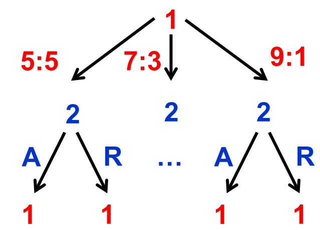


Game Theory: Congestion and Extensive Games

Miłosz Kadziński
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology, Poland

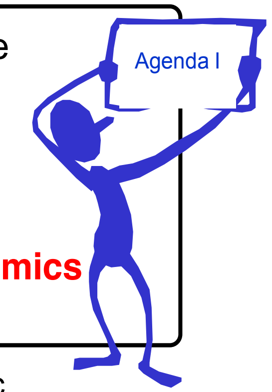
[1] Na poprzednim wykładzie poświęconym teorii gier omówiliśmy rożne metody służące do rozwiązania gier strategicznych w postaci normalnej, w których gracze podejmują swoje akcje jednocześnie. Głównym bohaterem tamtego wykładu była równowaga Nasha, a więc profil strategii, po jednej dla każdej gracza, które dla siebie nawzajem stanowią najlepsze możliwe odpowiedzi. Oznacza to, że żaden z graczy nie ma motywacji, by jednostronnie od takiego ustalonego profilu odstąpić i zmienić swoją akcję. Omówiliśmy równowagi w wersji czystej, gdzie strategia gracza odpowiada pojedynczej akcji, oraz mieszanej, gdzie gracz wybiera spośród dostępnych dla siebie akcji zgodnie z pewnym ustalonym rozkładem prawdopodobieństwa. Dziś skupimy się na dwóch rodzajach specyficznych gier nazywanych grami zatłoczenia oraz rozległymi. Te pierwsze charakteryzują się akcjami dotyczącymi pewnych zasobów, a wyróżnikiem tych drugich jest sekwencja ruchów, akcji następujących po sobie a nie realizowanych jednocześnie.

Congestion Games - Agenda

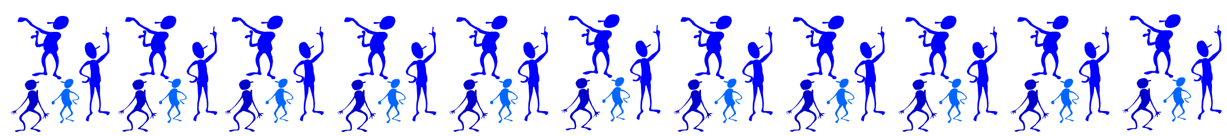
Every normal-form game has a Nash equilibrium,
although not necessarily one that is pure. Pure equilibria are nicer ☺

A family of games of practical interest where we can guarantee the existence of pure Nash equilibria

- **Congestion games**: example and definition
- **Potential games**: tool to analyze congestion games
- Existence of pure Nash equilibria for both types of games
- Finding those equilibria by means of **better-response dynamics**
- (Briefly) price of anarchy: quality guarantees for equilibria



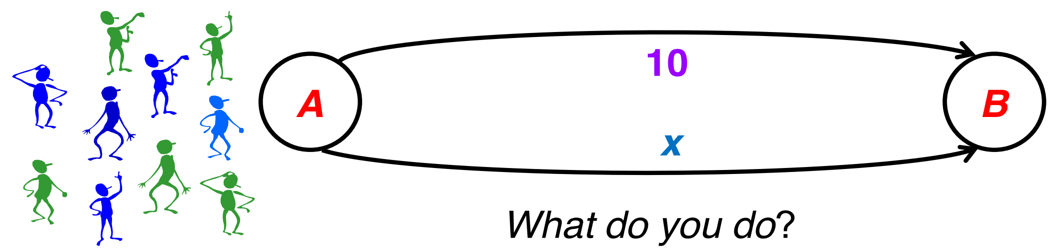
Y. Shoham and K. Leyton-Brown. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. *Cambridge University Press*, 2012



[2] Najważniejszym wynikiem omówionym na pierwszym wykładzie było Twierdzenie Nasha z 1951 roku. Mówi ono, że dla każdej gry w postaci normalnej istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha, przy czym niekoniecznie musi mieć ona charakter czysty. Mamy jednak gwarancję wystąpienia równowagi mieszanej. Oczywiście czyste równowagi są dla ludzi bardziej intuicyjne, ponieważ każdy gracz realizuje w nich konkretną akcję. Mamy więc pewność co do tego, co zrobi. W pierwszej części wykładu omówimy gry, które są interesujące z praktycznego punktu widzenia, a dla których zagwarantowane jest istnienie czystych równowag Nasha. Nazywają się one grami zatłoczenia. Pokażemy dla nich kilka przykładów i zdefiniujemy je w formalny sposób. Narzędziem służących do ich analizy będą tzw. gry potencjalne. Będą nas interesowały dowody istnienia czystych równowag Nasha dla gier zatłoczenia i potencjalnych, a algorytm służący do ich znalezienia nazywa się „dynamiką lepszej odpowiedzi”. Na koniec wspomnimy o pojęciu ceny anarchii, która służy do oceny jakościowej równowagi Nasha.

Example: Traffic Congestion

10 *people need to get from* ***A*** *to* ***B****. Everyone can choose between the* ***top*** *and the* ***bottom route****. Via the top route, the trip takes* ***10 mins****. Via the bottom route, it depends on* ***the number of fellow travelers****: it takes as many minutes* ***x*** *as there are people using this route.*



What do you do?
What are the pure Nash equilibria?

[3] Rozpocznijmy od omówienia 2 przykładowych gier zatłoczenia. Pierwsza z nich dotyczy korków w ruchu drogowym. Załóżmy, że 10 osób musi dostać się z punktu A do punktu B. Każda z nich może wybrać między ścieżką górną lub dolną, widocznymi na rysunku. Czas wymagany do pokonania ścieżki górnej to zawsze 10 minut. Z kolei dla ścieżki dolnej, czas ten zależy od liczby osób, które także ją wybiorą – precyzyjniej, podróż dolną ścieżką zajmuje tyle minut x, ile osób (x) z tej ścieżki równocześnie będzie korzystać. Mamy więc do czynienia z pewnymi zasobami, co do których gracze podejmują akcje. Wynik gry zależy od tego, ile osób wybierze dany zasób. Istnieją też pewne funkcje kosztu skojarzone z zasobami, których wartość zależy od zatłoczenia na tym zasobie. Jakie są równowagi Nasha w tej grze? Przypomnijmy, że jest to sytuacja, w której nikt jednostronnie nie chce odstąpić od ustalonego profilu akcji. Równowagą Nasha jest więc tu sytuacja, w której wszyscy wybierają ścieżkę dolną – koszt każdego gracza jest wtedy równy 10 i zmiana na ścieżkę górną tego nie polepszy. Równowagą jest też sytuacja, w której 9 dowolnych graczy wybiera ścieżkę dolną, a 1 – górną. Znów nikomu się tu nie opłaca zmienić wyboru, bo albo na tym straci albo utrzyma swój koszt.

Example: The El Farol Bar Problem

100 *people consider visiting the* ***El Farol Bar*** *on a Monday night. They all have identical preferences*:

- If 60 or more people show up, it's nicer to be at home
- If fewer than 60 people show up, it's nicer to be at the bar

Now what? *What are the pure Nash equilibria of this game*?

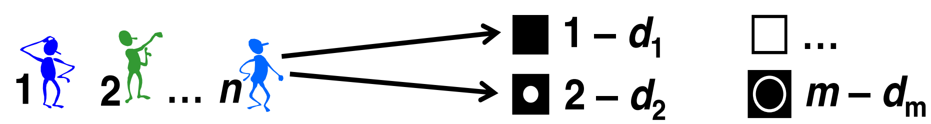
[4] Drugi przykład dotyczy wizyty w barze El Farol w miejscowości Santa Fe w stanie Nowy Meksyk. Wizytę taką rozważa 100 osób, które mają takie same preferencje: Jeżeli w barze pojawi się co najmniej 60 osób, to będzie w nim bardzo ciasno i lepiej wtedy zostać w domu. Jeśli zaś wizytę w barze wybierze mniej niż 60 osób, to bardziej preferowana jest wizyta w barze ze względu na przyjemną atmosferę przy mniejszej liczbie osób. Każdy musi zdecydować, czy iść do baru, w tym samym momencie, nie wiedząc, jakie są wybory pozostałych osób. Znów mamy do czynienia z pewnymi zasobami, pomiędzy którymi gracze mają wybór. Od tego ile osób wybierze pewien zasób (bar), tj. zrealizuje akcję związana z danym zasobem, zależy wynik gry.

Congestion Games - Notation

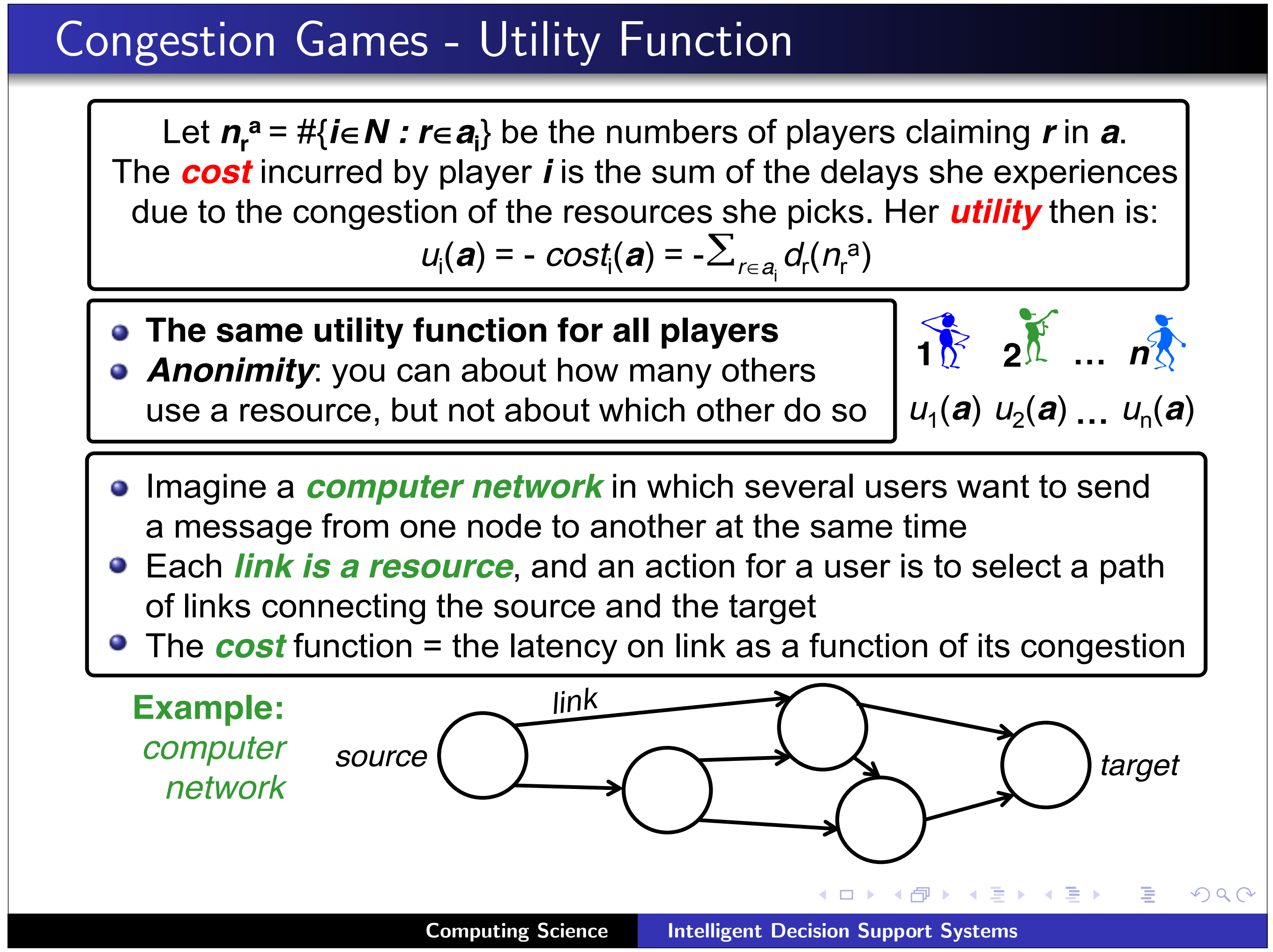
A normal-form game is a tuple $\langle N, R, A, d \rangle$ where:

