współpracują, Oliwia dostaje -10, natomiast gdy obaj zdradzają, Oliwia dostaje -20.



[13] Skupmy się najpierw na prostym scenariuszu, w którym strategia odpowiada wybraniu jakiejś akcji. Formalnie takie strategie nazywamy strategiami czystymi. Potrzebujemy też specjalnej notacji dla profilu akcji, w którym tylko gracz „i" zmienia jednostronnie akcję, podczas gdy pozostali gracze trzymają się swoich ustalonych. Aby omówić pierwszy pomysł rozwiązania gry strategicznej, rozważymy dwie perspektywy, perspektywę jednostki i perspektywę grupy graczy. Z jednej strony, dla gracza i, mówimy, że jakaś akcja jest najlepszą odpowiedzią na profil określający akcje wszystkich pozostałych graczy, jeśli użyteczność, którą otrzymuje za wybór tej akcji jest co najmniej tak duża jak użyteczność, którą otrzyma za wybór każdej innej dostępnej akcji. Z drugiej strony mówimy, że profil, złożony z jednej akcji dla każdego gracza, jest czystą równowagą Nasha, jeśli dla każdego gracza wybrana przez niego akcja jest najlepszą odpowiedzią na akcje wybrane przez wszystkich pozostałych graczy. Można to traktować jako definicję stabilnego wyniku, ponieważ żaden z graczy nie ma motywacji do jednostronnego odstąpienia od przypisanej strategii. Dlaczego? Ano dlatego, że jego użyteczność nie powiększyłaby się.

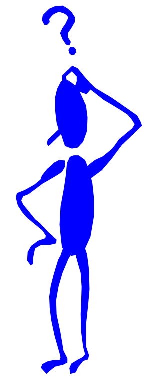
Exercise: How Many Pure Nash Equilibria?

	L	R
T	2 \ 2	2 \ 1
B	1 \ 3	3 \ 2

	L	R
T	2 \ 2	2 \ 2
B	2 \ 2	2 \ 2

	L	R
T	1 \ 2	2 \ 1
B	2 \ 1	1 \ 2

- There might be multiple pure Nash equilibria



- There might not be any pure Nash equilibria

[14] Rozważmy trzy przykładowe gry podane na slajdzie i sprawdźmy, czy potraficie prawidłowo wyznaczyć równowagi Nasha. W nich wszystkich gracz z wiersza może wybierać między Górą a Dołem, natomiast gracz z kolumny może wybierać między Lewą a Prawą. W grze po lewej stronie istnieje tylko jedna równowaga Nasha, odpowiadająca profilowi akcji (Góra, Lewo). W istocie żaden gracz nie otrzymałby lepszej wypłaty, jednostronnie zmieniając swoją strategię. Dla trzech pozostałych kandydatów na równowagę warunki równowagi nie są spełnione. Dla gry środkowej istnieją cztery czyste równowagi Nasha. Dla każdego możliwego profilu akcji żaden z graczy nie ma motywacji do zmiany strategii, ponieważ nie poprawiłoby to jego użyteczności. Ten przykład potwierdza, że w tej samej grze może istnieć wiele równowag Nasha. Gra po prawej stronie nie ma żadnej czystej równowagi Nasha. Dla każdego profilu akcji jeden z graczy miałby motywację do zmiany swojej akcji. O tej macierzy można myśleć jak o grze z dwiema kośćmi do rzucania, po jednej dla każdego gracza. Jeśli liczby na obu kościach są nieparzyste lub parzyste, to wygrywa gracz z kolumny. Jeśli jednak jedna z liczb jest nieparzysta, a druga parzysta, wtedy wygrywa gracz z wiersza. Niezależnie od tego, który scenariusz byłby zrealizowany, jeden z graczy zawsze chciałby zmienić swoją akcję, ponieważ otrzymałby wypłatę w wysokości 2, a nie 1.

Pareto Efficiency: good for the group

Vilfredo Pareto

- Action profile ***a*** **Pareto-dominates** profile ***a'***, if $u_i(a) \geq u_i(a')$ for all players $i \in N$ and this inequality is strict in at least one case
- Action profile ***a*** is called **Pareto efficient** if it is not Pareto-dominated by any other profile, i.e., if you cannot improve things for one player without harming any of the others

	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20

(C,C) **dominates** (D,D)
(C,C) is **Pareto efficient**
(D,D) is not Pareto efficient
The Prisoner's Dilemma illustrates a conflict between ***stability*** *(both players defect) and* ***efficiency*** *(both players cooperate)*

[15] Powiedzieliśmy już, że równowaga Nasha reprezentuje stabilny wynik, który jest racjonalny dla każdego gracza z osobna. Możemy się jednak zastanowić, czy zawsze jest to wynik dobry dla całej grupy. Skupmy się ponownie na profilach i przypomnijmy, że każdy profil składa się z jednej akcji wybranej przez każdego gracza. Możemy powiedzieć, że profil akcji dominuje w sensie Pareto inny profil, jeśli użyteczność, do której prowadzi dla wszystkich graczy, jest co najmniej tak wysoka jak użyteczność związana z drugim profilem i jest ściśle wyższa dla co najmniej jednego gracza. Definicja ta konfrontuje profil dobry z profilem zdecydowanie gorszym. Dalej, profil akcji nazywamy efektywnym w sensie Pareto, jeśli nie jest on zdominowany przez żaden inny profil. Innymi słowy, oznacza to, że rozważając profil Pareto-efektywny, nie można poprawić użyteczności dla jednego gracza, nie pogarszając jej dla jakiegoś innego gracza. Wróćmy do dylematu więźnia. Profil (współpracuj, współpracuj) dominuje profil (zdradź, zdradź), ponieważ dla każdego gracza
-10 jest lepsze niż -20. Jest to zaskakujące, ponieważ wcześniej wskazaliśmy (zdradź, zdradź) jako stabilny wynik. Dylemat więźnia ilustruje jednak konflikt między stabilnością a efektywnością. To, co może być lepsze dla grupy, tutaj (współpracuj, współpracuj), nie musi odpowiadać temu, co jest racjonalne dla każdego gracza.

A (pure) **coordination game** is a normal-form game **<*N*, *A*, *u*>** with $u_i(a) = u_j(a)$ for all players $i, j \in N$ and all action profiles $a \in A$

Example:
A world with just two drivers.
Which side of the road to use?

	L	R
L	1 \ 1	0 \ 0
R	0 \ 0	1 \ 1

Remark: For this game, all Nash equilibria are Pareto efficient

Exercise: Is this the case for all coordination games?

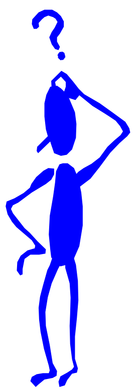
[16] Odnieśmy się teraz do dwóch specyficznych typów gier. Pierwsza z nich nazywana jest grą koordynacyjną. W ogólności opisuje ona sytuację, w której gracz uzyska wyższą użyteczność, gdy wybierze ten sam sposób działania co inny gracz. My jednak będziemy odwoływać się do jej uproszczonego wariantu, w którym użyteczności są takie same dla wszystkich graczy i wszystkich profili akcji. Taka gra jest pokazana na slajdzie na przykładzie świata z tylko dwoma kierowcami. Jeśli obaj wybiorą lewą stronę drogi, ich użyteczności wynoszą jeden. Jeśli obaj wybiorą prawą stronę, to samo. Jeśli jednak wybiorą różne strony drogi, ich wypłaty wynoszą zero. Dla tej gry istnieją dwie czyste równowagi Nasha. Co więcej, obie są efektywne w sensie Pareto. W ramach ćwiczenia zastanówcie się, czy tak jest dla wszystkich gier koordynacyjnych.

