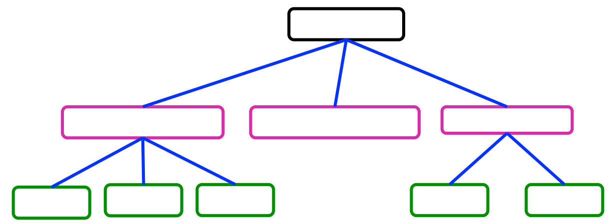


$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Analytical Hierarchy Process and the Choquet integral

Miłosz Kadziński
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology, Poland

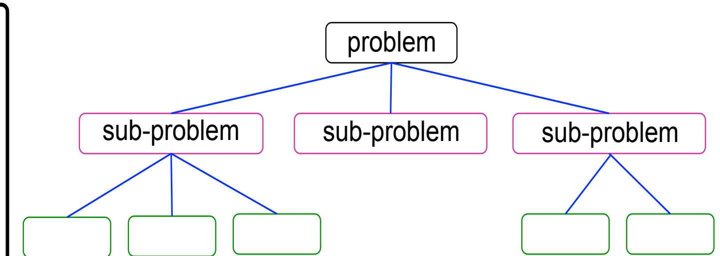
[1] Omawiane do tej pory metody wspomagania decyzji są typowe dla szkoły europejskiej. Dziś omówimy podejście Analytical Hierarchy Process, w skrócie AHP, opracowane w Stanach Zjednoczonych. Jest ono bardzo popularne na całym świecie, ale najwięcej zastosowań ma w Ameryce Północnej i Azji. Omówimy jego kroki, poznamy szczegóły matematyczne i opowiemy o przykładowych zastosowaniach. W drugiej, krótszej części wykładu, omówimy dwa szeroko stosowane modele agregacji. Jeden z nich to suma ważona, którą już znacie. Naszym celem będzie jej sformalizowanie. Co więcej, posłuży ona jako podstawa do zrozumienia bardziej zaawansowanego modelu pozwalającego na uwzględnienie interakcji między kryteriami. Nazywa się on całką Choquet.

Analytic Hierarchy Process

- Proposed by Thomas Saaty (1977, 1980)
- **Multiple criteria choice and ranking problems**
- Undoubtedly, **the most popular and widely used MCDA method**
- Deals with numerical values (priorities) at all of its stages
  - Recommended when the DMs are unable to construct value functions
- Technically valid and practically useful, though subject to well-grounded and diverse criticism

Thomas L. Saaty

- AHP is based on the motto **divide and conquer**
- Break down multiple criteria problems and solve one 'sub-problem' at a time
- Permits **hierarchical decomposition** of a complex decision problem



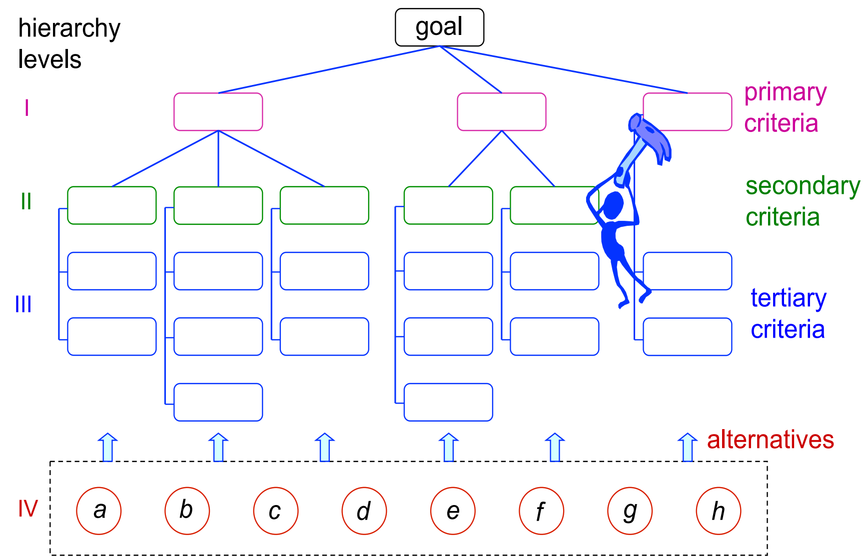
T. Saaty, The Analytic Hierarchy Process : planning, priority setting, resource allocation, New York, McGraw, 1980

[2] AHP zostało opracowane przez Thomasa Saaty'ego, gdy pełnił funkcję doradcy rządu amerykańskiego. Stosuje się je do wspomagania problemów wielokryterialnego porządkowania i wyboru. Jest najczęściej stosowaną metodą WWD na świecie ze względu na wbudowane mechanizmy obsługi złożonych problemów w przystępny sposób. Dzieje się tak dzięki zastosowaniu na wszystkich etapach łatwo interpretowalnych liczb, zwanych priorytetami. W pewnym sensie priorytety te zastępują konstrukcję funkcji wartości. Jednak najbardziej charakterystycznym aspektem AHP jest dekompozycja problemów decyzyjnych z wykorzystaniem hierarchii łatwiejszych do zrozumienia podproblemów, z których każdy może być analizowany oddzielnie. Przyczynia się to do realizacji w praktyce hasła „dziel i rządź". AHP jest świetnie umotywowane i praktycznie użyteczne, ale podlega też dobrze uzasadnionej i różnorodnej krytyce. Dlatego też będziemy mówić zarówno o jego mocnych, jak i słabych stronach.

Hierarchical Problem Structuring

The problem is structured according to a **hierarchy**

- The **top** element is the **goal** of the decision
- The second level stands for the primary criteria
- The **lowest** level = the **alternatives**
- More levels can be added, representing sub-criteria, sub-sub-criteria, etc.

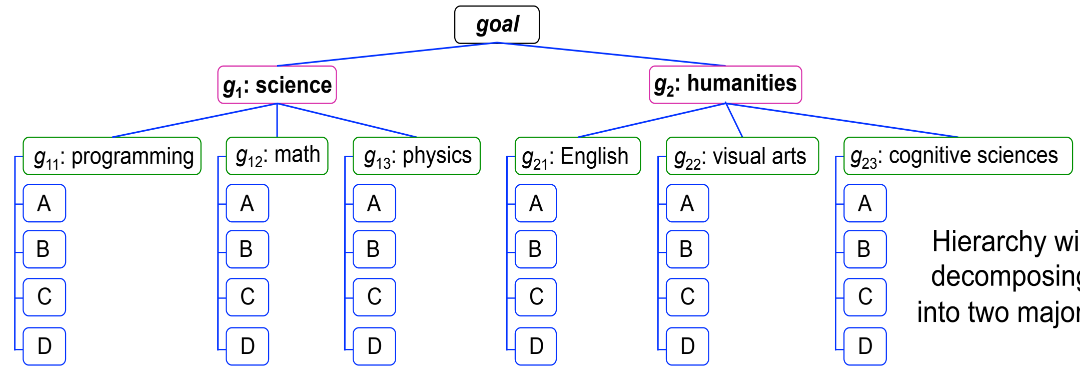


The breakdown is done in two phases of the decision process:

- **problem structuring** (representing the complex problems and relating them to the goal)
- **elicitation of preference information** (representing preferences, quantifying the importance of various elements, and passing information)

[3] Skupmy się najpierw na hierarchicznej dekompozycji problemów decyzyjnych. Hierarchia składa się z różnych poziomów. Najwyższym elementem jest zawsze cel decyzyjny. Drugi poziom reprezentuje podstawowe kryteria oceny, natomiast ostatni poziom odpowiada wariantom. W hierarchii występują minimum trzy poziomy. Jednak w bardziej złożonych problemach może być więcej poziomów pośrednich reprezentujących pod- i podpod-kryteria. Na przykład przy wyborze dostawców obecnie często uwzględnia się aspekty ekonomiczne, środowiskowe i społeczne. Zastosowanie hierarchii jest pomocne z dwóch powodów. Z jednej strony ułatwia strukturyzację, czyli reprezentację złożonego problemu i odniesienie wszystkich istotnych kryteriów względem celu. Z drugiej, wspiera pozyskiwanie preferencji, ich reprezentację w ramach metody oraz przekazywanie informacji pomiędzy bardziej i mniej ogólnymi poziomami.

Illustrative Study



Hierarchy with four levels, decomposing the problem into two major sub-problems

Problem:

- Select a student to participate in a research project at the technical university
- **Four candidates**: Ana, Brooke, Caden, and Demi
- Small research team requiring balanced and diverse competencies
- Complete ranking with scores

Criteria:

Two macro subjects: $\boldsymbol{g_1}$**:** (exact) **science** and $\boldsymbol{g_2}$**: humanities**, each consisting of three sub-criteria reflecting capacities and skills relevant for the project

- g_{11} : programming, g_{12} : math, g_{13} : physics
- g_{21} : English, g_{22} : visual arts, g_{23} : cognitive sciences

No precise information on the performances (except for English), but the DM knows the candidates and can assess them on each criterion, e.g., by comparing them pairwise

[4] Hierarchia reprezentująca problem, który będziemy rozważać dla zilustrowania kroków AHP, jest przedstawiona w górnej części slajdu. Składa się ona z czterech poziomów. Cel polega na wyborze studenta do udziału w projekcie badawczym na uczelni technicznej. Zespół badawczy jest niewielki i wymaga zrównoważonych kompetencji od każdego z jego członków. Dlatego weźmiemy pod uwagę różne punkty widzenia na umiejętności kandydatów. Uwzględniamy więc dwa makro przedmioty oznaczające nauki ścisłe i nauki humanistyczne. Każdy z nich składa się z trzech pod-kryteriów. Jeśli chodzi o nauki ścisłe, mamy programowanie, matematykę i fizykę. Jeśli chodzi o humanistykę, bierzemy pod uwagę kompetencje z zakresu języka angielskiego, sztuk wizualnych i kognitywistyki. Wybieramy spośród czterech kandydatów: Ana, Brooke, Caden i Demi. Nie mamy dokładnych informacji na temat ich ocen na wszystkich sześciu elementarnych kryteriach. Jednak decydent zna kandydatów i może ich porównać pod względem umiejętności i kompetencji.

AHP - Major Steps

Set up **decision hierarchy**

⇩

Make systematical **pairwise comparisons of hierarchy elements** (criteria, sub-criteria, and alternatives) with respect to their impact on the element above them

- Human judgments about the relative meaning and importance
- The use of concrete data on performances is possible

⇩

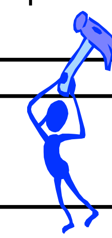
Transform comparisons into **priorities (weights)** and check the consistency

- Numerical values that can be processed and compared over the entire problem
- Diverse elements can be compared in a consistent way

⇩

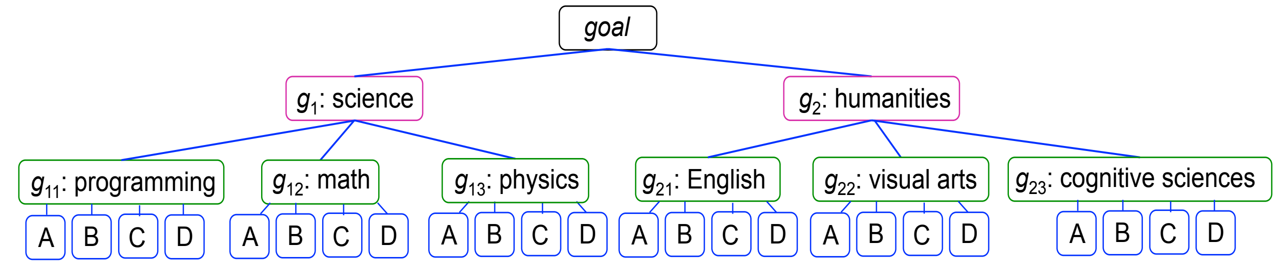
Use priorities to obtain **comprehensive scores** for alternatives

- Relative abilities of alternatives to achieve the decision goal



[5] AHP składa się z czterech głównych etapów. Wszystko zaczyna się od ustalenia hierarchii problemu decyzyjnego. Wiąże się to z określeniem celu, identyfikacją i uporządkowaniem wszystkich kryteriów oraz rozpoznaniem wariantów. Następnie przechodzimy do pozyskiwania informacji preferencyjnej. Odbywa się to poprzez systematyczne porównywanie parami elementów hierarchii pod kątem ich wpływu na element znajdujący się nad nimi. Przez elementy hierarchii rozumiem kryteria, podkryteria lub warianty, w zależności od tego, który poziom jest brany pod uwagę. Zasadniczo prosimy o oceny decydenta dotyczące względnego znaczenia i wagi elementów. W razie potrzeby na tym etapie możemy również wykorzystać konkretne dane lub bezpośrednie oceny. W trzecim etapie preferencje są przekształcane w priorytety, które są wartościami liczbowymi reprezentującymi względne znaczenie elementów. Niezależnie od tego, które elementy są ze sobą zestawiane, dzięki priorytetom można je porównywać w sposób spójny. Na tym etapie może się okazać, że preferencje użytkownika są niespójne. Jeśli stanowi to poważny problem dla sensowności przyszłych wniosków, metoda prosi użytkownika o zmianę porównań parami. Wreszcie, gdy mamy już priorytety na wszystkich poziomach hierarchii, możemy obliczyć kompleksowe oceny wariantów. Służą one jako miary ich względnych zdolności do osiągnięcia celu decyzji, które mogą być wykorzystane do uporządkowania wariantów od najbardziej do najmniej preferowanych w malejącym porządku tych ocen, czyli scorów.