- $N = \{1, \ldots, n\}$ is a **finite set of players** (or agents)
- $R = \{1, \ldots, m\}$ is a **finite set of resources**
- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ is a **finite set of action profiles** $a = (a_1, \ldots, a_n)$, with $A_i \subseteq 2^R$ being the **set of actions** available to player $i \in N$
- $d = (d_1, \ldots, d_m)$ is a vector of **delay (cost) functions** $d_r : N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, each of which is required to be non-decreasing

- Every player i chooses a subset of resources to use (that is action)
- Each d_r is associated with a resource (not with a player)
  Simplification of games via constraints on the effects that a single player's action can have on other players' utilities



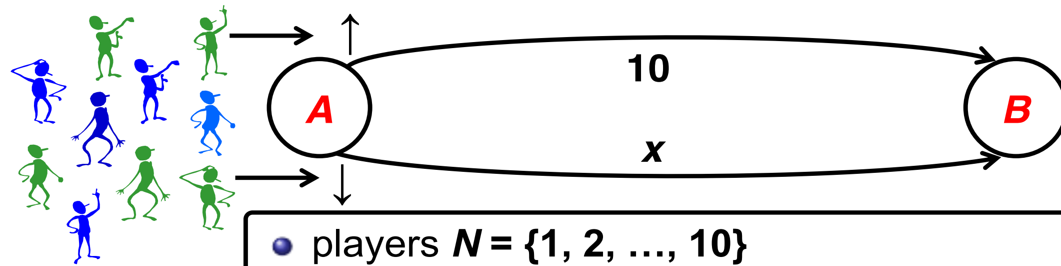
[5] Grę zatłoczenia definiujemy jako krotkę, składającą się z 4 elementów. Pierwszym (N) jest skończy zbiór graczy. Drugim (R) jest skończony zbiór zasobów. Jest to nowy element w stosunku do gier strategicznych w postaci normalnej omawianych na ostatnim wykładzie. Trzecim elementem (A) jest skończony zbiór profili akcji po jednej dla każdego gracza. Akcje każdego gracza dotyczą wyboru podzbioru zasobów R. Wszystkich możliwych podzbiorów takich zasobów jest 2^R. Wreszcie mamy też zbiór funkcji opóźnień (kosztów) związanych z zasobami (funkcja d_r jest skojarzona z zasobem r). Wartość tych funkcji (zawsze nieujemna) zależy od zbioru graczy, którzy wybierają dany zasób. Co ważne są to funkcje niemalejące, więc wykorzystanie danego zasobu przez większą liczbę osób nie może prowadzić do spadku wartości takiej funkcji opóźnienia. Jest to w pewnym sensie gra uproszczona, bo ogranicza efekty, jakie może mieć akcja pojedynczego gracza na użyteczności i zadowolenie innych graczy.



[6] W grach zatłoczenia, funkcja użyteczności jest związana z kosztem, który ponosi dany gracz w związku z realizacją profilu akcji a przez wszystkich graczy. Oczywiście im większy koszt, tym mniejsza użyteczność, stąd koszt w definicji użyteczności jest zanegowany. Z kolei sam koszt zależy od zasobów, których dotyczy akcja danego gracza (r w a_i), a ściślej rzecz biorąc od liczby osób, które zadeklarowały wykorzystanie tych zasobów (odpowiedni symbol zdefiniowano na górze slajdu). Aby wyobrazić sobie takie funkcje użyteczności, możemy pomyśleć o sieci komputerowej, w której wielu użytkowników pragnie wysłać wiadomość od wierzchołka źródłowego do wierzchołka celu. Istnieją różne drogi pokonania takiej ścieżki, ale wszystkie one biegną przez połączenia (linki), które można traktować jako dostępne zasoby. Akcja danego gracza dotyczy więc wyboru takich połączeń, które utworzą ścieżkę od źródła do celu. Funkcja kosztu jest pewnym opóźnieniem na poszczególnych połączeniach, które jest pochodną zatłoczenia wynikającego z tego, że wielu użytkowników może wybrać to samo połączenie. Co istotne, funkcja użyteczności jest taka sama dla wszystkich graczy. Wiąże się to z własnością anonimowości, która w tym konkretnym zastosowaniu oznacza, że interesuje nas ilu graczy (użytkowników) korzysta z danego zasobu, a nie to, którzy z nich to konkretnie robią.

Formally Modelling the Examples (1)

10 *people need to get from* ***A*** *to* ***B****. Everyone can choose between the* ***top*** *and the* ***bottom route****. Via the top route, the trip takes 10 mins. Via the bottom route, it depends on the number of fellow travellers: it takes as many minutes x as there are people using this route.*



- players $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots, 10\}$
- resources $\boldsymbol{R} = \{\uparrow, \downarrow\}$
- action spaces $\boldsymbol{A_i} = \{\{\uparrow\}, \{\downarrow\}\}$ representing the two routes
- delay functions $\boldsymbol{d_\uparrow} = \mathbf{x \rightarrow 10}$ and $\boldsymbol{d_\downarrow} = \mathbf{x \rightarrow x}$

[7] Wróćmy do naszych dwóch przykładów, aby wyjaśnić przyjętą notację. Dla przykładu z zatłoczeniem na ścieżkach, mamy zbiór N składający się z 10 graczy oraz zbiór R składający się z 2 ścieżek, górnej i dolnej. Są to nasze zasoby. Przestrzeń dopuszczalnych akcji dla każdego gracza jest taka sama i dotyczy wyboru 1 z 2 ścieżek. Z kolei funkcja opóźnienia dla ścieżki górnej zawsze przyjmuje wartość 10 (dla wszystkich liczb graczy x). Dla ścieżki dolnej przyjmuje ona zaś wartość x dla x graczy, którzy z niej korzystają. W tym wypadku jest więc ona zależna od liczby graczy, wybierających dany zasób.

Formally Modelling the Examples (2)

100 *people consider visiting the* ***El Farol Bar*** *on a Monday night. They all have identical preferences:*

- If 60 or more people show up, it's nicer to be at home
- If fewer than 60 people show up, it's nicer to be at the bar

- players $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots, 100\}$
- resources $\boldsymbol{R} = \{☺, ⌂_1, ⌂_2, \ldots, ⌂_{100}\}$
- action spaces $\boldsymbol{A}_i = \{☺, ⌂_i\}$ representing the **bar** and player *i*'s home
- delay functions $d_{☺} = x \rightarrow \mathbf{1}_{x \geq 60}$ and $d_{⌂_i} = x \rightarrow ½$

Remark: *Neither example makes full use of the power of the model, as every player only ever claims a single resource*

[8] Dla problemu baru El Farol, zbiór graczy składa się ze 100 osób z identyfikatorami od 1 do 100. Zbiór zasobów jest odrobinę większy, bo uwzględnia bar oraz dom każdego z graczy. Przestrzeń akcji dla każdego gracza dotyczy jednak tylko baru i jego domu. Nie korzystamy więc ze zbioru wszystkich możliwości, w szczególności wszystkich możliwych podzbiorów, bo każdy gracz wybiera w danym momencie tylko jeden zasób. Funkcja opóźnienia związana z barem przyjmuje wartość 1 (jest to niekorzystna wartość), gdy wybierze go co najmniej 60 osób (x >= 60) oraz 0 gdy tych osób będzie mniej niż 60. Dla domu każdego z graczy funkcja dla dowolnej wartości x przyjmuje wartość 1/2. Chodzi o to, by była to wartość pomiędzy 0 i 1, oddająca dobroć tego wyboru, gdy w barze jest co najmniej 60 osób, i jego zło – gdy w barze jest mniej niż 60 osób.

Variations and Existence of Pure Nash Equilibria

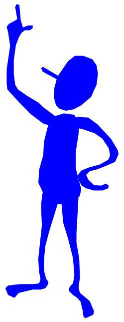
Our model of congestion games has certain restrictions:

- Utility functions are ***additive*** (no synergies between resources)
- Delay functions are ***not player-specific*** (no individual tastes)

Some careful relaxations of these assumptions have been considered in the literature, but we are not going to do so here.

Theorem (Rosenthal, 1973) Every **congestion game** has at least one **pure Nash equilibrium**

R.W. Rosenthal. A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2(1):65-67, 1973.



Nice, because mixed-strategy equilibria are open to criticism and if we want to compute a sample equilibrium, it is relatively easy

[9] Nasz model gry ma pewne ograniczenia, które są często poluźniane w literaturze naukowej i praktyce. My tych poluźnień nie będziemy jednak rozważać. Musimy być ich jednak świadomi. Pierwsze z nich dotyczy addytywnego charakteru funkcji użyteczności. W definicji sumujemy koszty po wszystkich zasobach, których dotyczy akcja danego gracza. Nie może być więc między tymi zasobami żadnych interakcji. Drugie ograniczenie to fakt, że funkcje opóźnienia nie są zależne od graczy. Mamy takie same funkcje użyteczności dla wszystkich graczy, więc nie możemy modelować specyficznych gustów czy preferencji poszczególnych graczy. Na przykład, w problemie baru El Farol, ktoś ten próg mógłby w teorii mieć inny niż 60 osób. Ważne dla naszego wykładu twierdzenie zostało sformułowane przez Rosenthala: każda gra zatłoczenia ma co najmniej jedną czystą równowagę Nasha – zwróćcie uwagę na słowo „czystą". To świetnia wiadomość, bo nie dość, że dużo łatwiej znaleźć czyste równowagi niż mieszane, to jeszcze są one dużo bardziej intuicyjne dla ludzi.