Zero-Sum Games

A **zero-sum game** is a two-player normal-form game **<*N*, *A*, *u*>** with $u_1(a) + u_2(a) = 0$ for all action profiles $a \in A$

Example: Rock Paper Scissors

	0 \ 0	-1 \ 1	1 \ -1
	1 \ -1	0 \ 0	-1 \ 1
	-1 \ 1	1 \ -1	0 \ 0



What are the pure NE of this game?
Intuitively, how should you play?

[17] Kolejna cecha gry, którą chcę przedstawić, nazywana jest sumą zerową. Ma ona miejsce w przypadku gry z udziałem dwóch graczy, gdy suma ich wypłat jest równa zeru dla wszystkich profili akcji. Oznacza to, że zyski lub straty każdego z graczy są dokładnie zrównoważone przez zyski lub straty innych graczy. Znanym przykładem takiej gry jest papier-kamień-nożyce. Na przykład, jeśli obaj gracze wybierają to samo, ich wypłaty są zerowe i mamy remis. Jednak papier wygrywa z kamieniem, kamień wygrywa z nożycami, a nożyce wygrywają z papierem. Teraz wyobraźcie sobie, że stoicie w jednej z dziewięciu komórek macierzy użyteczności. Czy istnieje jakakolwiek komórka, w której nie mielibyście bodźca do zmiany swojej akcji, biorąc pod uwagę akcję przeciwnika? Nie ma takiej komórki, co oznacza, że nie istnieje czysta równowaga Nasha. Skoro tak, to jak powinniśmy grać w taką grę?

Mixed Strategies

- So far, the space of strategies available to player $\boldsymbol{i}$ has simply been her set of actions $\boldsymbol{A}_i$ (pure strategy = action)
- We now generalize and allow player $\boldsymbol{i}$ to **play any action** *in* $\boldsymbol{A}_i$ **with a certain probability**

- For any finite set $\boldsymbol{X}$, let $\Pi(\boldsymbol{X}) = \{\, p : \boldsymbol{X} \to [0,1] \mid \Sigma_{x \in X}\, p(x) = 1 \,\}$ be the set of all probability distributions over $\boldsymbol{X}$
- A **mixed strategy** $\boldsymbol{s}_i$ for player $\boldsymbol{i}$ is a **probability distribution** in $\Pi(\boldsymbol{A}_i)$
- The set of all her mixed strategies is $\boldsymbol{S}_i = \Pi(\boldsymbol{A}_i)$
- A mixed-strategy profile $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ is an element of $\boldsymbol{S}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{S}_n$

actions conducted with a certain pre-defined probablity

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$p(x)$	0.50	0.25	0.20	0.05

[18] Na pewno potrzebujemy czegoś bardziej zaawansowanego niż strategie ograniczone tylko do pojedynczych akcji. Uogólnijmy więc ten pomysł, pozwalając uczestnikom na zagranie każdej dostępnej dla nich akcji z określonym prawdopodobieństwem. W tym celu musimy rozważyć rozkład prawdopodobieństwa. Przypisuje on nieujemne prawdopodobieństwo do każdej pozycji, zapewniając jednocześnie, że wszystkie prawdopodobieństwa sumują się do jednego. Przykład podany jest w dolnej części slajdu. Teraz, strategia mieszana jest pewnym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze akcji dostępnych dla danego gracza. Zbiór wszystkich takich rozkładów prawdopodobieństwa jest zbiorem strategii mieszanych danego gracza. Nie jest on już skończony. Jedna strategia mieszana każdego gracza daje profil strategii mieszanych.

Example: Battle of the Sexes

Traditionally minded **Oliwia** and **Mateusz** are planning a social activity. Worst of all would be not to agree on joint activity, but if they do manage, **Mateusz** prefers auto (**A**) racing, and **Oliwia** really prefers ballet (**B**).

O \ M	**A**	**B**
A	2 \ 4	0 \ 0
B	0 \ 0	8 \ 3

Suppose **Oliwia** chooses to go to the ballet (**B**) with 75% probability

$\boldsymbol{s_1} = (1/4, 3/4)$ $\boldsymbol{s_2} = (1, 0)$

Mateusz chooses to go to the races (**A**) with certainty (pure strategy)

$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}) = ((1/4, 3/4), (1, 0))$

The **support of strategy** s_i is the set of actions $\{ a_i \in A_i \mid s_i(a_i) > 0 \}$

- A mixed strategy s_i is pure iff its support is a singleton
- A mixed strategy s_i is truly mixed if it is not pure
- A mixed strategy s_i is fully mixed if its support is the full set A_i

[19] Wyjaśnimy ideę strategii mieszanych, odwołując się do gry zwanej bitwą płci. Rozważmy ponownie Oliwię i Mateusza. Teraz planują, jak spędzić wieczór. Wybierają między wyścigami samochodowymi A i baletem B. Najgorsze byłoby nieuzgodnienie wspólnej akcji. Wówczas ich użyteczności wynoszą 0. Gdy oboje wybierają A lub B, wypłaty są dodatnie. Jednak Oliwia jest bardziej zadowolona z baletu, a Mateusz z wyścigów samochodowych. Po prawej stronie macierzy użyteczności podaję przykładowe strategie mieszane dla obu graczy. Oliwia wybiera wyścigi z prawdopodobieństwem 25%, a balet z prawdopodobieństwem 75%. Z kolei Mateusz wybiera wyścigi z pewnością, z prawdopodobieństwem 1. Jest to jednak również szczególny przypadek strategii mieszanej. Strategie obu graczy zebrane razem tworzą profil mieszany. Wprowadźmy kilka dodatkowych pojęć. Wsparcie strategii mieszanej to zbiór akcji związanych z dodatnimi prawdopodobieństwami. W tym kontekście mówimy, że strategia mieszana jest czysta, jeśli jej wsparcie jest pojedynczą akcją. Taka właśnie jest strategia Mateusza. Ponadto, strategia mieszana jest prawdziwie mieszana, jeśli nie jest czysta, co oznacza, że co najmniej dwie akcje mogą być realizowane w różnych scenariuszach. Wreszcie, strategia mieszana jest w pełni mieszana, jeśli jej wsparciem jest pełny zbiór akcji. W tym przypadku wszystkie akcje mają pewne dodatnie prawdopodobieństwo, że zostaną zrealizowane. Taką właśnie strategię ma Oliwia.

Mixed Strategies and Expected Utility

- A mixed-strategy profile $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ is an element of $\boldsymbol{S}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{S}_n$
- The **expected utility** of player $\boldsymbol{i}$ for the mixed-strategy profile $\boldsymbol{s}$ is:

$$u_i(s) = \sum_{a \in \boldsymbol{A}} \left[u_i(a) \cdot \prod_{j \in \boldsymbol{N}} s_j(a_j) \right]$$

O \ **M**	**A** (1)	**B** (0)
A (1/4)	2 \ 4	0 \ 0
B (3/4)	0 \ 0	8 \ 3

$\boldsymbol{s}_1 = \mathbf{(1/4,\ 3/4)}$ $\boldsymbol{s}_2 = \mathbf{(1,\ 0)}$

$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2) = \mathbf{((1/4,\ 3/4),\ (1,\ 0))}$

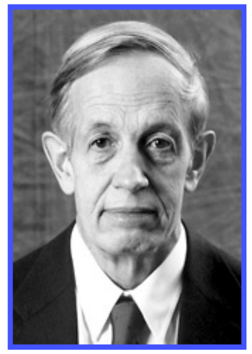
Thus: $\boldsymbol{u}_1(s) = 2 \cdot (1/4 \cdot 1) + 0 \cdot (1/4 \cdot 0) + 0 \cdot (3/4 \cdot 1) + 8 \cdot (3/4 \cdot 0) = 1/2$

$\boldsymbol{u}_2(s) = 4 \cdot (1/4 \cdot 1) + 0 \cdot (1/4 \cdot 0) + 0 \cdot (3/4 \cdot 1) + 3 \cdot (3/4 \cdot 0) = 1$

[20] W przypadku strategii czystych łatwo było odczytać użyteczność związaną z ich realizacją. Mogliśmy po prostu odwołać się do liczby w konkretnej komórce macierzy wypłat. Przy profilach strategii mieszanych sprawa robi się nieco trudniejsza. Jest to jednak łatwiejsze niż sugeruje złożoność równania na wyznaczenie użyteczności oczekiwanej. Chodzi o to, by z każdej komórki, odpowiadającej profilowi czystej strategii, wziąć użyteczność i pomnożyć ją przez łączne prawdopodobieństwo jej realizacji, które jest iloczynem prawdopodobieństw przypisanych do poszczególnych czystych akcji przez wszystkich graczy. Następnie wystarczy zsumować takie składniki. Na slajdzie podano przykład dla Oliwii i Mateusza. Dla Oliwii przechodzimy przez wypłaty 2, 0, 0 i 8, mnożymy je przez odpowiednie łączne prawdopodobieństwa i sumujemy. W rezultacie otrzymujemy oczekiwaną użyteczność równą 1/2.

