

Multiple criteria ranking with the ELECTRE III / IV method

Miłosz Kadziński

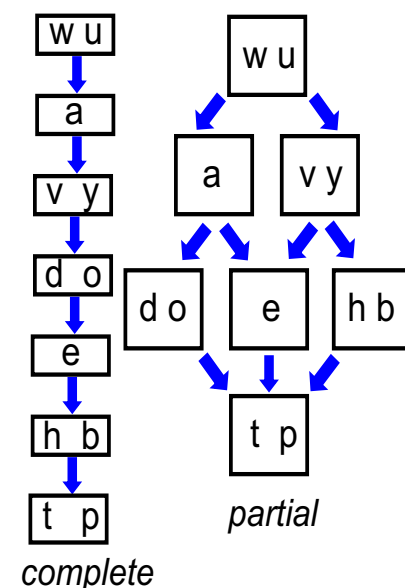
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology, Poland

[1] Wykład będzie poświęcony metodom wielokryterialnego porządkowania z wykorzystaniem relacji przewyższania. Na jednej z poprzednich jednostek poznaliście rodzinę metod PROMETHEE, która służy do realizacji tego samego celu. Niektórzy z Was znają podejścia z rodziny ELECTRE, w szczególności ELECTRE I wspomagającą rozwiązanie problemów wielokryterialnego wyboru oraz ELECTRE TRI, która mierzy się z zadaniem klasyfikacji porządkowej. Ta wiedza bardzo przyda się na dzisiejszym wykładzie, ponieważ metody, które omówimy, ELECTRE III oraz IV, opierają się na podobnych założeniach. Ta pierwsza eksploatuje rozmytą relację przewyższania w postaci macierzy wiarygodności, a ta druga jest jej uogólnieniem na przypadek, w którym decydent nie jest w stanie podać wag kryteriów.

Multiple Criteria Ranking

How to order alternatives from the best to the worst?

ranking



- **Ranking** consists in imposing a preference relation on the set of alternatives
- The desired type of order in the set of alternatives can be **complete** or **partial**
- Using incomparability relation allows deriving partial order of alternatives
- **Partial** order has the advantage of highlighting alternatives that are considerably dissimilar
- The **cardinal** ranking is based on scores
- The **ordinal** ranking is based on binary relations (only the order/ranks of alternatives is meaningful)
- **Choice** refers to the selection of the subset of the best alternative(s)

[2] Zmierzymy się z problemami porządkowania. Celem będzie więc narzucenie na zbiór wariantów relacji preferencji. Pokażemy procedury do konstrukcji rankingów zupełnego, w którym wszystkie warianty są porównywalne oraz częściowego, który dopuszcza nieporównywalność. Ta ostatnia jest przydatna w scenariuszu, w których chcielibyśmy odzwierciedlić fakt, że porównanie niektórych wariantów prowadzi do tak skrajnych wyników, że nie można stwierdzić ani że jeden z nich jest lepszy ani że są ze sobą nierozróżnialne. Większość metod, które poznaliście konstruowała ranking, przypisując wariantom pewną wartość, użyteczność lub globalny score. Dziś skupimy się na rankingach porządkowych, w których interpretowalne będą tylko relacje dla par wariantów lub rangi im przypisane. Wciąż na podstawie takiego rankingów możliwa będzie identyfikacja podzbioru najbardziej preferowanych wariantów, a co za tym idzie przedstawione metody mogą być także wykorzystywane w kontekście problematyki wyboru.

Our Illustrative Study

INPUT DATA

- finite set of alternatives $A=\{a, b, c, \dots, m\}$
- consistent family of criteria $G=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

Alt.	g_1	...	g_n
a	$g_1(a)$		$g_n(a)$
b	$g_1(b)$		$g_n(b)$
c	$g_1(c)$		$g_n(c)$
...
m	$g_1(m)$		$g_n(m)$

Alt.	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$	$g_3 \downarrow$
ITA	90	4	600
BEL	58	0	200
GER	66	7	400
AUT	74	8	800
FRA	98	6	800

AIM

Build an additional electric plant in Europe

ALTERNATIVES AND CRITERIA

- Five possible locations (countries) evaluated in terms of 3 criteria
- g_1 (gain) – Power (in Megawatt)
- g_2 (gain) – Safety level (0-10 scale)
- g_3 (cost) – Construction cost (in million USD)

For illustrative purposes, we simplify the problem by taking into account only three criteria. Other relevant criteria include: manpower for running the plant, annual maintenance cost, or ecology (number of villages to evacuate).

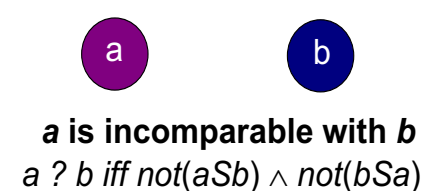
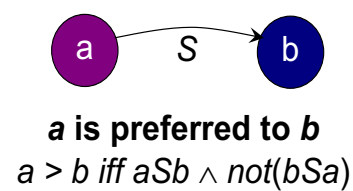
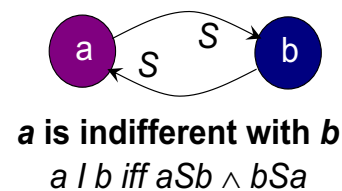
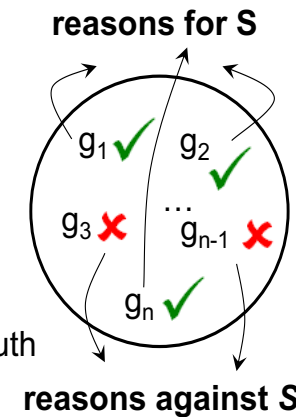


[3] Problem, który wykorzystamy do zilustrowania sposobu działania metod z rodziny ELECTRE dotyczy uszeregowania krajów pod względem ich adekwatności jako miejsca dla budowy elektrowni. Jest to więc ten sam scenariusz, jaki rozważyliśmy na wykładzie poświęconym PROMETHEE. Mamy trzy kryteria: moc, która ma być maksymalizowana, poziom bezpieczeństwa typu zysk oraz koszt budowy, który ma być minimalizowany. Ze względu na skomplikowanie metod, ograniczyłem jednak zbiór wariantów do pięciu: Włoch, Belgii, Niemiec, Austrii i Francji. Francja osiąga najlepszą ocenę na kryterium pierwszym, średnią ocenę na kryterium drugim oraz najgorszą ocenę na kryterium trzecim. Z kolei Belgia jest najgorsza pod względem mocy i bezpieczeństwa, ale najlepsza dla kosztu. Celem jest konstrukcja rankingu, być może częściowego, tych pięciu państw.

Outranking Relation

- The alternatives are compared by means of **outranking relation S**
- Outranking relation S groups three basic preference relations of indifference I , weak preference Q , and strict preference P :

$$S = \{I, Q, P\}$$
- aSb means " **a is at least as good as b** "
- S is established by verifying the reasons for and against its truth
- S is reflexive and non-transitive
- S can be **crisp** (binary; 0 (false) or 1 (true)) or **valued** (fuzzy; on a scale from 0 to 1)
- Focus on **valued outranking relation**, but for simplicity, we start with the crisp one



[4] Dla realizacji tego celu wykorzystamy model preferencji w postaci relacji przewyższania. Będzie ona weryfikowana dla wszystkich par wariantów. Na poziomie intuicyjnym, przewyższać oznacza być co najmniej tak samo dobrym. Stąd relacja przewyższania grupuje trzy inne relacje: nierozróżnialności, słabej i silnej preferencji. Przewyższanie jest ustalane poprzez weryfikację przesłanek za i przeciw jego prawdziwości, podobnie jak w przypadku procedur głosowania. Model ten jest ceniony we wspomaganiu decyzji, ponieważ opiera się na stosunkowo słabych, ale bardzo realistycznych założeniach. W szczególności relacja ta jest zwrotna, niezupełna i nieprzechodnia. W przypadkach, gdy relacja ma charakter binarny, gdy sprawdzamy jej prawdziwość dla par wariantów (a,b) i (b,a) , możemy powiedzieć coś więcej o wynikach ich porównania. W szczególności, gdy a przewyższa b , ale b nie przewyższa a , wnioskujemy, że a jest preferowane nad b . Jeśli relacja przewyższania jest wzajemna, to takie warianty uznaje się za nierozróżnialne; natomiast w przypadku, gdy relacja nie zachodzi w żadnym kierunku, są one nieporównywalne. Dziś skupimy się na relacji rozmytej, wartościowanej, która może przyjąć dowolną wartość pomiędzy 0 i 1.

ELECTRE III – Simplified Principle

Assume a **crisp relation S**

S	ITA	BEL	GER	AUT	FRA
ITA	1	0	1	0	0
BEL	0	1	0	0	1
GER	1	1	1	0	0
AUT	0	0	0	1	1
FRA	1	0	1	0	1

Construct **two complete preorders** (descending and ascending) using the distillation procedure

- In the **descending distillation**, one orders the alternatives from the best to the worst
- In the **ascending distillation**, one orders the alternatives from the worst to the best



$s(a) = |\{b \in A \setminus \{a\} : aSb\}|$ = the number of alternatives outranked by a

$w(a) = |\{b \in A \setminus \{a\} : bSa\}|$ = the number of alternatives that outrank a

quality $q(a) = \text{strength } s(a) - \text{weakness } w(a)$

S	s	w	q
ITA	1	2	-1
BEL	1	1	0
GER	2	2	0
AUT	1	0	1
FRA	2	2	0

- Once some alternative is added to the preorder, it is eliminated from further consideration, and the same procedure is applied to the remaining alternatives
- In the case of a tie, the internal distillation is performed using the same procedure though limited only to a subset of tied alternatives (with the same quality)

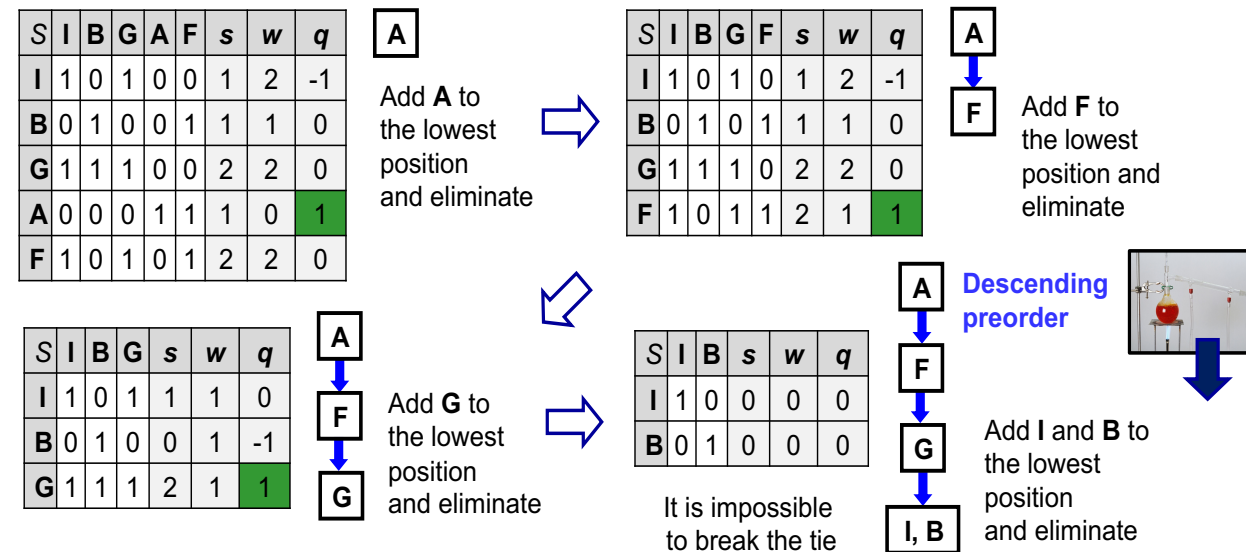
[5] Procedura porządkowania, którą omówimy jest prawdopodobnie najtrudniejszym do zrozumienia algorytmem na tym przedmiocie. Dlatego zanim dojdziemy do jej właściwej postaci, chcę przedstawić jej ogólną ideę, która odnosi się nie do rozmytej relacji przewyższania, a do relacji binarnej, która może przyjmować tylko wartość 0 w przypadku fałszu lub 1, gdy jest prawdziwa. Przykład takiej relacji znajduje się w lewym górnym rogu slajdu. Podstawowy pomysł metod ELECTRE III i IV zakłada konstrukcję dwóch preporządków zupełnych z wykorzystaniem procedur destylacji. Jeden z nich, tzw. porządek zstępujący, jest konstruowany iteracyjnie od najlepszego wariantu do najgorszego, a więc w duchu podejścia top-down. Drugi, tzw. porządek wstępujący, jest konstruowany iteracyjnie od wariantu najgorszego do najlepszego, a więc w myśl zasady bottom-up. Aby określić, który wariant jest najlepszy lub najgorszy na każdym etapie procedury obliczane są siły, słabości oraz jakości wszystkich wariantów. Dla relacji binarnej siła jest zdefiniowana jako liczba innych wariantów przewyższanych przez dany wariant. Przykładowo, siła Włoch to 1, bo przewyższają tylko Belgię. Z kolei słabość równa się liczbie innych wariantów, które przewyższają dany wariant. Słabość Włoch to 2, bo przewyższają je Niemcy i Francja. Wreszcie jakość to różnica siły i słabości. Dla Włoch jest więc to -1. I teraz zależnie od typu destylacji, zstępującej lub wstępującej, identyfikujemy wariant najlepszy lub najgorszy. Dodajemy go do rankingu na górze lub dole konstruowanego porządku, eliminujemy ze zbioru i powtarzamy procedurę iteracyjnie aż rozważymy wszystkie warianty. W przypadku remisu staramy się go rozstrzygnąć, zapuszczając procedurę destylacji tylko dla podzbioru remisujących wariantów, a więc tych, które mają taką samą jakość.