A normal-form game <N, A, u> is a **potential game** if there exists a function $P : A \rightarrow \mathbf{R}$ such that, for all $i \in N$, $a \in A$, and $a_i' \in A_i$:

$$u_i(a) - u_i(a_i', a_{-i}) = P(a) - P(a_i', a_{-i})$$

*The game underlying the Prisonner's Dilemma is a **potential game**, because we can define a function **P** from action profiles (matrix cells) to the reals that correctly tracks any **unilateral deviation**:*

O \ M	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20

P(C,C) = 50
P(C,D) = 60
P(D,C) = 60
P(D,D) = 65

*For example, if **Mateusz** deviates from* (C,C) *to* (C,D)*, his utility will increase by 10, and indeed:* ***P*(C,D) - *P*(C,C)** = 60 - 50 = 10

[10] Narzędziem, które posłuży nam do analizy gier zatłoczenia są gry potencjalne. Gra potencjalna to gra w postaci normalnej składająca się z takich samych elementów jak gra strategiczna (N, A, u) o bardzo specyficznej funkcji użyteczności wszystkich graczy (patrz warunek odnoszący się do u oraz P). Warunek ten mówi, że jeśli rozważyć 2 profile akcji, które różnią się tylko akcją gracza i (czyli profil a oraz profil taki jak a, w którym gracz i zmienia swoją akcję), to różnica użyteczności dla gracza i związanych z realizacją tych dwóch akcji musi być równa różnicy w wartościach pewnej funkcji P skojarzonej z tymi akcjami i nazywanej funkcją potencjału. Intuicyjnie, funkcja ta we właściwy sposób modeluje jednostronne odchylenia od ustalonego profilu akcji w przestrzeni użyteczności, które uzyskuje gracz zmieniający swoją akcję. Taką grę potencjalną jest np. gra związana z dylematem więźnia. Możemy bowiem zdefiniować funkcję potencjału P z profili akcji na liczby rzeczywiste, które odzwierciedlają takie jednostronne odchylenia – zmiany akcji. Przykładowe wartości podano na slajdzie (50, 60, 60, 65). Przykładowo, dla Mateusza (M) – jeśli zmienia on swoją akcję z C na D, prowadząc z profilu (C,C) na (C,D), to jego użyteczność wzrośnie z -10 na 0 (czyli o 10), a to taka sama wartość jak dla różnicy P(C,D) i P(C,C), czyli 60-50=10. Dalej, np. dla Oliwii (O), zmiana z (C,D) na (D,D) skutkuje zmianą użyteczności z -25 na -20, czyli wzrostem o 5, a to jest równe P(D,D) – P(C,D) = 65-60=5. Dla dylematu więźnia da się więc zdefiniować taką funkcję potencjału.

Example: Matching Pennies

*Each player gets a penny and secretly displays either **H**eads or **T**ails.*
***Oliwia** wins if the two pennies agree; **Mateusz** wins if they don't.*

O \ M	H	T
H	1 \ -1	-1 \ 1
T	-1 \ 1	1 \ -1

***P*(H,H)** = 5
***P*(H,T)** = 7
***P*(T,H)** = 3
***P*(T,T)** = ? (1 and 9)

Exercise: Show that this is **not** a potential game

[11] Nie jest to możliwe dla każdej gry. Przykładowo, przeanalizujmy grę w monety (orzeł-reszka). Jeżeli wskazania 2 monet są takie same (niezależnie czy są to 2 orły czy 2 reszki), to wygrywa Oliwia (O). Jeśli ich wskazania są różne, to wygrywa Mateusz (M). Spróbujmy zdefiniować funkcję potencjału. Można zacząć w dowolnej komórce z dowolną wartością. Przypiszmy więc 5 do (H,H). Zmiana (H,H) na (H,T) musi spowodować wzrost o 2 (bo 1-(-1)=2), czyli mamy wartość 7. Zmiana (H,H) na (T,H) musi spowodować spadek o 2 (bo -1-1 = -2), czyli mamy wartość 3. Na razie działa, ale teraz chcąc przejść z (T,H) do (T,T) oraz z (H,T) do (T,T) musielibyśmy przypisać do (T,T) albo 1 albo 9. Nie ma więc tego samego wskazania i zdefiniowanie funkcji potencjału jest niemożliwe.

Existence of Pure Nash Equilibria

A game ***<N, A, u>*** is called a **potential game** if there exists a function ***P*** : ***A*** → **R** such that, for all ***i***∈***N***, ***a***∈***A***, and ***a***$_i$'∈***A***$_i$:

$$u_i(a) - u_i(a_i', a_{-i}) = P(a) - P(a_i', a_{-i})$$

Theorem (Monderer and Shapley, 1996)
Every **potential game** has at least one **pure Nash equilibrium**

D. Monderer and L.S. Shapley. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 14(1):124-143, 1996.

Proof: Take (one of) the action profile(s) ***a*** for which ***P*** is maximal. By definition, no player can benefit by deviating using a pure strategy. Thus, also not using a mixed strategy. Hence, ***a*** must be a pure NE.

O \ M	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	-20 \ -20

P(C,C) = 50
P(C,D) = 60
P(D,C) = 60
P(D,D) = 65

[12] Twierdzenie Monderera oraz Shapleya mówi, że każda gra potencjalna posiada co najmniej jedną czystą równowagę Nasha. Dowód jest bardzo prosty. Wystarczy wystartować z profilu akcji, z którym skojarzona jest najwyższa wartość funkcji potencjału. Dla dylematu więźnia byłby to profil akcji (D,D), gdzie w naszym przykładzie P jest równe 65. Jeśli takich profili byłoby więcej, to trzeba wybrać jeden z nich. Teraz, z definicji funkcji potencjału wiemy, że różnice w wartościach odzwierciedlają różnice w użytecznościach dla graczy, którzy zmieniają ruch. Skoro jesteśmy w profilu akcji dla którego P jest największe, to obojętnie kto od tego profilu odstąpi, nie poprawi swojej użyteczności ani strategią czystą ani mieszaną. W związku z tym, taki profil musi odpowiadać czystej równowadze Nasha.

Back to Congestion Games

We still need to prove that also every congestion game has a pure NE. We are done, if we can prove the following lemma:

Lemma: Every **congestion game** is a **potential game**.

Proof: Take any congestion game $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{d} \rangle$.

$$u_i(\boldsymbol{a}) = -\sum_{r \in a_i} d_r(\boldsymbol{n}_r^{\boldsymbol{a}}), \text{ where } \boldsymbol{n}_r^{\boldsymbol{a}} = \#\{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N} : \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{a}_i\}$$

Now define function $\boldsymbol{P}$ as follows:

$$P(\boldsymbol{a}) = -\sum_{r \in R} \sum_{k=1,\ldots,n_r^a} d_r(\boldsymbol{k}), \text{ for all } \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$$

It is easy to verify that: $\boldsymbol{u_i(a) - u_i(a_i', a_{-i}) = P(a) - P(a_i', a_{-i})}$.

Thus, $\boldsymbol{P}$ is a potential for our congestion game.

Intuition: $d_r(\boldsymbol{k})$ is the cost of the $\boldsymbol{k}$-th player arriving at resource $\boldsymbol{r}$

[13] Wynik jest znaczący, ale jednak wciąż dotyczy gier potencjalnych, a nie gier zatłoczenia. Wystarczyłoby jednak dowieść, że każda gra zatłoczenia jest grą potencjalną, a wtedy przez implikację, musiałaby dla nich istnieć czysta równowaga Nasha. Taki dowód przedstawiony jest na tym slajdzie. Startujemy z gry zatłoczenia, w której funkcja użyteczności dla gracza i jest zdefiniowana jako zanegowana suma wartości funkcji opóźnienia dla zasobów, które gracz i wybiera w swojej akcji. Z kolei wartość tych funkcji dla danego zasobu zależy od liczby graczy, które ten zasób w danym profilu akcji a wybrały. Zdefiniujmy teraz funkcję potencjału P w specyficzny sposób, tj., jako zanegowaną sumę - po wszystkich zasobach - kosztu związanego z ich wybraniem przez różne liczby k graczy, od 1 aż do liczby graczy, którzy rzeczywiście ten zasób wybrali w profilu akcji a. Różnice takich potencjałów są równe różnicom użyteczności dla profili akcji różniących się akcją realizowaną przez jednego gracza. Skoro tak, to funkcję P można zdefiniować dla gry zatłoczenia i jest ona grą potencjalną.

Better-Response Dynamics

We ***start*** in some action profile $\boldsymbol{a}^0$. Then, ***at every step***, some player ***i unilaterally deviates*** to achieve an ***outcome*** that is ***better*** for her:

- $a_i^k \in A_i$ such that - $u_i(a_i^k, a_{-i}^{k-1}) > u_i(a_i^{k-1})$
- $a_{i'}^k = a_{i'}^{k-1}$ for all other players $i \in N \setminus \{i\}$

This leads to a sequence $\boldsymbol{a}^0 \to \boldsymbol{a}^1 \to \boldsymbol{a}^2 \to \boldsymbol{a}^3 \to \dots$

	A	B
A	3 \ 3	0 \ 4
B	4 \ 0	2 \ 2

$\boldsymbol{a}^0 = (A, A) \to$
$\to \boldsymbol{a}^1 = (A, B) \to$
$\to \dots$?

A game has the **finite improvement property** (FIP) if it does not permit an infinite sequence of better responses of this kind.

Observation: If a profile ***a*** does not admit a ***better response***, then ***a*** is a ***pure Nash equilibrium***. The converse is also true.

Observation: Every game with the ***FIP*** has a ***pure Nash equilibrium***. The converse is not true (*see next slide*).

[14] Jak jednak znaleźć taką czystą równowagę Nasha? Wystarczy wystartować w dowolnym profilu akcji a0 i w każdym kolejnym kroku, jakiś gracz i powinien jednostronnie (jako jedyny) zmienić swoją akcję tak, by osiągnąć ściśle lepszy wynik (wyższą użyteczność); akcje pozostałych graczy w tym kroku powinny zostać bez zmian. Dla przykładu na rysunku, jeżeli wystartujemy w (A,A), to gracz z kolumny może zmienić akcję z A na B (i użyteczność z 3 na 4); jesteśmy w (A,B), itd. Prowadzi to do pewnej sekwencji profili akcji. Jeśli sekwencja ta jest skończona, to oznaczałoby że na pewnym etapie nie możemy znaleźć zmiany akcji, która prowadziłaby do poprawy użyteczności dla jakiegoś gracza. Formalnie nazywa się to własnością skończonej poprawialności. Jest oczywiste, że profil, który nie dopuszcza takiej lepszej odpowiedzi musi być równowagą Nasha. A zatem każda gra z własnością skończonej poprawialności musi mieć czystą równowagę Nasha.

Exercise: Better-Response Dynamics

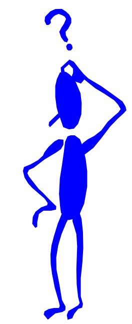
For the games below, all pure Nash equilibria are shown in boldface:

	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	**-20 \ -20**

	L	C	R
T	1 \ -1	-1 \ 1	-5 \ -5
M	-1 \ 1	1 \ -1	-5 \ -5
B	-5 \ -5	-5 \ -5	**5 \ 5**

	H	T
H	1 \ -1	-1 \ 1
T	-1 \ 1	1 \ -1

Suppose we start in the upper lefthand cell
and players keep playing better (or best) responses.
What will happen?



On some games, the myopic best response algorithm can fail
to terminate, but for the congestion and potential games…

[15] Spójrzmy na kilka przykładów, dla których równowagi Nasha – o ile istnieją – wyróżniono pogrubioną czcionką. Zacznijmy zawsze w lewym górnym rogu i szukajmy lepszej odpowiedzi. Dla macierzy z lewej strony, możemy iść z (C,C) do (C,D) i potem do (D,D) – skończymy w czystej równowadze Nasha, czyli profilu akcji niedopuszczającym lepszej odpowiedzi. Dla macierzy środkowej, startując w (T,L) przejdziemy do (T,C), potem do (M,C), potem do (M,L) i znów do (T,L). Będziemy kręcić się w kółko. To samo dla macierzy z prawej, która reprezentuje grę w parowanie monet. Wiemy więc, że dla niektórych gier takie zachłanne szukanie lepszej odpowiedzi nie pozwala na skończenie algorytmu. Co jednak z grami zatłoczenia i potencjalnymi?

Finite Improvement Property

Potential and congestion games not only all have pure Nash equilibria, but it also is natural to believe players will actually find them ...

Theorem (Moderer and Shapley, 1996) Every **potential game** has the ***FIP***. Thus, also every ***congestion game*** has the ***FIP***.