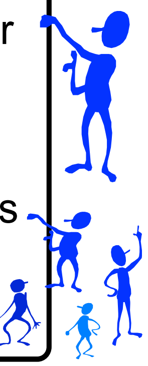
Mixed Nash Equilibria

Consider a game **<*N*, *A*, *u*>** with associated (mixed) strategies $\boldsymbol{s}_i \in \boldsymbol{S}_i$



John Nash

- We say that $s_i^* \in S_i$ is the best response for player i to the (partial) strategy profile s_{-i}, if $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ for all $s_i' \in S_i$
- We say that action profile $s = (s_1, \ldots, s_n)$ is a **mixed Nash equilibrium**, if s_i is a best response to s_{-i} for every player $i \in N$



Mixed Nash equilibria are **stable outcomes**:
no player has an incentive to unilaterally change her strategy
Remark: Note how this definition mirrors that of pure Nash equilibria

[21] Czas zdefiniować mieszaną równowagę Nasha. Zastosujemy ten sam schemat, co w przypadku równowagi czystej. Skupmy się więc najpierw na pojedynczym graczu. Mówimy, że jakaś strategia mieszana jest najlepszą odpowiedzią danego gracza na strategie mieszane pozostałych graczy, jeśli nie ma innej strategii mieszanej dostępnej dla tego gracza, która doprowadzi go do większej użyteczności oczekiwanej przy ustalonych strategiach pozostałych graczy. Teraz, na poziomie grupy, mówimy, że profil strategii mieszanych jest mieszaną równowagą Nasha, jeśli mieszana strategia każdego gracza jest najlepszą odpowiedzią na strategie pozostałych graczy. Ponownie, taka równowaga oznacza stabilny wynik, ponieważ żaden z graczy nie ma motywacji do jednostronnej zmiany swojej strategii.

Recall:
A world with just two drivers
Which side of the road to use?

	L	R
L	1 \ 1	0 \ 0
R	0 \ 0	1 \ 1

For this game, it is easy to guess what the Nash equilibria are:

- Pure NE: both pick left (**L**) with certainty: ((1,0), (1,0))
- Pure NE: both pick right (**R**) with certainty: ((0,1), (0,1))
- Both choose fifty-fifty: ((1/2,1/2), (1/2,1/2))

Remark:

- There is no other NE: suppose I pick (1/2+ε, 1/2-ε), e.g., (0.51, 0.49)
- Then your best response is (1,0), because it is better to pick **L** than **R** (expected utility 0.51 vs. 0.49), to which my best response is (1,0)

[22] Omówmy sposób obliczania równowagi Nasha dla małych gier. Nie będziemy od razu przechodzić do formalnej procedury. Natomiast najpierw przedstawimy kilka nieformalnych kroków. Wróćmy do gry z udziałem tylko dwóch kierowców mających wybrać stronę drogi. Łatwo jest odgadnąć wszystkie równowagi Nasha dla tak prostej gry. Dwie czyste równowagi, w których obaj kierowcy wybierają lewą lub prawą stronę, są oczywiste. Trzecia jest mieszana. W niej każdy z graczy wybiera lewą lub prawą stronę z 50% prawdopodobieństwem. Nieformalny dowód, że jest to rzeczywiście równowaga, jest pokazany na dole slajdu. Załóżmy, że jeden kierowca zwiększa prawdopodobieństwo wyboru lewej strony o epsilon, zmniejszając tym samym prawdopodobieństwo wyboru prawej strony o ten sam epsilon. Wówczas najlepszą odpowiedzią drugiego gracza byłoby wybranie wyłącznie lewej strony, ponieważ prowadziłoby go to do wyższej oczekiwanej użyteczności niż wybór strony prawej. Jako racjonalni gracze, chcemy maksymalizować naszą użyteczność. To z kolei motywowałoby pierwszego gracza do wybrania również lewej strony.

Computing Nash Equilibria (2)

Suppose we have guessed (correctly) that this game has exactly one NE **(*s*$_1$, *s*$_2$)** and that it is fully mixed. How to compute it?

	L (q)	**R** (1-q)
T (p)	6 \ 4	7 \ 5
B (1-p)	3 \ 2	8 \ 1

Let s_1 = (p,1-p) and s_2 = (q,1-q). If you use a mixed strategy, you must be indifferent between your two actions.

Thus: Player 1 is indifferent: $6 \cdot q + 7 \cdot (1-q) = 3 \cdot q + 8 \cdot (1-q) \rightarrow q = 1/4$
Player 2 is indifferent: $4 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 5 \cdot p + 1 \cdot (1-p) \rightarrow p = 1/2$
Mixed Nash Equilibrium: $(s_1, s_2) = ((1/2, 1/2), (1/4, 3/4))$

[23] Przejdźmy do innego przykładu, w którym wypłaty są bardziej zróżnicowane. Załóżmy, że zgadliśmy, że ta gra ma dokładnie jedną w pełni mieszaną równowagę Nasha. Jak ją obliczyć? Taka równowaga składa się z mieszanej strategii gracza z wiersza (p, 1-p) i mieszanej strategii gracza z kolumny (q, 1-q). Kluczową obserwacją jest to, że jeśli gracz używa strategii mieszanej, to musi być nierozróżnialny między swoimi akcjami. Dzieje się tak, gdy oczekiwane użyteczności związane z tymi akcjami są takie same. Dla gracza z wiersza użyteczności te zależą od wypłat i prawdopodobieństw wybranych przez gracza z kolumny. Na przykład, oczekiwana użyteczność akcji Góra to 6 razy q dodać 7 razy 1 minus q, a oczekiwana użyteczność akcji Dół to 3 razy q dodać 8 razy 1 minus q. Te użyteczności są równe dla q równego 1/4. To samo rozumowanie dla gracza z kolumny wskazuje, że jest on nierozróżnialny pomiędzy akcjami Lewa i Prawa, gdy p jest równe 1/2. Kiedy gracz z wiersza wybiera Górę z prawdopodobieństwem równym połowie, a gracz z kolumny wybiera Lewo z prawdopodobieństwem równym jednej czwartej, obaj gracze są nierozróżnialni pomiędzy swoimi dwiema akcjami. Wtedy nie mają żadnej motywacji do jednostronnego odstąpienia od swoich mieszanych strategii, ponieważ to by im się nie opłaciło. To jest właśnie definicja mieszanej równowagi Nasha.

Exercise: Game of Chicken

*To establish their relative levels of bravery, **Oliwia** and **Mateusz** race their cars on a collision course straight towards each other at full speed. Each can swerve (**S**) or go straight (**G**).*

- If both **go straight** (***G***), they die
- If both **swerve** (***S***), nothing happens
- Otherwise, whoever swerves faces humiliation, while the other one wins

	S	**G**
S	0 \ 0	-5 \ 10
G	10 \ -5	-20 \ -20

What are the Nash equilibria of this game?