Descending Distillation for Crisp Outranking

Compute the quality of each alternative: $q(a) = s(a) - w(a) = |b \in A \setminus \{a\} : aSb| - |b \in A \setminus \{a\} : bSa|$

- If the alternative with the **greatest quality** is unique, add it to the **currently lowest possible position** in the descending preorder and eliminate from further consideration
- In the case of a tie, try to break it by running the **internal distillation** (embed until it is possible)

Continue until all alternatives are added to the **descending order** (from the best to the worst)



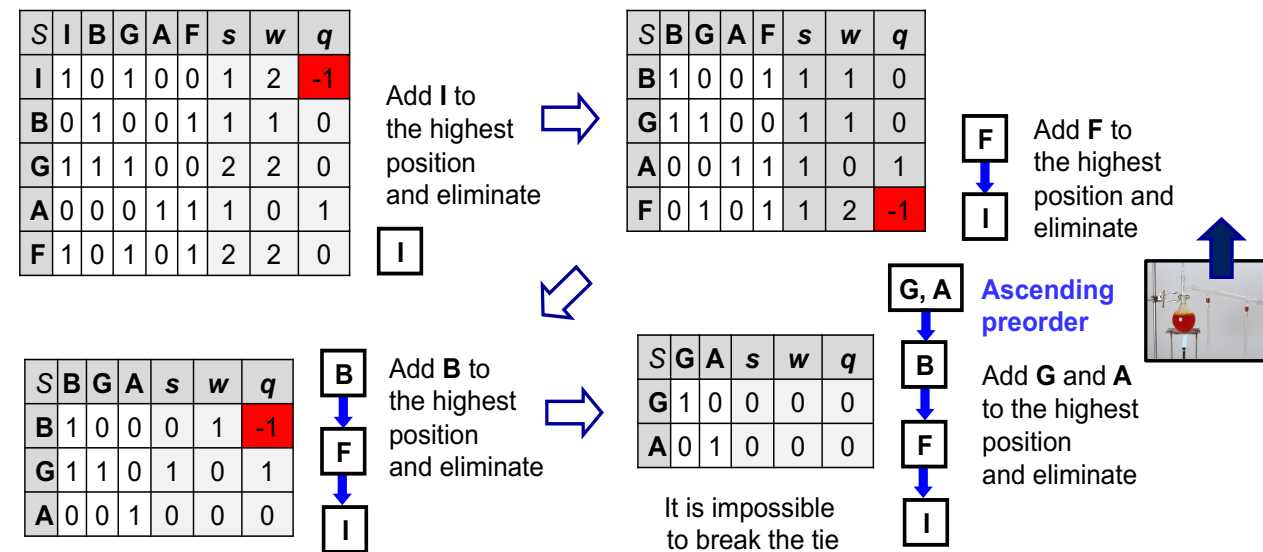
[6] Skupmy się najpierw na procedurze destylacji zstępującej. W każdym kroku identyfikujemy najlepszy wariant i dodajemy go na najniższej pozycji w konstruowanym rankingu, co oznacza że będzie on w nim wyżej od wszystkich wariantów jeszcze niedodanych. W pierwszej iteracji najlepsza jest Austria. W drugiej, po wyeliminowaniu Austrii, najlepsza okazuje się Francja. Dodajemy ją więc tuż poniżej Austrii. W trzeciej iteracji najwyższą jakość mają Niemcy. Zwróćcie uwagę, że operujemy już na bardzo ograniczonej macierzy przewyższania. Wreszcie gdy zostaną tylko Włochy i Belgia, ich jakości są zerowe i takie same. Gdy spróbujemy ten remis rozstrzygnąć, okaże się, że nie jest to możliwe. Musimy więc dodać te dwa warianty na tej samej pozycji. Całościowo będzie to najgorsza pozycja w rankingu.

Ascending Distillation for Crisp Outranking

Compute the quality of each alternative: $q(a) = s(a) - w(a) = |b \in A \setminus \{a\} : aSb| - |b \in A \setminus \{a\} : bSa|$

- If the alternative with **the least quality** is unique, add it to the **currently highest possible position** in the ascending preorder and eliminate from further consideration
- In the case of a tie, try to break it by running the **internal distillation** (embed until it is possible)

Continue until all alternatives are added to the **ascending order** (from the worst to the best)



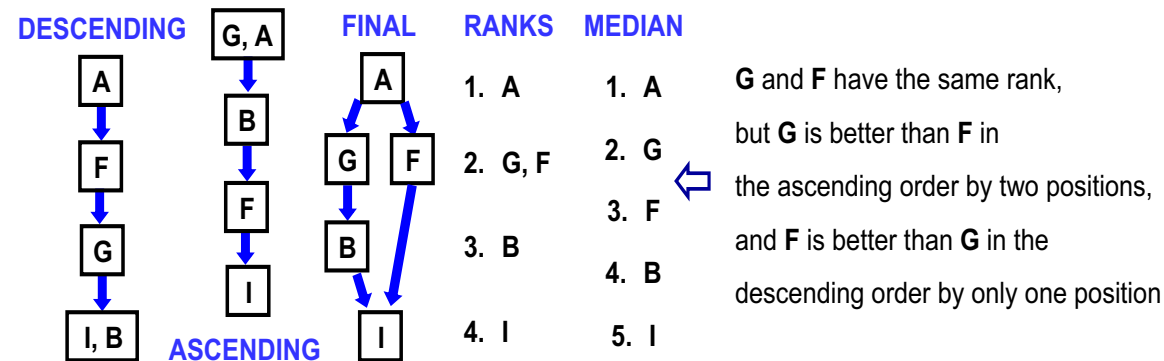
[7] W destylacji wstępującej w każdym kroku identyfikujemy najgorszy wariant, z najmniejszą jakością. Dodajemy go na najwyższej pozycji w konstruowanym rankingu, co oznacza że będzie on w nim niżej od wszystkich wariantów jeszcze niedodanych. W pierwszej iteracji są to Włochy; w drugiej, po wyeliminowaniu Włoch, najgorsza okazuje się Francja. Dodajemy ją więc tuż powyżej Włoch. W trzeciej iteracji najgorsza jest Belgia, a w czwartej ponownie mamy remis, tym razem między Niemcami i Austrią. Nie jesteśmy w stanie tego remisu rozstrzygnąć, więc dodajemy Niemcy i Austrię na samym szczycie rankingu. Uzyskaliśmy więc dwa porządki oparte na różnych zasadach. Jak zagregować je do wspólnego wyniku?

The **final partial preorder** of alternatives produced by the ELECTRE III method is obtained as the “intersection” of two complete – descending and ascending – preorders:

- a is preferred to b (aPb) if a is not worse than b in both distillations and better in at least one dist.
- a and b are indifferent (aIb), if a and b are indifferent in both distillations
- a and b are incomparable (aRb) if a is better than b in one distillation and worse in the other one

Rank in the final preorder is determined by the length of the longest path from the alternative to some top-ranked alternative

The **median preorder** is determined by the ranks with ties broken by the difference between ranks in the descending and ascending preorders



[8] W metodzie ELECTRE III zwracany jest zbiór wyników. Najważniejszym jest tzw. ranking końcowy. Powstaje on z przecięcia preporządków zstępującego i wstępującego. Mogą w nim wystąpić trzy relacje. Preferencja zachodzi gdy w jednym z preporządków wejściowych wariant jest lepszy niż inny, a w drugim jest co najmniej tak samo dobry. Taka sytuacja zachodzi choćby dla Niemiec i Austrii. Nierozróżnialność zachodzi, gdy dwa warianty są nierozróżnialne w obydwu rankingach wejściowych. Dla naszego przykładu nie ma to miejsca dla żadnej pary, bo choć są warianty nierozróżnialne w jednym z porządków, to w drugim są już skojarzone relacją preferencji. Wreszcie nieporównywalność zachodzi gdy w jednym porządku lepszy jest jeden wariant, a w drugim lepszy okazuje się ten inny. Taką sytuację obserwujemy dla par (Niemcy, Francja) i (Belgia, Francja). Powoduje ona rozgałęzienie w rankingu końcowym. Ranking ten jest bazą dla obliczenia tzw. rang wariantów. Jest to długość najdłuższej ścieżki danego wariantu do jakiegokolwiek wariantu znajdującego się na czole rankingu. W naszym przypadku na czole jest tylko Austria. Sprawa jest więc prosta; ranga Austrii to 1, dla Niemiec i Francji to 2, dla Belgii to 3, a dla Włoch wybieramy tę dłuższą ścieżkę, a więc ich ranga to 4. Rangi mogą prowadzić do nierozróżnialności niektórych par wariantów. Próba rozstrzygnięcia tego remisu następuje w porządku medianowym. Respektuje on porządek narzucony przez rangi, ale porównujemy warianty, dla których są one takie same. W szczególności, porównuje się różnice w pozycjach w porządkach zstępującym i wstępującym. Jeśli jest ona korzystna dla jakiegoś wariantu, to przypisujemy mu wyższą pozycję. Tak jest dla Niemiec w porównaniu z Francją, bo Niemcy są o 2 pozycje lepsze w porządku wstępującym, a tylko o 1 pozycję gorsze w porządku zstępującym. Reszta pozostaje bez zmian. Pamiętajmy jednak, że procedury destylacji, które omówiliśmy eksploatowały binarną relację przewyższania. A my chcemy dziś operować na relacji rozmytej, wartościowanej. Musimy więc nauczyć się ją konstruować.

- **EL**imination **Et** **Choix** Traduisant la **Realite**
(*Elimination and Choice Expressing the Reality*)
- **Choice**: ELECTRE I, Iv, Is, ELECTRE^{GKMS}
- **Ranking**: ELECTRE II, III, and IV
- **Sorting**: ELECTRE TRI-B, TRI-C, TRI-rC, TRI-nC, TRI-nB
- **Our focus today**



Bernard Roy

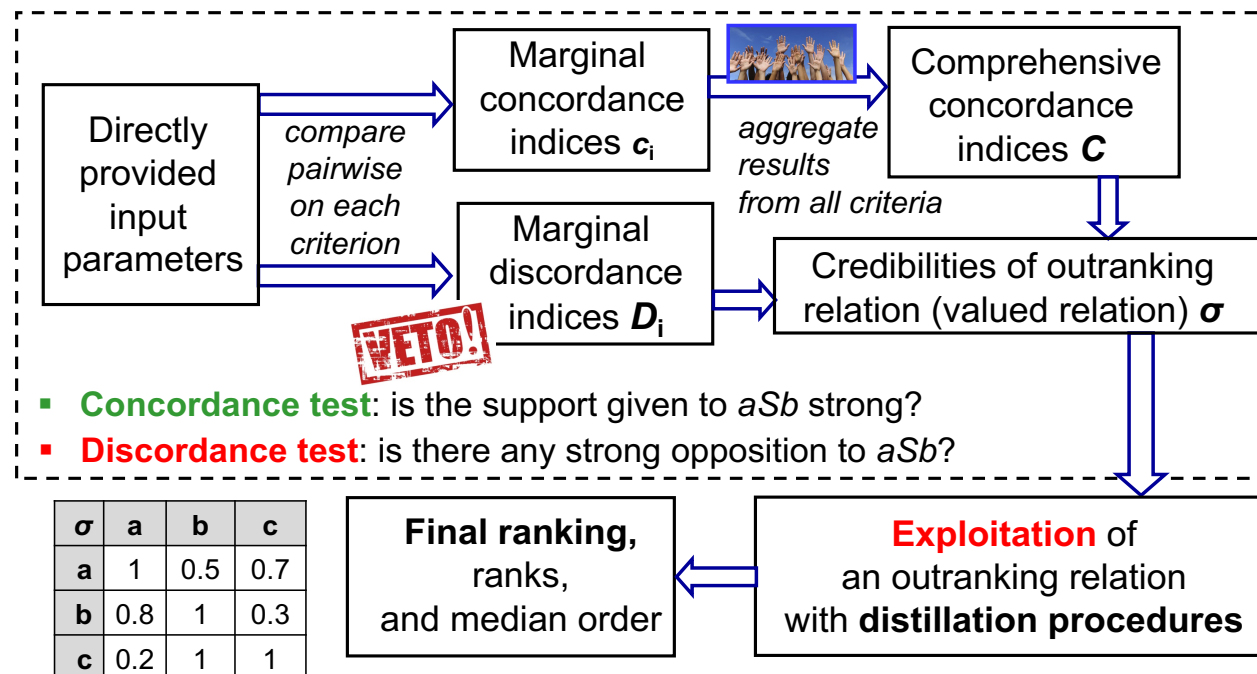
When to use ELECTRE methods?