Prioritization of Hierarchy Elements



Each lower level is prioritized according to its immediate upper level

The appropriate question to ask with regard to prioritization depends on the context:

- "Which macro subject is more important for choosing the best student for the project?"
- "Which subject is more important for the competencies and skills in exact sciences?"
- "Which student is preferable to fulfill the given competency or skill and to what extent?"
- For the considered problem, nine (6+2+1 = 9) different prioritizations are required, including six prioritizations of alternatives with regard to each elementary criterion

Preference information for elements at each level of the hierarchy: pairwise comparison of all elements *i*, *j* at the level of hierarchy *h* with a common predecessor at level *h*-1

- The psychologists argue that it is easier and more accurate to express a preference between only two alternatives than simultaneously among all the alternatives

[6] Podstawową przyczyną sukcesu AHP jest dekompozycja złożonych problemów z wykorzystaniem hierarchii. Pozwala to na uszeregowanie elementów hierarchii tylko w obrębie grupy, która ma wspólnego poprzednika. Nie porównujemy programowania z plastyką, ani umiejętności matematycznych na poziomie A z językiem angielskim na poziomie C. Dla rozważanego problemu musimy dostarczyć dziewięć różnych zestawów porównań w ramach małych grup. Sześć z nich dotyczy wariantów dla każdego elementarnego kryterium. Tutaj zapytalibyśmy: który uczeń jest bardziej preferowany ze względu na spełnienie danego wymagania lub posiadanie danej umiejętności. Dwa zestawy porównań dotyczą podkryteriów w ramach nauk ścisłych lub humanistycznych. Ostatnie porównania polegają na ocenie, który makro przedmiot jest ważniejszy dla wyboru najlepszego studenta do projektu. Aby umożliwić taką priorytetyzację, musimy dostarczyć informacji preferencyjnej dla elementów na każdym poziomie hierarchii. Są to porównania parami wszystkich elementów ze wspólnym poprzednikiem. Jest to motywowane pracami psychologów, które sugerują, że porównania parami są łatwiejsze i dokładniejsze niż porównania obejmujące wszystkie opcje jednocześnie.

Pairwise Comparison of Hierarchy Elements

The **pairwise comparison** between elements *i* and *j* can be carried out using:

- A **number** a_{ij} expressing the intensity of preference of element *i* over element *j*
- **Verbal appreciation**, more familiar to our daily life that is arbitrarily transformed into a numerical judgment
- **Saaty's scale of preference intensity**

Number	Verbal judgment
1	Equal importance
3	Moderate (weakly more important)
5	Strong (much more important)
7	Very strong (very much more important)
9	Extreme (absolutely more important)
2, 4, 6, 8	Intermediate values (2 – equal to moderate)

Psychologists suggest that:

- a smaller scale, say 1–5, would not give the same level of detail in a data set
- the DM can be lost on a larger scale (e.g., on a 1-100 scale, how to distinguish between 62 and 63?)

[7] Porównania parami elementów hierarchii mogą być realizowane w dwóch trybach. Z jednej strony, porównując jakąś parę, należy podać liczbę wyrażającą intensywność preferencji jednego elementu nad drugim. Dla elementu lepszego liczba ta powinna być wzięta ze skali ilorazowej, od 1 do 9, która została zdefiniowana przez Saaty'ego. Z drugiej strony możliwe jest stosowanie ocen słownych, takich jak równe, silna lub umiarkowana preferencja. W tym przypadku oceny są nadal arbitralnie przekształcane do wartości liczbowych na skali ilorazowej zgodnie z tabelą podaną w prawym górnym rogu. Stosowanie skali 1-9 jest dobrze umotywowane przez psychologów. Oferuje ona wystarczający poziom szczegółowości, a jednocześnie pozwala użytkownikom na łatwe rozróżnienie poziomów preferencji.

Consistent Pairwise Comparison Matrix

- Numbers a_{ij} compose a square matrix of pairwise comparisons
- a_{ij} is supposed to be a ratio of the priorities (weights) of elements i, j

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

g_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
g_{11}	1	**2**	**6**
g_{12}	1/2	1	**3**
g_{13}	1/6	1/3	1

Example for sub-criteria of **exact sciences**:

- Programming is two times more important than math
- Programming is six times more important than physics
- Math is three times more important than physics

Consistency condition of pairwise comparisons (CCPC):

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

- Imposed by AHP; 1s on the main diagonal; the matrix is reciprocal (the upper triangle is the reverse of the lower triangle)
- The number of necessary comparisons for each comparison matrix is: $n \cdot (n-1)/2$

Cardinal consistency condition (CCC): $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}, \quad i, j, k = 1, \dots, n$

$$a_{12} \times a_{23} = a_{13}$$

$$2 \times 3 = 6$$

- Satisfied for the example matrix above
- Not imposed by AHP, though the level of inconsistency is verified (*later*)
- The advantage of precision requires more effort

[8] Każde porównanie pary reprezentowane przez wartość liczbową ma uchwycić stosunek między priorytetami lub wagami porównywanych elementów. Priorytety te będę oznaczał przez w. Zbierając porównania dla wszystkich elementów o wspólnym poprzedniku, otrzymujemy macierz kwadratową. Na slajdzie możecie zobaczyć moje przykładowe porównania dla nauk ścisłych. Twierdzę na przykład, że programowanie jest dwa razy ważniejsze od matematyki. Porównania muszą spełniać tzw. warunek spójności porównań parami. Mówi on, że wynik porównania dla pary elementów (i,j) jest odwrotnością wyniku porównania dla pary (j,i). Oznacza to, że dla porównania n elementów musimy wypełnić tylko górny trójkąt macierzy, dostarczając n razy (n-1) podzielone przez 2 porównań. Drugi warunek spójności rozpatrywany w AHP odnosi się do spójności liczbowej. Mówi ona, że mnożenie wyników porównań między i oraz j oraz j oraz k powinno dawać wynik porównania między i oraz k. Na przykład twierdzenie, że programowanie jest dwa razy ważniejsze od matematyki, a matematyka jest trzy razy ważniejsza od fizyki, powinno mieć również odzwierciedlenie w tym, że programowanie jest sześć razy ważniejsze od fizyki. Jest to uchwycone w mojej macierzy, ale AHP nie wymaga idealnego spełnienia tego warunku. Metoda weryfikuje jednak poziom niespójności każdej macierzy porównań parami.

Inconsistent Pairwise Comparison Matrix

When several successive pairwise comparisons are presented, they may contradict each other
- When the matrix is complete, a **consistency check should be performed**
- Human nature is often inconsistent
- The reasons could be, e.g., vaguely defined problems, lack of sufficient information (known as bounded rationality), uncertain information, lack of concentration, or (an overwhelming) number of comparisons to be performed

g_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	**2**	**5**
g_{22}	1/2	1	**3**
g_{23}	1/5	1/3	1

Example for sub-criteria of **humanities** (*involving inconsistency*):
- English is two times more important than visual arts
- Visual arts are three times more important than cognitive sciences
- English is **five** times more important than cognitive science (should be six)

To allow the inconsistent reality, AHP allows up to a 10% inconsistency compared to the average inconsistency of randomly filled matrices (more details to come)

[9] AHP wymaga precyzyjnych porównań dla wszystkich par wariantów. Często mogą one być ze sobą sprzeczne lub przynajmniej niespójne w odniesieniu do warunku spójności liczbowej. Na tym slajdzie przedstawiam macierz odzwierciedlającą wyniki porównań parami pomiędzy wszystkimi pod-kryteriami humanistyki. Jest ona niespójna, ponieważ stwierdza, że język angielski jest pięć razy ważniejszy od kognitywistyki, podczas gdy sześć byłoby tu bardziej naturalne, biorąc pod uwagę inne porównania. Natura ludzka jest jednak często niespójna, czego przyczyny mogą być różne. Użytkownicy mogą nie mieć wystarczającej wiedzy; dostępne dla nich informacje mogą być niepewne, mogą tracić koncentrację lub być przytłoczeni liczbą porównań do wykonania. Sposób weryfikacji poziomu niespójności omówimy później, ale na razie zaznaczę tylko, że AHP dopuszcza do 10% niespójności w porównaniu do losowo wypełnionych macierzy porównań parami.

Pairwise Comparison Matrix vs. Priorities

- The **pairwise comparisons matrix** is used to derive **priorities of hierarchy elements**
- A priority $\boldsymbol{w_i}$ is a score that ranks the importance of the alternative, criterion, or sub-criterion in a given group of elements

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

- Priorities are numbers associated with the hierarchy nodes, representing the relative weights of the nodes in any group
- The priorities for elements with the same predecessor are automatically normalized to sum to 1

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Intermediate results for our problem: macro-criteria, sub-criteria, and local alternative priorities

- E.g., macro-criteria priorities capture the importance of macro criteria with respect to the top goal

Global alternative priorities (to be computed) rank alternatives with respect to all criteria and consequently the overall goal

***FOCUS*: How to determine *w* based on *A*?**

[10] Macierze te należy przekształcić w priorytety odpowiadające poszczególnym elementom hierarchii. Priorytety takie są liczbami reprezentującymi względne wagi elementów w dowolnej grupie, lub inaczej mówiąc, ważność wariantów, kryteriów lub podkryteriów w danej grupie elementów o bezpośrednim wspólnym poprzedniku. Wartości priorytetów w ramach każdej grupy muszą sumować się do jedynki. W AHP wyróżniamy dwa rodzaje priorytetów: pośrednie i globalne. Dla naszego problemu musimy określić priorytety makrokryteriów, priorytety podkryteriów oraz priorytety wariantów. Na przykład, te ostatnie powinny odzwierciedlać ważność każdego wariantu względem elementarnego kryterium. Takie pośrednie wyniki są agregowane w globalne priorytety wariantów, scory, które szeregują warianty pod względem ich osiągów na wszystkich kryteriach i celu ogólnego. Istotne pytanie brzmi: jak przekształcić macierz porównań parami A w priorytety w, biorąc pod uwagę, że każdy element macierzy to pożądany stosunek priorytetów dla danej pary elementów.

Computing Priorities for Consistent Matrices

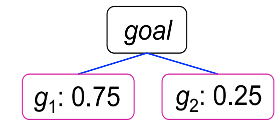
Let us consider a pairwise comparison matrix concerning a pair of macro criteria g_1 and g_2

G	g_1	g_2
g_1	1	3
g_2	1/3	1

If **g_1 is 3 times more important than g_2**, then the priority w_1 of g_1 needs to be 3 times greater than the priority w_2 of g_2

- We opt for values normalized, to sum up to 1

	w	w'
g_1	3	**0.75**
g_2	1	**0.25**

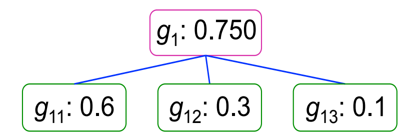


Let us consider a pairwise comparison matrix concerning sub-criteria g_{11}, g_{12}, and g_{13} of science (g_1)

g_1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
g_{11}	1	2	6
g_{12}	1/2	1	3
g_{13}	1/6	1/3	1
Sum	10/6	10/3	10/1
Inverse	6/10	3/10	1/10

If $a_{ij}=w_i/w_j$, and **both consistency conditions are satisfied**, then: $\boxed{A\,\boldsymbol{w} = n\,\boldsymbol{w}}$

$$\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\,w_1 \\ n\,w_2 \\ \cdots \\ n\,w_n \end{bmatrix}$$



	w	w'
g_{11}	6	**0.6**
g_{12}	3	**0.3**
g_{13}	1	**0.1**

Sum up elements in each column j of A (j=1,…,n) and inverse the resulting sums for each j:

$$\boxed{col_j = \sum_{i=1}^{n} w_i \big/ w_j} \qquad \boxed{w'_j = \frac{1}{col_j} = \frac{w_j}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

[11] Na kolejnych slajdach skupimy się na obliczeniach, pozwalających odpowiedzieć na to pytanie. Zacznijmy od czegoś prostego i rozważmy macierz porównań parami dla dwóch makrokryteriów: g1 i g2. Załóżmy, że nauki ścisłe są trzykrotnie ważniejsze od nauk humanistycznych. Naturalne jest więc oczekiwanie, że priorytet nauk ścisłych powinien być trzykrotnie większy niż priorytet humanistyki. Biorąc pod uwagę normalizację sumy wszystkich priorytetów do jedności, otrzymujemy 0.75 dla g1 i 0.25 dla g2. Te wyniki możemy również uwzględnić w hierarchii. Drugi przykład jest nieco bardziej złożony, ponieważ dotyczy trzech podkryteriów nauk ścisłych. Ta macierz jest w pełni spójna. Jeśli tak, to wystarczy zsumować elementy w każdej kolumnie i obliczyć odwrotność otrzymanych sum. Prowadzi to do uzyskania każdego priorytetu podzielonego przez sumę priorytetów wszystkich elementów. Dla naszej przykładowej macierzy otrzymujemy wartości 0.6, 0.3 i 0.1, które doskonale odzwierciedlają dostarczone porównania parami. Na przykład stosunek między priorytetami przypisanymi g11 i g13 wynosi 6. W ogólności, gdy mnożymy spójną macierz porównań parami przez wektor priorytetów, jest ona równa n, rozmiarowi macierzy, pomnożonemu przez wektor priorytetów. Ta obserwacja ułatwia obliczenia.