[24] Jesteśmy teraz gotowi do omówienia bardziej formalnej procedury. Aby ją wyjaśnić, odwołamy się do gry w cykora. Polega ona na tym, że dwóch graczy chce zmierzyć poziom swojej odwagi. Załóżmy, że Oliwia i Mateusz jadą samochodem na kursie kolizyjnym prosto na siebie z pełną prędkością. Mogą wybrać pomiędzy skrętem w prawo a jazdą prosto. Jeśli oboje pojadą prosto, zginą, a użyteczność jest najniższa z możliwych, powiedzmy -20. Jeśli obaj skręcą, to nic się nie dzieje, nikt nie jest zwycięzcą, ale przynajmniej żyją - ich użyteczność wynosi 0. W przeciwnym razie ten, kto skręca, ponosi straty, ale ratuje życie - odpowiada to użyteczności -5. Drugi gracz jadący prosto wygrywa, co wiąże się z użytecznością 10. Jak obliczyć równowagi Nasha dla tej gry?

Computing Nash Equilibria (3)

O \ M	S (q)	G (1-q)
S (p)	0 \ 0	-5 \ 10
G (1-p)	10 \ -5	-20 \ -20

s_O = (p,1-p)
s_M = (q,1-q)
*best response of player **O** depends on **q***

Player **O** is indifferent if $u_O(S,q) = u_O(G,q)$:
$0 \cdot q + -5 \cdot (1-q) = 10 \cdot q + -20 \cdot (1-q) \rightarrow q = 3/5$

$p \in best_O(q) = [0,1]$
if $u_O(S,q) = u_O(G,q)$, i.e., if $q = 3/5$

Player **O** would play **S** if $u_O(S,q) > u_O(G,q)$:
$0 \cdot q + -5 \cdot (1-q) > 10 \cdot q + -20 \cdot (1-q) \rightarrow q < 3/5$

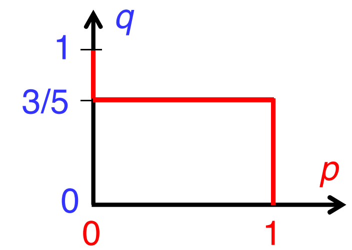
$p \in best_O(q) = 1$
if $u_O(S,q) > u_O(G,q)$, i.e., if $q < 3/5$

Player **O** would play **G** if $u_O(S,q) < u_O(G,q)$:
$0 \cdot q + -5 \cdot (1-q) < 10 \cdot q + -20 \cdot (1-q) \rightarrow q > 3/5$

$p \in best_O(q) = 0$
if $u_O(S,q) < u_O(G,q)$, i.e., if $q > 3/5$

Summary: best response of player **O** depends on ***q***

$$p \in best_O(q) = \begin{cases} 1 & \text{if } q < 3/5 \\ [0,1] & \text{if } q = 3/5 \\ 0 & \text{if } q > 3/5 \end{cases} \Rightarrow$$



[25] Formalna procedura polega na ustaleniu najlepszej odpowiedzi każdego z graczy na strategię drugiego gracza. Skupmy się najpierw na Oliwii, która jest graczem z wiersza. Musimy rozważyć trzy scenariusze. W pierwszym z nich zakładamy, że jest ona nierozróżnialna względem swoich akcji. Dzieje się tak, gdy oczekiwane użyteczności z jazdy prosto i skrętu w prawo są takie same. Ma to miejsce dla prawdopodobieństwa q gracza z kolumny ustawionego na 3/5. Gdy gracz jest nierozróżnialny między swoimi akcjami, może wybrać dowolne prawdopodobieństwo p pomiędzy 0 a 1. Drugi scenariusz dotyczy sytuacji, gdy gracz wybiera skręt ponad jechanie prosto. Zdarza się to dla q mniejszego niż 3/5. Dla takich wartości q, najlepszą odpowiedzią Oliwii jest p równe 1, co odpowiada skrętowi w prawo zrealizowanemu z pewnością. Wreszcie, Oliwia powinna jechać prosto z pewnością, czyli przypisać 0 prawdopodobieństwu p, gdy q jest większe od 3/5. Aby podsumować najlepsze odpowiedzi Oliwii, możemy narysować je w postaci wykresu. Pokazuje on wartość p, która jest najlepszą odpowiedzią dla dowolnej wartości q.

Computing Nash Equilibria (4)

O \ M	S (q)	G ($1-q$)
S (p)	0 \ 0	-5 \ 10
G ($1-p$)	10 \ -5	-20 \ -20

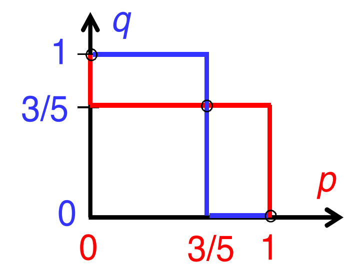
$s_O = (p, 1-p)$
$s_M = (q, 1-q)$
best response of player M depends on p

Player ***M*** is indifferent if $u_M(S,p) = u_M(G,p)$: $0 \cdot p + -5 \cdot (1-p) = 10 \cdot p + -20 \cdot (1-p) \rightarrow p = 3/5$

$q \in best_2(p) = [0,1]$ if $u_M(S,p) = u_M(G,p)$, i.e., if $p = 3/5$

Summary: best response of *player M* depends on ***p***

$$q \in best_M(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p < 3/5 \\ [0,1] & \text{if } p = 3/5 \\ 0 & \text{if } p > 3/5 \end{cases} \Rightarrow$$



Analyze all intersections of best responses curves:

Pure NE: $(s_1, s_2) = ((0,1), (1,0))$ Pure NE: $(s_1, s_2) = ((1,0), (0,1))$
Mixed NE: $(s_1, s_2) = ((3/5, 2/5), (3/5, 2/5))$

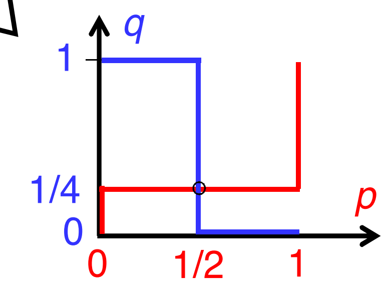
[26] Tę samą procedurę należy zastosować dla Mateusza, który jest graczem z kolumny. To znaczy, chcemy wyznaczyć najlepsze prawdopodobieństwo p, biorąc pod uwagę różne wartości q. Nie będę szczegółowo powtarzał kroków i przejdę od razu do wykresu najlepszej odpowiedzi dla Mateusza. Ponieważ gra jest symetryczna, jest to właściwie to samo co dla Oliwii, tylko role p i q są odwrotne. Gdy wykresy najlepszych odpowiedzi dla dwóch graczy narysujemy na tym samym rysunku, ich przecięcia wskazują wszystkie równowagi Nasha. W przypadku gry w cykora mamy trzy takie równowagi. Dwie z nich są czyste, gdy jeden z graczy jedzie prosto, a drugi skręca. Istnieje jednak również w pełni mieszana równowaga Nasha, sugerująca, że gdy obaj gracze ustawią prawdopodobieństwo skrętu na trzy piąte, nie mają motywacji do jednostronnego odejścia od tej strategii, gdyż nie uzyskaliby przez to lepszych użyteczności.