- Applicable with at least 3 and **preferably less than a dozen or so criteria**
- Handling qualitative performance scale for ordinal criteria
- Dealing with **heterogenous** scales without the need of recoding
- **Not allowing for compensation** between criteria
- Accounting for **imperfect knowledge** and arbitrariness when building criteria
- Implementing intuitive **analogy to voting** procedures
- Ability to represent weak preference (on a per-criterion level) and **incomparability** (on a comprehensive level)

[9] Metody, które omówimy, należą do rodziny ELECTRE, zapoczątkowanej przez Bernarda Roy w latach 60. ubiegłego wieku. Rodzina ta składa się z podejść dedykowanych dla każdego typu problemów. Niektórzy z Was znają już ELECTRE I dla problemów wyboru. Być może pamiętacie też ELECTRE TRI, którą w fachowej literaturze nazywa się ELECTRE TRI-B. Mierzy się ona z problemami sortowania. Nie znacie jednak żadnego podejścia, które pomysły typowe dla ELECTRE, wykorzystywałoby dla potrzeb konstrukcji rankingu. Dziś przedstawimy więc ELECTRE III oraz jej wariant ELECTRE IV. Dla przypomnienia wspomnę tylko, że metody ELECTRE są najbardziej przydatne, gdy mamy do czynienia z problemami obejmującymi od trzech do kilkunastu kryteriów. Dobrze sprawdzają się, gdy przynajmniej jedno kryterium jest porządkowe, a rodzina obejmuje kryteria o bardzo zróżnicowanych skalach. Z operacyjnego punktu widzenia nie dopuszczają one kompensacji między kryteriami, więc strata na jednym z nich nie może być skompensowana zyskiem na innym. Wiążą się też z pewnymi wbudowanymi mechanizmami radzenia sobie z niedoskonałością ocen wariantów na poszczególnych kryteriach.

ELECTRE III – Main Steps

Construction of an outranking relation for all pairs of alternatives via **concordance** and **discordance** tests



[10] Wszystkie metody ELECTRE składają się z dwóch głównych etapów poświęconych konstrukcji i eksploatacji relacji przewyższania. Metoda ELECTRE III weryfikuje stopień relacji przewyższania dla wszystkich par wariantów. W tym celu przeprowadza testy zgodności i niezgodności. Pierwszy z nich polega na obliczeniu częściowych współczynników zgodności, które wskazują na stopień, w jakim poszczególne kryteria wspierają przewyższanie. Wyniki z poszczególnych kryteriów są agregowane w całkowite (globalne) współczynniki zgodności. W ramach testu niezgodności obliczane są częściowe współczynniki niezgodności, które oddają poziom sprzeciwu danego kryterium wobec hipotezy o przewyższaniu. Wyniki testów zgodności i niezgodności agregujemy w jedną wartość, nazywaną wiarygodnością relacji przewyższania. Można ją interpretować jako relację rozmytą, wartościowaną. To właśnie macierz wiarygodności stanowi bazę dla drugiego etapu. W nim eksploatacja następuje z wykorzystaniem procedur destylacji. A ich wyniki są przekształcane do rankingu końcowego, rang i porządku medianowego. Skupimy się teraz na konstrukcji rozmytej relacji przewyższania. Kroki będą tu bardzo podobne jak w metodzie ELECTRE TRI-B.

Indifference and Preference Thresholds

- To take into account the imperfect character of performances, ELECTRE methods make use of **discrimination** (indifference and preference) **thresholds**
 - This leads to a **pseudo-criterion** model on each criterion
- Indifference threshold q_i** is the maximal difference in performances on g_i , by which two alternatives are judged indifferent
- Preference threshold p_i** is the minimal difference in performances on g_i , which justifies a strict preference of one alternative over another on g_i
- The performance difference between q_i and p_i can be interpreted as a hesitation (weak preference) between opting for a strict preference or an indifference between the two alternatives
- In ELECTRE III, the thresholds are defined via affine functions: $q_i(a) = \alpha_i^q \times g_i(a) + \beta_i^q$ and $p_i(a) = \alpha_i^p \times g_i(a) + \beta_i^p$, where $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ (when $\alpha_i = 0$, the thresholds are constant)

Notation: q_i and p_i
Constraint: $q_i(a) \leq p_i(a)$

Threshold	g_1	g_2	g_3
indifference q_i	4	1	100
preference p_i	12	2	200

Alt.	I	B	G	A	F
$g_1 \uparrow$	90	58	66	74	98

A ($g_1(A) = 74$) is **indifferent to alternatives a with $g_1(a)$ between 70 and 78**, **weakly preferred to G** ($g_1(G) = 66$), and **strictly preferred to B** ($g_1(B) = 58$)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[11] Zaczniemy od testu zgodności i ilościowego określenia stopnia, w jakim dane kryterium wspiera hipotezę, że jeden wariant jest co najmniej tak samo dobry jak inny. Na tym etapie ELECTRE III uwzględnia niedoskonały charakter ocen poprzez zastosowanie dwóch progów, które znacie z innych metod ELECTRE oraz PROMETHEE. Próg nierozróżnialności q jest maksymalną różnicą ocen, przy której dwa warianty są uważane za nierozróżnialne. Z kolei próg preferencji p to minimalna różnica ocen uzasadniająca silną preferencję jednego wariantu nad drugim. Pomiedzy tymi dwoma progami znajduje się strefa wahania, odpowiadająca słabej preferencji. Próg preferencji musi być co najmniej tak wysoki jak próg nierozróżnialności. Moje progi dla poszczególnych kryteriów można zobaczyć na slajdzie. Skupmy się na kryterium g_1 . Próg nierozróżnialności jest równy 4. Oznacza to, że wariant A, którego ocena wynosi 74 byłby nierozróżnialny z wszystkimi wariantami z ocenami między 70 i 78. Ponieważ próg preferencji jest ustawiony na 12, wariant A jest ściśle preferowany, na przykład nad wariant B, która ma niższą ocenę aż o 16 jednostek. Jeśli chodzi o wariant G, to jest on gorszy od A o 8. Jest to więcej niż próg nierozróżnialności oraz mniej niż próg preferencji, co oznacza, że A jest słabo preferowane nad G na kryterium g_1 . Podane przeze mnie progi mają wartości stałe, ale w ogólności mogą być one wyrażone funkcją liniową tak, by odzwierciedlić, że nierozróżnialność i preferencja oznaczają coś innego w różnych podzakresach skali ocen.

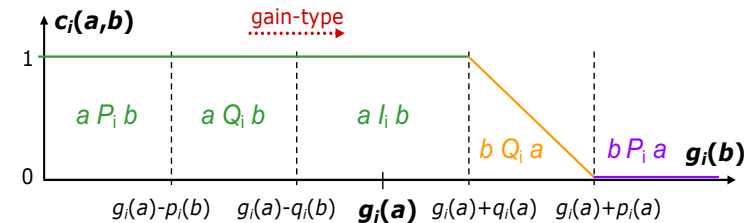
Marginal Concordance for Gain-type Criterion (1)

- Let us start with verifying for each criterion g_i a degree to which it supports the hypothesis that a outranks b ; thus, we consider pair (a,b)
 - The inverse pair (b,a) can be considered analogously
- The answer is quantified with a **marginal concordance index $c_i(a,b)$**

y-axis: value of $c_i(a,b)$
ranging from 0 to 1

- P_i – strong preference on g_i
- Q_i – weak preference on g_i
- I_i – indifference on g_i

aim: for different $g_i(b)$
and fixed $g_i(a)$, return $c_i(a,b)$



x-axis: performance of alternative a unchanged as well as decreased or increased by discrimination thresholds (the thresholds are computed for the worse alternative – b to the left from $g_i(a)$ and a to the right)

FOR GAIN-TYPE CRITERION:

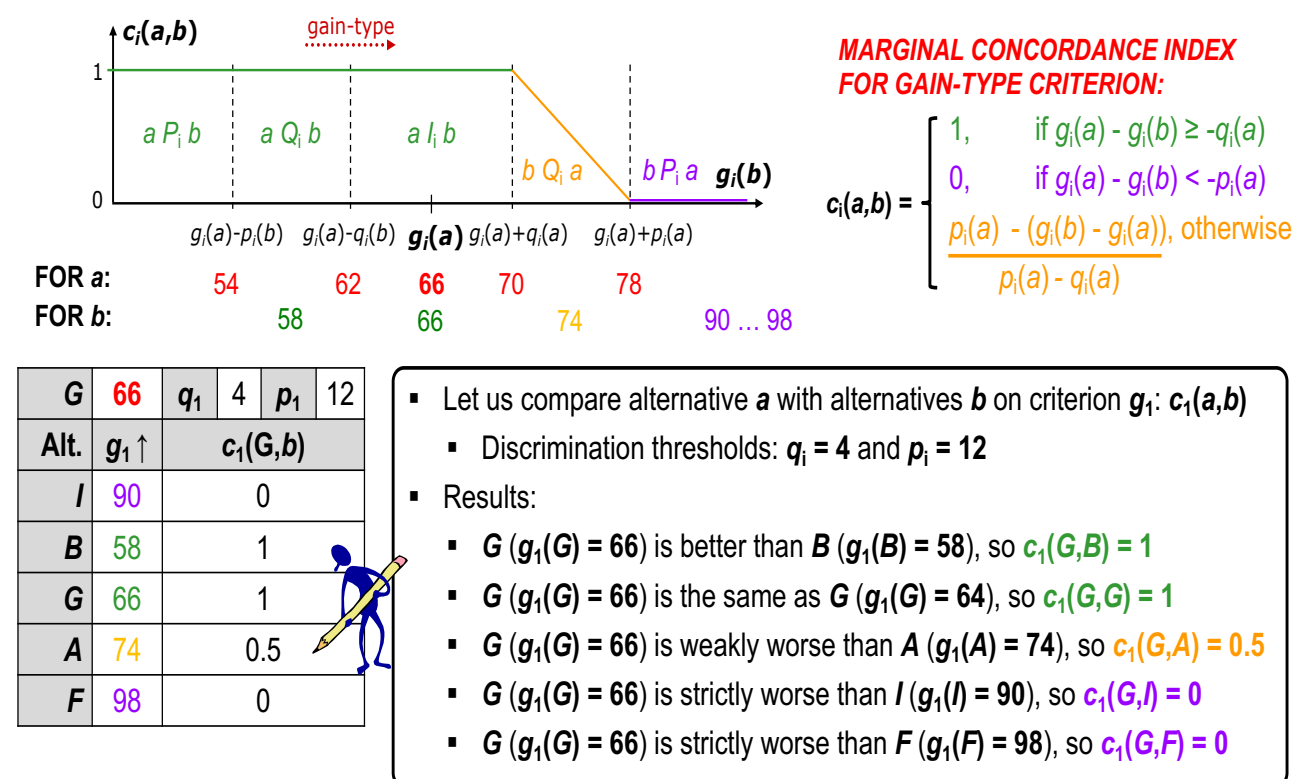
$$c_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \geq -q_i(a) \\ 0, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) < -p_i(a) \\ \frac{p_i(a) - (g_i(b) - g_i(a))}{p_i(a) - q_i(a)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

\leftarrow a is preferred to b or a is indifferent with b (it can be worse, but only by at most $q_i(a)$)
 \leftarrow b is strongly preferred to a , being better by more than $p_i(a)$
 \leftarrow b is weakly preferred to a , being better by more than $q_i(a)$, but not more than $p_i(a)$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[12] Przełożmy to rozumowanie na odpowiednie narzędzie, które pozwala obliczyć cząstkowe współczynniki zgodności na każdym kryterium. Najpierw skupimy się na kryterium typu zysk w kontekście pary wariantów (a,b) . Aby obliczyć stopień, w jakim dane kryterium wspiera to, że wariant a jest co najmniej tak dobry jak wariant b , odwołamy się do intuicyjnego wykresu. Na osi x ma on pięć punktów odpowiadających ocenie wariantu a , która jest niezmienna, jak również zmniejszona lub zwiększona przez progi nierozróżnialności i preferencji. Co istotne, gdy progi wyrażone są funkcją liniową, to liczy się je od wariantu gorszego. Po lewej stronie od oceny wariantu a , liczy się je więc od oceny wariantu b , a po prawej – od oceny wariantu a . Następnie, w zależności od tego, jak ocena wariantu b odnosi się do tych punktów, wyznaczymy zgodność cząstkową. Przyjmuje ona wartość pomiędzy 0 a 1. Intuicja podpowiada, że jeśli a jest silnie lub słabo preferowane nad b , lub jest nierozróżnialne bez względu na to, czy ma lepszą ocenę, dokładnie taką samą, czy zanedbywalnie gorszą, to współczynnik cząstkowej zgodności wynosi 1. Formalnie oznacza to, że jeśli różnica pomiędzy ocenami wariantów a i b jest nie mniejsza niż zanegowany próg nierozróżnialności, to mamy pełną zgodność. Przeciwnie, gdy b jest silnie preferowane nad a , co oznacza, że ocena a jest mniejsza od oceny b o co najmniej próg preferencji, wówczas kryterium nie jest zgodne z hipotezą, że a jest co najmniej tak samo dobre jak b , i przypisujemy 0 do zgodności cząstkowej. W końcu, jeżeli wariant b jest słabo preferowany nad wariant a , co ma miejsce, jeżeli ocena a jest gorsza o więcej niż próg nierozróżnialności, ale mniej niż próg preferencji, indeks przyjmuje wartość pomiędzy 0 a 1. Im bliżej ta różnica ocen jest do progu nierozróżnialności, tym bliższa cząstkowa zgodność jest 1. Ostatecznie, nawet jeśli ta funkcja wygląda na początku mało przyjaźnie, wartość zgodności jest łatwa do odczytania, gdy zrozumie się rolę progów nierozróżnialności i preferencji.