Computing Priorities for Inconsistent Matrices

If $a_{ij}=w_i/w_j$, and both consistency conditions are satisfied, then: $\boxed{A\mathbf{w} = n\mathbf{w}}$

- For an inconsistent matrix, this relation is no longer valid
- A number of conversion methods of a matrix into priorities are possible, but AHP uses a mathematical approach based on eigenvalues and eigenvectors

g_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	2	5
g_{22}	1/2	1	3
g_{23}	1/5	1/3	1

$\Downarrow$

$\boxed{A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}}$

For matrix A satisfying the consistency condition of pairwise comparisons (CCPC), but **not necessarily satisfying cardinal consistency condition** (CCC):

- The dimension n is replaced by the unknown λ
- The calculation of λ and $\boldsymbol{w}$ is called, in linear algebra, an **eigenvalue problem**
- Any value λ satisfying this equation is called an **eigenvalue** and $\boldsymbol{w}$ is its associated **eigenvector**
- According to the Perron theorem, a positive matrix has a positive eigenvalue

The non-trivial eigenvalue is the maximum eigenvalue λ_{max} of matrix A ($\lambda_{max} \geq n$) $\boxed{A\mathbf{w} = \lambda_{\max}\mathbf{w}}$

- AHP looks for the **principal eigenvector of *A*** (eigenvector corresponding to λ_{max})

In case the matrix is consistent, $\boldsymbol{w}$ is an eigenvector of A with an eigenvalue equal to n ($\lambda_{max} = n$)

- Otherwise, the difference ($\lambda_{max} - n$) is a measure of the inconsistency

[12] Gdy macierz jest niespójna, to równanie przestaje jednak obowiązywać. Nadal musimy mieć jednak możliwość obliczenia wartości priorytetów. W tym celu wystarczy zastąpić wymiar n nieznaną lambdą. Obliczanie lambdy i wektora w nazywamy problemem wartości własnej. W rzeczywistości AHP wykorzystuje podejście matematyczne oparte na wartościach własnych i wektorach własnych. Konkretnym wynikiem, którego metoda poszukuje, jest główny wektor własny (principal eigenvector) macierzy porównań parami A. Jest to wektor własny odpowiadający maksymalnej wartości własnej lambda-max. W idealnym przypadku taka maksymalna wartość własna jest równa n, czyli rozmiarowi macierzy. Jednak gdy występują niespójności, lambda-max jest większa od n. Im jej wartość jest mniejsza, tym macierz jest bardziej spójna, więc stopień, w jakim lambda-max przekracza n odzwierciedla poziom niespójności porównań parami.

Approximating Principal Eigenvector (1)

Step 1. Sum up elements in each column j of A (j=1,…,n): $col_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ $\left(col_j = \sum_{i=1}^{n} w_i / w_j\right)$

***Step* 2.** Build normalized matrix $A' = [a'_{ij}]$, i,j=1,…,n: $a'_{ij} = a_{ij} / col_j$ $\left(a'_{ij} = w_i / \sum_{i=1}^{n} w_i\right)$

***Step* 3.** Calculate approximate, normalized weight w'_i as an arithmetic mean of the row elements of the normalized matrix A' (i=1,…,n):

$$w'_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}} \qquad \left(w'_i = \frac{1}{n} \times \frac{n \times w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right)$$

a_{ij}	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	2	5
g_{22}	1/2	1	3
g_{23}	1/5	1/3	1
col_j	17/10	10/3	9/1

⇨

Normalized matrix A'

a'_{ij}	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	10/17	6/10	5/9
g_{22}	5/17	3/10	3/9
g_{23}	2/17	1/10	1/9

⇨

w'	w	w'
g_{21}	10/17 + 6/10 + 5/9 = 1.744	1/3·1.744 = 0.581
g_{22}	5/17 + 3/10 + 3/9 = 0.927	1/3·0.927 = 0.309
g_{23}	2/17 + 1/10 + 1/9 = 0.329	1/3·0.329 = 0.110

*To find the ranking of priorities (eigenvector) – **short description**:*
Normalize the column entries by dividing each entry by the sum of the column.
Take the overall row averages.

[13] Pytanie brzmi: jak obliczyć główny wektor własny macierzy A? Być może znacie już jakiś sposób z kursu algebry liniowej. Ja omówię dwie przybliżone metody. Pierwsza z nich zaczyna się od sumowania elementów w każdej kolumnie. Wyniki dla macierzy dotyczącej trzech podkryteriów humanistyki możecie zobaczyć w lewym dolnym rogu. Następnie konstruujemy znormalizowaną macierz, dzieląc każdy z jej elementów przez sumę liczb w kolumnie. Na koniec obliczamy przybliżone, znormalizowane priorytety, biorąc średnie z wierszy w znormalizowanej macierzy. Ostateczne wyniki można zobaczyć w prawym dolnym rogu. Jeśli zastanawiacie się, dlaczego ta procedura ma sens, wystarczy spojrzeć na wyjaśnienia zawarte w równaniach w prawej kolumnie. Zakładają one, że macierz jest spójna, ale na poziomie intuicyjnym widać, że najpierw obliczamy znormalizowane priorytety na podstawie każdej kolumny, a następnie po prostu uśredniamy te przybliżenia uzyskane we wszystkich kolumnach, aby uzyskać dokładniejsze wyniki.

Approximating Principal Eigenvector (2)

In order to calculate the eigenvector associated with the maximum eigenvalue, use an **iterative power method**:

***Step* 1**. The (pairwise comparison) matrix is squared: $A_{t+1} = A_t \cdot A_t$

***Step* 2**. The row sums are then calculated and normalized, to sum up to the unity. This is the first **approximation of the eigenvector**.

***Step* 3**. Using the matrix A_{t+1}, *steps* 1 and 2 are repeated until the difference between these sums in two consecutive approximations of the eigenvector is smaller than a pre-defined accuracy threshold

A_1	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	2	5
g_{22}	1/2	1	3
g_{23}	1/5	1/3	1

$A_2 = A_1 \cdot A_1$

A_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}		Row sum	w'
g_{21}	3	5.67	16		**24.67**	**0.582**
g_{22}	1.60	3	8.50		**13.10**	**0.309**
g_{23}	0.57	1.07	3		**4.63**	**0.109**

$A_3 = A_2 \cdot A_2$

A_3	g_{21}	g_{22}	g_{23}		Row sum	w'
g_{21}	27.13	51.07	144.17		**222.37**	**0.582**
g_{22}	14.42	27.13	76.60		**118.15**	**0.309**
g_{23}	5.11	9.61	27.13		**41.85**	**0.109**

[14] Inną alternatywą dla przybliżenia głównego wektora własnego jest metoda potęgowa. Rozpoczyna się ona od podniesienia do kwadratu macierzy porównań parami, którą widać w lewej części slajdu. Następnie obliczamy sumy w wierszach i normalizujemy je, aby sumowały się do jedynki. Jest to widoczne w lewym dolnym rogu. W ten sposób otrzymujemy pierwsze przybliżenie wektora własnego. Proces się powtarza: podnosimy do kwadratu macierz z poprzedniej iteracji, obliczamy sumę elementów w wierszach i normalizujemy te sumy, otrzymując kolejne przybliżenie wektora własnego. Jeśli przybliżenia uzyskane w kolejnych iteracjach są do siebie podobne, to proces się kończy. Dla naszej małej macierzy można to zrobić już po drugiej iteracji.

Interpretation of Priorities

g_2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	2	5
g_{22}	1/2	1	3
g_{23}	1/5	1/3	1

priorites

	w'
g_{21}	0.581
g_{22}	0.309
g_{23}	0.110

The priorities with both methods differ marginally

Arithmetic mean of the normalized matrix

Iterative power method

	w'
g_{21}	0.582
g_{22}	0.309
g_{23}	0.110

There exist **accurate methods** for computing the principal eigenvector of matrix A

	w	w'
g_{21}	5.313	**0.582**
g_{22}	2.823	**0.309**
g_{23}	1.000	**0.109**
λ	3.004	

Pairwise comparisons based on w'

e.g., $a'_{12} = w'_1 / w'_2 =$ $= 0.582 / 0.309 = 1.88$

A	g_{21}	g_{22}	g_{23}
g_{21}	1	**1.88**	**5.31**
g_{22}	0.53	1	**2.82**
g_{23}	0.19	0.35	1

Intuitively, the consistency is high: $\lambda_{max} = 3.004$ ($n = 3$)

Priorities included in the hierarchy

g_2: 0.250

g_{21}: 0.582 g_{22}: 0.309 g_{13}: 0.109

Aims vs. mathematical reality:

- g_{21} is **2** times more important than g_{22} – we have **1.88**
- g_{22} is **3** times more important than g_{23} – we have **2.82**
- g_{21} is **5** times more important than g_{23} – we have **5.31**

[15] Ostatnie dwa slajdy pokazywały, jak przekształcić macierz porównań parami w wektor priorytetów związanych z porównywanymi elementami. Zastosowaliśmy dwie metody, a ich wyniki różnią się nieznacznie. Oczywiście istnieją dokładne metody obliczania głównego wektora własnego. Ich wyniki przedstawiam na czerwono w środkowej części slajdu. Są one bardzo podobne do tych obliczonych za pomocą średniej arytmetycznej macierzy znormalizowanej. Możemy sprawdzić, jak dobrze te priorytety odzwierciedlają oryginalne porównania parami. W tym celu przekształcam je w macierz zawierającą wartości priorytetów. Nasza macierz wejściowa była niespójna. Dlatego nie było możliwe idealne odtworzenie wszystkich porównań. Jednak tam, gdzie chcieliśmy mieć 2, jesteśmy blisko 2; tam, gdzie chcieliśmy mieć 5, jesteśmy blisko 5, i tak dalej. Niektóre współczynniki są powyżej, a inne poniżej pożądanych liczb. W ten sposób działa wektor własny. Oferuje on świetny kompromis pomiędzy niespójnymi porównaniami parami. Dla rozważanej macierzy możemy intuicyjnie wyczuć, że jest ona wysoce spójna. Potwierdza to maksymalna wartość własna, która jest bardzo bliska 3.