D. Monderer and L.S. Shapley. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 14(1):124-143, 1996.

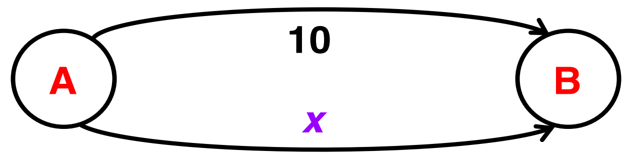
Proof: By definition of the potential $\boldsymbol{P}$, we get $\boldsymbol{P(a^k) - P(a^{k-1})}$ for any two consecutive action profiles in a better-response sequence. The claim then follows from finiteness.

[16] Szczęśliwie gry te mają własność, która sprawia, że nie tylko mają czyste równowagi Nasha, ale też stosunkowo prosto dla zaangażowanych w nie graczy jest te równowagi znaleźć. Mówi o tym twierdzenie Moderera oraz Shapleya: każda gra potencjalna ma własność skończonej poprawialności. Dowód wynika z definicji funkcji potencjału: różnice w potencjałach skojarzonych z profilami akcji różniącymi się akcją jednego gracza odpowiadają różnicom użyteczności dla tych profili. Jeśli ta różnica jest dodatnia – a tego wymaga dynamika lepszej odpowiedzi – to takich profili, do których możemy przejść jest skończona liczba. Przypomnijcie sobie, że dla parowania monet nie byliśmy w stanie zdefiniować funkcji potencjału, więc to nie była gra potencjalna.

Price of Anarchy

So: in a congestion game, the natural better-response dynamics will always lead us to a pure NE. Nice. *But*: how good is that equilibrium?

Recall our **traffic congestion example**:



10 people overall
top delay = 10 minutes
bottom delay = # on route

If $x \leq 10$ players use bottom route, social welfare (sum of utilities) is:

$$sw(x) = -[x \cdot x + (10 - x) \cdot 10] = -[x^2 - 10 \cdot x + 100]$$

- This function is maximal for $x = 5$ and minimal for $x = 0$ and $x = 10$
- In equilibrium, 9 or 10 people will use the bottom route (10 is worse)

The so-called **Price of Anarchy (PoA)** of this game is:

$$sw(10)/sw(5) = -100/-75 = 4/3$$

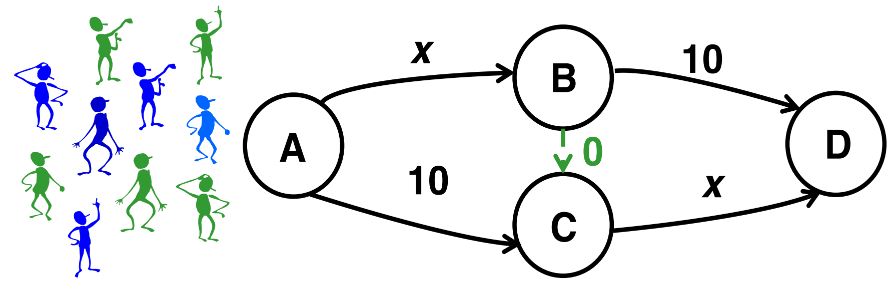
Thus: not perfect, but not too bad either (for this example).

Intuitively, **Price of Anarchy** is the proportion of additional social cost that is incurred because of players' self-interested behavior

[17] Wiemy więc, że w grach zatłoczenia dynamika lepszej odpowiedzi zawsze pozwoli na znalezienie czystej równowagi Nasha. Pytanie, które sobie trzeba postawić to: jak dobra jest ta równowaga? Rozważmy to na przykładzie gry z zatłoczeniem ścieżek. Spójrzmy na stopień, w którym ze znalezionej równowagi zadowolona jest cała grupa. Wykorzystamy do tego funkcję społecznego bogactwa w wersji utylitarnej, czyli sumy użyteczności dla wszystkich graczy. Jeśli x jest liczbą graczy korzystających z dolnej ścieżki, to takie społeczne bogactwo można wyrazić wzorem sw(x) przedstawionym na slajdzie. Funkcja ta przyjmuje największą wartość dla x=5 (dla takiej liczby społeczeństwo jako całość byłoby więc najbardziej zadowolone). Z kolei jest ona maksymalna dla x=0 lub x=10. W równowadze Nasha, to właśnie 10 osób korzysta z tej dolnej ścieżki (jest też równowaga, w której 9 osób z niej korzysta). Cena anarchii jest zdefiniowana jako stosunek społecznego bogactwa dla równowagi Nasha oraz optymalnego społecznego bogactwa. W naszym wypadku jest to -100 (dla x=10) do -75 (dla x=5), czyli 4/3. Można to postrzegać jako względny koszt, który płaci społeczeństwo jako całość z powodu samolubnego zachowania graczy, którzy nie chcą mieć gorzej niż inni gracze. Tak czy siak, w tym wypadku, nasza równowaga jest gorsza niż optimum z punktu widzenia społecznego bogactwa/zadowolenia, ale współczynnik 4/3 wskazuje, że nie jest to rozwiązanie złe.

Braess' Paradox

Something to think about. 10 people have to get from A to D:



If we consider the **delay-free link** from ***B*** to ***C***, this happens:

- In the worst equilibrium, everyone will take the route ***A-B-C-D*** and take 20 minutes! (Other equilibria are only slightly better.)

If the **delay-free link** from ***B*** to ***C*** is ***not*** present:

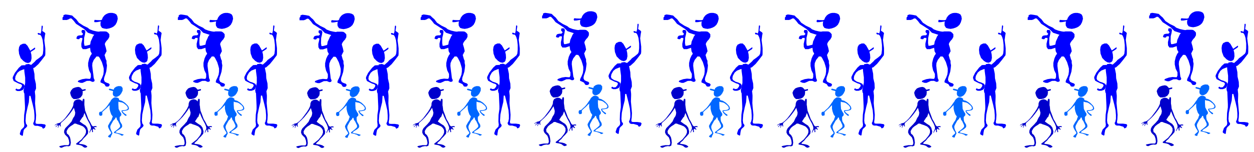
- In equilibrium, 5 people will use the top route ***A-B-D*** and 5 people the bottom route ***A-C-D***. Everyone will take 15 minutes.

[18] Inną ciekawostką związaną z grami zatłoczenia jest tzw. paradoks Braessa. Rozważmy grę przedstawioną na rysunku gdzie niektóre ścieżki mają stały koszt, a dla innych koszt ten zależy od liczby graczy x. Trzeba dostać się z punktu A do punktu D. Rozważmy 2 warianty tej gry, w których jest lub nie ma bezkosztowego połączenia między wierzchołkiem B oraz C. Jeśli je rozważymy, to równowagą Nasha będzie sytuacja, w której wszyscy gracze wybiorą ścieżkę ABCD. Zajmie to każdemu 20 minut, ale nikomu nie będzie się opłacało wybrać innej ścieżki. Jeśli jednak zabronilibyśmy bezkosztowego przejścia między B oraz C, to w równowadze, 5 osób wybierze ścieżkę ABD, a 5 – ścieżkę ACD. Każdemu zajmie to 15 minut. Wydaje się, że jest to sprzeczne z intuicją, bo w scenariuszu z połączeniem między B oraz C gracze mają dostępnych więcej opcji. Wyniki takie mają jednak mnóstwo praktycznych zastosowań. W wielu amerykańskich i niemieckich miastach taka analiza gier zatłoczenia doprowadziła do zamknięcia niektórych ulic dla ruchu, co poprawiło sytuację związaną z korkami w tych miastach.

Congestion Games - Summary

We have analyzed a specific class of games, the **congestion games**:

- Natural model for ***applications***
- ***Rosenthal's Theorem***: every congestion game has a pure NE
- Analysis via the more general ***potential games***
- Finite improvement property: can find NE via better responses
- **Price of anarchy**: how much worse if we don't impose outcome?
- Beware of counter-intuitive effects (**Braess' paradox**)

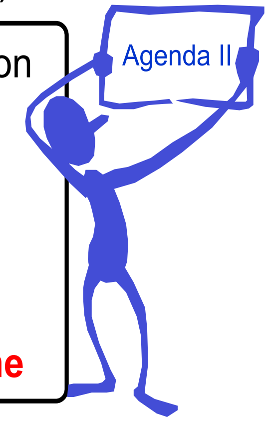


[19] W pierwszej części wykładu omówiliśmy gry zatłoczenia, które znajdują mnóstwo praktycznych zastosowań w scenariuszach, w których duże grupy ludzi korzystają z ograniczonych zasobów. Udowodniliśmy, że gry te mają czyste równowagi Nasha, na co pozwoliła nam analiza gier potencjalnych. Równowagi takie mogą być znalezione w wyniku zastosowania intuicyjnej procedury nazywanej dynamiką lepszej odpowiedzi. Omówiliśmy też ciekawe pojęcia odnoszące się do ceny anarchii oraz paradoksu Braessa. Ta pierwsza pokazuje, o ile gorszy jest wynik związany z równowagą Nasha w stosunku do układu optymalnego z punktu widzenia całej grupy. Ten drugi wskazuje na sprzeczne z intuicją efekty ograniczenia możliwości i zasobów dostępnych dla różnych graczy, poprawiające szczęście całej grupy czy społeczeństwa.

Extensive Games - Agenda

Extensive games model individual **actions being played in sequence**
(i.e., we do not assume players act simultaneously)

- Focus on modeling **extensive games** of perfect information (the temporal component made explicit)
- **Translation** from the extensive into the normal form
- **Zermelo's Theorem**: existence of pure Nash equilibria
- New solution concept: **subgame-perfect equilibria** (explicitly refer to the sequence in which players act)
- Famous examples: **ultimatum game** and **centipede game**



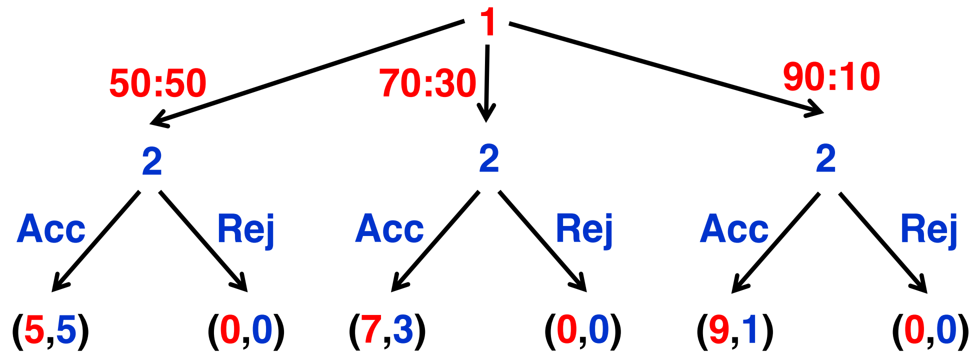
K. Leyton-Brown and Y. Shoham. Essentials of Game Theory: A Concise, Multi-disciplinary Introduction. *Morgan & Claypool Publishers*, 2008

[20] W drugiej części wykładu skupimy się na grach rozległych; dodać trzeba z doskonałą (pełną) informacją. Charakterystyka tych gier polega na realizacji ruchów sekwencyjnie, jednego po drugim, a nie jednocześnie jak to było w grach strategicznych w postaci normalnej omówionych na pierwszym wykładzie z teorii gier. Komponent czasowy będzie więc ewidentny. W trakcie wykładu pokażemy, jak przekształca się takie gry do postaci normalnej. Omówimy też twierdzenie Zermelo, które mówi o istnieniu czystych równowag Nasha dla gier rozległych. Wprowadzimy także nową koncepcję rozwiązania, która bezpośrednio opiera się na tym, że ruchy wykonywane są jeden po drugim – to rozwiązanie to równowaga doskonała z punktu widzenia podgier. Wreszcie pokażemy też dwa słynne przykłady gier rozległych, to jest grę w ultimatum oraz grę w stonogę.