Marginal Concordance for Gain-type Criterion (2)



[13] Aby to rozumowanie uczynić jeszcze bardziej przejrzystym, rozważmy kryterium g_1 i za punkt odniesienia przyjmijmy wariant G z oceną 66. Próg nierozróżnialności jest ustawiony na 4, a próg preferencji jest równy 12. Chcemy obliczyć cząstkowe zgodności na g_1 dla wariantu G w porównaniu z każdym innym wariantem. W przypadku porównania G z B odpowiedź jest prosta. G ma lepszą oceną niż B, więc zgodność musi wynosić 1. Oczywiście to samo zachodzi dla porównania G z samym sobą. Dalej, G jest gorsze od A o 8. Jest to dokładnie w połowie między progiem nierozróżnialności i preferencji, a więc cząstkowa zgodność jest równa 0.5. Wreszcie G jest gorsze od I o 24, a od F aż o 32. Jest to strata o więcej niż próg preferencji, więc współczynnik zgodności jest tu równy 0.

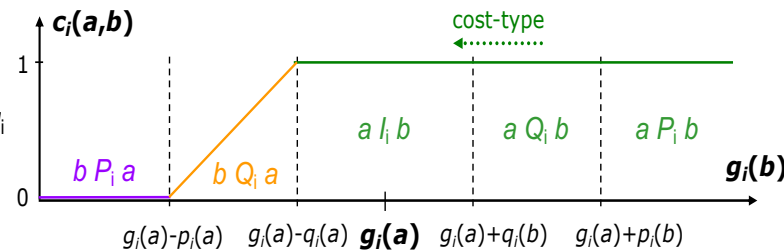
Marginal Concordance for Cost-type Criterion

- For cost-type criteria, we need to reason analogously
 - Bear in mind *lesser performances are more preferred*
 - For example, $c_i(a,b) = 1$ (i.e., g_i fully supports aSb), if a has lesser, the same, or negligibly greater performance than b on g_i

y-axis: value of $c_i(a,b)$

ranging from 0 to 1

- P_i – strong preference on g_i
- Q_i – weak preference on g_i
- I_i – indifference on g_i



aim: for different $g_i(b)$

and fixed $g_i(a)$, return $c_i(a,b)$

x-axis: performance of alternative a unchanged as well as decreased or increased by discrimination thresholds

FOR COST-TYPE CRITERION:

$$c_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \leq q_i(a) \\ 0, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) > p_i(a) \\ \frac{p_i(a) - (g_i(a) - g_i(b))}{p_i(a) - q_i(a)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

\leftarrow a is preferred to b or a is indifferent with b (it can be worse, but only by at most $q_i(a)$)
 \leftarrow b is strongly preferred to a , being better by more than $p_i(a)$
 \leftarrow b is weakly preferred to a , being better by more than $q_i(a)$, but not more than $p_i(a)$

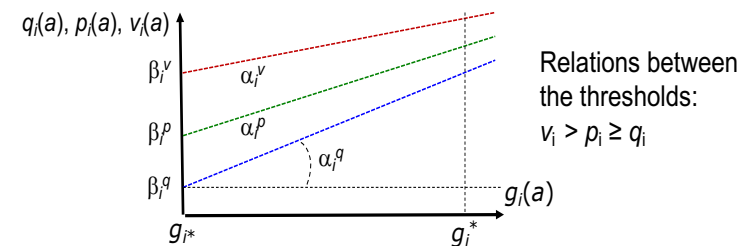
Navigation icons

[14] Gdy rozważymy kryterium typu koszt, rozumujemy analogicznie, pamiętając jedynie, że mniejsza ocena jest bardziej preferowana. Nadal, jeśli wariant a jest preferowany lub nierozróżnialny z wariantem b , zgodność cząstkowa jest równa 1. W tym przypadku oznaczałoby to, że a ma mniejszą, taką samą lub zanedbywalnie większą ocenę niż b . Jeśli b jest słabo preferowane nad a , to otrzymujemy wartość pomiędzy 0 a 1. Jeśli jednak b jest lepsze od a o co najmniej próg preferencji, to wsparcie udzielone stwierdzeniu, że a jest co najmniej tak dobre jak b , jest zerowe. W pewnym sensie wykres dla kryterium typu koszt jest lustrzanym odbiciem wykresu dla kryterium typu zysk.

Veto Threshold

- **Veto threshold v_i** is the minimal, absolutely critical difference in performances on g_i , which has an impact on a comprehensive comparison of a pair of objects, irrespective of the remaining criteria
- If a is worse than b on g_i by at least veto threshold v_i , then g_i **strongly disagrees** against aSb , and a cannot outrank b
 - Veto threshold is treated as an **inter-criteria parameter** (it is defined on a particular criterion, but its impact is more comprehensive and affects an entire comparison)
- Veto threshold is **usually used on the most important criteria** (when not specified, then $v_i^h = \infty$)
- In ELECTRE III, if a is worse than b on g_i by more than preference threshold p_i and less than veto threshold v_i , then g_i **weakly disagrees** with aSb , decreasing support to the assertion aSb
- In ELECTRE III, the veto thresholds are defined via affine functions: $q_i(a) = \alpha_i^v \times g_i(a) + \beta_i^v$

Threshold	g_1	g_2	g_3
indifference q_i	4	1	100
preference p_i	12	2	200
veto v_i	28	8	600



Alt.	I	B	G	A	F
$g_1 \uparrow$	90	58	66	74	98

for G ($g_1(G) = 66$), g_1 is **strongly discordant with outranking GSb** for $b=F$ ($g_1(F) = 98$), **weakly discordant for I** ($g_1(I) = 90$), and **not discordant for A** ($g_1(A) = 74$)

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[15] W ELECTRE III każde kryterium musi odpowiedzieć, w jakim stopniu popiera hipotezę o przewyższaniu, ale także w jakim stopniu sprzeciwia się tej hipotezie. W tym celu metoda uwzględnia trzeci próg, zwany progiem veta. Jest on zdefiniowany jako minimalna różnica ocen, która ma negatywny wpływ na całościowe porównanie pary wariantów. Jest to o tyle istotne, że jeśli jeden obiekt jest gorszy od drugiego o co najmniej próg veta, to nigdy nie powinien być całościowo uznany jako co najmniej tak samo dobry. Wartość progu veta musi być większa niż wartość progu preferencji w całym zakresie zmienności ocen. Ponownie, próg ten może być też wyrażony funkcją liniową. Ze względu na swoją wyjątkową rolę, próg veta jest traktowany jako parametr międzykryterialny i w praktyce można go określać tylko dla najważniejszych kryteriów. Dla naszego problemu zdefiniowałem go jednak dla wszystkich atrybutów. Skupmy się teraz na pierwszym kryterium, dla którego wartość veta ustalono na 28. Przyjmijmy za wyjściowy wariant G z oceną 66. Jest on gorszy o co najmniej próg veta od wariantu F. W tym wypadku kryterium g_1 silnie sprzeciwia się przewyższaniu. Metoda ELECTRE III dopuszcza również niezgodność częściową. Jeśli wariant jest gorszy od drugiego o więcej niż próg preferencji, ale mniej niż próg veta, to kryterium vetuje przewyższanie w sposób częściowy. Ma to miejsce np. dla porównania G z I, ponieważ G jest gorsze o 24. Logiczną konsekwencją testu zgodności jest to, że jeśli wariant jest lepszy, taki sam lub gorszy od drugiego, ale nie o więcej niż próg preferencji, to nie mamy niezgodności. Można to zaobserwować dla porównania G z A lub B.

Marginal Discordance for Gain-type Criterion (1)

- Let us start with verifying for each criterion g_i a degree to which it disagrees with the hypothesis that alternative a outranks altern. b ; thus, we consider pair (a,b)
 - The inverse pair (b,a) can be considered analogously
- The answer is quantified with **a marginal discordance index $D_i(a,b)$**
- Unlike in ELECTRE I, a marginal discordance index is fuzzy (between 0 and 1)

y-axis: value of $D_i(a,b)$
ranging from 0 to 1

aim: for different $g_i(b)$
and fixed $g_i(a)$, return $D_i(a,b)$

FOR GAIN-TYPE CRITERION:

$$D_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \leq -v_i(a) \\ 0, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \geq -p_i(a) \\ \frac{(g_i(b) - g_i(a)) - p_i(a)}{v_i(a) - p_i(a)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

\leftarrow *a is worse than b by at least $v_i(a)$*
 \leftarrow *a is at least as good as b or not worse than b by more than $p_i(a)$*
 \leftarrow *a is worse than b by more than $p_i(a)$, but less than $v_i(a)$*

- If $c_i(a,b) > 0$, then $D_i(a,b) = 0$ and if $D_i(a,b) > 0$, then $c_i(a,b) = 0$
 - A criterion cannot send contradicting signals
- Only one point for which $c_i(a,b) = 0$ and $D_i(a,b) = 0$ (a is worse than b by $p_i(a)$)

[16] Przełożenie tych rozważań na częściową niezgodność jest proste. Znow, rozważmy parę wariantów (a,b) oraz kryterium typu zys. Ponieważ dodaliśmy do rozważań próg veta, na osi x umieszczam dodatkowe punkty, w których ocena wariantu a jest zwiększana i zmniejszana o próg veta. Teraz mamy trzy scenariusze. Jeśli wariant a jest gorszy od wariantu b co najmniej o próg veto, częściowa niezgodność wynosi 1. Jeśli a jest co najmniej tak samo dobre jak b lub nie gorsze o więcej niż próg preferencji, niezgodność wynosi 0. Wreszcie, jeśli a jest gorsze od b o więcej niż próg preferencji, ale mniej niż próg veta, mamy niezgodność między 0 a 1; tym bliżej 1, im strata wariantu a jest bliższa progowi veta. Dla przejrzystości prezentacji zamieściłem wykres niezgodności wraz z funkcją zgodności. Intuicyjnie, jeżeli zgodność jest dodatnia, niezgodność jest równa zero; jeżeli niezgodność istnieje, nie może być żadnej zgodności. Po prostu, kryterium nie może wysyłać sprzecznych wiadomości. Istnieje jednak jeden punkt, w którym nie ma ani zgodności ani niezgodności. Odpowiada on scenariuszowi, w którym wariant a jest gorszy od wariantu b właśnie o próg preferencji.

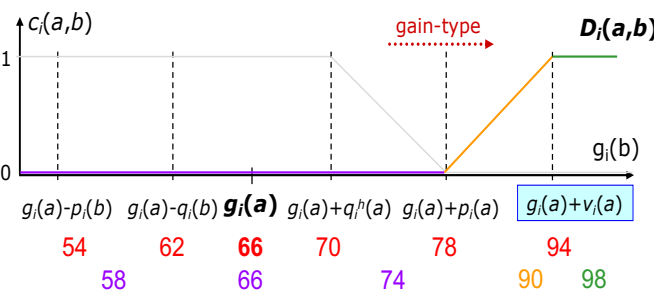
Marginal Discordance for Gain-type Criterion (2)

MARGINAL DISCORDANCE INDEX FOR GAIN-TYPE CRITERION:

$$D_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \leq -v_i(a) \\ 0, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \geq -p_i(a) \\ \frac{(g_i(b) - g_i(a)) - p_i(a)}{v_i(a) - p_i(a)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

G	66	p_1	12	v_1	28
Alt.	$g_1 \uparrow$	$D_1(G,b)$			
I	90	3/4			
B	58	0			
G	66	0			
A	74	0			
F	98	1			

FOR a:
FOR b:

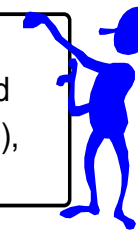


- Let us compare alternative **a** with alternatives **b** on criterion g_1 : $D_1(a,b)$
 - Thresholds: $q_i = 4$, $p_i = 12$ and $v_i = 28$
 - Results:
 - G** ($g_1(G) = 66$) is critically worse than **F** ($g_1(F) = 98$), so $D_1(G,F) = 1$
 - G** ($g_1(G) = 66$) is weakly crit. worse than **I** ($g_1(I) = 90$), so $D_1(G,I) = 3/4$
 - G** ($g_1(G) = 66$) is not critically worse than **A** ($g_1(A) = 74$), so $D_1(G,A) = 0$
 - G** ($g_1(G) = 66$) is not critically worse than **G** ($g_1(G) = 66$), so $D_1(G,G) = 0$
 - G** ($g_1(G) = 66$) is not critically worse than **B** ($g_1(B) = 58$), so $D_1(G,B) = 0$

[17] Aby utrwalić wiedzę o niezgodności, rozważmy kryterium g_1 i weźmy wariant G z jego oceną 66 jako punktem odniesienia. Próg preferencji ustawiamy na 12, a próg veta na 28. Chcemy obliczyć cząstkową niezgodność na g_1 dla wariantu G z porównaniu z wszystkimi pozostałymi wariantami. G ma gorszą, tutaj mniejszą, ocenę od F o co najmniej próg veta, więc niezgodność musi wynosić 1. Dalej, G jest gorsze od I o 24, czyli więcej niż próg preferencji, ale mniej niż próg veta. W rezultacie, cząstkowa niezgodność jest w przedziale od 0 do 1, a dokładnie 3/4. G jest gorsze od A o 8, ale to mniej niż próg preferencji, więc niezgodność jest zerowa. Także dla porównania G z samym sobą, jak i z gorszym od niego wariantem B, wartość cząstkowej niezgodności jest równa 0.