Preference Information in AHP

For programming (inconsistent)

g_{11}	A	B	C	D
A	1	2	5	1
B	1/2	1	3	2
C	1/5	1/3	1	1/4
D	1	1/2	4	1

g_{11}	w	w'
A	1.473	0.379
B	1.129	0.290
C	0.289	0.074
D	1.000	0.257
λ	4.191	

For math (inconsistent)

g_{12}	A	B	C	D
A	1	2	1/2	2
B	1/2	1	1/3	3
C	2	3	1	4
D	1/2	1/3	1/4	1

g_{12}	w	w'
A	2.610	0.254
B	1.886	0.184
C	4.762	0.464
D	1.000	0.097
λ	4.124	

For physics (inconsistent)

g_{13}	A	B	C	D
A	1	4	5	4
B	1/4	1	3	1/2
C	1/5	1/3	1	1/3
D	1/4	2	3	1

g_{13}	w	w'
A	2.724	0.569
B	0.709	0.148
C	0.353	0.074
D	1.000	0.209
λ	4.158	

For visual arts (consistent)

g_{22}	A	B	C	D
A	1	1/3	1	3
B	3	1	3	9
C	1	1/3	1	3
D	1/3	1/9	1/3	1

g_{22}	w	w'
A	3	0.188
B	9	0.563
C	3	0.188
D	1	0.063
λ	4	

The preference elicitation mode and the way of computing the priorities is the same:

- irrespective of the hierarchy level
- irrespective of whether we deal with criteria, sub-criteria, or alternatives

For cognitive sciences (inconsistent)

g_{23}	A	B	C	D
A	1	1/7	1/3	1/5
B	7	1	5	3
C	3	1/5	1	1/3
D	5	1/3	3	1

g_{23}	w	w'
A	0.220	0.058
B	2.155	0.564
C	0.448	0.117
D	1.000	0.262
λ	4.117	

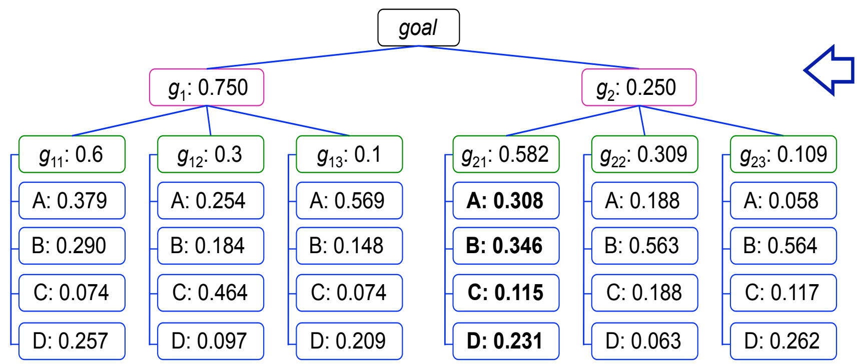
[16] Dotychczas pokazałem macierze porównań parami dla dwóch makrokryteriów oraz pod-kryteriów w ramach jednej z dwóch głównych grup. Aby rozwiązać problem, musimy również porównać warianty względem każdego elementarnego kryterium. Ponieważ mamy cztery warianty, macierze są nieco większe, a każda z nich wymaga sześciu porównań. Na tym slajdzie podaję macierze dla pięciu kryteriów. Cztery z nich są delikatnie niespójne, natomiast macierz dla sztuk plastycznych jest w pełni spójna. Obok każdej macierzy przedstawiam główny wektor własny i odpowiadającą mu maksymalną wartość własną. Wektory własne są znormalizowane tak, aby priorytety sumowały się do jedynki. Co ważne, tryb pozyskiwania preferencji oraz sposób obliczania priorytetów są takie same niezależnie od poziomu hierarchii. Jest to wielka zaleta AHP, gdyż bez względu na to, czy mamy do czynienia z kryteriami, pod-kryteriami czy wariantami, możemy postępować według tej samej procedury.

Considering Qualitative Information in AHP

For some elementary criteria, **precise quantitative information is available**

- Assume that for English (g_{21}), we have results of the level test
- Ratios between such objective data can be used to determine the priorities
- *Pairwise comparison judgments may still be used in some cases*
- When the criterion is to be minimized, the score should be inverted (x becomes $1/x$)

	g_{21}	w'
A	80	**0.308**
B	90	**0.346**
C	30	**0.115**
D	60	**0.231**
Sum	260	1



Complete hierarchy filled with the priorities

- The priorities for a group of elements with the common predecessor sum up to 1
- The priorities of alternatives differ on various criteria
- Need for aggregation

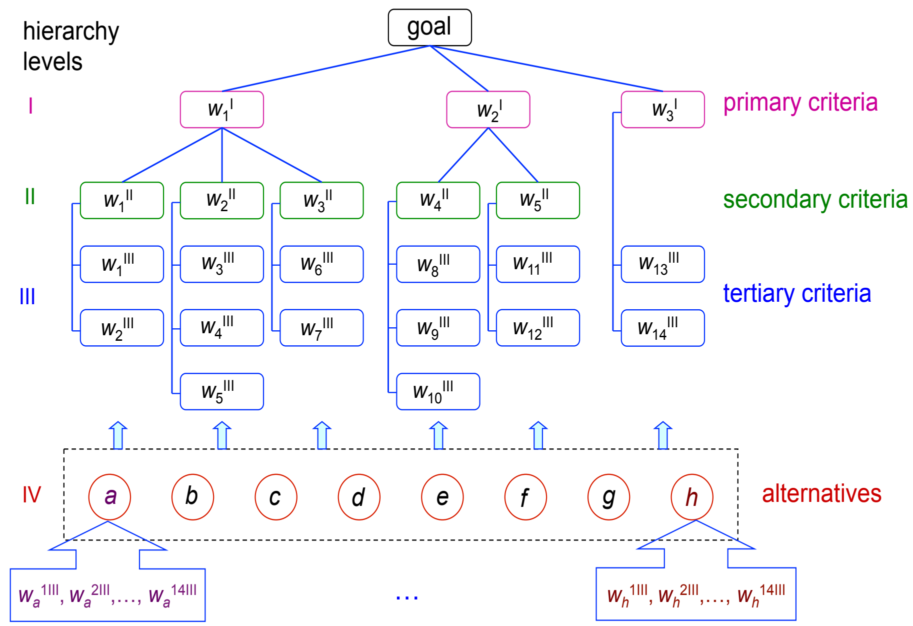
[17] Na poprzednim slajdzie pominąłem poziom języka angielskiego. Jest to rodzaj atrybutu, dla którego mogą być dostępne jakieś obiektywne, precyzyjne, ilościowe informacje. Załóżmy, że mamy wyniki testu poziomu znajomości języka, które są wyrażone na skali od 0 do 100. Możemy je znormalizować, aby określić priorytety, nie wymagając żadnych porównań parami. Oczywiście to drugie rozwiązanie jest nadal możliwe, ale trzeba pamiętać, że bezpośrednie porównania prowadzą zwykle do bardziej skrajnych współczynników niż te uzyskane przez podział oryginalnych wyników liczbowych. W każdym razie, priorytety w zakresie języka angielskiego były ostatnim brakującym elementem, aby nasza hierarchia stała się kompletna. Teraz widać, że priorytety w obrębie każdej grupy ze wspólnym poprzednikiem sumują się do jedynki. Co więcej, priorytety kryteriów różnią się. Wreszcie, priorytety wariantów również różnią się w zależności od tego, które kryterium elementarne rozważyć. Na przykład A jest bardzo dobry z fizyki, ale bardzo słaby z kognitywistyki. Pytanie brzmi: jak zagregować te pośrednie priorytety w priorytety globalne, całościowe?

Computing Comprehensive Score in AHP (1)

Each alternative *a* gets a score (value) equal to the sum of products of priorities (weights) of elements of the hierarchy on **all paths from the alternative to the goal**

$\textbf{\textit{Score}}(a) = w_1^{I}w_1^{II}w_1^{III}w_a^{1III} + w_1^{I}w_1^{II}w_2^{III}w_a^{2III} + \ldots + w_2^{I}w_4^{II}w_8^{III}w_a^{8III} + \ldots + w_3^{I}w_{14}^{III}w_a^{14III}$

$\textbf{\textit{Score}}(h) = w_1^{I}w_1^{II}w_1^{III}w_h^{1III} + w_1^{I}w_1^{II}w_2^{III}w_h^{2III} + \ldots + w_2^{I}w_4^{II}w_8^{III}w_h^{8III} + \ldots + w_3^{I}w_{14}^{III}w_h^{14III}$

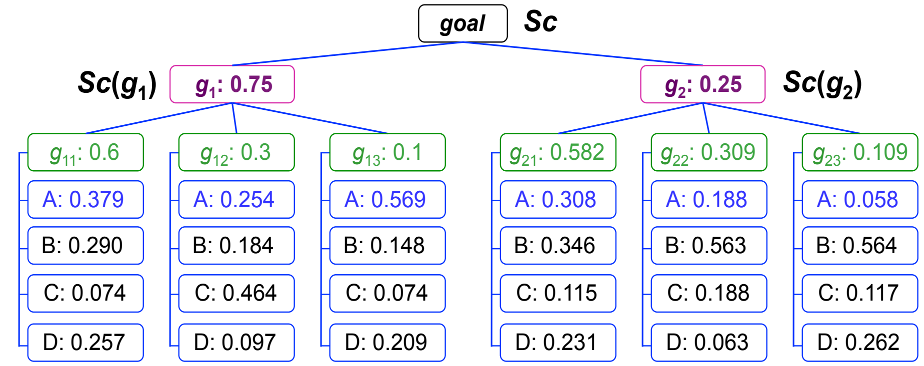


[18] Rozwiązanie jest oczywiste, gdy spojrzymy na hierarchię. Na pewno musimy zacząć od priorytetu każdego wariantu, biorąc pod uwagę każde elementarne kryterium. Taki lokalny priorytet wariantu musi być pomnożony przez wagę danego kryterium. Waga ta wynika z priorytetu kryterium w ramach jego grupy, ale także z priorytetu tej grupy na wyższym poziomie, i tak dalej, aż do węzła górnego. Stąd z operacyjnego punktu widzenia każdy wariant otrzymuje wynik równy sumie iloczynów priorytetów elementów hierarchii na wszystkich ścieżkach od wariantu do celu. Na tym slajdzie przedstawiam szkic obliczania tych scorów dla wariantów a oraz h. W każdym iloczynie składowym różnią się one tylko ostatnim składnikiem, którym jest lokalny priorytet konkretnego wariantu.

Computing Comprehensive Score in AHP (2)

The aggregation of the local, sub-criteria, and macro criteria prioritizations leads to **global prioritizations**

$\boldsymbol{Score(A)} = 0.379 \cdot 0.6 \cdot 0.75 + 0.254 \cdot 0.3 \cdot 0.75 + 0.569 \cdot 0.1 \cdot 0.75 + 0.308 \cdot 0582 \cdot 0.25 + 0.188 \cdot 0.309 \cdot 0.25 + 0.058 \cdot 0.109 \cdot 0.25 = \mathbf{0.331}$



Scores can also be computed for any sub-hierarchy, e.g., g_1 and g_2

RANKING

A → **B** → **D** → **C**

	Sc	*Sc*(g_1)	*Sc*(g_2)
A	**0.331**	0.360	0.243
B	**0.292**	0.244	0.437
C	**0.178**	0.191	0.138
D	**0.199**	0.204	0.182
Sum	**1**	1	1

[19] Poprzedni slajd odnosił się do bardziej ogólnego sformułowania. Obecny wraca do naszego problemu ilustrującego. Widać tu kompletną hierarchię i dokładny sposób obliczania globalnego scoru dla wariantu A. Od wariantu do korzenia jest sześć ścieżek, a na każdej z nich zbieram trzy priorytety. Wyróżniłem je kolorem niebieskim, zielonym i fioletowym. Okazuje się, że A osiąga najwyższy globalny wynik. Tym samym znajduje się w rankingu przed B, D i C. AHP oferuje jednak coś więcej niż tylko ranking. Można analizować wyniki dla każdego węzła pośredniego. Na przykład, wyróżniłem scory dla dwóch głównych podproblemów, gdzie studenci są oceniani tylko w zakresie nauk ścisłych lub humanistycznych. Przy tych bardziej elementarnych wynikach widać, że wariant A czerpie swoją przewagę z tego, że jest szczególnie dobry w naukach ścisłych. Okazuje się zaś gorszy niż B pod względem nauk humanistycznych.