Extensive Games - Example

Tree in the sense of graph theory, in which:

- **Node** represents the choice of one of the players
- **Edge** represents a possible action
- **Leaf** represents final outcomes



Player **1** chooses a division of a given amount of money.
Player **2** accepts this division or rejects it (in which case both get nothing).

[21] Gry rozległe są modelowane w postaci drzewa. Wierzchołki w takim drzewie odpowiadają wyborom dostępnym dla konkretnego gracza; krawędzie akcjom, które gracze realizują, a liście – końcowym wynikom, przypisującym użyteczność wszystkim graczom. W grze przedstawionej na slajdzie mamy dwóch graczy – pierwszy gracz – rozpoczynający grę – proponuje podział pieniędzy (trzy możliwe proporcje), a drugi akceptuje lub odrzuca taki podział, przy czym ruchy te rozpisane są dla każdej propozycji gracza 1. W liściach zapisano użyteczności w postaci (użyteczność pierwszego gracza, użyteczność drugiego gracza). Przykładowo, jeśli gracz 1 zaproponuje podział 70:30, a następnie gracz 2 to zaakceptuje (Acc), to użyteczność dla gracza 1 jest równa 7, a dla gracza 2 jest ona równa 3.

Strategic Games in Extensive Form

An extensive-form game is a tuple $\langle N, A, H, Z, \underline{i}, \underline{A}, \sigma, u\rangle$ where:

- $N = \{1, \ldots, n\}$ is a **finite set of players**
- A is a **single set of actions**
- H is a set of **choice nodes** (non-leaf nodes of the tree)
- Z is a set of **outcome nodes** (leaf nodes of the tree)
- $\underline{i} : H \to N$ is the **turn function**, fixing whose turn it is when
- $\underline{A} : H \to 2^A$ is the **action function**, fixing the playable action
- $\sigma : H \times A \to H \cup Z$ is the (injective) **successor function**
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ is a **profile of utility functions** $u_i : Z \to \mathbf{R}$

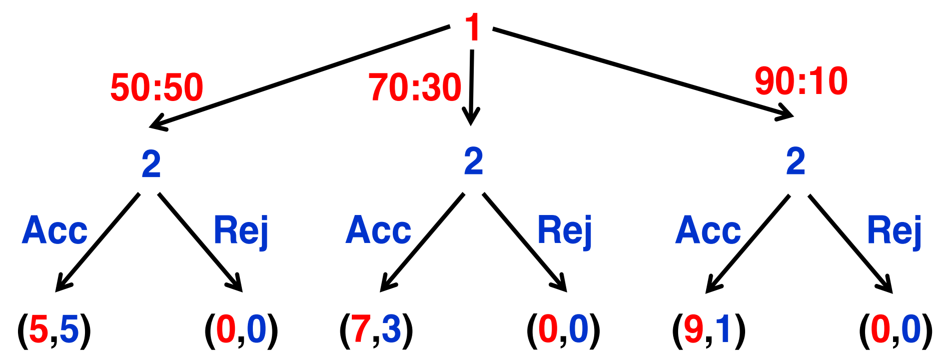
Must be finite. Must have exactly one root $h_0 \in H$ s.t. $h_0 = \sigma(h,a)$ for all $h \in H$ and $a \in A$. Must have $\underline{A}(h) \neq \varnothing$ for all nodes $h \in H$.

Remark: Requiring σ to be **injective** ensures every node has (at most) one parent (so the descendants of h_0 really form a tree).

[22] Formalna definicja gier rozległych jest dużo bardziej skomplikowana. Punktami wspólnymi są skończony zbiór N graczy oraz skończony zbiór funkcji użyteczności, po jednej dla każdego gracza. Zbiór akcji jest pojedynczy i oznaczamy go przez A. Mamy też dwa rodzaje wierzchołków: wierzchołki wyboru H oraz liście Z. Dla liści funkcja użyteczności każdego gracza tłumaczy je na użyteczności. Dla wierzchołków wewnętrznych (wyboru) tzw. funkcja akcji ustala, które akcje ze zbioru A są aktualnie w tym wierzchołku dostępne (jest to podzbiór zbioru A, czyli 2^A). W każdym wierzchołku wyboru jakieś akcje muszą być dostępne. Funkcja sigma to tzw. funkcja następstwa. Na podstawie wierzchołka ze zbioru H oraz podejmowanej w nim akcji ustala ona, do którego wierzchołka ze zbioru H lub Z przejdziemy. Ostatecznie, startując z korzenia i realizując różne akcje można trafić do wszystkich wierzchołków w drzewie. Dla wierzchołków wyboru istnieje też funkcja zmiany, która ustala, czyja kolej (którego gracza) jest aktualnie, tj. w danym wierzchołku. Zwróćcie uwagę, że każdy wierzchołek w takiej grze ma tylko jednego poprzednika – będziemy więc zawsze wiedzieć, jakie akcje doprowadziły do konkretnego stanu.

Example: Ultimatum Game

***Player* 1** chooses a division of a given amount of money.
***Player* 2** accepts this division or rejects it (in which case both get nothing).



What strategy would you adopt as ***Player* 1**? And as ***Player* 2**?

Exercise: Describe this game using our formal definition of extensive games. Note that the picture is missing names for nodes in $H \cup Z$.

$N = \{1,2\}$, A, H, Z, $\underline{i} : H \rightarrow N$ - **turn function**, $\underline{A} : H \rightarrow 2^A$ - **action function**, $\sigma : H \times A \rightarrow H \cup Z$ - **successor function**, $u_i : Z \rightarrow \mathbf{R}$ - **utility function**

[23] Spróbujmy odnieść te definicje do gry w ultimatum, która została przedstawiona na przedostatnim slajdzie. Mamy tu zbiór 2 graczy N={1,2}; jest zbiór akcji (np. 50:50 lub Acc), są wierzchołki wyboru i liście, którym na rysunku nie nadaliśmy nazw (ale w ogólności można by to zrobić); jest funkcja kolejności, która mówi że w jednym wierzchołku ma wybierać gracz 1, a w innym gracz 2; jest funkcji akcji, która dla każdego wierzchołka wskazuje, jakie akcje są dostępne (akcje te są pokazane przy krawędziach wychodzących z danej wierzchołka). Z kolei funkcja następstwa ustala, do którego wierzchołka trafimy, realizując akcję w danym wierzchołku (np. jeśli w korzeniu wybierzemy 50:50, to trafimy do wierzchołka po lewej stronie). Wreszcie mamy funkcję użyteczności dla każdego gracza, dzięki której w każdym liściu dowiaduje się on odnośnie wysokości swojej wypłaty. Mając do czynienia z grą w ultimatum, pytanie brzmi co byśmy zrobili? Co byśmy zrobili jako Gracz 1, a co jako Gracz 2?

Pure Startegies

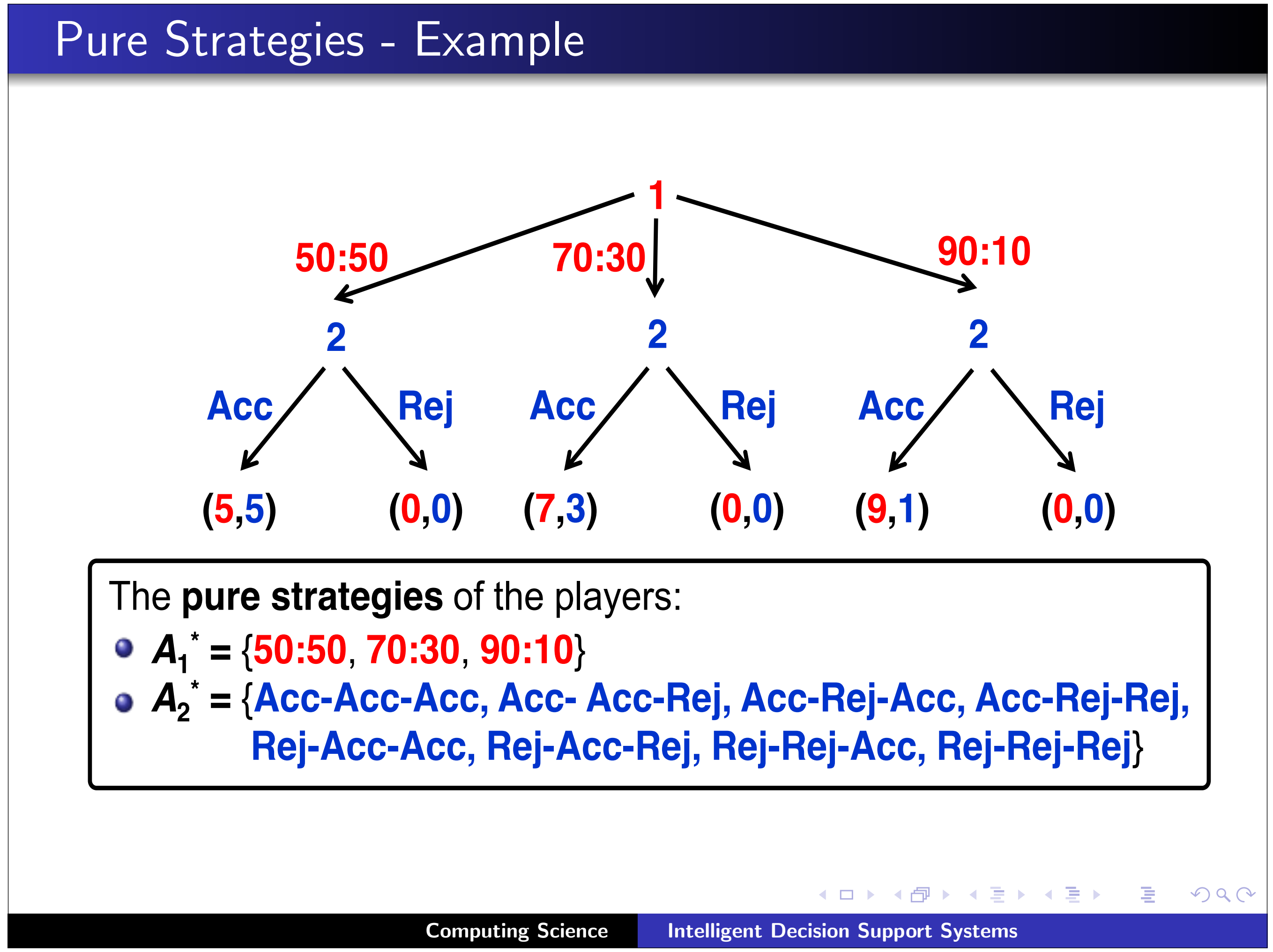
- Notation: Write $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} := \{\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H} \mid \underline{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{i}\}$ for the set of choice nodes in which it is player ***i***'s turn to choose an action.
- A **pure strategy** for player ***i*** maps nodes $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ to actions in $\underline{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{h})$
  Thus, it is a function $\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{i} : \boldsymbol{H}_\mathrm{i} \to \boldsymbol{A}$ that respects $\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{i}(\mathbf{h}) \in \underline{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{h})$
  (a complete specification of which deterministic action to take at every node ”belonging” to player ***i***)

  Remark: A strategy describes what to do for every choice node where it would be your turn, even those you may never actually reach.