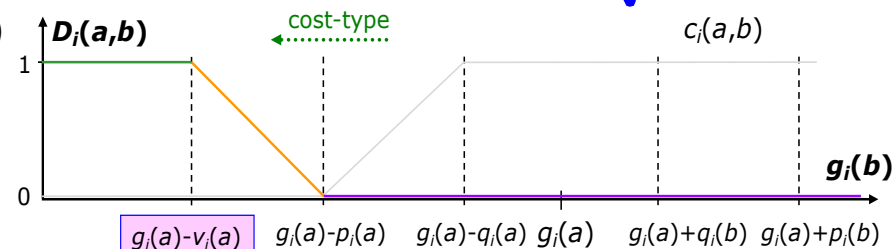
Marginal Discordance for Cost-type Criterion

- For cost-type criteria, we need to reason analogously
 - Bear in mind lesser performances are more preferred
- For example, $D_i(a,b) = 1$ (i.e., g_i fully disagrees with aSb), if a has performance greater than b by at least $v_i(a)$



y-axis: value of $D_i(a,b)$ ranging from 0 to 1

aim: for different $g_i(b)$ and fixed $g_i(a)$, return $D_i(a,b)$



x-axis: performance of alternative a unchanged as well as

FOR COST-TYPE CRITERION: decreased or increased by discrimination thresholds

$$D_i(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \geq v_i(a) \\ 0, & \text{if } g_i(a) - g_i(b) \leq p_i(a) \\ \frac{v_i(a) - (g_i(a) - g_i(b))}{v_i(a) - p_i(a)}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

\leftarrow a is worse than b by at least $v_i(a)$
 \leftarrow a is at least as good as b or worse than b by at most $p_i(a)$
 \leftarrow a is worse than b by more than $p_i(a)$, but less than $v_i(a)$



[18] Dla kryterium typu koszt rozumiemy analogicznie, respektując zasadę, że większe oceny są mniej preferowane. Nadal, jeśli wariant a jest krytycznie gorszy od wariantu b , mając ocenę większą o co najmniej próg veta, to cząstkowa niezgodność jest równa 1. Jeśli a jest gorsze o więcej niż próg preferencji, ale mniej niż próg veta, to mamy wartość niezgodności pomiędzy 0 a 1. Jeśli jednak a nie jest gorsze od b lub przewaga b nad a nie jest większa niż próg preferencji, to nie ma niezgodności względem stwierdzenia, że a jest co najmniej tak dobre jak b .

Marginal Concordances - Need for Aggregation

$c_1(a,b)$	I	B	G	A	F
I	1	1	1	1	0.50
B	0	1	0.50	0	0
G	0	1	1	0.50	0
A	0	1	1	1	0
F	1	1	1	1	1

$c_2(a,b)$	I	B	G	A	F
I	1	1	0	0	0
B	0	1	0	0	0
G	1	1	1	1	1
A	1	1	1	1	1
F	1	1	1	0	1

$c_3(a,b)$	I	B	G	A	F
I	1	0	0	1	1
B	1	1	1	1	1
G	1	0	1	1	1
A	0	0	0	1	1
F	0	0	0	1	1

In view of the marginal concordance indices for all criteria, what is the **comprehensive support** given to hypothesis aSb ?

- G seems to be strong compared to A
- I seems to be weak compared to G
- for (B,G) or (I,F) the results are ambiguous

We need some interpretable numbers that would aggregate the answers from the individual criteria

[19] Jesteśmy na etapie uzyskania odpowiedzi ze wszystkich kryteriów. Najpierw skupmy się na częściowych zgodnościach dla wszystkich par wariantów. Zebrałem je na slajdzie. Kolorem żółtym wyróżniłem współczynniki, które były wprost rozpatrywane na poprzednich slajdach. Przyglądając się różnym parom, możemy dojść do różnych wniosków. Na przykład, G wydaje się być silne w porównaniu z A , ponieważ na wszystkich kryteriach częściowa zgodność jest wysoka. Natomiast I wypada źle w porównaniu z G , ponieważ aż dla dwóch kryteriów zgodność jest zerowa. Ponadto wynik porównania B z G lub I z F nie jest jednoznaczny. Na przykład g_1 wspiera przewagę I nad F słabo, g_3 mocno, ale g_2 nie daje już żadnego wsparcia. Bez wątplenia potrzebujemy sposobu na ilościowe określenie całościowego wsparcia udzielanego przez wszystkie kryteria hipotezie o przewyższaniu.

- The greater w_i , the more important criterion g_i
- Voting power of criterion g_i in enforcing a supported decision (when the criterion contributes to the majority which is in favor of an outranking)
 - Weights are intra-criteria parameters
- A single weight cannot be interpreted alone; it has a meaning only in the context of all other weights being specified
- Weights do not depend on the ranges nor on the encoding of scales
- In a standard setting, precise weight values need to be provided directly by the DM



Weight	g_1	g_2	g_3
w_i	3	3	4

- g_3 is the most important criterion, whereas g_1 and g_2 are less important
- g_3 is 4/3 times more important than g_1 and g_2
- The weights do not need to sum up to 1 (they are normalized later in any case)

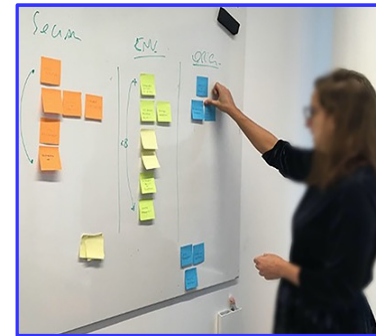
[20] Na tym etapie pojawia się kolejny parametr międzykryterialny. Wagi określają istotność różnych kryteriów, odzwierciedlając ich siłę głosu w przeforsowaniu decyzji, którą wspierają. W ELECTRE III wagi nie zależą od zakresu ani skali ocen. Nie muszą być również normalizowane. Dla naszego przykładu, największą wagę przypisałem g_3 , a nieco mniejsze i równe wagi kryteriom g_1 i g_2 . W standardowym scenariuszu, wagi kryteriów muszą być podane bezpośrednio przez decydenta. Jednak określenie tak precyzyjnych wartości nie jest proste. Z tego powodu zaproponowano wiele procedur wspomagających proces pozyskiwania wag.

The SRF Procedure (1)

- In practice, ELECTRE III is often coupled with the **SRF (Simos-Roy-Figueira) procedure** for determining the criteria weights (also called **the method of cards**)
- The DM is asked to **rank the elementary criteria** with respect to their relative importance from the least important (a group with raw rank L_1) to the most important (a group with raw rank L_v)
 - Each criterion is assigned to a group with raw rank L_s , $s = 1, \dots, v$
- To increase the difference of importance between criteria in the subsequent groups L_s and L_{s+1} , the DM can insert some blank cards between them
 - e_s is the number of **blank cards** between L_s and L_{s+1}
- The DM is asked to provide a **ratio Z** between the importance of criteria in groups L_v and L_1

	ratio Z	
L_v	g_4	
	2 white cards	e_{v-1}
L_{v-1}	g_2, g_3, g_7	
...	...	
L_3	g_5	
	0 white cards	e_2
L_2	g_6, g_8	
	3 white cards	e_1
L_1	g_1	

METHOD OF CARDS



[21] Omówimy tzw. procedurę SRF, która często jest łączona z metodami z rodziny ELECTRE. Zamiast precyzyjnych liczb oczekuje ona od decydenta uszeregowania kryteriów, od najmniej do najbardziej istotnych. Formalnie kryteria są przypisywane do grup o różnej ważności. Najmniej istotnej grupie przypisuje się indeks 1, a najbardziej istotnej - indeks v . Takie indeksy można nazwać surowymi rangami. W praktycznym wspomaganiu decyzji proces ten przeprowadza się przy użyciu kart z nazwami kryteriów, dokładnie tak, jak przedstawiono to na zdjęciu pokazanym na slajdzie. Dlatego procedura ta nazywana jest również metodą kart. Następnie decydent może zróżnicować wagi kryteriów w różnych grupach. Można to osiągnąć, wstawiając puste karty pomiędzy sąsiadujące grupy. Na przykład między grupami L_1 i L_2 umieściłem 3 karty, a między L_2 i L_3 nie ma żadnej karty. Im większa liczba pustych kart między grupami, tym większa jest pożądana różnica między wagami, które będą im ostatecznie przypisane. Na koniec decydent proszony jest o podanie wartości współczynnika Z , który określa iloraz wag kryteriów w grupach najbardziej i najmniej istotnych.

The SRF Procedure (2)

- Compute rank $r(t)$ of each group L_t : $r(t) = t + (\sum_{s=1, \dots, t-1} e_s)$
 - Sum up the raw rank of group L_t and the number of blank cards below group L_t
- Compute non-normalized weight of elementary criterion in group L_t :

$$w_{Gt}' = 1 + (Z - 1) \frac{r(t) - 1}{r(v) - 1}$$
 - Relate the rank of group L_t to the rank of the best group L_v and multiply by $(Z - 1)$
- Compute normalized weight by dividing w_t' by the sum of non-normalized weights for all criteria:

$$w_{Gt} = w_{Gt}' / \sum_{i=1, \dots, m} w_i'$$

raw rank	ratio Z = 8	blank cards	rank $r(t)$	Non-normalized weight w_t'
$L_4 (t = 4)$	g_1	$e_3 = 1$	$r(4) = 4 + (3 + 0 + 1) = 8$	$w_{G4}' = 1 + (8 - 1) \cdot (8 - 1) / (8 - 1) = 8$
$L_3 (t = 3)$	g_2	$e_2 = 0$	$r(3) = 3 + (3 + 0) = 6$	$w_{G3}' = 1 + (8 - 1) \cdot (6 - 1) / (8 - 1) = 6$
$L_2 (t = 2)$	g_3	$e_1 = 3$	$r(2) = 2 + (3) = 5$	$w_{G2}' = 1 + (8 - 1) \cdot (5 - 1) / (8 - 1) = 5$
$L_1 (t = 1)$	g_4		$r(1) = 1$	$w_{G1}' = 1 + (8 - 1) \cdot (1 - 1) / (8 - 1) = 1$

Weight	w_1	w_2	w_3	w_4	Sum
Non-norm.	8	6	5	1	20
Normalized	$8/20 = 0.4$	$6/20 = 0.3$	$5/20 = 0.25$	$1/20 = 0.05$	1

[22] Wszystkie te informacje są przekształcane w precyzyjne wagi. Najpierw obliczamy rangę każdej grupy, sumując jej surową rangę z liczbą pustych kart poniżej tej grupy. Rozpatrując przykład przedstawiony na slajdzie, ranga najmniej ważnej grupy L_1 wynosi 1, natomiast dla L_2 sumujemy jej surową rangę, 2, z liczbą pustych kart poniżej tej grupy, czyli 3. Następnie obliczamy nieznormalizowane wagi kryteriów zawartych w każdej grupie. W tym celu zaczynamy od 1 i zwiększamy ją o wskaźnik Z pomniejszony o 1 pomnożony przez stosunek rangi danej grupy pomniejszonej o 1 do rangi najlepszej grupy L_v pomniejszonej o 1. Dzięki temu najmniej ważnej grupie, L_1 , przypisujemy zawsze nieznormalizowaną wagę 1, a najważniejszej grupie, L_v , wagę Z . Dla naszego przykładu jest ona równa 8. Wagi pozostałych grup są ustawione gdzieś pomiędzy, co wynika z porównania ich rang z rangą najlepszej grupy. Na koniec wagi są normalizowane, tak aby sumowały się do 1. W tym kroku każda nieznormalizowana waga jest dzielona przez sumę nieznormalizowanych wag przypisanych wszystkim kryteriom. Widzicie, że różnica między wagą kryterium trzeciego i czwartego jest zdecydowanie większa niż różnica między kryterium drugim i trzecim. Jest to zrozumiałe w kontekście liczby pustych kart, które umieściliśmy między tymi grupami.

Comprehensive Concordance

COMPREHENSIVE CONCORDANCE INDEX

$$C(a,b) = \frac{\sum_{i=1,\dots,n} w_i \cdot c_i(a,b)}{\sum_{i=1,\dots,n} w_i}$$

- Criteria have different impacts on the value of $C(a,b)$, dependent on their weights (voting powers)
- $C(a,b)$ quantifies the strength of the coalition of criteria supporting aSb
- $C(a,b)$ is in the range $[0,1]$
 - 1 = all criteria strongly support aSb
 - 0 = none criterion supports aSb weakly or strongly

Concordance matrix for the study:

- the results are not univocal for all pairs
- the support given to the outranking differs from one pair to another

Three
example
pairs

	g_1	g_2	g_3
$c_j(I,G)$	1	0	0
$c_j(I,F)$	0.5	0	1
$c_j(G,A)$	0.5	1	1
w_i	3	3	4

$$C(I,G) = \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{3 + 3 + 4} = 0.3$$

$$C(I,F) = \frac{3 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 4} = 0.55$$

$$C(G,A) = \frac{3 \cdot 0.5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 4} = 0.85$$

$C(a,b)$	I	B	G	A	F
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55
B	0.4	1	0.55	0.4	0.4
G	0.7	0.6	1	0.85	0.7
A	0.3	0.6	0.6	1	0.7
F	0.6	0.6	0.6	0.7	1

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[23] Wagi pojawiają się przy agregacji częściowych zgodności w całkowity współczynnik zgodności. Ten ostatni definiowany jest jako średnia ważona indeksów częściowych, więc w liczniku mamy sumę iloczynów wag i częściowych zgodności, a w mianowniku tylko sumę wag. Ponieważ w grę wchodzi tu wagi, kryteria mają różny wpływ na wartość całkowitej zgodności. Współczynnik ten mieści się w przedziale od 0 do 1 i należy go interpretować jako siłę koalicji kryteriów, która wspiera hipotezę o przewyższaniu. Na przykład, wcześniej wspomnieliśmy, że wyniki porównania I z F nie były jednoznaczne. Teraz widzimy wyraźnie, że całościowe wsparcie udzielone przewyższaniu I nad F wynosi 0.55, natomiast dla pary odwrotnej (F,I) jest nieco większe.