Inconsistency Verification (1)

Along with the priorities, AHP also yields **inconsistency indices** *CI* and *CR*

- Designed to alert the DM to any inconsistencies in the comparisons

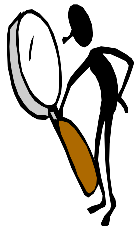
Consistency index (*CI*) says to what degree the judgments of the DM satisfy the cardinal consistency condition

Relative consistency index (*CR*) is the ratio of *CI* and *RI*

- *RI* is a random index defined as an average value of consistency index *CI* for an $n \times n$ matrix *A* filled randomly over diagonal
- *CR* measures how consistent the judgments have been relative to large samples of purely random judgments

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

$$CR = \frac{CI}{RI}$$



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

- ***CR* ≤ 0.1 is considered satisfactory** = an inconsistency of 10% or less implies that the adjustment is none or small as compared to the actual values of the eigenvector entries
- **CR > 0.1 = the judgments are untrustworthy** because they are too close to randomness and the preference elicitation is valueless or must be repeated

[20] Na jednym z pierwszych slajdów, kiedy omawiałem główne etapy AHP, wspomniałem, że wyprowadzając priorytety, metoda sprawdza spójność porównań parami. Gdyby te priorytety były wysoce niespójne, stosowalibyśmy się do zasady śmieci na wejściu, śmieci na wyjściu. Dlatego też poziom niespójności musi być weryfikowany. W tym celu najpierw obliczamy tzw. indeks spójności. Definiujemy go jako stosunek różnicy między maksymalną wartością własną a wartością n oraz n pomniejszonym o 1. Czyli im bliżej maksymalnej wartości własnej do n, tym mniejsza niespójność. W następnym etapie indeks spójności jest dzielony przez indeks losowy. Jest to średnia wartość indeksu spójności dla macierzy o danym rozmiarze, które zostały wypełnione losowo powyżej przekątnej. Saaty zebrał takie indeksy referencyjne dla macierzy o różnych rozmiarach. Ostatni indeks nosi nazwę współczynnika lub ilorazu spójności. Służy on jako podstawa do oceny, czy poziom spójności jest akceptowalny. Domyślnie AHP przyjmuje, że jeśli współczynnik spójności nie przekracza 0.1, to jest zadowalający. W przeciwnym razie oceny są zbyt zbliżone do losowych i proces pozyskiwania preferencji dla danej macierzy należy powtórzyć.

Inconsistency Verification (2)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

For visual arts

g_{22}	A	B	C	D
A	1	1/3	1	3
B	3	1	3	9
C	1	1/3	1	3
D	1/3	1/9	1/3	1

$n = 4$

g_{22}	w	w'
A	3	0.188
B	9	0.563
C	3	0.188
D	1	0.063
λ_{max}	4	

$CI = (4 - 4) / (4 - 1) = 0$

$CR = CI / 0.9 = 0 / 0.9 = 0 \leq 0.1$ **Full consistency**

For programming

g_{11}	A	B	C	D
A	1	2	5	1
B	1/2	1	3	2
C	1/5	1/3	1	1/4
D	1	1/2	4	1

$n = 4$

g_{11}	w	w'
A	1.473	0.379
B	1.129	0.290
C	0.289	0.074
D	1.000	0.257
λ_{max}	4.191	

Satisfactory consistency $CI = (4.191 - 4) / (4 - 1) = 0.064$

$CR = CI / 0.9 = 0.064 / 0.9 = 0.071 \leq 0.1$

For some unknown criterion

$g_?$	A	B	C	D
A	1	1/3	1	3
B	3	1	3	9
C	1	1/3	1	3
D	1/3	1/9	1/3	1

$g_?$	w	w'
A	2.241	0.350
B	1.232	0.192
C	1.936	0.302
D	1.000	0.156
λ_{max}	7.503	

$CI = (7.503 - 4) / (4 - 1) = 1.17$

$CR = CI / 0.9 = 1.17 / 0.9 = 1.30 > 0.1$

The judgments are more random than an average randomly filled matrix of size 4×4

Unacceptable!

[21] Na kolejnym slajdzie przedstawiono trzy przykładowe macierze 4 na 4. Skupmy się najpierw na macierzy dla sztuk plastycznych. Wspomniałem już, że jest ona spójna. Z tego powodu jej maksymalna wartość własna jest równa 4. W związku z tym indeks spójności jest równy zero, a co za tym idzie, współczynnik spójności też jest równy zero. Mamy potwierdzenie pełnej spójności. Kolejny przykład dotyczy programowania. Macierz jest niespójna, co potwierdza maksymalna wartość własna większa od 4. Jednak indeks spójności jest stosunkowo niski, a po podzieleniu przez indeks losowy dla n równego 4, współczynnik spójności jest mniejszy od 0.1. Oznacza to, że spójność jest zadowalająca, a wyprowadzone priorytety są akceptowalne. Ostatni przykład dotyczy hipotetycznej macierzy porównań parami. Wypełniłem ją tak, aby była wysoce niespójna. Rzeczywiście, maksymalna wartość własna jest znacznie większa od 4, a współczynnik spójności jest większy nie tylko od 0.1, ale także od 1. Oznacza to, że oceny są bardziej losowe niż w przypadku przeciętnej losowo wypełnionej macierzy o danym rozmiarze. Co istotne, taka macierz nie jest akceptowana przez AHP i użytkownik musi powtórzyć jej wypełnienie.

AHP - Summary

Input data: a finite set of alternatives $A=\{a, b, c, \ldots\}$
hierarchy of criteria $G=\{g_1^{I},\ldots,g_p^{I}, g_1^{II},\ldots,g_s^{II}, g_1^{III},\ldots,g_t^{III},\ldots\}$

AHP

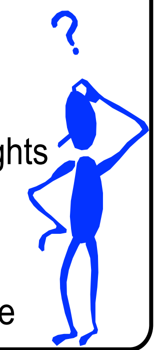
- Criteria, sub-criteria, and alternatives are called elements of the hierarchy

Preference information for elements at each level of the hierarchy:

- pairwise comparisons of all elements i, j with a common predecessor

Preference model: weights w_i (called priorities) of each element i at each level of the hierarchy

- Each alternative gets a score (value) equal to the sum of products of weights of elements of the hierarchy on the paths from the alternative to the goal



Choice: selection of the most preferred alternative

Ranking: putting the alternatives in order from the most to the least desirable

[22] Podsumowując istotne aspekty AHP, metoda ta wyróżnia się koniecznością skonstruowania hierarchii problemu. Powinna ona zawierać cel, kryteria, podkryteria oraz warianty. Wymagana informacja preferencyjna ma postać porównań parami wszystkich elementów hierarchii ze wspólnym poprzednikiem. Dokonuje się tego na każdym poziomie poprzez odniesienie do skali ilorazowej, zwykle od 1 do 9. Informacja taka przekształcana jest w priorytety lub wagi każdego elementu w hierarchii. Priorytety te służą jako model preferencji w AHP, który ostatecznie prowadzi do uzyskania całościowych ocen, zwanych globalnymi priorytetami. Ponieważ większe wartości takich ocen są bardziej preferowane, porządkujemy warianty od najlepszego do najgorszego według malejących globalnych priorytetów. AHP jest często wykorzystywane do wyboru najbardziej preferowanej opcji, rekomendując wtedy wariant z najwyższym priorytetem.

AHP - Drawbacks

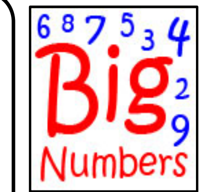
- AHP requires **pairwise comparisons** of all elements linked by the same parent element: $n(n–1)/2$ **may easily run into hundreds**
  - Difficult to use when the number of criteria or alternatives is high (n > 7)
- **Arbitrary conversion** from verbal to numeric scale (ordinal is not cardinal!)
- Problems of 1 to 9 scale (not sufficient for representing DMs' value systems)
  - Easily run into inconsistency; the need for clusters that are compared directly and a pivot serving as a link between clusters (conversion rate)
- Comparison of ordinal evaluations on a ratio scale is meaningless: e.g., how many times „good" is better than „sufficient" ?
- The result of each pairwise comparison is expressed on a ratio scale
  - The **absolute zero is unstable** from one comparison to another
- E.g., compare two cars *i,j* w.r.t. maximal speed criterion (V_{max}); if a_{ij}=3, and $V_{max}(i)$=200 km/h, $V_{max}(j)$=170 km/h, than this means that:

$$(200 - x) / (170 – x) = 3$$

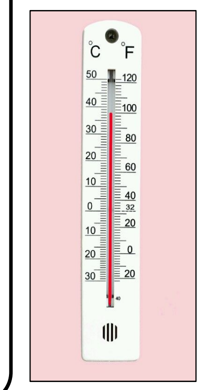
where, assuming a linear transformation of the scale of V_{max} into the scale of preference, x is an absolute zero on the preference scale (x = 155 km/h)

From above, If $V_{max}(k)$=250 km/h, $V_{max}(j)$=170 km/h and a_{kj}=5, then:

$$(250 - x') / (170 - x') = 5 \text{ and } x'=150 \text{ km/h}$$



8	1	6
3	5	7
4	9	2



[23] Kolejne trzy slajdy będą poświęcone problemom związanym z wykorzystaniem AHP w praktycznym wspomaganiu decyzji. Wiecie już, że wymaga ono porównań parami wszystkich elementów w każdej grupie, które łatwo mogą sięgać setek. Z tego powodu stosowanie AHP ogranicza się do małych problemów, na przykład obejmujących nie więcej niż 7 wariantów. Ponadto, możliwość wykorzystania skali słownej do porównań parami jest dobrą opcją, ale transformacja ich do ocen liczbowych jest absolutnie arbitralna i może być sprzeczna z prawdziwymi intencjami użytkowników. W tym samym duchu, skala od 1 do 9 została starannie zaprojektowana, ale może być zbyt skąpa, by wiarygodnie reprezentować preferencje między wieloma parami elementów. Można łatwo wpaść w niespójność tylko dlatego, że w porównaniach chciałoby się przekroczyć liczbę 9. Podobnie kłopotliwe jest przekształcanie wyników wyrażonych na skali porządkowej na liczby na skali ilorazowej. Ten sam problem pojawia się, gdy zaczynacie od ocen liczbowych. Na slajdzie podaję przykład porównywania maksymalnej prędkości samochodów. Łatwo udowodnić, że podając intuicyjne oceny dla różnych par na skali ilorazowej, w praktyce zmieniacie absolutne zero, czyli prędkość służącą jako punkt odniesienia dla innych prędkości uwzględnionych w porównaniu. Dlatego to absolutne zero może być niestabilne i zmieniać się od jednego porównania do drugiego.

Violating Condition of Order Preservation

The eigenvalue method of deriving the priority vector may not satisfy the "**Condition of Order Preservation**"

Def. The priority vector $\boldsymbol{w}$ satisfies the condition of order preservation (COP) if for all elements i,j,k,h being compared, the weights w_i, w_j, w_k, w_h respect the equivalence:

$$w_i / w_j > w_k / w_h \iff a_{ij} > a_{kh}$$

where a_{ij} ($i,j = 1,\ldots,n$) are the judgments given by the DM in the pairwise comparison matrix A

Example violation of condition of order preservation

Pairwise comparison matrix

	A	*B*	*C*	*D*
A	1	2	3	9
B	1/2	1	3/2	8
C	1/3	2/3	1	5/2
D	1/9	1/8	2/5	1

Priorities

	w
A	0.497
B	0.292
C	0.159
D	0.051

e.g.:

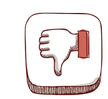
0.497 / 0.292 = 1.70

0.292 / 0.159 = 1.84

Pairwise comparison matrix using priorities

	A	*B*	*C*	*D*
A	1	1.70	3.13	9.75
B	0.59	1	1.84	5.73
C	0.32	0.54	1	3.12
D	0.10	0.17	0.32	1

$\boldsymbol{w}$ does not satisfy COP, because $w_A/w_B < w_B/w_C$, but originally $a_{AB} > a_{BC}$, while it satisfies the cardinal consistency condition $w_1/w_2 \times w_2/w_3 = w_1/w_3$

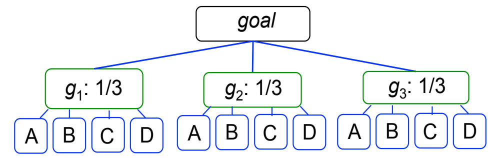


[24] Kolejna własność naruszana przez procedurę operacyjną AHP nosi nazwę warunku zachowania porządku. Mówi on, że gdy wynik jednego porównania parami jest większy od drugiego, powinno to również znaleźć odzwierciedlenie w stosunku uzyskanych priorytetów. Oznacza to, że stosunek priorytetów odpowiadających oryginalnej większej ocenie powinien być większy niż stosunek priorytetów odpowiadających oryginalnej mniejszej ocenie. Łatwo jednak znaleźć macierze porównań parami przeczące temu warunkowi. Wystarczy spojrzeć na przykład podany na slajdzie. Ocena dla porównania A i B jest większa niż dla B i C. Jednak już przy rozpatrywaniu stosunków priorytetów uzyskanych metodą wektorów własnych zależność ta jest odwrotna.