Given a profile $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ of pure strategies, the **outcome** of the game is the outcome node computed by this program:

$h \leftarrow h_0$	// start at the root node
while $h \notin Z$ **do**	// player *i, whose turn it is, conducts*
$\quad h \leftarrow \sigma(h, \alpha_{\underline{i}(h)}(h))$	*an action (moving from one node to another)*
return h	// *terminate once reaching some leaf*

[24] Skupmy się na czystych strategiach. Oznaczmy przez H_i zbiór wierzchołków wyboru (należących do H), w którym to gracz i powinien wybrać swoją akcją. Czysta strategia gracza i w pewnym sensie mapuje każdy wierzchołek w zbiorze H_i na akcję dostępną w tym wierzchołku (a więc akcję ze zbioru A_(h)). Można to postrzegać jako specyfikację tego, co zrobiłby gracz i w każdym wierzchołku/stanie, w którym to od niego oczekujemy ruchu. Być może w niektórych realizacjach gry do niektórych z tych wierzchołków w ogóle nie dojdziemy. Tak czy siak musielibyśmy wiedzieć, co taki gracz w tych wierzchołkach by zrobił, gdybyśmy jednak w tych wierzchołkach się znaleźli. Taką specyfikację można postrzegać jako czystą strategię gracza i.
Rozważmy teraz profil takich czystych strategii, po jednej dla każdego gracza Jeśli nim dysponujemy, to jesteśmy w stanie obliczyć wynik gry. Wystarczy wystartować w korzeniu, następnie w każdym wierzchołku - dopóki nie jest on liściem - zrealizować określoną akcję gracza, którego jest kolej i przejść w ten sposób do kolejnego wierzchołka. Taką pętlę wyborów kontynuujemy aż dojdziemy do jakiegoś liścia – on jest wynikiem naszej gry, w którym dowiadujemy się o użytecznościach uzyskanych przez wszystkich graczy.



[25] Teraz jesteśmy więc już w stanie pokazać strategie czyste dostępne dla graczy w grze w ultimatum. Dla gracza 1 są to trzy podziały, bo on ma zrealizować swoją akcję tylko w jednym wierzchołku. Dla gracza 2 – musimy już jednak powiedzieć co zrobiłby on w każdym z trzech wierzchołków, w których jest jego kolej. Te strategie czyste różnią się więc od akceptacji we wszystkich trzech wierzchołkach do odrzucenia we wszystkich trzech wierzchołkach, przechodząc przez wszystkie możliwe kombinacje tych akcji.

Translation to Normal Form

Every extensive-form game can be translated into a normal-form game

We can translate $\langle N, A, H, Z, i, \underline{A}, \sigma, u\rangle$ to normal-form game $\langle N^*, A^*, u^*\rangle$:

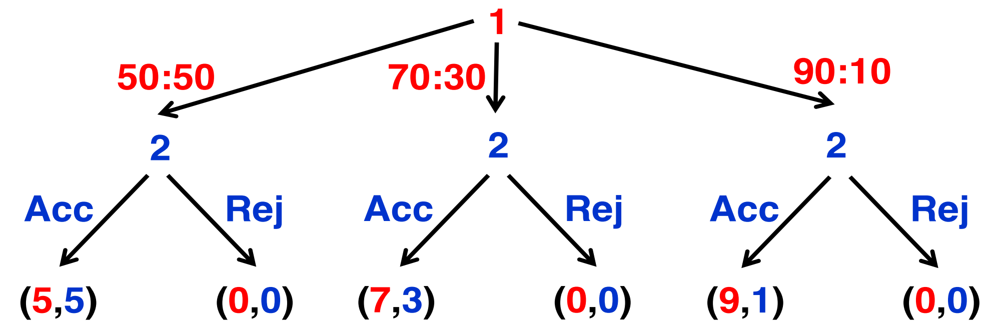
- $N = N^*$ – the same set of players
- $A^* = A_1^* \times \ldots \times A_n^*$ with $A_i^* = \{\alpha_i^* : H_i \rightarrow A \mid \alpha_i(h) \in \underline{A}(h)\}$, i.e., the set of action profiles in the normal-form game is the set of pure-strategy profiles in the extensive game
- $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ with u_i^*: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \rightarrow u_i(\text{out}(\alpha))$, where out($\alpha$) is the outcome of the extensive game under pure-strategy profile α

Thus, the full machinery developed for normal-form games (such as mixed strategies, Nash equilibria, other solution concepts) is available.
So why use the extensive form at all?

- Because it (often) is a more ***compact*** (exponentially smaller) as well as ***intuitive*** form of representation (much more natural to reason about)

[26] Jeśli już jesteśmy w stanie przedstawić takie czyste strategie, to być może moglibyśmy skorzystać z mechanizmów oferowanych przez gry w postaci normalnej. Okazuje się, że tak, bo każdą grę rozległą można przedstawić w postaci równoważnej gry w postaci normalnej. Pamiętajmy, że w tej ostatniej są tylko trzy elementy: zbiór graczy, zbiór profili akcji i zbiór funkcji użyteczności. Zbiór graczy jest taki sam w obydwu grach. Zbiór funkcji użyteczności też łatwo znaleźć, bo użyteczność danego gracza można odczytać dla każdego liścia (albo równoważnie dla każdego profilu strategii wszystkich graczy, które do tego liścia prowadzą). Główny nakład pracy w tym tłumaczeniu dotyczy zbioru profili akcji. Jest on iloczynem kartezjańskim zbiorów czystych strategii dostępnych dla każdego gracza. Skoro takie tłumaczenie z gry ekstensywnej na postać normalną jest możliwe, to możemy korzystać ze wszystkich koncepcji rozwiązania omówionych na pierwszym wykładzie, w tym mieszanych strategii czy równowag Nasha. Pojawia się jednak pytanie, po co nam w ogóle te formy rozległe skoro wystarczą normalne? Odpowiedź jest dwutorowa i odnosi się do zwięzłości gier rozległych oraz intuicyjności takiej reprezentacji (naturalnie jest dla nas rozumować w kategoriach ruchów, które następują po sobie).

Exercise: Translation to Normal Form



Convertion to the normal form image of the game:

- Strategy spaces pf the two games are the same
- The pure (and mixed) Nash equilibria are the same
- The transformation can result in a certain redundancy in the normal form and exponential blowup of the game representation

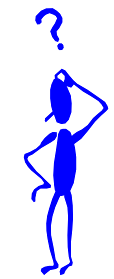
	Acc-Acc-Acc	**Acc-Acc-Rej**	**Acc-Rej-Acc**	**...**
50:50	5 \ 5	5 \ 5	5 \ 5	...
70:30	7 \ 3	7 \ 3	0 \ 0	...
90:10	9 \ 1	0 \ 0	9 \ 1	...

[27] Przetłumaczmy więc grę w ultimatum do równoważnej postaci normalnej. Macierz przedstawiono na dole slajdu. Nie jest to jednak macierz pełna, bo dla gracza 2 (tu gracza z kolumny) tych strategii czystych jest 8 a nie 3. Trzeba też podkreślić, że w takiej reprezentacji jest pewna (i to spora) nadmiarowość. Wystarczy spojrzeć na profile (50:50, Acc-Acc-Acc) oraz (50:50,Acc-Acc-Rej). Odnoszą się one do tego samego liścia. Takich „nadmiarowych” par czy też większych podzbiorów w reprezentacji tabelarycznej jest zdecydowanie więcej (patrz np. (70:30,Acc-Acc-Acc) oraz (70:30,Acc-Acc-Rej)). Przestrzenie strategii w tych grach (rozległej i normalnej) są takie same, a co za tym idzie równowagi Nasha także sobie odpowiadają.

Translation From Normal Form

Can we also translate from **normal-form** to **extensive-form** games? **No!**

	C	D
C	-10 \ -10	-25 \ 0
D	0 \ -25	**-20 \ -20**



At least not in all cases.
The perfect information game cannot model simultaneity.
So the **normal form is more general**.

[28] Naturalne pytanie odnosi się do możliwości transformacji w drugą stronę, z gry w postaci normalnej do rozległej. Nie jest ona jednak zawsze możliwa, bo gry rozległe z doskonałą informacją nie są w stanie modelować równoległości. Wystarczy wyobrazić sobie dylemat więźnia. Którykolwiek z graczy zrealizowałby swoją akcję jako pierwszy, postawiłby warunki tej gry i wpłynął w ten sposób na to, co zrobiłby gracz drugi. Gry w postaci normalnej są więc bardziej ogólne.

Existence of Pure Nash Equilibria

Theorem (Zermelo, 1913) Every (finite) **extensive-form game** has at least one ***pure Nash equilibrium***.

E. Zermelo. Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des **Schachspiels**. *Proc. 5th International Congress of Mathematicians*, 1913

- Players take turns and everyone gets to see eveything that happened thus far
- It is never necessary to introduce randomness into action selection to find an equilibrium

[29] Najważniejsze twierdzenie drugiej części wykładu przypisujemy Zermelo, który wniosek ten sformułował już ponad 100 lat temu. Każda skończona gra rozległa ma co najmniej jedną czystą równowagę Nasha. Znów podkreślmy przymiotnik „czysta”. Konsekwencje tego twierdzenia są znaczące. Jeśli mamy do czynienia z racjonalnymi graczami, to będą oni wybierali czyste akcje, nie wprowadzając losowości do swoich ruchów, a inni gracze będą je w stanie obserwować, wiedząc co stało się do tej pory i odpowiednio dostosowując swoje ruchy.

Existence of Pure Nash Equilibria - Backward Induction

Theorem (Zermelo, 1913) Every (finite) **extensive-form game** has at least one ***pure Nash equilibrium***.

E. Zermelo. Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des **Schachspiels**. *Proc. 5th International Congress of Mathematicians*, 1913

Proof: Work your way up, from the "lowest" choice nodes to the root. Label each $\boldsymbol{h \in H}$ with an action $\boldsymbol{a^* \in \underline{A}(h)}$ and a vector $\boldsymbol{(u_1^h, \ldots, u_n^h)}$:

- Find (one of) the best action(s) for the selected player $\boldsymbol{i^* = \underline{i}(h)}$:

$$a^* \in argmax_{a \in \underline{A}(h)}\, u_{i^*}^{\sigma(h,a)}$$

- Compute the utility labels u_i^h for node $\boldsymbol{h}$ for all agents $\boldsymbol{i \in N}$:

$$u_i^h = u_i^{\sigma(h,a^*)} \text{ (where } u_i^z = u_i(z) \text{ for any } z \in Z\text{)}$$

This process is well-defined and terminates. And by construction, the resulting assignment $\{h \rightarrow a^*\}$ of nodes to pure strategies is a NE.
This method for solving a game is called **backward induction**.

[30] Dowód twierdzenia Zermelo przekształca się w pewną procedurę postępowania w grach rozległych. Załóżmy, że startujemy z najniższych możliwych wierzchołków wyboru (poziom tuż powyżej liści), odnajdując najlepszą akcję i idąc w górę drzewa, aż do korzenia. Wprowadźmy też dla każdego wierzchołka wyboru notację, która dla danej akcji wskaże jaka aktualnie użyteczność byłaby osiągnięta przez każdego gracza. Sposób postępowania w każdym wierzchołku jest taki sam: dla gracza, którego kolej jest w tym wierzchołku, wybierz taką akcję spośród akcji dla niego dostępnych, która maksymalizuje jego użyteczność (przy czym jeśli jesteśmy już na wyższym poziomie w drzewie to te dostępne użyteczności są już ograniczone przez wybory dokonane przez graczy na poziomach niższych). Potem oblicz jak wpływa to na użyteczności, które uzyskaliby wszyscy gracze w związku z tym wyborem (są to użyteczności z liści, do których te wybory by doprowadziły). Taki sposób postępowania, tj. znalezienie akcji dającej najwyższą użyteczność graczowi, którego jest kolej (co jest warunkowane wyborami dokonanymi niżej w drzewie przez innych graczy) powtarza się aż do korzenia. Wybory dokonane przez wszystkich graczy składają się na czystą równowagę Nasha. Taki sposób postępowania funkcjonuje w literaturze pod nazwą indukcja wsteczna.