Marginal Discordances - Need for Aggregation

- **Discordance** verifies if among criteria discordant with the outranking hypothesis, there is strong **opposition** against aSb
- In ELECTRE I, the discordance at the per-criterion and comprehensive levels was binary
- In ELECTRE III, the marginal discordance indices are fuzzy, taking values between 0 and 1
 - $D_i(a,b) = 1$ means that the opposition to aSb is the strongest possible
 - $D_i(a,b) = 0$ means that there is no opposition to aSb
 - $D_i(a,b) \in (0,1)$ means that the opposition to aSb exists, but is not extremely strong
- The results of the concordance and discordance tests are aggregated into a single measure, called outranking credibility

MARGINAL DISCORDANCE INDICES

$D_1(a,b)$	I	B	G	A	F
I	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1/4	1
G	3/4	0	0	0	1
A	1/4	0	0	0	3/4
F	0	0	0	0	0

$D_2(a,b)$	I	B	G	A	F
I	0	0	1/6	1/3	0
B	1/3	0	5/6	1	2/3
G	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0

$D_3(a,b)$	I	B	G	A	F
I	0	1/3	0	0	0
B	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0
A	0	1	1/2	0	0
F	0	1	1/2	0	0

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[24] Znamy już całkowite wsparcie dla relacji przewyższania. Musimy również rozważyć argumenty przeciw tej relacji. W tym celu odwołamy się do cząstkowych niezgodności. Są one podane na slajdzie dla wszystkich par wariantów. Na żółto wyróżniłem liczby, które wprost omówiliśmy kilka minut temu. Współczynniki znów są rozmyte, przyjmując dowolną wartość z przedziału od 0 do 1. To odróżnia ELECTRE III choćby od ELECTRE I. W każdym przypadku, gdy jakaś cząstkowa niezgodność jest równa 1, opozycja przeciwko przewyższaniu jest najsilniejsza z możliwych. Takie pary wyróżnione są kolorem czerwonym. Gdy współczynnik jest równy 0, opozycji nie ma; natomiast gdy przyjmuje jakąś wartość pośrednią, opozycja istnieje, ale nie jest wyjątkowo silna. Te cząstkowe niezgodności są agregowane z całkowitą zgodnością w jedną miarę.

Outranking Credibility

- Outranking credibility σ aggregates the comprehensive concordance and marginal discordances:

$$\sigma(a,b) = C(a,b) \prod_{j \in F} \frac{1 - D_j(a,b)}{1 - C(a,b)} \quad \text{where } F = \{j = 1, \dots, n : D_j(a,b) > C(a,b)\}$$

- Starting point: results of the concordance test $C(a,b)$
- For each criterion for which the marginal discordance is sufficiently great ($D_j(a,b) > C(a,b)$), multiply by the module which is then lower than 1, hence decreasing the outranking credibility
- If there is no discordance on any criterion ($D_j(a,b) = 0$) or it is not sufficiently great, then $\sigma(a,b) = C(a,b)$
- If there is at least one criterion with $D_j(a,b) = 1$, then $\sigma(a,b) = 0$ (multiplying by module = 0)
- If the marginal discordance is sufficiently strong, but not equal to 1, then we multiply by the respective modules for each criterion for which the condition is satisfied (then, $\sigma(a,b) < C(a,b)$)

Pair	C	D ₁	D ₂	D ₃	$\sigma(a,b)$
(I,B)	0.6	0	0	1/3	0.6
(B,G)	0.55	0	5/6	0	0.2
(A,F)	0.7	3/4	0	0	0.58
(B,F)	0.4	1	2/3	0	0

$$\sigma(I,B) = 0.60$$

$$\sigma(B,G) = 0.55 \cdot \frac{1 - 5/6}{1 - 0.55} = 0.2$$

$$\sigma(B,F) = 0.40 \cdot \frac{1 - 1}{1 - 0.40} \cdot \frac{1 - 2/3}{1 - 0.40} = 0$$

σ	I	B	G	A	F
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55
B	0	1	0.2	0	0
G	0.58	0.6	1	0.85	0
A	0.3	0	0.6	1	0.58
F	0.6	0	0.6	0.7	1

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[25] Miara ta jest nazywana wiarygodnością przewyższania i jest oznaczana przez sigmę. Punktem wyjścia do jej obliczenia jest zgodność całkowita, która jest ewentualnie wymnażana przez inne argumenty. Aby je zidentyfikować, bierzemy pod uwagę tylko te kryteria, dla których niezgodność wobec przewyższania jest wystarczająco silna. Formalnie oznacza to, że niezgodność częściowa jest większa od zgodności całkowitej. Dla każdego kryterium, dla którego taki warunek jest spełniony, mnożymy wynik przez moduł, zdefiniowany jako stosunek 1 minus częściowa niezgodność do 1 minus całkowita zgodność. Gdy spełniony jest warunek wystarczająco wysokiej niezgodności, moduł ten jest mniejszy od 1. W ten sposób zmniejszamy wiarygodność, uwzględniając istotne powody przeciwko przewyższaniu. Gdy nie ma niezgodności na żadnym kryterium lub jest ona niewystarczająco wysoka, wiarygodność jest równa całkowitej zgodności. Tak jest na przykład dla pary (I,B). Jeśli istnieje co najmniej jedno kryterium z niezgodnością częściową równą 1, to wiarygodność jest zerowa. Można to zaobserwować dla pary (B,F). Jeśli jednak niezgodności częściowe są wystarczająco duże, ale nie równe 1, to wiarygodność obniża się wraz z każdym kryterium w opozycji do przewyższania. Dla pary (B,G) niezgodność pochodząca z kryterium g2 obniżyła wiarygodność z poziomu 0.55 na 0.2. Macierz wiarygodności relacji przewyższania, taka jak w prawym dolnym rogu, stanowi wejście dla drugiego etapu działania metody ELECTRE III. Musimy więc teraz przejść do właściwej procedury destylacji, operującej już na relacji rozmytej.

Distillation Procedure – General Idea

1. Compute the **lower threshold for the credibilities** under interest (based on the upper threshold equal to the maximal observed credibility in the analyzed set of alternatives).
2. If the upper threshold is zero, it is **impossible to distinguish** between alternatives. Then, add all alternatives to the constructed preorder and STOP.
3. Construct an **outranking relation under interest**: save only credibilities exceeding the lower thresh. and being significantly greater than the credibilities for inverse pairs.
4. Compute the **strength, weakness, and quality** of each alternative based on the constructed outranking relation (how many are outranked – how many outrank).
5. If the alternative with the greatest/least qualification is **not unique**, try breaking the tie. Perform the **distillation limited to the tied set** (assume the lower threshold becomes the upper threshold to loosen the requirements on the credibility value).
6. **Add the best/worst alternative(s)** to the preorder and eliminate them from the set.
7. If all alternatives are added to the constructed preorder, STOP. Otherwise, continue.

CREDIBILITY
THRESHOLDS

NO ARGUMENTS
TO DISTINGUISH

CREDIBILITIES
UNDER INTEREST
= OUTRANK. REL.

QUALITIES

BREAK
TIES

THE BEST /
/ THE WORST

RANKING
CONSTRUCTION



[26] Rozpocznę od omówienia ogólnej idei destylacji relacji rozmytej. Będzie ona szczegółowa, ale jeszcze bez formalizmów matematycznych. Procedura ta opiera się na określeniu interesującego nas na danym etapie przedziału wiarygodności. W tym celu ustalamy dolny próg i bierzemy pod uwagę tylko wartości wiarygodności od niego większe. To ustalenie opiera się na wcześniejszym obliczeniu górnego progu jako największej wartości wiarygodności obserwowalnej w analizowanym zbiorze wariantów. Jeśli ten górny próg jest równy zero, to na pewno nie będziemy mieli żadnych argumentów, by warianty rozróżnić. Wtedy procedurę kończymy. W przeciwnym razie konstruujemy relację przewyższania, istotną na danym etapie. Zostawiamy więc tylko wiarygodności większe od progu dolnego i istotnie większe od wiarygodności dla pary odwrotnej. Na podstawie takiej relacji obliczamy siłę, słabość i jakość dla każdego wariantu. Odwołujemy się tu do liczby wariantów przewyższanych i przewyższających, a także różnicy między jedną i drugą liczbą. Dalej, w zależności czy jest to destylacja zstępująca czy wstępująca, identyfikujemy wariant z najwyższą lub najniższą wartością. W przypadku remisu, próbujemy go przełamać, wywołując destylację wewnętrzną ograniczoną tylko do podzbioru wariantów z taką samą jakością. Aby dać sobie szansę ten remis rozstrzygnąć, musimy nieco poluznić wymagania co do rozważanych wartości wiarygodności. Jeśli najlepszy lub najgorszy wariant był unikalny lub zakończyliśmy destylację wewnętrzną, dodajemy znalezione warianty na dół lub górę konstruowanego rankingu i eliminujemy z dalszych rozważań. Procedurę kontynuujemy aż do rozważenia wszystkich wariantów.

Descending Distillation

1. Set $k := 0$.
2. Compute the **upper credibility threshold**: $\lambda_k = \text{Max}_{a,b \in A, a \neq b} \{\sigma(a, b)\}$.
3. Compute the **lower credibility threshold**: $\lambda_{k+1} = \text{Max}_{a,b \in A: \sigma(a,b) < \lambda_k - s(\lambda_k)} \{\sigma(a, b), 0\}$, where $s(\lambda_k) = \alpha \cdot \lambda_k + \beta$ (by default, $\alpha = -0.15$ and $\alpha = 0.3$).
4. If $\lambda_k = 0$, then place set A **at the bottom of the descend. preorder \bar{P}** and **STOP**. Otherwise, $k := k + 1$.
5. Save only relations **$aS^{\lambda_k}b$** that satisfy the following conditions:

$$\sigma(a, b) > \lambda_k \text{ and } \sigma(a, b) > \sigma(b, a) + s[\sigma(a, b)].$$
6. Compute the **strength, weakness, and quality**:

$$q_A^{\lambda_k}(a) = s_A^{\lambda_k}(a) - w_A^{\lambda_k}(a) = |b \in A: aS^{\lambda_k}b| - |b \in A: bS^{\lambda_k}a|.$$
7. Identify a subset of alternatives with **maximal quality**:

$$\bar{D}_1^k = \{a \in A: q_A^{\lambda_k}(a) = \text{Max}_{x \in A} \{q_A^{\lambda_k}(x)\}\}.$$
8. If $|\bar{D}_1^k| = 1$, set $\bar{D}_F^k = \bar{D}_1^k$. Otherwise, call an **internal distillation** procedure resulting in $\bar{D}_F^k \subseteq \bar{D}_1^k$. Go to **step 3**, performing sub-iteration h for iteration k (start with $h=0$, **assume the lower thr. become the upper thr.**; change h , not k).
9. Place set \bar{D}_F^k **at the (current) bottom of the descending preorder \bar{P}** . Eliminate \bar{D}_F^k from further consideration: $A := A \setminus \bar{D}_F^k$.
10. If $A = \emptyset$, then **STOP**. Otherwise, go to **step 2**.

σ	I	B	G	A	F
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55
B	0	1	0.2	0	0
G	0.58	0.6	1	0.85	0
A	0.3	0	0.6	1	0.58
F	0.6	0	0.6	0.7	1

$\lambda_0 = \text{Max}\{\sigma(a, b)\} = 0.85$
 $s(\lambda_0) = -0.15 \cdot 0.85 + 0.3 = 0.1725$
 $\lambda_1 = \text{Max}\{\sigma(a, b)\} < 0.6775$
 $\lambda_1 = 0.6$

S^{λ}	I	B	G	A	F	s	w	q
I			0.7		1	0	1	
B					0	0	0	
G			0.85		1	0	1	
A					0	2	-2	
F			0.7		0	0	0	

$\lambda_1^0 = 0.6$ (iter $k=1$; sub-iter $h=0$)
 $s(\lambda_1^0) = -0.15 \cdot 0.6 + 0.3 = 0.21$
 $\lambda_1^1 = \text{Max}\{\sigma(a, b)\} < 0.39$
 $\lambda_1^1 = 0.3$