Rank Reversal Phenomenon

- **Rank reversal** is a change in the rank ordering of alternatives when, e.g., the set of alternatives is modified (*there exist various types of ranking reversals*)
- Addition of a copy of an alternative may change the rank order of the terminal scores, even if criteria and criterion weights remain the same

- Initially, there are 3 alternatives *A, B, C* and 3 criteria with equal weights (1/3)
- Later, *D* will be added (*D* is a copy of *B*)
- The cardinal consistency condition holds



weight w_1 = 1/3				
g_1	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	1/9	1	1/9
B	9	1	9	1
C	1	1/9	1	1/9
D	9	1	9	1

weight w_2 = 1/3				
g_2	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	9	9	9
B	1/9	1	1	1
C	1/9	1	1	1
D	1/9	1	1	1

weight w_3 = 1/3				
g_3	*A*	*B*	*C*	*D*
A	1	8/9	8	8/9
B	9/8	1	9	1
C	1/8	1/9	1	1/9
D	9/8	1	9	1

The normalized scores for *A*, *B*, *C* are:

B	*A*	*C*
0.47	0.45	0.08

When **a copy *D* of *B*** is added, the scores become:

A	*B*	*D*	*C*
0.37	0.29	0.29	0.06

The order of *A* and *B* has been reversed

Consequence: difficult to add or take out a new criterion or alternative (*the ranking may change*)

[25] Ostatni kłopotliwy efekt nazywany jest odwróceniem rangi (rank reversal). W ogólności jest to zmiana kolejności wariantów. Istnieją różne rodzaje odwrócenia rangi. Jeden z nich może być spowodowany przez modyfikację zbioru wariantów. Rozważmy przykład z trzema wariantami, A, B i C, które są oceniane pod względem trzech kryteriów o równych wagach. Zgodnie z podanymi na slajdzie macierzami porównań parami, B zajmuje pierwsze miejsce, zaś A drugie. Teraz wyobraźmy sobie, że dodajemy kopię wariantu B o nazwie D. Ranking zmienia się - A okazuje się znacznie lepsze od B i D. Kolejność została odwrócona. Wynika to z podziału priorytetów między elementami hierarchii tak, że sumują się one do jedynki w obrębie każdej grupy mającej wspólnego poprzednika. Odwrócenie kolejności nie zawsze jest niepożądane, a nawet może być uznane za intuicyjne w niektórych kontekstach decyzyjnych. Utrudnia jednak dodanie lub usunięcie nowego wariantu lub kryterium, ponieważ ranking pozostałych może się zmienić.

AHP - Main Advantages

Formal structuring of the decision problem
- Complex problems to be decomposed into sets of simpler sub-problems (judgments)
- Provides a documented rationale for the choice of a particular alternative

The simplicity of pairwise comparisons
- Only two criteria or alternatives have to be considered at any one time so that the DM's task is simplified
- Verbal comparisons are likely to be preferred by DMs who have difficulty in judging numerically

Applicable when it is challenging to formulate criteria evaluations
- It allows qualitative and quantitative evaluations

Redundancy allows consistency to be checked
- AHP requires more comparisons to be made by the DM than are needed to establish a set of weights
- If the DM indicates that A is twice as important as B, and B, in turn, is three times as important as C, then it can be inferred that A is six times more important than C
- By also asking the DM to compare A with C, it is possible to check the consistency of the judgments

Numerical values (priorities) at the local, intermediate, and global levels

Often used to determine only the criteria weights

[26] Omawiając wady AHP, należy pamiętać o korzyściach związanych z jej stosowaniem. Największa z nich wynika z oferowania mechanizmów do strukturyzacji złożonych problemów decyzyjnych. Jeśli chodzi o preferencje, to można je uzyskać za pomocą intuicyjnych porównań parami. Ponadto, AHP opiera się na ocenach decydentów, więc wkład, który jest potrzebny przed zastosowaniem metody jest ograniczony. Stwierdziliśmy, że liczba porównań parami w AHP może być ogromna. Oczywiście, niektóre techniki pozwalają na jej redukcję, ale oryginalne AHP postuluje porównywanie wszystkich par, ponieważ pozwala to na sprawdzenie spójności ocen użytkownika. AHP nie stosuje też żadnych skomplikowanych modeli, natomiast posługuje się liczbami w postaci priorytetów na wszystkich swoich etapach i poziomach. Podejście to jest uniwersalne, ponieważ często jest wykorzystywane wyłącznie do obliczenia wag kryteriów, które są następnie stosowane w ramach innych metod. Należy to robić ostrożnie, gdyż interpretacja wag może być różna w poszczególnych metodach. O tym aspekcie będziemy mówić bliżej końca tego wykładu.

AHP for Group Decision Making

One can use **additional levels of the hierarchy** to model:

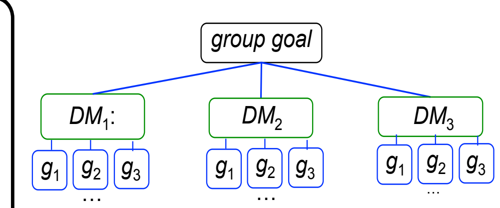
- **Multiple Decision Makers** with different importance

If the DMs do not have equal weights, their priorities must be determined

- Reflect the expertise of DMs or their impact on the decision
- Allocated by supra DM or by a participatory approach

Group decision making with AHP: overall priorities are determined by the weighted averages of the priorities obtained from members of the group

- Understand the conflicting ideas in the organization and try to reach a consensus
- Reduce dominance by a strong member of the group



Pairwise comparisons by supra DM

	DM_1	DM_2	DM_3
DM_1	1	2	5
DM_2	1/2	1	3
DM_3	1/5	1/4	1

In the same spirit, AHP can account for ***multiple scenarios*** *of uncertainty with different credibilities*

[27] Kolejny argument przemawiający za AHP wynika z elastyczności hierarchicznej dekompozycji i strukturyzacji. To znaczy, że uwzględniając dodatkowe poziomy, można sprawić, że metoda nadaje się do rozwiązywania jeszcze bardziej złożonych problemów. Oczywistym przykładem jest grupowe podejmowanie decyzji z udziałem wielu użytkowników. Każdy z nich może rozwiązywać problem indywidualnie, a ich wyniki mogą być agregowane tylko na najwyższym poziomie hierarchii. W tym momencie możliwe jest uwzględnienie priorytetów różnych decydentów, które powinny odzwierciedlać ich wiedzę lub wpływ na decyzję. W ten sposób można uwzględnić sprzeczne priorytety w grupie, a AHP oferuje środki do osiągnięcia kompromisu. To samo rozwiązanie można zastosować do radzenia sobie z tzw. decyzjami w warunkach niepewności. W tego rodzaju problemach warianty są oceniane w ramach wielu scenariuszy o różnej wiarygodności, a całościowe oceny muszą uwzględniać wszystkie te scenariusze.

Example Applications of AHP

The **applications** of AHP to complex problems have **numbered in thousands**

AHP has been very widely applied in areas such as economics and planning, budget and resource allocations, priority setting, energy policy, material handling and purchasing, project selection, and forecasting

- Quantifying the overall quality of software systems (*Microsoft*)
- Choose the entertainment system for its entire fleet (*British Airways*)
- Establish priorities for criteria that improve customer satisfaction (*Ford Motor Company*)
- Allocate close to a billion dollars to the research projects (*Xerox*)
- Allocate resources to diverse activities (*US Department of Defence*)
- Determine the best relocation site for the earthquake-devastated Turkish city Adapazari

The wide range of applications of the AHP is evidence of its versatility

[28] Najlepszym potwierdzeniem praktycznej przydatności AHP są tysiące jego rzeczywistych zastosowań. Na slajdzie podaję przykładowe problemy rozpatrywane przez administrację, biznes i przemysł, w tym największe światowe firmy, które wykorzystywały AHP do podejmowania decyzji dotyczących miliardów dolarów. Ciekawe badania przeprowadzono w Turcji, gdzie metodę zastosowano do określenia najlepszego miejsca relokacji zniszczonego trzęsieniem ziemi miasta. Należy jednak pamiętać, że wiele zastosowań AHP nie jest nigdzie zgłaszanych, ponieważ mają one miejsce na wysokich szczeblach, gdzie kluczowe są względy bezpieczeństwa i prywatności. Na tym kończymy naszą dyskusję na temat AHP.

Weighted Sum Model

A weighted sum model: a comprehensive value is a weighted sum of original performances

$$WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} w_i \cdot g_i(a) = w_1 \cdot g_1(a) + \ldots + w_n \cdot g_n(a)$$

weighted sum | weight associated with criterion g_i | performance of alternative a on g_i

- Also called simple additive weighting (SAW) or weighted linear combination (WLC)
- **It is the best known and simplest MCDA method**
- Claimed to be the most intuitive model due to differentiating the impact of individual criteria and not requiring the transformation of original performances

Easy exploitation of the preference relation induced by **WS** in the set of alternatives A:

- Preference relation (P, >): $a > b \Leftrightarrow WS(a) > WS(b)$
- Indifference relation (I, ~): $a \sim b \Leftrightarrow WS(a) = WS(b)$

- **Four students**: Ana, Brooke, Caden, and Demi
- **Three criteria** of gain type:
  - g_1 – math
  - g_2 – physics
  - g_3 – literature

	w_1	w_2	w_3	Example computations of the weighted sums	
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**		
Alt.	g_1	g_2	g_3	**WS**	**Rank**
A	18	16	14	3/8·18 + 3/8·16+ 2/8·14 = 16.25	1
B	18	14	16	3/8·18 + 3/8·14+ 2/8·16 = 16.00	2
C	14	16	14	3/8·14 + 3/8·16+ 2/8·14 = 14.75	3
D	14	14	16	3/8·14 + 3/8·14+ 2/8·16 = 14.50	4

[29] Resztę wykładu poświęcimy na omówienie innych szeroko stosowanych w praktyce funkcji agregujących. Zacznijmy od sumy ważonej. W tym modelu wagi są mnożone przez oryginalne oceny wariantów w przeciwieństwie do addytywnej funkcji wartości, gdzie funkcje cząstkowe najpierw przekształcają te oceny. Z tego powodu model ten jest uważany za najprostszą metodę WWD, która nie wymaga żadnej dogłębnej wiedzy. Jej zastosowanie jest również proste, ponieważ indukuje ona ranking na zbiorze wariantów zgodnie z malejącymi kolejnościami ocen. Aby opowiedzieć o tym modelu bardziej szczegółowo, rozważymy inny przykład dotyczący oceny studentów. Dla uproszczenia weźmiemy jednak pod uwagę trzy kryteria: matematykę, fizykę i literaturę, przy czym wyniki wyrażone są na skali od 0 do 20. Moim punktem wyjścia będą wagi równe trzy ósme dla dwóch pierwszych kryteriów i nieco mniejsza waga, dwie ósme, dla literatury. Dla takich wartości parametrów wariant A zajmuje pierwsze miejsce, a wariant D plasuje się na samym dole.

Weights as Trade-off Coefficients

- The preference information = weights w_j
- Weights in a weighted sum model are interpreted as trade-offs coefficients (not importances)
- The weighted sum allows trade-off (compensation) between criteria

Focus on three criteria: $WS(a) = WS(g_1(a), g_2(a), g_3(a)) = w_1 \cdot g_1(a) + w_2 \cdot g_2(a) + w_3 \cdot g_3(a)$

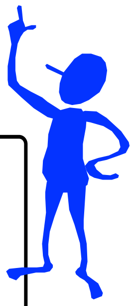
What change (x) on criterion g_3 can compensate a change by 1 unit on criterion g_2?

$$WS(g_1(a), g_2(a), g_3(a)) = WS(g_1(a), g_2(a) + 1, g_3(a) - x)$$

$$w_1 \cdot g_1(a) + w_2 \cdot g_2(a) + w_3 \cdot g_3(a) = w_1 \cdot g_1(a) + w_2 \cdot [g_2(a) + 1] + w_3 \cdot [g_3(a) - x]$$

$$w_2 \cdot g_2(a) + w_3 \cdot g_3(a) = w_2 \cdot g_2(a) + w_3 \cdot g_3(a) + w_2 - w_3 \cdot x$$

$$x = w_2 / w_3 \text{ (for example, } x = 3/8 / 2/8 = 3/2)$$



- The **ratio between weights** answers the questions on the trade-offs (changes required on one criterion to compensate a change by 1 on another criterion)
- **Weights depend on the performance units**! They are scaling coefficients controlling the contribution in the weighted sum (comprehensive score).
- Not easy to elicit! Greater weight does not mean greater importance!

[30] Zastosowanie sumy ważonej wymaga określenia wag. Nie jest to jednak proste, ponieważ wagi są tu interpretowane jako współczynniki przetargu (trade-off coefficients). Aby to uwidocznić, rozważmy sumę ważoną obejmującą trzy kryteria i skupmy się tylko na g2 i g3. Istotne pytanie brzmi: jaka zmiana, oznaczona przez x, na kryterium g3 może skompensować wzrost o 1 jednostkę na kryterium g2? Dość proste wyprowadzenie prowadzi do wniosku, że x jest równe stosunkowi wag związanych z g2 i g3. To dokładnie oddaje sens wag w sumie ważonej. Ich proporcje, stosunki odpowiadają na pytania o przetargi między różnymi parami kryteriów. To z kolei oznacza, że nie jest łatwo je określić, ponieważ większe wagi nie oznaczają większej istotności. W tym modelu wagi zależą od jednostek ocen i służą jako stałe skalujące, które kontrolują wkład każdego kryterium w sumę ważoną.