Historical Note: Relevance to Chess

Of course, Zermelo did not phrase his result quite like that: extensive games and Nash equilibria were introduced much later than 1913.

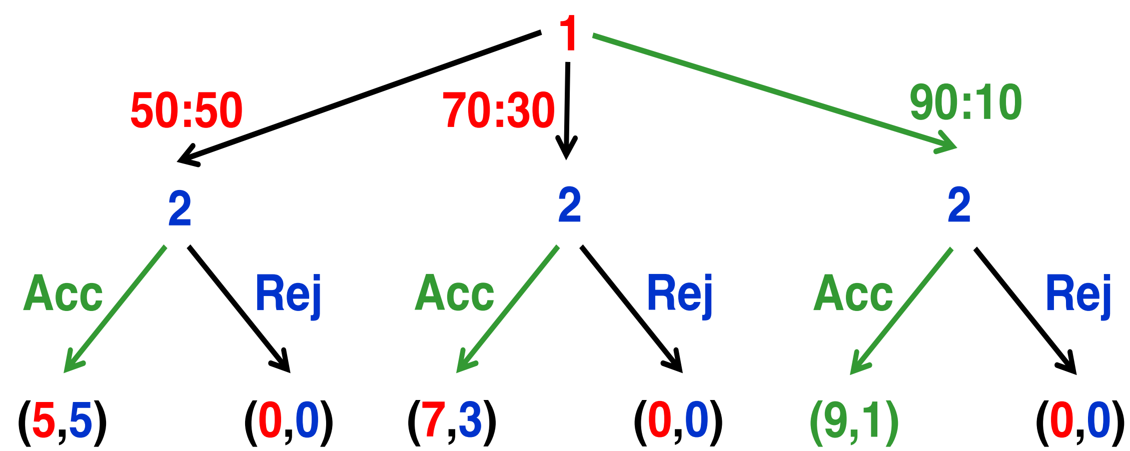
The title of Zermelo's paper mentions chess (das Schachspiel):

- Using essentially the same argument we have (**backward induction**) it is easy to see that chess must be determined: either White has a **winning strategy**, or Black has, or both players can force a draw
- Of course, the existence of such a strategy does not mean that anyone knows what it actually looks like (the game tree is too big)
- Still, the basic idea of backward induction is at the bottom of any chess-playing program (and the same is true for similar games)

[31] Trzeba sobie uzmysłowić, że Nash urodził się w 1928 roku, a swoje najważniejsze twierdzenie sformułował w roku 1951. Z kolei twierdzenie Zermelo pochodzi z 1913 roku. Nie mógł się on więc bezpośrednio odwoływać do pojęcia równowagi Nasha, ale wnioski z jego pracy pozwalają na takie ujęcie twierdzenia i przypisanie mu tego wyniku. Warto zwrócić uwagę, że tytuł pracy Zermelo zawiera słowo Schachspiel, czyli szachy. Rzeczywiście to właśnie tą grą zajmował się on w swojej pracy. A skoro tak – to indukcja wsteczna jest stosowalna także w ich kontekście. W związku z tym, szachy są także grą deterministyczną: albo białe albo czarne mają strategię wygrywającą albo będzie w nich remis. Teoretycznie wiemy, jakie sekwencje ruchów doprowadzą do każdej z tych trzech sytuacji. Niestety, tylko teoretycznie, bo przestrzeń ruchów w szachach jest tak ogromna, że nie jesteśmy w stanie w całości takiego drzewa interakcji zamodelować. Nie zmienia to jednak faktu, że przez lata indukcja wsteczna była i wciąż jest podstawą wielu algorytmów gry w szachy i inne podobne gry.

Example: Backward Induction

Here is the (only!) Nash equilibrium (90:10, Acc-Acc-Acc) you will find by applying backward induction to the Ultimatum Game:

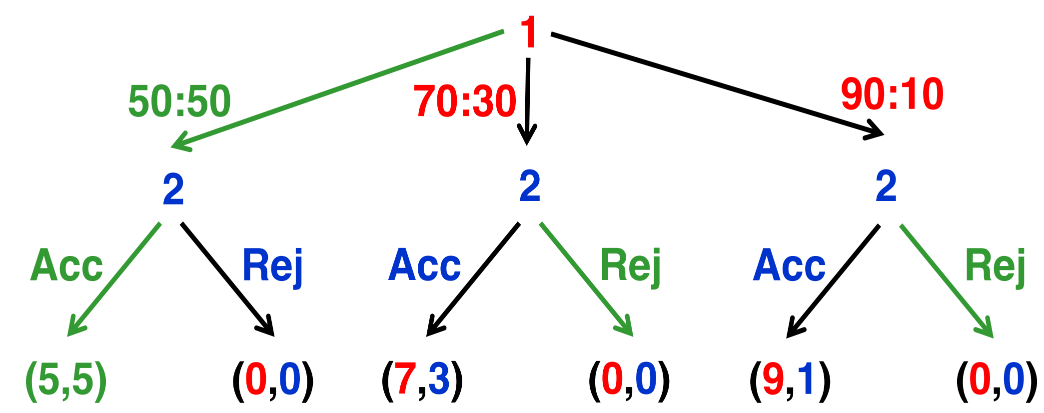


Exercise: Is this the only pure Nash equilibrium for this game?

[32] Wróćmy do gry w ultimatum. Na slajdzie przestawiono jedyną czystą równowagę Nasha, która będzie odnaleziona indukcją wsteczną. Zacznijmy od dołu i gracza 2: lewy wierzchołek – gracz 2 ma wybór między Acc – użyteczność 5 oraz Rej – użyteczność 0, więc wybieramy Acc; wierzchołek środkowy – gracz 2 ma wybór między Acc – użyteczność 3 oraz Rej – użyteczność 0, więc wybieramy Acc; wierzchołek prawy – gracz 2 ma wybór między Acc – użyteczność 1 oraz Rej – użyteczność 0, więc wybieramy Acc. Ma to swoje konsekwencje dla użyteczności osiągalnych przez gracza 1. Ma on do wyboru: 50:50 – użyteczność 5, 70:30 – użyteczność 7 oraz 90:10 – użyteczność 9. Oczywiście wybierze 90:10, bo daje mu to najwyższą użyteczność (9). Czy jest to jedyna równowaga Nasha w tej grze? Jedyna znaleziona metodą indukcji wstecznej, ale nie jedyna istniejąca.

Noncredible Threats

There are several other Nash equilibria, such as (**50:50**, **Acc-Rej-Rej**):



Indeed, no player has an incentive to unilaterally change her strategy.
Nevertheless, this does not seem a reasonable solution for the game:

- **Player 2**'s threats to reject are not credible

Example: In the hypothetical situation where the righthand subgame is reached, to reject (**Rej**) would be a *strictly dominated strategy* for **Player 2**

[33] Tych równowag Nasha jest zdecydowanie więcej. Na slajdzie przedstawiono (50:50, Acc-Rej-Rej). Rzeczywiście jednostronne odstąpienie od takiego ustalonego profilu strategii nie opłaci się ani graczowi 1 ani graczowi 2. Nie polepszą oni swojej użyteczności. Te groźby odrzucenia podziałów 70:30 oraz 90:10 przez gracza 2 nie są jednak wiarygodne. W sytuacji gdy dotarlibyśmy do środkowego lub prawego wierzchołka, wybór Rej byłby strategią ściśle zdominowaną dla gracza 2. Wybór Acc prowadziłby bowiem do ściśle lepszego wyniku i to dla obydwu graczy. W pewnym sensie każdy wierzchołek wewnętrzny w takim drzewie interakcji inicjuje nową grę. Jak w takiej podgrze powinniśmy postępować?

Subgame-Perfect Equilibrium

- Every internal node $h \in H$ induces a **subgame** in the natural manner
- A strategy profile s is a **subgame-perfect equilibrium** of an extensive game G_0 if, for every (not necessarily proper) subgame G of G_0, the restriction of s to G is a Nash equilibrium.

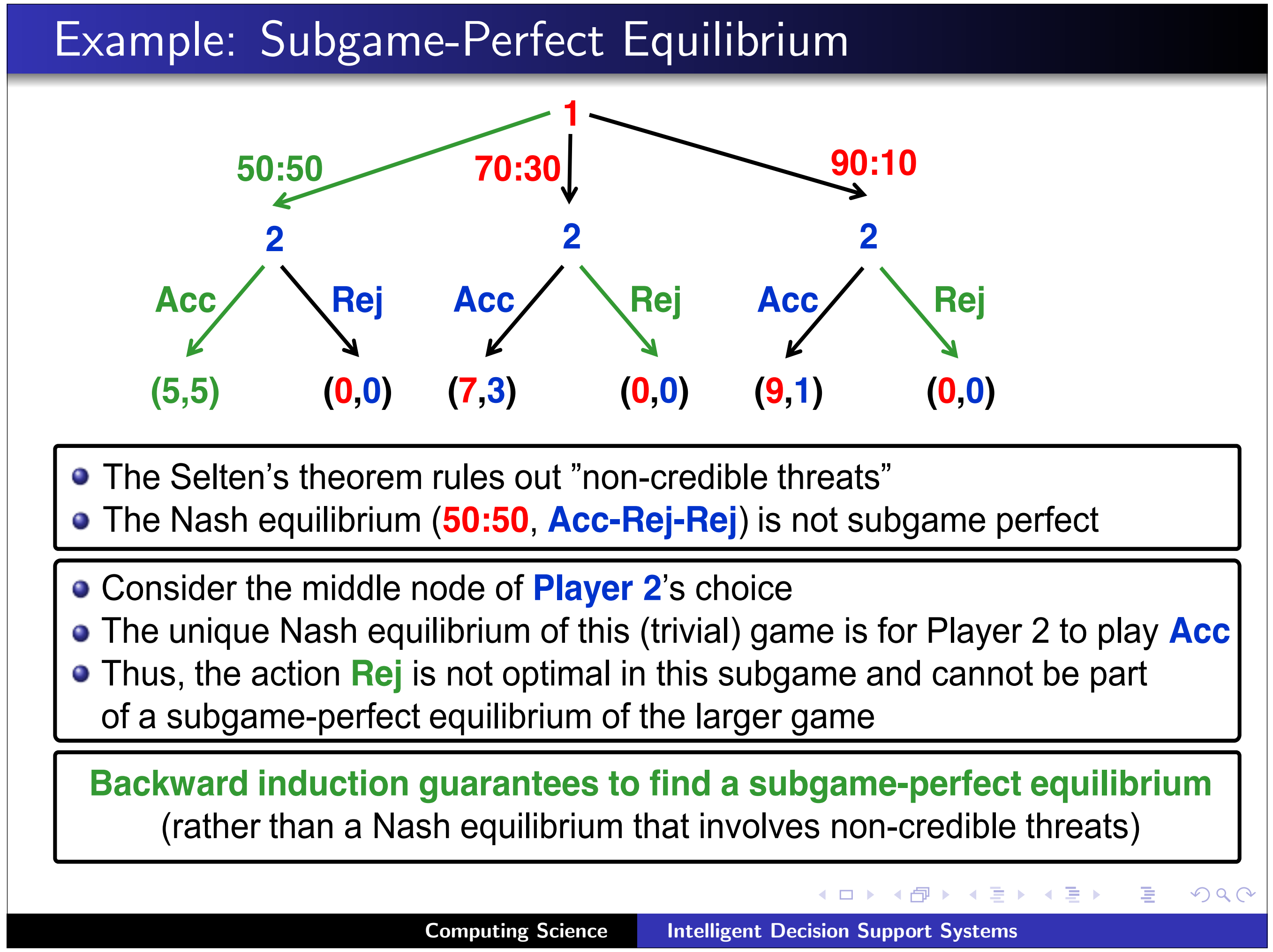
Theorem (Selten, 1965) Every (finite) **extensive-form game** has at least one ***subgame-perfect equilibrium***