Player 1 is indifferent: $6 \cdot q + 7 \cdot (1-q) = 3 \cdot q + 8 \cdot (1-q) \rightarrow q = 1/4$
Player 2 is indifferent: $4 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = 5 \cdot p + 1 \cdot (1-p) \rightarrow p = 1/2$

	L (q)	**R** (1-q)
T (p)	6 \ 4	7 \ 5
B (1-p)	3 \ 2	8 \ 1

$$p \in \mathrm{best}_1(q) = \begin{cases} 0 & \text{if } q < 1/4 \\ [0,1] & \text{if } q = 1/4 \\ 1 & \text{if } q > 1/4 \end{cases}$$

$$q \in \mathrm{best}_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p < 1/2 \\ [0,1] & \text{if } p = 1/2 \\ 0 & \text{if } p > 1/2 \end{cases}$$



Analyze all intersections of best response curves:

Mixed NE: (s_1, s_2) = ((1/2, 1/2), (1/4, 3/4))

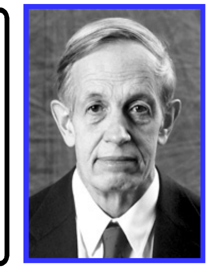
[27] Rozważmy teraz grę o bardzo zróżnicowanych użytecznościach, którą omawialiśmy kilka slajdów temu. Wcześniej tylko domyślaliśmy się, że ma ona jedną mieszaną równowagę Nasha. Teraz można zobaczyć potwierdzenie tego przypuszczenia. Wykresy najlepszych odpowiedzi przecinają się w jednym punkcie. Odpowiada on graczowi z wiersza wybierającemu akcję Góra z prawdopodobieństwem 1/2 i graczowi z kolumny wybierającemu akcję Lewo z prawdopodobieństwem 1/4. Z kolei to odpowiada wynikowi, który uzyskaliśmy przy mniej formalnym rozumowaniu kilka minut temu. Zwróćcie uwagę, że przy obliczaniu równowag mieszanych nie wystarczy brać pod uwagę jedynie kolejności, porządku użyteczności za realizację poszczególnych akcji. To dokładne wartości tych użyteczności wpływają na najlepsze odpowiedzi w postaci wartości prawdopodobieństwa. Stąd ma znaczenie, czy w danej komórce mamy wartość 6, 5, czy 4 i nie wystarczy stwierdzić, że 6 jest większe od 3, ale mniejsze od 7 i 8.

Nash's Theorem

Recall that some games do not have pure Nash equilibria. Good news:

Theorem (Nash, 1951) Every (finite) normal-form game has at least one (truly mixed or pure) Nash equilibrium

J.F. Nash. Non-Cooperative Games.
Annals of Mathematics, 54(2):286-295, 1951.



Both the design of algorithms for computing Nash equilibria and the analysis of the computational complexity of this task are important research topics in algorithmic game theory

Regarding the complexity:

- Finding a NE is in NP: if you guess a NE, I can easily verify
- But likely not NP-hard: guaranteed existence would be atypical
- Complete for PPAD ("polynomial parity argument for directed graphs"), which lies "between" P and NP. Believed to be intractable

[28] Omawiając różne przykłady, pokazaliśmy już gry, które nie mają czystych równowag Nasha. Na szczęście jest dobra wiadomość, która formalnie nazywa się twierdzeniem Nasha. Każda skończona gra w postaci normalnej ma co najmniej jedną równowagę Nasha. Może być ona czysta lub prawdziwie mieszana, ale mamy gwarancję, że istnieje. John Nash opublikował to twierdzenie w 1951 roku w wieku 23 lat, kiedy był jeszcze studentem. W tym miejscu chcę zauważyć, że zarówno konstrukcja algorytmu do obliczania równań Nasha, jak i analiza ich złożoności obliczeniowych to ważne tematy badawcze w teorii gier. Na tym etapie, wystarczy, że wiecie, że znajdowanie równowagi Nasha jest w klasie NP, ponieważ jeśli odgadniecie równowagę, możecie ją łatwo zweryfikować. Jednak prawdopodobnie nie jest to problem NP-trudny, ponieważ istnienie równowagi Nasha jest gwarantowane, co byłoby nietypowe dla problemów NP-trudnych.

Strictly Dominant Strategy

- **Pure and mixed Nash equilibria are examples of solution concepts**: formal models to predict what might be the outcome of a game
- *Have we maybe missed the most obvious solution concept?*

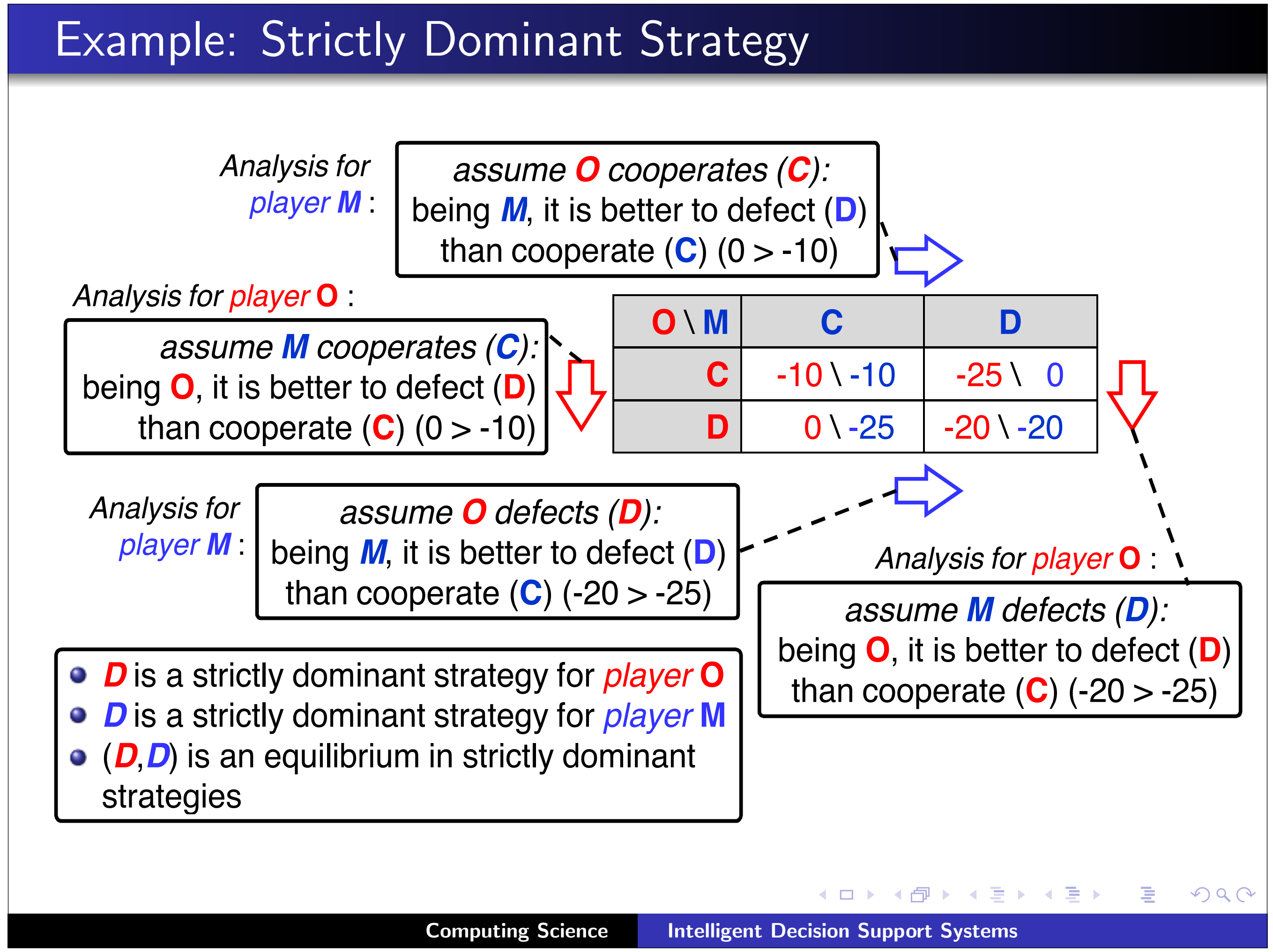
- You should play the action $a_i^* \in A_i$ that gives you a better payoff than any other action $a_i' \in A_i$, whatever the others do (such as playing s_{-i}):

$$u_i(a_i^*, s_{-i}) > u_i(a_i', s_{-i}) \text{ for all } a_i' \in A_i \text{ and for all } s_{-i} \in S_{-i}$$

- Action a_i^* is called a **strictly dominant strategy** for player i
- Profile $a^* \in A$ is called **equilibrium in strictly dominant strategies** if, for every player $i \in N$, action a_i^* is a strictly dominant strategy

Downside: This does not always exist (in fact, it usually does not!)