σ	I	G
I	1	0.3
G	0.58	1

S^{λ}	I	G	s	w	q
I			0	1	-1
G	0.58	1	1	0	1

[27] Podajmy teraz bardziej formalną specyfikacji destylacji zstępującej. Próg górny określa się jako najwyższą wiarygodność obserwowalną dla jakiejś pary poza główną przekątną. Dla naszej macierzy jest to 0.85. Próg dolny oblicza się na bazie progu górnego. Najpierw pomniejszamy próg górny o wartość funkcji liniowej „s” z parametrami alfa i beta. Ich domyślne wartości to -0.15 oraz 0.3. Dla wartości 0.85, wartość tej funkcji to 0.1725, więc odjęta od 0.85 daje 0.6775. Teraz szukamy najwyższej wartości wiarygodności mniejszej od progu górnego pomniejszonego o wartość funkcji „s”. Dla naszej macierzy jest to 0.6. Jeśli nie znajdziemy takiej wartości większej od zera, to przyjmujemy 0 jako próg dolny. Jeśli próg górny jest równy 0, to nie mamy możliwości rozróżnić wariantów i musimy cały zbiór dodać na dół konstruowanego porządku zstępującego. Wtedy kończymy. W przeciwnym razie, konstruujemy interesującą nas relację przewyższania. Zostawiamy tylko wiarygodności większe od progu dolnego i odpowiednio większe od wiarygodności w drugą stronę. „Odpowiednio” formalnie oznacza o wartość funkcji „s” dla danej wiarygodności. Dla naszego przykładu zostawiamy wiarygodności większe od 0.6, więc te dla par (I,A), (G,A) oraz (F,A). Spośród nich dwie pierwsze są znacząco większe od wiarygodności w drugą stronę, ale wiarygodność dla pary (F,A) równa 0.7 nie jest znacząco większa od wiarygodności dla pary (A,F) równej 0.58. Tak skonstruowana relacja służy do obliczenia siły, słabości i jakości. W naszym przykładzie, Włochy mają siłę 1, słabość 0 i jakość 1, a Austria siłę 0, słabość 2 i jakość -2. Teraz szukamy podzbioru wariantów z maksymalną jakością. Jeśli jest jeden taki wariant, to dodajemy go na dół konstruowanego porządku zstępującego. Jeśli jednak takich wariantów jest więcej, to wywołujemy destylację wewnętrzną tylko dla podzbioru remisujących wariantów. Tak jest dla naszego przykładu, gdzie mamy remis między Włochami i Niemcami. Destylacja wewnętrzna przebiega wg tego samego schematu, ale w jej ramach dotychczasowy próg dolny staje się progiem górnym. Służy on dla obliczenia nowego progu dolnego. Dla naszego przykładu 0.6 służy więc do obliczenia progu dolnego, którym jest 0.3. Zachowujemy tylko wiarygodności większe od tego nowego progu dolnego i znacząco większe od wiarygodności w drugą stronę. Dla naszych dwóch wariantów pozwala to rozstrzygnąć remis na korzyść Niemiec. Wychodzimy z destylacji wewnętrznej, gdy najlepszy okazuje się jeden wariant lub nie da się rozstrzygnąć remisu. Tak jak w przypadku, gdy od razu unikalnie najlepszy byłby jeden wariant, dodajemy go lub je na dół rankingu zstępującego, eliminujemy z analizowanego zbioru. Wreszcie zapętlamy procedurę, wracając do kroku drugiego na slajdzie. Obliczamy progi górny i dolny i iteracyjnie szukamy najlepszego wariantu wśród pozostałych aż do rozważenia wszystkich wariantów.

Descending Distillation – Example

1st iteration

σ	I	B	G	A	F	s	w	q
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55	1	0	1
B	0	1	0.2	0	0	0	0	0
G	0.58	0.6	1	0.85	0	1	0	1
A	0.3	0	0.6	1	0.58	0	2	-2
F	0.6	0	0.6	0.7	1	0	0	0

Add **G** to the lowest position and eliminate

After the internal distillation (**G** and **I**), **G** is the best

2nd iteration

σ	I	B	A	F
I	1	0.6	0.7	0.55
B	0	1	0	0
A	0.3	0	1	0.58
F	0.6	0	0.7	1

$$\lambda_1 = 0.7$$

$$s(\lambda_1) = -0.15 \cdot 0.7 + 0.3 = 0.195$$

$$\lambda_2 = \text{Max}\{\sigma(a,b)\} < 0.505$$

$$\lambda_2 = 0.3$$

$$\sigma(I,B) = 0.6 \gg \sigma(B,I) = 0.0$$

$$\sigma(I,A) = 0.7 \gg \sigma(A,I) = 0.3$$

$$\text{not}(\sigma(F,I) = 0.6 \gg \sigma(I,F) = 0.55)$$

$$\text{not}(\sigma(F,A) = 0.7 \gg \sigma(A,F) = 0.58)$$

Save σ greater than 0.3 and significantly greater than for the inverse pair

3rd iteration

σ	B	A	F
B	1	0	0
A	0	1	0.58
F	0	0.7	1

$$\lambda_2 = 0.7$$

$$s(\lambda_2) = -0.15 \cdot 0.7 + 0.3 = 0.195$$

$$\lambda_3 = \text{Max}\{\sigma(a,b)\} < 0.505$$

$$\lambda_3 = 0$$

Save σ greater than 0 and significantly greater than for the inverse pair

σ^A	B	A	F	s	w	q
B				0	0	0
A			0.58	0	0	0
F		0.7		0	0	0

Tie between **B**, **A**, and **F**. Call internal distillation.

3rd iteration (internal distillation)

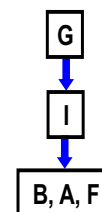
$$\lambda_2^0 = 0$$

It is impossible to break the tie

σ	B	A	F
B	1	0	0
A	0	1	0.58
F	0	0.7	1

Add **B**, **A**, and **F** to the lowest position and eliminate

Descending preorder



[28] Dla naszego przykładu najlepsze w pierwszej iteracji okazały się Niemcy. Eliminujemy je z analizowanego zbioru. W zbiorze pozostałych czterech wariantów najwyższa wiarygodność to 0.7. Służy ona do obliczenia progu dolnego, czyli maksymalnej wiarygodności mniejszej od progu górnego pomniejszonego o wartość funkcji s dla tego progu. W naszym problemie jest to 0.3. Zostawiamy wartości wiarygodności większe od 0.3 oraz odpowiednio większe od wiarygodności w drugą stronę. Ten warunek jest spełniony tylko dla par (I,B) oraz (I,A). Dla par (F,I) czy (F,A) mamy wiarygodności większe od progu dolnego, ale nie są one odpowiednio większe od wiarygodności w drugą stronę. Dla tak ograniczonej relacji przewyższania najlepsze okazują się Włochy. W trzeciej iteracji rozważamy tylko Belgię, Austrię i Francję. Konstrukcja interesującej nas relacji przewyższania prowadzi do jakości 0 dla wszystkich trzech wariantów. Próba rozstrzygnięcia remisu kończy się niepowodzeniem, bo próg górny w destylacji wewnętrznej jest równy zero. Wszystkie trzy warianty musimy więc dodać na tej samej pozycji, najniższej możliwej, do porządku zstępującego.

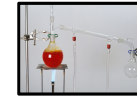
Ascending Distillation

1. Set $k := 0$.
2. Compute the **upper credibility threshold**: $\lambda_k = \text{Max}_{a,b \in A, a \neq b} \{\sigma(a, b)\}$.
3. Compute the **lower credibility threshold**: $\lambda_{k+1} = \text{Max}_{a,b \in A: \sigma(a,b) < \lambda_k - s(\lambda_k)} \{\sigma(a, b), 0\}$, where $s(\lambda_k) = \alpha \cdot \lambda_k + \beta$ (by default, $\alpha = -0.15$ and $\alpha = 0.3$).
4. If $\lambda_k = 0$, then place set A **at the top of the ascending preorder \bar{P}** and **STOP**. Otherwise, $k := k + 1$.
5. Save only relations **$aS^{\lambda_k}b$** that satisfy the following conditions:

$$\sigma(a, b) > \lambda_k \text{ and } \sigma(a, b) > \sigma(b, a) + s[\sigma(a, b)].$$
6. Compute the **strength, weakness, and quality**:

$$q_A^{\lambda_k}(a) = s_A^{\lambda_k}(a) - w_A^{\lambda_k}(a) = |b \in A: aS^{\lambda_k}b| - |b \in A: bS^{\lambda_k}a|.$$
7. Identify a subset of alternatives with **minimal quality**:

$$\bar{D}_1^k = \{a \in A: q_A^{\lambda_k}(a) = \text{Max}_{x \in A} \{q_A^{\lambda_k}(x)\}\}.$$
8. If $|\bar{D}_1^k| = 1$, set $\bar{D}_F^k = \bar{D}_1^k$. Otherwise, call an **internal distillation** procedure resulting in $\bar{D}_F^k \subseteq \bar{D}_1^k$. Go to **step 3**, performing sub-iteration h for iteration k (start with $h=0$, **assume the lower thr. become the upper thr.**; change h , not k).
9. Place set \bar{D}_F^k **at the (current) top of the ascending preorder \bar{P}** . Eliminate \bar{D}_F^k from further consideration: $A := A \setminus \bar{D}_F^k$.
10. If $A = \emptyset$, then **STOP**. Otherwise, go to **step 2**.



σ	I	B	G	A	F
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55
B	0	1	0.2	0	0
G	0.58	0.6	1	0.85	0
A	0.3	0	0.6	1	0.58
F	0.6	0	0.6	0.7	1

$$\lambda_0 = \text{Max}\{\sigma(a, b)\} = 0.85$$

$$s(\lambda_0) = -0.15 \cdot 0.85 + 0.3 = 0.1725$$

$$\lambda_1 = \text{Max}\{\sigma(a, b)\} < 0.6775$$

$$\lambda_1 = 0.6$$

The first step in the descending and ascending distillations is the same

S^A	I	B	G	A	F	s	w	q
I				0.7		1	0	1
B						0	0	0
G				0.85		1	0	1
A						0	2	-2
F				0.7		0	0	0

[29] Destylacja wstępująca przebiegu tak samo jak zstępująca z dwiema istotnymi różnicami. Po pierwsze szukamy wariantów z najmniejszą jakością. Dla naszego problemu pierwsza iteracja jest więc taka sama, ale perspektywa jest inna, bo identyfikujemy najgorsze warianty. Okazuje się, że jest to unikalnie Austria. Po drugie tak znalezione warianty dodajemy na górę konstruowane porządku wstępującego. Pozostałe kroki są analogiczne jak dla podejścia top-down.

Ascending Distillation – Example

1st iteration

σ	I	B	G	A	F	s	w	q
I	1	0.6	0.3	0.7	0.55	1	0	1
B	0	1	0.2	0	0	0	0	0
G	0.58	0.6	1	0.85	0	1	0	1
A	0.3	0	0.6	1	0.58	0	2	-2
F	0.6	0	0.6	0.7	1	0	0	0

Add A to the highest position and eliminate

A

After the distillation, A is the worst

2nd iteration

σ	I	B	G	F
I	1	0.6	0.3	0.55
B	0	1	0.2	0
G	0.58	0.6	1	0
F	0.6	0	0.6	1

$$\lambda_1 = 0.6$$

$$s(\lambda_1) = -0.15 \cdot 0.6 + 0.3 = 0.21$$

$$\lambda_2 = \text{Max}\{\sigma(a,b)\} < 0.39$$

$$\lambda_2 = 0.3$$

For example:

$$\sigma(I,B) = 0.6 \gg \sigma(B,I) = 0.0$$

$$\sigma(G,I) = 0.58 \gg \sigma(I,G) = 0.3$$

$$\text{not}(\sigma(F,I) = 0.6 \gg \sigma(I,F) = 0.55)$$

Save σ greater than 0.3 and significantly greater than for the inverse pair

3rd iteration

σ	I	G	F
I	1	0.3	0.55
G	0.58	1	0
F	0.6	0.6	1

$$\lambda_2 = 0.6$$

$$s(\lambda_2) = -0.15 \cdot 0.6 + 0.3 = 0.21$$

$$\lambda_3 = \text{Max}\{\sigma(a,b)\} < 0.39$$

$$\lambda_3 = 0.3$$

Save σ greater than 0.3 and significantly greater than for the inverse pair

s^1	I	G	F	s	w	q
I			0.55	0	1	-1
G	0.58			1	1	0
F	0.6	0.6		1	0	1

Add I to the highest position and eliminate

I

5th iteration

I			
B			
A			

Ascending preorder

4th iteration

σ	G	F
G	1	0
F	0.6	1

$$\lambda_3 = 0.6$$

$$s(\lambda_3) = -0.15 \cdot 0.6 + 0.3 = 0.21$$

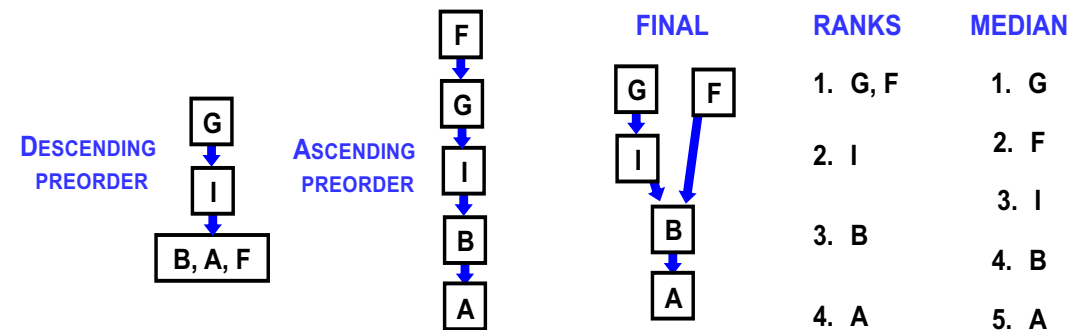
$$\lambda_4 = \text{Max}\{\sigma(a,b)\} < 0.39$$

$$\lambda_4 = 0.0$$

Add G to the highest position and eliminate

[30] Dla rozważanego problemu, w pierwszej iteracji dodajemy więc Austrię na sam dół ranking. Dla macierzy czterech pozostałych wariantów, najwyższa obserwowalna wiarygodność to 0.6, a obliczony na jej bazie próg dolny to 0.3. W skonstruowanej relacji przewyższania zostają ostatecznie cztery wiarygodności dla par (I,B), (G,I), (G,B) oraz (F,G). Najgorsza okazuje się Belgia. Umieszczamy ją więc wyżej od Austrii. W trzeciej iteracji, najgorsze są Włochy, a w czwartej Niemcy. W piątej pozostanie już tylko Francja, i to ona jest umieszczana na szczycie porządku wstępującego.