R. Selten. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. Zeitschrift fur die Gesamte Staatswissenschaft, 121(2):301-324, 1965

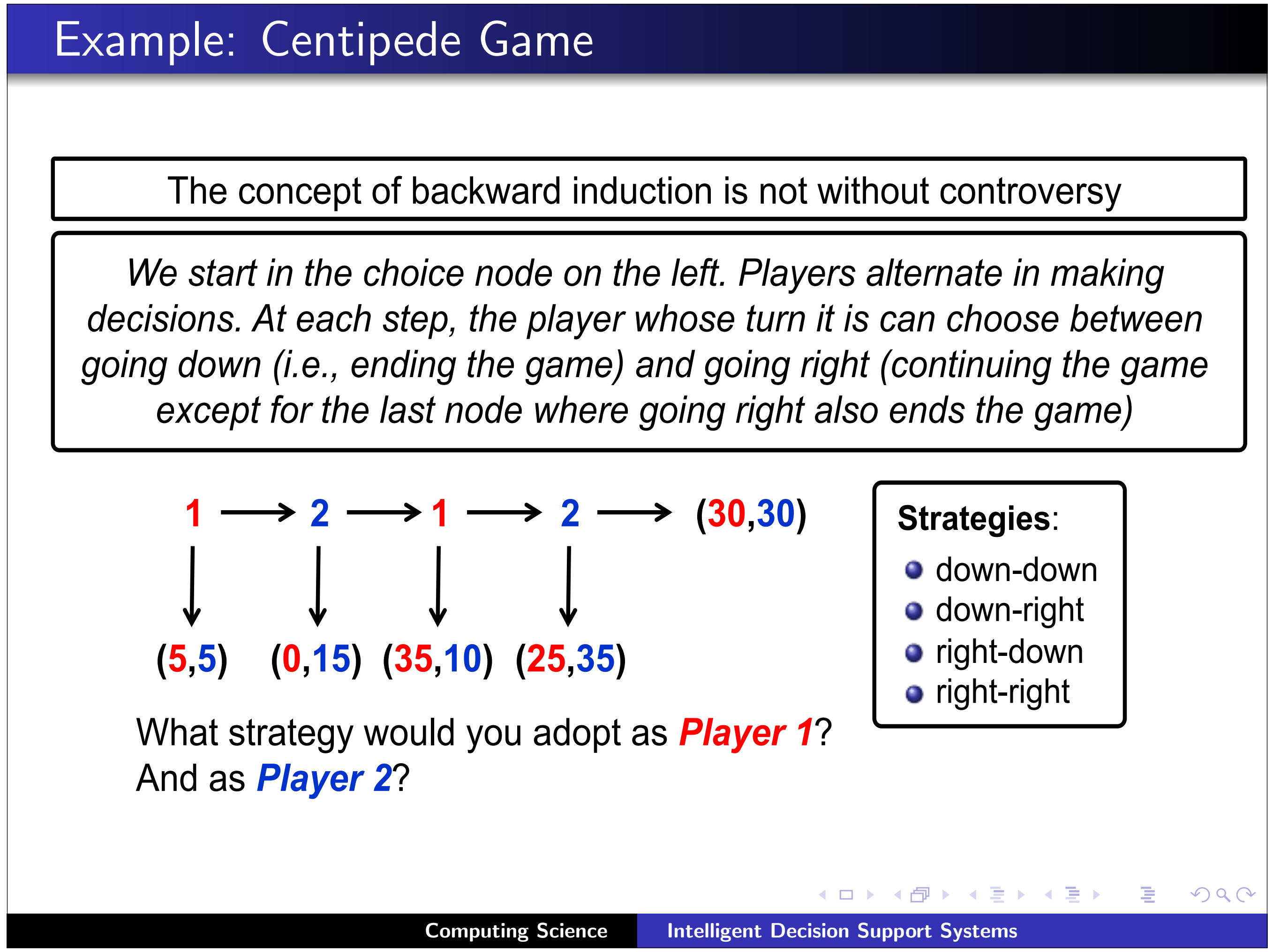
Proof: This is what we showed when we proved Zermelo's Theorem.

Remark: Selten (1965) introduced the concept of SPE for a more specific family of games and did not quite state the theorem above, but these ideas are clearly implicit in that paper.

[34] Odpowiedź wydaje się być naturalna. Jej formalna nazwa to równowaga doskonała z punktu widzenia podgier. Jest to taki profil strategii s dla gry rozległej, który dla każdej podgry całej gry (niekoniecznie właściwej; być może pełnej) ograniczony profil strategii s do takiej podgry jest także równowagą Nasha. Twierdzenie Seltena mówi, że każda skończona gra rozległa ma co najmniej jedną równowagę doskonałą z punktu widzenia podgier. Dowód został już pokazany przy okazji twierdzenia Zermelo.



[35] Twierdzenie Seltena eliminuje niewiarygodne groźby. Dlaczego? Wystarczy spojrzeć na równowagę z przedostatniego slajdu. Nie jest ona doskonała z punktu widzenia podgier ze względu na akcję Rej gracza 2. Rozważmy np. środkowy wierzchołek dla gracza 2. Gra w tym wierzchołku jest bardzo mała i odnosi się tylko do akcji tego gracza: Acc prowadzi do użyteczności 3, zaś Rej do użyteczności 0. Wybór Rej nie jest więcej optymalny, a w konsekwencji nie może być on częścią równowagi doskonałej z punktu widzenia podgier. Szczęśliwie mamy procedurę, która pozwala na znalezienie takiej równowagi. Jest nią indukcja wsteczna.



[36] Skoro mamy taki świetny algorytm i w ogólności jest tak dobrze, to dlaczego nie zawsze się tego trzymamy? Omówmy tzw. grę w stonogę (patrz rysunek). Zaczynamy w wierzchołku po lewej stronie. Gracze realizują ruchy na zmianę, najpierw gracz 1, potem gracz 2, potem gracz 1, potem znów gracz 2. Gra w stonogę może być zdecydowanie dłuższa. My ograniczymy się do 4 ruchów, po 2 dla każdego gracza. W każdym ruchu można wybrać pójście w dół lub w prawo. Pójście w dół zawsze kończy grę, a pójście w prawo oznacza jej kontynuację (z wyjątkiem najbardziej prawego wierzchołka, gdzie też wtedy następuje koniec). Strategie dostępne dla poszczególnych graczy są więc cztery: dół-dół, dół-prawo, prawo-dół oraz prawo-prawo. Układ użyteczności w tej grze jest specyficzny i dobrany w sposób celowy. Co powinniśmy zrobić?

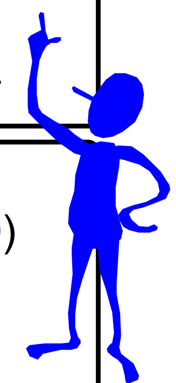
Centipede Game - Discussion (1)

1 → 2 → 1 → 2 → (30,30)

↓ (5,5) ↓ (0,15) ↓ (35,10) ↓ (25,35)

Strategies:
- down-down
- down-right
- right-down
- right-right

The only **subgame-perfect equilibrium** in this game is to always choose to **go down** ↓



Consider the last node:
- The best choice for the player is to go down (35 vs. 30)

Since it is the case, going down is the best choice for the other player in the previous choice point
- By induction the same argument holds for all choice points

[37] Jedyną równowagą doskonałą z punktu widzenia podgier jest zawsze pójście w dół. Dlaczego? Zacznijmy od końca. Gracz 2 wybiera między 35 (dół) oraz 30 (prawo). Wybierze dół. W konsekwencji w poprzednim wierzchołku gracz 1 wybiera między 35 (dół) oraz 25 (prawo). Wybierz dół. Skoro tak, to gracz 2 wybiera między 15 (dół) i 10 (prawo) – wybierze dół. Wreszcie w lewym wierzchołku gracz 1 wybiera między 5 (dół) oraz 0 (prawo). Wybierze dół.

Centipede Game - Discussion (2)

- It appears that humans rarely play their SPE strategies
- Even when they do, this can result in **counterintuitive effects**

⇓

- Suppose you play your SPE strategy, but your opponent doesn't
- Then you are committed to continuing to play a strategy that you devised on the basis of an assumption (full rationality of your opponent) that just turned out to be wrong…
- How should you amend your beliefs and course of action based on the measure-zero event?
- There exist different accounts of this situation based on what is common knowledge and how one revises beliefs in the face of measure-zero events

[38] Jeśli pomyśleć o tym, co byśmy zrobili w grze w stonogę, to pewnie takie pójście w dół jest w ogromnej większości przypadków ostatnią rzeczą, którą byśmy zrealizowali. W ogólności ludzie rzadko wybierają strategie, które są doskonałe z punktu widzenia podgier. A nawet jeśli niektórzy mają tendencję do tego, by to robić, to prowadzi to do sprzecznych z intuicją wyników. Wybór takiej strategii opiera się bowiem na założeniu, że wszyscy będą to robić, będąc w pełni racjonalnymi. Co w sytuacji, gdy na pewnym etapie okaże się, że tak nie jest, a nasze założenia były błędne? Jak powinniśmy wtedy dostosować się do tej nowej sytuacji? Nie będziemy omawiać tego zagadnienia, ale dla zainteresowanych literatura nt. teorii gier jest pełna dyskusji tego typu.

Extensive Games - Summary

This has been an **introduction to extensive games**, where we model the sequential nature of most real games:

- Definition of the formal model
- Pure strategies as functions from choice nodes to actions
- **Translation into normal form is always possible**
- Translation from normal form into extensive form is not
- Noncredible threats call for new solution concept: SPE
- **Subgame-perfect equilibrium** = NE in every subgame
- **Backward induction** shows: SPE and NE always exist

[39] W drugiej części wykładu omówiliśmy gry rozległe, charakteryzujące się uwzględnieniem sekwencji ruchów oraz komponentu czasowego. Pokazaliśmy ich definicję w postaci formalnego modelu, w skład którego wchodziły m.in. różnego typu wierzchołki czy funkcja wyznaczająca kolejność akcji. Strategie czyste graczy determinowały zaś ich akcje w każdym wierzchołku, w którym była ich kolej. Omówiliśmy też relację gier rozległych z grami w postaci normalnej, pokazując, że transformacja od gry w postaci rozległej do normalnej jest możliwa, ale w drugą stronę już nie. Odnieśliśmy się też do tzw. niewiarygodnych gróźb. Umotywowały one konieczność nowej koncepcji rozwiązania gier, tj. równowag doskonałych z punktu widzenia podgier. Oznaczają one takie profile strategii, które ograniczone do dowolnego poddrzewa, a co za tym idzie – podgry, też są równowagami Nasha. Wreszcie pokazaliśmy też algorytm służący do znajdowania równowag Nasha w grach rozległych. Była to indukcja wsteczna, która ze względu na swoje własności znajduje nie tylko równowagę Nasha, ale też równowagę doskonałą z punktu widzenia podgier.