[29] Znacie już dwa możliwe rozwiązania dla gier strategicznych: czyste i mieszane równowagi Nasha. Są to pewne formalne modele przewidywania wyniku gry. W czasie kolejnych kilkunastu minut omówimy inne koncepcje rozwiązań. Prawdę mówiąc, w trakcie tego wykładu byliśmy już blisko najbardziej oczywistej z nich. Koncepcja ta opiera się na pojęciu strategii ściśle dominującej. Powinniście zawsze wybierać akcję, która daje wam lepszą wypłatę niż jakakolwiek inna akcja, niezależnie od tego, co robią pozostali gracze. Stąd użyteczność, którą otrzymujemy, grając strategię ściśle dominującą jest zawsze wyższa niż dla wyboru innej strategii, bez względu na strategie innych graczy. Profil złożony z takich ściśle dominujących strategii dla wszystkich graczy nazywamy równowagą strategii ściśle dominujących. Brzmi to świetnie, ale niestety nie zawsze taka równowaga istnieje.



[30] Omówiliśmy już jednak grę, w której takie pojęcie okazuje się przydatne. Jest nią dylemat więźnia. Rozważmy najpierw gracza z wiersza, Oliwię. W przypadku, gdy Mateusz współpracuje, dla Oliwii lepiej jest, gdy zdradza. Dlaczego? Bo dostanie wtedy 0, a nie -10. W przypadku, gdy Mateusz zdradza, również lepiej jest, aby Oliwia zdradziła. Dlaczego? Ponieważ uzyska -20 zamiast -25. Stąd zdrada D jest strategią ściśle dominującą dla Oliwii. Analogicznie, niezależnie od tego, czy Oliwia współpracuje, czy zdradza, lepiej jest dla Mateusza zdradzić. Zatem zdrada D jest też jego strategią ściśle dominującą. W rezultacie profil (zdrada, zdrada) jest równowagą strategii ściśle dominujących. Jest to nasza trzecia koncepcja rozwiązania zbudowana na założeniu, że należy robić to, co jest zdecydowanie dobre.

Elimination of Dominated Strategies

- Action $a_i \in S_i$ is **strictly dominated** by strategy $s_i^* \in S_i$ if:

$$u_i(s_i^*, a_{-i}) > u_i(a_i, s_{-i}) \text{ for all } s_{-i} \in S_{-i}$$

- If we assume i is rational, action a_i can be eliminated

This induces a **solution concept**:

all mixed-strategy profiles of the reduced game that survive
iterated elimination of strictly dominated strategies (*IESDS*)

Example (where the dominating strategies happen to be pure):

	L	R
T	4 \ 4	1 \ 6
B	6 \ 1	2 \ 2

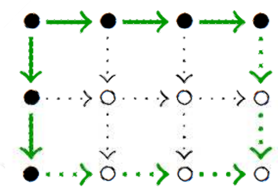
	R
T	1 \ 6
B	2 \ 2

	R
B	2 \ 2

[31] W kolejnej koncepcji rozwiązania nadal będziemy korzystać z relacji dominacji. U jej podstaw leży założenie, że nie należy robić tego, co jest zdecydowanie złe. Formalnie, taką akcję nazywamy ściśle zdominowaną. Zachodzi ona, jeśli istnieje pewna być może mieszana strategia tego samego gracza, która prowadzi do lepszej użyteczności niezależnie od tego, co robią pozostali gracze. Zakładając, że gracz jest racjonalny, nigdy nie powinien wybierać akcji ściśle zdominowanej, a więc powinien wyeliminować ją ze swoich możliwych wyborów. Jak zawsze, musimy przejść z poziomu pojedynczego gracza do poziomu gry z udziałem wszystkich graczy. Pomysł polega na iteracyjnym eliminowaniu ściśle zdominowanych strategii wszystkich graczy. Wszystkie mieszane profile zredukowanej gry, które przetrwają taką eliminację, są naszą czwartą koncepcją rozwiązania. Rozważmy prosty przykład z dwoma graczami i dwoma czystymi akcjami dla każdego z nich. Jest oczywiste, że niezależnie od akcji gracza z wiersza, wybór akcji Prawa przez gracza z kolumny prowadzi do lepszej użyteczności niż wybór akcji Lewa. Stąd Lewa jest dla niego akcją ściśle zdominowaną i może być wyeliminowana. Już w zredukowanej grze wybór Góry przez gracza z wiersza jest ściśle zdominowaną strategią przez wybór Dołu. Stąd eliminujemy Górę. To, co przetrwało eliminację, to zredukowana gra, w której gracz z wiersza musi zagrać Dół, a gracz z kolumny musi wybrać Prawo.

Order Independence of IESDS

- Suppose $A_i \cap A_j = \varnothing$
- Then we can think of the reduced game G^t after t eliminations simply as the subset of $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ that survived



Theorem (Gilboa et al., 1990) Any order of eliminating strictly dominated strategies leads to the same reduced game

I. Gilboa, E. Kalai, and E. Zemel. On the Order of Eliminating Dominated Strategies. *Operations Research Letters*, 9(2):85-89, 1990.

Example (where the dominating strategies happen to be pure):

	L	R
T	4 \ 4	1 \ 6
B	6 \ 1	2 \ 2

⇒

	L	R
B	6 \ 1	2 \ 2

⇒

	R
B	2 \ 2

[32] Analizując poprzedni przykład, możemy zadać kilka ciekawych pytań. W szczególności interesujące jest, czy kolejność eliminacji strategii ściśle zdominowanych wpływa na wyniki. To co przetrwało po eliminacji to właśnie ta zredukowana gra, która jest podzbiorem początkowych akcji dostępnych dla wszystkich graczy. Na szczęście podzbiór ten nie zależy od kolejności eliminacji, co potwierdza twierdzenie Gilboy, Kalai'a i Zemela. Dowolna kolejność eliminacji ściśle zdominowanych strategii prowadzi do tej samej zredukowanej gry. Wróćmy do przykładu z poprzedniego slajdu. Zamiast zaczynać od gracza z kolumny, skupmy się najpierw na graczu z wiersza. Jest oczywiste, że wybór Góry jest ściśle zdominowany przez wybór Dołu, więc eliminujemy Górę. W zredukowanej już grze, wybranie Lewo przez gracza z kolumny jest ściśle zdominowane przez wybranie Prawo, więc eliminujemy Lewo. Ostatecznie, zredukowana gra jest taka sama jak na poprzednim slajdzie.

Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies

R is dominated by **L** and **C**

	L	C	R
T	3 \ 1	0 \ 1	0 \ **0**
M	1 \ 1	1 \ 1	5 \ **0**
B	0 \ 1	4 \ 1	0 \ **0**

	L	C
T	3 \ 1	0 \ 1
M	**1** \ 1	**1** \ 1
B	0 \ 1	4 \ 1

M is dominated neither by **T** nor **B**, but …
… **M is dominated by the mixed strategy**
that selects **T** nor **B** with equal probability

Solution concept
the set of all strategy profiles that assign zero probability to playing any action that would be removed through iterated removal of strictly dominated strategies
Remark: *much weaker than Nash equilibrium*

	L	C
T	3 \ 1	0 \ 1
B	0 \ 1	4 \ 1

maximally reduced game

[33] Poprzedni przykład był stosunkowo prosty. Przeanalizujmy teraz grę, w której każdy gracz ma do dyspozycji trzy akcje. Dla gracza z wiersza są to Góra, Środek i Dół, natomiast dla gracza z kolumny są to Lewo, Środek i Prawo. Początek jest znów prosty. Dla gracza z kolumny akcja Prawa jest ściśle zdominowana przez Lewą i Środkową. Dlatego możemy ją wyeliminować. Teraz sprawa staje się nieco bardziej skomplikowana, ponieważ nie ma akcji dla gracza z kolumny, która byłaby ściśle zdominowana przez inną akcję. To samo dotyczy gracza z wiersza: żadna czysta akcja nie jest ściśle zdominowana przez inną czystą akcję. Jednak uważna analiza akcji M sugeruje, że nie jest ona zdominowana ani przez Górę, ani przez Dół, ale jest zdominowana przez strategię mieszaną obejmującą Górę i Dół z równymi prawdopodobieństwami. Jest to nadal dozwolone przez definicję strategii ściśle zdominowanej. W rezultacie możemy wyeliminować akcję M. Niestety, nie można nic zrobić dalej, a maksymalnie zredukowana gra to ta w prawym dolnym rogu. Jest to nasze czwarte pojęcie rozwiązania gier: zbiór wszystkich profili strategii przypisujących zerowe prawdopodobieństwo wyboru dowolnej akcji, którą można usunąć poprzez iteracyjną eliminację strategii ściśle zdominowanych. Intuicyjnie czujemy, że ta koncepcja jest znacznie słabsza niż równowaga Nasha, ponieważ gracze są zwykle pozostawiani z większym podzbiorem grywalnych profili strategii.