Weights as Scaling Constants

	w_1	w_2	w_3	
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**	
Alt.	g_1	g_2	g_3	**WS**
A	18	16	140	47.25
B	18	14	160	52.00
C	14	16	140	46.25
D	14	14	160	50.50

Three criteria of gain type: g_1 – math, g_2 – physics, g_3 – literature

- Assume the scale of g_1 and g_2 is between 0 and 20
- The scale of g_3 is modified to the range between 0 and 200 (the performances have been multiplied by 10 w.r.t. the previous scenario)
- Assume we use the olds weights (w_1 = 3/8, w_2 = 3/8, w_3 = 2/8)
- ***B*** and ***D*** are exceptionally good comprehensively only because they score favorably on g_3, which has the most extensive scale of performances
- *This is an undesired effect*!

With the previous performances scale of criterion g_3, a change by 1 unit on criterion g_2 was compensated with a change **x** = 3/2 = 1.5 on criterion g_3

x = w_2 / w_3 = 3/8 / 2/8 = 3/2

- To ensure the same trade-off effect with the new performance scale of g_3, we need to adjust the weights
- A change by 1 unit on criterion g_2 should be compensated with a change **x'** = 15 on criterion g_3
- Therefore, while fixing w_2 = 3/8, the weight w_3 of criterion g_3 should be: w_3 = w_2 / **x'** = 3/8 / 15 = 2/80
- Since the performances on g_3 were multiplied by 10, the weight w_3 of g_3 should be divided by 10

	w_1	w_2	w_3	
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/80**	
Alt.	g_1	g_2	g_3	**WS**
A	18	16	140	16.25
B	18	14	160	16.00
C	14	16	140	14.75
D	14	14	160	14.50

To ease the preference elicitation, one often assumes that all performances are expressed in exactly the same unit

[31] Aby to zrozumieć, rozważmy przykład, w którym oceny na g3 są pomnożone przez 10, a pozostałe oceny są niezmienione. Wówczas, stosując stare wagi, faworyzowalibyśmy warianty B i D, które uzyskują korzystny wynik na g3 tylko dlatego, że oceny na tym kryterium są wyrażone na bardziej rozległej skali. Jest to oczywiście niepożądane. Przy poprzednich wagach, wskazaliśmy, że zyskanie 1 jednostki na g2 może być zrekompensowane stratą 1.5 jednostki na g3. Aby zapewnić ten sam efekt przy nowej skali ocen na g3, musielibyśmy zmniejszyć wagę tego kryterium dziesięć razy. W prawym dolnym rogu podaję wyniki przy takim scenariuszu. Wyniki te znów mają sens. Potwierdza to jednak tylko, że stosowanie sumy ważonej nie jest proste, zwłaszcza gdy zakresy ocen na poszczególnych kryteriach są różne. Dlatego właśnie ten model jest często zalecany do stosowania tylko wtedy, gdy wszystkie oceny są wyrażone w dokładnie tych samych jednostkach. Wiemy jednak doskonale, że oryginalne skale często się różnią. Stosowanie sumy ważonej często wymaga więc wcześniejszej normalizacji ocen do tej samej skali, przez co staje się to podobne do stosowania addytywnej funkcji wartości.

The Meaning of Weights

- **Weights** can have **different interpretations,** which is determined by the model in which they are incorporated
- Values of preference parameters are meaningless as long as the preference model in which they are used is not specified

WEIGHTS

	w_1	w_2	w_3
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**
Alt.	g_1	g_2	g_3
E	18	14	14
F	14	16	16

Consider two alternatives: ***E*** = (18, 14, 14) and ***F*** = (14, 16, 16)

Consider the **weighed sum model**:

- $WS(\boldsymbol{E})$ = 3/8·18 + 3/8·14+ 2/8·14 = 15.5
- $WS(\boldsymbol{F})$ = 3/8·14 + 3/8·16+ 2/8·16 = 15.25
- ***Effect:*** ***E*** is preferred (**>**) to ***F***

Consider the **Condorcet aggregation**: ***a*** is preferred (**>**) to ***b*** *iff* $\Sigma_{j:\, gj(\boldsymbol{a}) \geq gj(\boldsymbol{b})}\, w_j > \Sigma_{j:\, gj(\boldsymbol{b}) \geq gj(\boldsymbol{a})}\, w_j$

- the sum of weights of criteria supporting that ***a*** is at least as good as ***b*** is greater than the sum of weights of criteria supporting that ***b*** is at least as good as ***a***
- ***Effect:*** ***F*** is preferred (**>**) to ***E*** because $w_2 + w_3 = 5/8 > w_1 = 3/8$

Depending on the model with the same parameter (weight) values, the results can be completely different

[32] To powinno uświadomić wam dwa istotne aspekty. Nawet jeśli jakiś parametr nazywany jest w ten sam sposób, może mieć różne interpretacje. Widzieliście już wagi służące jako współczynniki przetargu w sumie ważonej lub istotności kryteriów w metodach opartych na relacji przewyższania. Ma to jednak dalsze konsekwencje przy określaniu wartości tych parametrów. Nie mają one żadnego znaczenia dopóki nie zostanie określony model preferencji, w którym są wykorzystywane. Aby to uwidocznić, rozważmy dwa warianty, E i F, oraz parę modeli preferencji wykorzystujących wagi o tych samych wartościach. W przypadku zastosowania sumy ważonej wariant E jest preferowany nad wariant F. Jednak w przypadku tzw. agregacji Condorceta wyniki są inne. W tym modelu wariant jest preferowany, jeśli suma wag kryteriów, na których osiąga co najmniej tak dobre oceny jak drugi wariant, jest większa niż suma wag, na których osiąga nie lepsze oceny. Tak jest w przypadku F w porównaniu z E, co jest sprzeczne z wynikiem uzyskanym w przypadku sumy ważonej. Ostatecznie, w zależności od modelu, możemy uzyskać zupełnie inne wyniki przy tych samych wartościach parametrów.

Preference Independence of Criteria

- The weights and thus the trade-offs in the weighted sum model are **constant** for the whole range variation of criteria values (performances)
- The weighted sum and, more generally, an additive value function requires that criteria are **independent in the sense of preference**
- Intuitively, this means that the contribution each alternative ***a*** gets from criterion g_i, i.e., $u_i(a) = w_i \cdot g_i(a)$ does not change with a change of the performance on some other criterion $g_j(a)$, $j=1,\ldots,n$, $j \neq i$

	w_1	w_2	w_3	Results	
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**		
Alt.	g_1	g_2	g_3	**WS**	**Rank**
A	18	16	14	16.25	1
B	18	14	16	16.00	2
C	14	16	14	14.75	3
D	14	14	16	14.50	4

Assume we agree with ***C*** > ***D***, but not with ***A*** > ***B***

- ***A*** has good scores on math and physics, which is natural, but a student good at math or physics (such as ***B***) are usually not good at literature, so they should get some bonus

The weighted sum model is not able to represent such preferences: ***B*** > ***A*** and ***C*** > ***D***

- Due to the "**preference independence**" condition, WSM requires that if ***B*** > ***A*** then ***D*** > ***C*** and if ***C*** > ***D*** then ***A*** > ***B***

$$B > A \text{ iff } WS(B) = 18 \cdot w_1 + 14 \cdot w_2 + 16 \cdot w_3 > WS(A) = 18 \cdot w_1 + 16 \cdot w_2 + 14 \cdot w_3 \text{ iff } 14 \cdot w_2 + 16 \cdot w_3 > 16 \cdot w_2 + 14 \cdot w_3$$

$$C > D \text{ iff } WS(C) = 14 \cdot w_1 + 16 \cdot w_2 + 14 \cdot w_3 > WS(D) = 14 \cdot w_1 + 14 \cdot w_2 + 16 \cdot w_3 \text{ iff } 14 \cdot w_2 + 16 \cdot w_3 < 16 \cdot w_2 + 14 \cdot w_3$$

[33] Wróćmy do sumy ważonej. Wagi, a więc i przetargi w tym modelu są stałe dla całego zakresu ocen. Wynika z tego, że suma ważona wymaga, aby kryteria były niezależne w sensie preferencji. Intuicyjnie oznacza to, że wkłady, które wszystkie warianty o takich samych ocenach na danym kryterium otrzymują od tego kryterium są takie same. Po prostu nie zależą one od ocen na pozostałych kryteriach. Nie zawsze jest to jednak pożądane. Zacznijmy od analizy wyników uzyskanych za pomocą sumy ważonej. Możemy się zgodzić, że C jest lepsze od D, ponieważ przy tak samo niskich ocenach z matematyki faworyzujemy ucznia, który jest lepszy z fizyki, a nie z literatury. Jednak patrząc na A i B, którzy mają świetne wyniki z matematyki, możemy preferować B niż A. Jest całkiem naturalne, że ktoś dobry z matematyki jest też dobry z fizyki, co ma miejsce w przypadku A, ale rzadko ktoś dobry z matematyki jest też dobry z literatury, co ma miejsce w przypadku B. Nie da się jednak przedstawić dwóch preferencji B nad A oraz C nad D za pomocą sumy ważonej. Wymagania te prowadzą do sprzecznych nierówności opartych na wagach kryteriów. A wynika to właśnie z warunku niezależności preferencji.

Need for Interactions Between Criteria

	w_1	w_2	w_3	Results	
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**		
Alt.	g_1	g_2	g_3	**WS**	**Rank**
A	18	16	14	16.25	1
B	18	14	16	16.00	2
C	14	16	14	14.75	3
D	14	14	16	14.50	4

- The performance of 14 on math – g_1 (see ***C*** and ***D***) represents a different level than the performance of 18 on g_1 (see ***A*** and ***B***)
- When considering students with low math skills (14), we may prefer somebody better in terms of physics – g_2: ***C*** > ***D***
- When considering students with high math skills (18), we may prefer somebody better in terms of literature – g_3 (with a more balanced profile): ***B*** > ***A***
- We wish to represent **interactions between criteria!**

- There is a redundancy (**negative synergy**) between mathematics and physics: risk of over-evaluation of students being good in math and physics because students good in math are usually good in physics
- **Redundancy (weakening effect)** for math (g_1) and physics (g_2) – the weight that should be assigned to g_1 and g_2 jointly should be lower than the sum of individual weights of g_1 and g_2

$$\mu(\{g_1,g_2\}) < \mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_2\})$$

- There is a complementary (**positive synergy**) between math or physics and literature, because we wish to give a bonus to students who, besides math or physics, are also good at literature
- **Complementarity (strengthening effect)** for math (g_1) and literature (g_3) – the weight that should be assigned to g_1 and g_3 jointly should be greater than the sum of individual weights of g_1 and g_3 (the same for g_2 and g_3)

$$\mu(\{g_1,g_3\}) > \mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_3\}) \quad \text{and} \quad \mu(\{g_2,g_3\}) > \mu(\{g_2\}) + \mu(\{g_3\})$$

***We need to represent the weights of subsets of criteria rather than only the weights of individual criteria*!**

[34] Wróćmy więc do wymagań. Przy wysokich zdolnościach matematycznych chcemy faworyzować tych, którzy są dobrzy w literaturze; natomiast przy niskich zdolnościach matematycznych optujemy za lepszymi umiejętnościami z fizyki. Innymi słowy, chcemy modelować interakcje między kryteriami. Z jednej strony powinna istnieć redundancja między matematyką a fizyką, ponieważ istnieje ryzyko zawyżania oceny uczniów, którzy są dobrzy z obu tych przedmiotów. Aby temu zapobiec, powinniśmy modelować efekt osłabienia, tak aby waga przypisana matematyce i fizyce łącznie była niższa niż suma wag tych dwóch przedmiotów rozpatrywanych oddzielnie. I odwrotnie, między matematyką i literaturą lub fizyką i literaturą istnieje pozytywna synergia. Aby ją uwzględnić, waga przypisana wspólnie np. matematyce i literaturze powinna być większa niż suma wag przypisanych tym dwóm przedmiotom oddzielnie. Wydaje się więc, że rozwiązanie problemu modelowania interakcji polega na reprezentowaniu wag podzbiorów kryteriów, a nie tylko dla pojedynczych kryteriów, jak w modelu sumy ważonej.