ELECTRE III – Final Results



Final preorder: the intersection of the descending and ascending preorders:

- **GPI** because G is preferred to I in both preorders
- **FPB** because F is preferred to B in the descending preorder and they are indifferent in the ascending preorder
- **IRF** because I is preferred to F in the descending preorder and F is preferred to I in the ascending preorder

Rank = the length of the longest path from the alternative to some top-ranked alternative increased by one

- For G and F, the rank is one; for I, the rank is two (path to G); for B, the rank is three (path to G (the longest))

Median preorder is determined by the ranks with ties broken by the difference between ranks in the descending and ascending preorders

- G is better than F in the descend. preorder by 2 positions, and worse in the ascending preorder by 1 position

[31] Ostatni krok działania ELECTRE III już znacie. Sprowadza się on do obliczenia rankingu końcowego, rang oraz rankingu medianowego. Przypomnijmy, że ranking końcowy to przecięcie porządku zstępującego i wstępującego. Przykładowo, Niemcy i Francja mają odwrotne porządki w tych dwóch rankingach, są więc nieporównywalne w rankingu końcowym. Z kolei Belgia jest nierozróżnialna z Austrią w porządku zstępującym i preferowana we wstępującym, co przekłada się na preferencję w końcowym. Rangi to długości najdłuższych ścieżek do czoła rankingi pomniejszone o 1. Najlepsze rangi mają Niemcy i Francja, a dalej są już rozróżnialne pod tym względem Włochy, Belgia i Austria. Ten porządek jest respektowany w rankingi medianowym, ale analiza pozycji dla Niemiec i Francji pozwala nam rozstrzygnąć remis. W istocie Niemcy są o 2 pozycje lepsze od Francji w porządku zstępującym, a gorsze o 1 pozycję w porządku wstępującym, co pozwala przypisać Niemcom wyższą pozycję w rankingi medianowym.

Preference information ($i=1,\dots,n$)▪ **Intracriteria:**

- indifference $q_i(a)$ and preference $p_i(a)$ thresholds (constant or defined with affine functions)

▪ **Intercriteria:**

- importance coefficients (weights) of criteria w_i (can be inferred, e.g., with SRF)
- veto thresholds $v_i(a)$ (constant or defined with affine functions)
- $0 \leq q_i(a) \leq p_i(a) < v_i(a)$

Preference model:

- valued outranking relation σ is constructed for each pair (a,b) for $a,b \in A$ via concordance and discordance tests of ELECTRE III
- Can be generalized to crisp (binary) relation; requires the cutting level (credibility threshold)

Recommendation:

- incomplete, ordinal ranking (final preorder) based on the preorders derived with the descending and ascending distillations
- complete, ordinal rankings (descending and ascending preorders, ranks, median preorder)



[32] Podsumujmy kilka podstawowych własności metody ELECTRE III. Wymaga ona od decydenta podania wartości pewnych parametrów wewnątrz- i międzykryterialnych. Pierwsze z nich obejmują progi nierozróżnialności i preferencji dla każdego kryterium, natomiast drugie obejmują progi veta i wagi. Model preferencji w ELECTRE III to wartościowana relacja przewyższania, która jest konstruowana dla wszystkich par wariantów. Odbywa się to z wykorzystaniem testów zgodności i niezgodności, których wyniki są agregowane w wiarygodności przewyższania. Wreszcie, rekomendacja metody ma postać różnych rezultatów. Wyniki pośrednie, czyli preporządek zstępujący i wstępujący, są zupełne, kompletne. Najważniejszy wynik, a więc ranking końcowy, ma jednak charakter częściowy i dopuszcza nieporównywalność. Gdy nie jest ona tolerowana możemy odwołać się do rang lub porządku medianowego.

ELECTRE IV is a variant of ELECTRE III, where the use of weights w_i is replaced by the definition of **5 embedded outranking relations**

- It obtains **outranking credibility matrix** $\sigma(\cdot, \cdot)$ for all pairs of alternatives by associating arbitrary credibility level with each embedded outranking relation
- Matrix $\sigma(\cdot, \cdot)$ is **exploited by (descending and ascending) distillations**
- **Assumptions:**
 - No criterion is more important than all remaining criteria
 - No criterion is negligible compared to any other criteria
- **Notation:**
 - $n_p(a, b)$ – the number of criteria on which a is **strictly preferred** to b
 - $n_q(a, b)$ – the number of criteria on which a is **weakly preferred** to b
 - $n_i(a, b)$ – the number of criteria on which a is **indifferent** to b , while having a better performance than b
 - $n_o(a, b) = n_o(b, a)$ – the number of criteria on which a is **indifferent** to b , with the same performance of a and b
- $\forall a, b \in A: n = n_p(a, b) + n_q(a, b) + n_i(a, b) + n_o(b, a) + n_i(b, a) + n_q(b, a) + n_p(b, a)$

[33] Najtrudniejszym do podania parametrem wymagany przez ELECTRE III są wagi. Oczywiście można korzystać z procedur wspierających takich jak procedura SRF, ale istnieje też metoda, która podania wag bezpośrednio czy pośrednio nie wymaga. Takie założenie leży u podstaw ELECTRE IV. Podejście to wymaga jednak, by żadne kryterium nie było ani dominujące ani zaniechane. ELECTRE IV konstruuje 5 zagnieżdżonych relacji przewyższania, a każdej z nich przypisana jest arbitralna wartość wiarygodności. Aby określić, czy któraś z tych relacji zachodzi dla danej pary wariantów, kryteria dzieli się na 7 podgrup i zlicza na ilu z nich wariant a jest silnie preferowany nad b , a jest słabo preferowany nad b , a jest nierozróżnialny z b ale z lepszą oceną, a jest nierozróżnialny z b z taką samą oceną, b jest nierozróżnialny z a ale z lepszą oceną, b jest słabo preferowane nad a i wreszcie b jest silnie preferowany nad a .

ELECTRE IV – Embedded Outranking Relations

Verify the truth of relations starting from the most demanding (from S_q to S_v)

- **Quasi-dominance** S_q (if $a S_q b$, then $\sigma(a,b)=1$):
 $a S_q b \Leftrightarrow [n_p(b,a)+n_q(b,a)=0] \& [n_i(b,a) < n_p(a,b)+n_q(a,b)+n_i(a,b)]$
- **Canonical dominance** S_c (if $a S_c b$, then $\sigma(a,b)=0.8$):
 $a S_c b \Leftrightarrow [n_p(b,a)=0] \& [n_q(b,a) \leq n_p(a,b)] \& [n_q(b,a)+n_i(b,a) < n_p(a,b)+n_q(a,b)+n_i(a,b)]$
- **Pseudo-dominance** S_p (if $a S_p b$, then $\sigma(a,b)=0.6$):
 $a S_p b \Leftrightarrow [n_p(b,a)=0] \& [n_q(b,a) \leq n_p(a,b)+n_q(a,b)]$
- **Sub-dominance** S_s (if $a S_s b$, then $\sigma(a,b)=0.4$): $a S_s b \Leftrightarrow [n_p(b,a)=0]$
- **Veto-dominance** S_v (if $a S_v b$, then $\sigma(a,b)=0.2$):
 $a S_v b \Leftrightarrow [n_p(b,a) \leq 1] \& [n_p(a,b) \geq n/2] \& [g_i(b)-g_i(a) \leq v_i(a), i=1, \dots, n]$

Embedded relations: $S_q \subseteq S_c \subseteq S_p \subseteq S_s \subseteq S_v$; if no relation is true, then $\sigma(a,b)=0$




	$g_1 \uparrow$	$g_2 \uparrow$	$g_3 \downarrow$
I	90	4	600
B	58	0	200
G	66	7	400
A	74	8	800
F	98	6	800
q_i	4	1	100
p_i	12	2	200
v_i	28	8	600

Pair	$n_p(I,B)$	$n_q(I,B)$	$n_i(I,B)$	$n_o(I,B)$	$n_i(B,I)$	$n_q(B,I)$	$n_p(B,I)$	(I,B)	$\sigma(I,B)$	(B,I)	$\sigma(B,I)$
(I,B)	2						1	S_v	0.2	-	0.0
Data	g_1, g_2						g_3				

Pair	$n_p(G,A)$	$n_q(G,A)$	$n_i(G,A)$	$n_o(G,A)$	$n_i(A,G)$	$n_q(A,G)$	$n_p(A,G)$	(G,A)	$\sigma(G,A)$	(A,G)	$\sigma(A,G)$
(G,A)	1				1	1		S_p	0.6	-	0.0
Data	g_3				g_2	g_1					

Navigation icons: back, forward, search, etc.

[34] Te liczby kryteriów decydują o tym, która z pięciu relacji i czy w ogóle któraś z nich zachodzi dla danej pary. Nazwy tych relacji to kwasi-dominacja, dominacja kanoniczna, pseudo-dominacja, sub-dominacja i veto-dominacja. Poczynając od góry slajdu warunki są najbardziej wymagające. Przykładowo, kwasi-dominacja a nad b wymaga by b nie było silnie lub słabo preferowane nad a na żadnym kryterium, a liczba kryteriów na których a jest silnie lub słabo preferowane nad b lub nierozróżnialne ale z lepszą oceną musi być wyższa niż liczba kryteriów, na których b jest nierozróżnialne z a ale z lepszą oceną. Z kolei dla sub-dominacji a nad b wystarczy by nie było żadnego kryterium, na którym b jest silnie preferowane nad a . W związku z tymi słabnącymi warunkami coraz mniejsze są wiarygodności przypisywane parom, które je spełniają. Ich arbitralne wartości to 1 dla kwasi, 0.8 dla kanonicznej, 0.6 dla pseudo, 0.4 dla sub i 0.2 dla veto. Gdy żadna z nich nie zachodzi, to wiarygodność jest równa 0. Weryfikacja prawdziwości odbywa się od najbardziej wymagającej relacji i zatrzymujemy się na pierwszej, dla której warunki będą spełnione, bo jest jasne że dla wszystkich pozostałych też to się stanie. Spójrzmy więc na parę (Włochy, Belgia) z naszego problemu. Na kryterium g_1 i g_2 Włochy są silnie preferowane nad Belgię, a na g_3 to Belgia jest silnie preferowana nad Włochy. Konfrontując te liczby z warunkami, dowiadujemy się, że dla pary (Włochy, Belgia) zachodzi veto-dominacja i wiarygodność jest równa 0.2, a dla pary odwrotnej nie zachodzi żadna relacja i wiarygodność jest zerowa. Dla pary (Niemcy, Austria) mamy 1 kryterium, na którym silnie preferowane są Niemcy, 1 na którym są nierozróżnialne z lepszą oceną Austrii i 1 na którym słabo preferowana jest Austria. W stronę (Niemcy, Austria) zachodzi więc pseudo-dominacja i wiarygodność jest równa 0.6, a w stronę (Austria, Niemcy) znowu wiarygodność jest zerowa. Takie badanie trzeba by przeprowadzić dla wszystkich par, a eksploatację macierzy wiarygodności realizować z wykorzystaniem destylacji.

- **Research** on ELECTRE methods is still **evolving rapidly**, even though the family of approaches dates back to the 60s of the 20th century
- ELECTRE methods have a long history of successful **real-world applications** with an impact on the life of populations
-  K. Govindan, M. Jepsen, ELECTRE: A comprehensive literature review on methodologies and applications, *European Journal of Operational Research*, 250(1):1-29, 2016
- **Major application fields:** agriculture and forest management, energy, environment and water management, finance, medicine, military, and transportation
- When applying ELECTRE methods, analysts should pay attention to the characteristics of the context and also to the (theoretical) weaknesses of these methods
 - *All MCDA methods have theoretical limitations.*
- *Limitations of ELECTRE:* no scoring and intransitivities of preferences (the latter only if we impose a priori that preferences should be transitive)

[35] Korzenie metod ELECTRE sięgają lat 60. ubiegłego wieku. Jednak rodzina ta nadal dynamicznie się rozwija. Podejścia te oferują unikalne korzyści, które omówiliśmy w początkowej części wykładu. Mają one jednak również pewne ograniczenia, które należy rozważyć, planując ich wykorzystanie w praktyce. Jedno z nich polega na braku możliwości punktowania wariantów, a drugie dotyczy braku przechodniości. Jak wskazuje przegląd literatury dotyczącej ELECTRE, metody te mają jednak długą historię udanych zastosowań w świecie rzeczywistym. Ich główne obszary to rolnictwo, energia, środowisko i gospodarka wodna, finanse, transport i medycyna.

- **Ranking of suburban line extension projects** on the Paris metro system (Roy and Hugonnard, 1982)
- **Ranking Moroccan villages** as part of the rural electrification program (El Mazouri et al., 2018)
- **Choosing a solid waste management system** in Finland (Hokkanen and Salminen, 1998)
- **Location of a depolluting** (municipal waste incineration) **plant** in Switzerland (Bollinger et al. 1997)
- **Rank websites of tourist destinations** in Catalonia (Del-Vasto Terrientes, 2015)
- **Fan zone localization** during UEFA EURO 2012 in Poznan, Poland (Zmuda-Trzebiatowski et al., 2012)



[36] Jeśli chodzi o ELECTRE III i IV to przykładowe zastosowania pokazano na ostatnim slajdzie. Dotyczą one tak różnorodnych tematów jak wybór wariantu rozbudowy paryskiej linii metra czy utworzenie rankingu marokańskich wiosek w ramach programu ich elektryfikacji. W Finlandii stosowano je do wyboru systemu zarządzania odpadami stałymi, w Szwajcarii do podjęcia decyzji o lokalizacji zakładu spalania odpadów komunalnych, a w Katalonii do rankingu stron internetowych miejscowości turystycznych. Wreszcie w Poznaniu, przed turniejem EURO 2012, ELECTRE III była wykorzystana do wyboru lokalizacji strefy kibica.