Idea: Recommend Good Strategies

Consider the following variant of the Battle of the Sexes
(*previously, we had discussed a variant with different payffos*)

O \ M	A	B
A	2 \ 1	0 \ 0
B	0 \ 0	1 \ 2

Nash equilibria:

- pure AA: utility = 2 & 1
- pure BB: utility = 1 & 2
- mixed ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3)):
  expected utility = 2/3 & 2/3
  → *either unfair or low payoffs*

Ask **Oliwia** and **Mateusz** to toss a fair coin and to *pick both* **A** in case of heads and **B** otherwise. They don't have to, but if they do:

expected utility = $1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 1 = 3/2$ for **Oliwia**
$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2 = 3/2$ for **Mateusz**

[34] Pozostaje jeszcze do omówienia jedna koncepcja rozwiązania. Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią, możecie potraktować ją jako ciekawostkę. Nie będę oczekiwał od Was, że podczas zaliczenia będziecie potrafili rozwiązać zadania związane z jej wykorzystaniem. Wracamy do bitwy płci, choć w nieco zmienionej formie. Gracze, Oliwia i Mateusz, oraz ich akcje, wyścigi samochodowe i balet, są wciąż takie same. Jednak macierz wypłat jest symetryczna. Dla takiej gry istnieją trzy równowagi Nasha. Dwie z nich są oczywiste, bo są czyste. Odpowiadają one wybraniu tej samej akcji przez obu graczy. Wypłaty obu graczy wynoszą 2 i 1 lub 1 i 2. Trzecia równowaga jest mieszana. Wiąże się ona z wyborem wyścigów samochodowych z prawdopodobieństwem dwóch trzecich przez gracza z wiersza i wyborem baletu z takim samym prawdopodobieństwem przez gracza z kolumny. Oczekiwane wypłaty obu graczy wynoszą dwie trzecie. Odnosząc je do użyteczności dla innych równowag Nasha, wydają się one niskie, a nawet niesprawiedliwe. Dzieje się tak, ponieważ ta równowaga zakłada, że w pewnych realizacjach mieszanej równowagi Nasha obaj gracze kończyliby z użytecznością 0. Jeśli tak, to może dobrze byłoby wykluczyć takie scenariusze, oferując Oliwii i Mateuszowi pewną zewnętrzną pomoc. Pomoc ta może przybrać formę rzutu jedną monetą. W przypadku orła oboje powinni wybrać wyścigi samochodowe A, natomiast w przypadku reszki oboje powinni wybrać balet B. Oczywiście nie muszą tego robić, ale gdyby to zrobili, ich oczekiwana użyteczność wyniosłaby 1.5. Wartość ta znajduje się dokładnie pomiędzy tym, co zyskaliby realizując czyste równowagi Nasha i z pewnością ma większy sens niż oczekiwana użyteczność związana ze standardową równowagą mieszaną.

Correlated Equilibria

- A random public event occurs
- **Each player *i* receives private signal x_i**
- Modeled as random variables $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \boldsymbol{D}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{D}_n = \boldsymbol{D}$ with joint probability distribution $\boldsymbol{\pi}$ (so the $\boldsymbol{x}_i$ can be correlated)

- Player ***i*** uses function $\boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{D}_i \rightarrow \boldsymbol{A}_i$ to translate signals to actions
- A **correlated equilibrium** is a tuple $\boldsymbol{<x, \pi, \sigma>}$ with $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_n)$, such that, for all $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$ and all alternative choices $\boldsymbol{\sigma}_i' : \boldsymbol{D}_i \rightarrow \boldsymbol{A}_i$, we get:

$$\sum_{d \in \boldsymbol{D}} \pi(d) \cdot u_1(\sigma_1(d_1), \ldots, \sigma_n(d_n)) \geq$$

$$\geq \sum_{d \in \boldsymbol{D}} \pi(d) \cdot u_1(\sigma_1(d_1), \ldots, \sigma_{i-1}(d_{i-1}), \boldsymbol{\sigma}_i'(d_i), \sigma_{i+1}(d_{i+1}), \ldots, \sigma_n(d_n))$$

Interpretation: Player ***i*** controls whether to play $\boldsymbol{\sigma}_i$ or $\boldsymbol{\sigma}_i'$, but has to choose before nature draws $d \in \boldsymbol{D}$ from $\boldsymbol{\pi}$. She knows $\boldsymbol{\sigma}_{-i}$ and $\boldsymbol{\pi}$.

[35] Scenariusz, który omawialiśmy na poprzednim slajdzie, wiąże się z czymś, co można ogólnie nazwać losowym zdarzeniem publicznym. Prowadzi ono do tego, że każdy z graczy otrzymuje pewien prywatny sygnał x. W naszym przykładzie była to albo reszka albo orzeł. Istnieje również pewien rozkład prawdopodobieństwa związany z szansami zaobserwowania każdego z tych sygnałów. W ogólności sygnały dla różnych graczy mogą być skorelowane, co oczywiście miało miejsce w przykładzie z rzucaniem tylko jedną monetą. Gracze muszą użyć pewnej indywidualnej funkcji sigma, która przekłada sygnały na akcje. Teraz oczekiwana użyteczność jest obliczana jako suma, ponad możliwymi realizacjami sygnałów dla wszystkich graczy, iloczynów prawdopodobieństwa każdej realizacji i użyteczności, którą gracz otrzyma, gdy dany profil akcji wynikający z tłumaczenia sygnałów zostanie zrealizowany. Ostatnie wprowadzone przez nas pojęcie nazywamy równowagą skorelowaną. Jest to krotka złożona ze zmiennej losowej odzwierciedlającej możliwe sygnały, łącznego rozkładu prawdopodobieństwa tych sygnałów oraz profilu funkcji, po jednej dla każdego gracza, przekładających sygnały na akcje spełniające następujący warunek. Dla każdego gracza jego oczekiwana użyteczność jest większa lub równa od użyteczności, którą uzyskałby jednostronnie zmieniając swoją funkcję wyboru przekładającą sygnały na akcje. Można powiedzieć, że każdy gracz kontroluje swoją funkcję wyboru, ale musi być ona wcześniej zdefiniowana tak, aby w momencie pojawienia się sygnału gracz wiedział, co ma zrobić.

Example: Approaching an Intersection

Oliwia and **Mateusz** reach an intersection in their cars and each of them has to decide whether to drive on (**D**) or stop (**S**)

O \ M	D	S
D	-10 \ -10	3 \ 0
S	0 \ 3	-2 \ -2

Nash equilibria:
- pure DS: utility = 3 & 0
- pure SD: utility = 0 & 3
- mixed ((1/3, 2/3), (1/3, 2/3)): EU = -4/3 & -4/3
  → *the only fair NE is pretty bad!*

Could instead use this "randomised device" to get CE:

- $\boldsymbol{D_i} = \{red, green\}$ for both players $\boldsymbol{i}$
- $\boldsymbol{\pi}(red, green) = \boldsymbol{\pi}(green, red) = 1/2$
  $\boldsymbol{\pi}(red, red) = \boldsymbol{\pi}(green, green) = 0$
- recommend to each player to use $\boldsymbol{\sigma_i} : \boldsymbol{a_i} \rightarrow \begin{cases} \textit{drive} \text{ (D) if } \boldsymbol{x_i} = \textit{green} \\ \textit{stop} \text{ (S) if } \boldsymbol{x_i} = \textit{red} \end{cases}$
- *expected utility* = 0·-10 + 1/2·0 + 1/2·3 + 0·-2 = 3/2 for **Oliwia**
  0·-10 + 1/2·3 + 1/2·0 + 0·-2 = 3/2 for **Mateusz**

[36] Aby zademonstrować tę ideę, rozważmy ostatni na dziś przykład. Wyobraźmy sobie, że Oliwia i Mateusz dojeżdżają swoimi samochodami do skrzyżowania i muszą zdecydować, czy jechać dalej D, czy zatrzymać się S. Macierz wypłat jest dość intuicyjna. Jeśli oboje pojadą, to skończy się to źle. Jeśli się zatrzymają, to skończy się nieco lepiej, ale też nie najlepiej. Ten, kto jedzie, a drugi gracz się zatrzymuje, otrzymuje najlepszą wypłatę 3. Jednak dla osoby, która się zatrzyma, też jest całkiem dobrze, bo dostałaby 0, co jest lepsze zarówno od -2, jak i -10. W tej grze znów istnieją trzy równowagi Nasha. Dwie czyste odpowiadają jeździe dalej przez jednego gracza i zatrzymaniu się przez drugiego. W tym przypadku ten, kto jedzie dalej dostaje 3, a ten kto się zatrzymuje dostaje 0. Jest też jedna mieszana równowaga Nasha z prawdopodobieństwem jednej trzeciej dla jazdy dalej. Prowadzi ona jednak do dość niskiej oczekiwanej użyteczności -4/3. Wyobraźmy sobie teraz, że ktoś wymyślił urządzenie do przekazywania sygnałów. Ma ono postać dwóch świateł drogowych, z których każde daje zielone lub czerwone światło widoczne dla jednego gracza. Jednak prawdopodobieństwa tych świateł są skorelowane. Nie mogą one być jednocześnie czerwone lub zielone. Z kolei prawdopodobieństwa czerwonego dla jednego gracza i zielonego dla drugiego są równe połowie. Znamy więc możliwe sygnały i ich łączny rozkład prawdopodobieństwa. Aby to wykorzystać, gracze powinni przyjąć następującą funkcję wyboru przekładającą sygnały na akcje. Jeśli ich prywatne światło jest zielone, powinni jechać, a jeśli ich prywatne światło jest czerwone, powinni się zatrzymać. Prawdopodobnie nawet nie zdawaliście sobie sprawy, że każdego dnia bierzecie udział w takiej grze. Kiedy gracze przyjmują taką strategię, mogą skończyć tylko na scenariuszu, w którym jeden z nich jedzie dalej, a drugi się zatrzymuje. To z kolei zmniejsza do zera prawdopodobieństwo bardzo niekorzystnych zdarzeń wiążących się z ujemnymi użytecznościami. W efekcie oczekiwane użyteczności zarówno Oliwii, jak i Mateusza wynoszą 1.5. Razem omawiane sygnały, ich łączny rozkład prawdopodobieństwa oraz funkcje wyboru tworzą skorelowaną równowagę. Po prostu żaden z graczy nie ma motywacji do zmiany swojej funkcji wyboru, ponieważ nie opłacałoby mu się to.

Correlated Equilibria and Nash Equilibria

Theorem (Aumann, 1974) For **every Nash equilibrium, there exists a correlated equilibrium** inducing the same distribution over outcomes

Corollary Every normal-form game has a correlated equilibrium

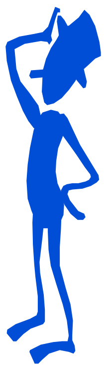
R.J. Aumann. Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1(1):67-96, 1974

Proof: Let $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ be an arbitrary Nash equilibrium

Define a tuple $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}>$ as follows:

- let domain of each $\boldsymbol{x}_i$ be $\boldsymbol{D}_i := \boldsymbol{A}_i$
- fix $\boldsymbol{\pi}$ so that $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{a}) = \prod_{i \in N} s_i(a_i)$
- let each $\boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_i$ be the identity function (***i*** accepts recommendation)

Then $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}>$ is the kind of correlated equilibrium we want



[37] Twierdzenie sformułowane przez Roberta Aumanna w 1974 roku mówi, że dla każdej równowagi Nasha istnieje równowaga skorelowana wywołująca taki sam rozkład wyników. To z kolei oznacza, że każda gra w postaci normalnej ma równowagę skorelowaną. Dowód jest prosty. Zaczynając od profilu mieszanego, który jest dowolną równowagą Nasha, musimy odpowiednio zdefiniować sygnały, łączny rozkład prawdopodobieństwa i funkcję wyboru. Dziedziną prywatnego sygnału dla każdego gracza jest zbiór jego akcji. To znaczy, że każdemu graczowi będą pokazywane akcje, a nie jakieś światła, orzeł lub reszka. Łączny rozkład prawdopodobieństwa musi przypisać każdemu profilowi akcji iloczyn prawdopodobieństw związanych z każdą akcją w równowadze, z której startowaliśmy. Wreszcie, funkcja wyboru powinna być funkcją tożsamościową, tak aby każdy gracz po prostu przyjął rekomendację w postaci akcji, która jest mu pokazywana jako prywatny sygnał. Taka krotka spełnia warunek równowagi skorelowanej.

Summary

We have reviewed several **solution concepts** for normal-form games

- equilibrium in dominant strategies: great if it exists
- **Nash's Theorem**: every normal-form game has a (mixed) Nash equilibrium
- correlated equilibrium: accept external advice
- IESDS: iterated elimination of strictly dominated strategies

Inclusions between sets of strategy profiles *that are solutions for a given game according to certain solution concepts*

$$\underbrace{\text{Dom} \subseteq \text{PureNash}}_{\textit{might be empty}} \subseteq \underbrace{\text{Nash} \subseteq \text{CorrEq} \subseteq \text{IESD}}_{\textit{always non-empty}}$$

[38] Ten wykład był poświęcony przeglądowi podstawowych pojęć dotyczących rozwiązań dla gier strategicznych w postaci normalnej. Potraficie już interpretować równowagę strategii dominujących. Jest ona świetna, gdy istnieje, ale rzadko to się zdarza. Znacie twierdzenie Nasha, które mówi, że każda gra w postaci normalnej ma mieszaną równowagę Nasha. Potraficie też rozróżnić równowagę czystą i mieszaną. Zapoznaliście się z pojęciem równowagi skorelowanej, która polega na podążaniu za jakąś zewnętrzną radą i przekładaniu jej na akcje. Wreszcie wiecie, jak przeprowadzić iteracyjną eliminację ściśle zdominowanych strategii, aby uniknąć robienia tego, co jest zdecydowanie złe. Istnieje relacja zawierania pomiędzy zbiorami profili strategii, które są rozwiązaniami dla danej gry według podanych koncepcji rozwiązań. Wynika z niej, że równowaga strategii dominujących jest najbardziej restrykcyjna, a gra zredukowana uzyskana po iteracyjnej eliminacji strategii ściśle zdominowanych jest najmniej restrykcyjna. Ponadto wiemy, że zarówno równowaga strategii dominujących, jak i czysta równowaga Nasha mogą być puste. Natomiast pozostałe trzy koncepcje rozwiązań zawsze istnieją i można je znaleźć dla gry strategicznej w postaci normalnej.