Capacities - Weights of Criteria Subsets

Instead of weights w_i for each criterion $g_j \in G$ in a weighted sum: $\mu(F)$ represents a **joint weight of criteria** from a subset $F \subseteq G$

$\mu : 2^G \rightarrow [0,1]$ is an non-additive measure (***capacity***) defined over all subsets of criteria, taking values in the range [0,1]

- **Normalization**: $\mu(\emptyset)=0$, $\mu(G)=1$
- **Monotonicity**: for $F' \subset F \subseteq G$, $\mu(F') \leq \mu(F)$

In general, it is admissible that $\mu(F' \cup F'') \neq \mu(F') + \mu(F'')$

- **Positive interaction** (synergy): $\mu(F' \cup F'') > \mu(F') + \mu(F'')$
- **Negative interaction** (redundancy): $\mu(F' \cup F'') < \mu(F') + \mu(F'')$

Example capacities:

- $\mu(\emptyset)=0$

For individual criteria:

- $\mu(\{g_1\}) = \mu(\{g_2\}) = 0.45$, $\mu(\{g_3\}) = 0.3$

For criteria pairs:

- $\mu(\{g_1,g_2\}) = 0.5$, $\mu(\{g_1,g_3\}) = \mu(\{g_2,g_3\})=0.85$

For all criteria:

- $\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) = 1$

Positive interaction (synergy)::

- $\mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_3\}) = 0.45 + 0.3 = 0.75$
- $\mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_3\}) < \mu(\{g_1,g_3\}) = 0.85$
- $\mu(\{g_2\}) + \mu(\{g_3\}) = 0.75 < \mu(\{g_2,g_3\}) = 0.85$

Negative interaction (redundancy):

- $\mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_2\}) = 0.45 + 0.45 = 0.9$
- $\mu(\{g_1\}) + \mu(\{g_2\}) > \mu(\{g_1,g_2\}) = 0.5$

- Weights (capacities) μ permit to take into account the **interactions between criteria**
- Weights for the subsets of criteria are incorporated in the **Choquet integral**

[35] Wagi odpowiadające wszystkim możliwym podzbiorom kryteriów nazywamy po angielsku capacities. Aby miały one sens, powinny spełniać pewne intuicyjne ograniczenia. Po pierwsze, waga pustego zbioru powinna wynosić zero, a waga wszystkich kryteriów rozpatrywanych łącznie powinna wynosić jeden. Oprócz normalizacji, musimy zapewnić monotoniczność. To znaczy, waga przypisana nadzbiorowi jakiegoś podzbioru kryteriów musi być co najmniej tak duża jak waga podzbioru. Co ważne, w ogólności nie jest wymagane, aby waga podzbioru kryteriów była równa sumie wag kryteriów elementarnych zawartych w tym podzbiorze. W przypadku, gdy waga takiego podzbioru jest większa od sumy wag kryteriów elementarnych, reprezentujemy pozytywną interakcję. Taka synergia jest wymagana dla moich przykładowych zdolności przypisanych do podzbiorów {g1, g3} lub {g2, g3}. Natomiast gdy waga przypisana jakiemuś podzbiorowi jest mniejsza od sumy wag przypisanych do kryteriów elementarnych, modelujemy interakcję negatywną. Dotyczy to w przykładzie wag przypisanych do podzbioru składającego się z g1 i g2. Wagi capacities pozwalają więc na rozważenie interakcji. Najbardziej znany model, który je uwzględnia, nazywa się całką Choquet.

A Different Look at the Weighted Sum Model

	w_1	w_2	w_3
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**
Alt.	g_1	g_2	g_3
A	18	16	14

$WS(\boldsymbol{A}) = w_1 \cdot g_1(\boldsymbol{A}) + w_2 \cdot g_2(\boldsymbol{A}) + w_3 \cdot g_3(\boldsymbol{A}) = 18 \cdot w_1 + 16 \cdot w_2 + 14 \cdot w_3 =$

$= (14 + 4) \cdot w_1 + (14 + 2) \cdot w_2 + 14 \cdot w_3 = 14 \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + 4 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 =$

$= 14 \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + (2 + 2) \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 = 14 \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + 2(w_1 + w_2) + 2 \cdot w_1 =$

$= 14 \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + 2(w_1 + w_2) + 2 \cdot w_1 =$

$= (14 – 0) \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + (16 – 14) \cdot (w_1 + w_2) + (18 – 16) \cdot w_1 =$

$= (g_3(\boldsymbol{A}) – 0) \cdot (w_1 + w_2 + w_3) + (g_2(\boldsymbol{A}) – g_3(\boldsymbol{A})) \cdot (w_1 + w_2) + (g_1(\boldsymbol{A}) – g_2(\boldsymbol{A})) \cdot w_1$

A weighted sum model: $WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} w_i \cdot g_i(a)$ can be expressed as:

$$WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$$

where $_{(\cdot)}$ is an index permutation $\{1,\ldots,n\}$ such that the performances are ordered in the non-decreasing order: $0 = g_{(0)}(a) \leq g_{(1)}(a) \leq g_{(2)}(a) \leq \ldots \leq g_{(n)}(a)$ (0 is added as the worst, artificial performance)

- A weighted sum of differences between consecutive performances in the non-decreasing order with weights defined as the sum of weights of criteria on which a given performance level is attained

Assume that $\mu(\{(i),\ldots,(n)\})$ is a **weight of the subset of criteria** $(\{(i),\ldots,(n)\})$ defined as the sum $\sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$ of weights of the elementary criteria contained in the subset, i.e.:

$$\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) = \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$$

Then, $WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \mu(\{(i),\ldots,(n)\})$

[36] Aby sformułować całkę Choquet, rozważmy ponownie sumę ważoną. Zmienimy jej postać, aby ułatwić wprowadzenie całki. Zacznijmy od przykładu dotyczącego wariantu A. W wyniku ciągu przekształceń można pokazać, że gdy oceny dotyczące różnych kryteriów są wyrażone na tej samej skali, suma ważona jest równoważna sumie iloczynów różnic między kolejnymi ocenami w porządku niemalejącym i sum wag kryteriów, na których osiągnięto dany poziom ocen. Wynika z tego, że waga danego kryterium interweniuje tylko do pewnego poziomu. Dla wariantu A do poziomu ocen 14 wszystkie kryteria wnoszą swoje wagi, między 14 a 16 dotyczy to tylko g1 i g2, a między 16 a 18 - interweniuje już tylko g1. Możemy zapisać to bardziej ogólnie i wyrazić model jako sumę ważoną różnic między kolejnymi ocenami w porządku niemalejącym, przy czym wagi definiujemy jako sumę wag kryteriów, na których osiągnięto dany poziom ocen. Drobne uzupełnienie polega na tym, że w tym porządku ocen dodajemy zero jako najgorszą możliwą ocenę. Służy ono jako punkt odniesienia dla najmniejszej oceny osiągniętej na jakimkolwiek kryterium. Możemy pójść nawet o krok dalej i zastąpić sumę wag pojedynczym symbolem wagi odpowiadającym podzbiorowi kryteriów, które składają się na tą sumę.

Weighted Sum Model - Example (1)

New perspective on the weighted sum: $WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \mu(\{(i),\ldots,(n)\})$

where $\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) = \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$

	w_1	w_2	w_3
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**
Alt.	g_1	g_2	g_3
A	18	16	14

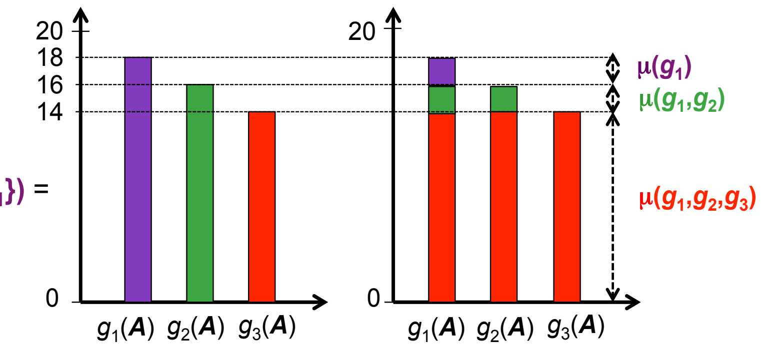
The ordered performances of alternative A:

$0 = g_{(0)}(A) \le g_{(1)}(A) = g_3(A) = 14 \le g_{(2)}(A) = g_2(A) = 16 \le g_{(3)}(A) = g_1(A) = 18$

Assuming that $\mu(\{g_1\}) = 3/8$, $\mu(\{g_2\}) = 3/8$, and $\mu(\{g_3\}) = 2/8$, we have:

- $\mu(\{g_1,g_2\}) = 3/8 + 3/8 = 6/8$; $\mu(\{g_1,g_3\}) = 3/8 + 2/8 = 5/8$; $\mu(\{g_2,g_3\}) = 3/8 + 2/8 = 5/8$
- $\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) = 3/8 + 3/8 + 2/8 = 1$

$$WS(A) = [14 - 0]\cdot\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + [16 - 14]\cdot\mu(\{g_1,g_2\}) + [18 - 16]\cdot\mu(\{g_1\}) =$$
$$= 14\cdot\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + 2\cdot\mu(\{g_1,g_2\}) + 2\cdot\mu(\{g_1\}) =$$
$$= 14\cdot 1 + 2\cdot 6/8 + 2\cdot 3/8 = 16.25$$



[37] Obliczmy teraz sumę ważoną dla wariantu A przy użyciu tej zmienionej formuły. Po pierwsze, musimy uporządkować oceny wariantu A w kolejności malejącej. Zaczynamy więc od sztucznie włączonego 0; potem mamy 14 z g3, 16 z g2 i 18 z g1. Po drugie, obliczamy wagi dla wszystkich podzbiorów kryteriów. Na razie są one zdefiniowane jako sumy wag kryteriów zawartych w danym podzbiorze. Na przykład dla podzbioru {g1,g2} sumujemy wagi g1 oraz g2. Teraz jesteśmy gotowi do obliczenia sumy ważonej dla wariantu A. Zaczynamy od przedziału od 0 do 14, który mnożymy przez wagę podzbioru zawierającego wszystkie kryteria. Następnie rozważamy zakres od 14 do 16, który mnożymy przez wagę podzbioru {g1,g2}. Na koniec uwzględniamy przedział od 16 do 18, mnożąc go przez wagę podzbioru g1. W sumie otrzymujemy 16.25.

Weighted Sum Model - Example (2)

New perspective on the weighted sum: $WS(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \mu(\{(i),\ldots,(n)\})$

where $\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) = \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$

	w_1	w_2	w_3
Weight	**3/8**	**3/8**	**2/8**
Alt.	g_1	g_2	g_3
B	18	14	16

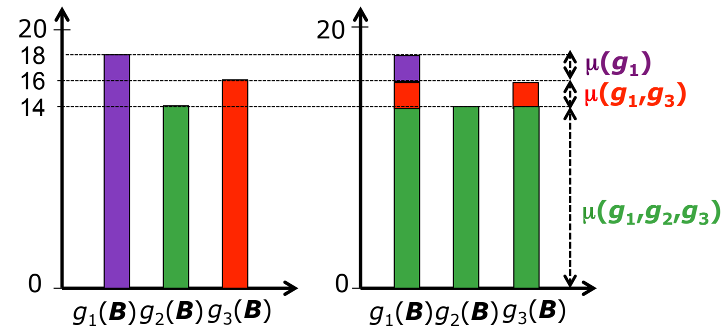
The ordered performances of alternative ***B***:

$0 = g_{(0)}(B) \le g_{(1)}(B) = g_2(B) = 14 \le g_{(2)}(B) = g_3(B) = 16 \le g_{(3)}(B) = g_1(B) = 18$

Assuming that $\mu(\{g_1\}) = 3/8$, $\mu(\{g_2\}) = 3/8$, and $\mu(\{g_3\}) = 2/8$, we have:

- $\mu(\{g_1,g_2\}) = 3/8 + 3/8 = 6/8$; $\mu(\{g_1,g_3\}) = 3/8 + 2/8 = 5/8$; $\mu(\{g_2,g_3\}) = 3/8 + 2/8 = 5/8$
- $\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) = 3/8 + 3/8 + 2/8 = 1$

$$\begin{aligned} WS(B) = {} & [14-0]\cdot\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + \\ & + [16-14]\cdot\mu(\{g_1,g_3\}) + \\ & + [18-16]\cdot\mu(\{g_1\}) = \\ = {} & 14\cdot\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + 2\cdot\mu(\{g_1,g_3\}) + 2\cdot\mu(\{g_1\}) = \\ = {} & 14\cdot 1 + 2\cdot 5/8 + 2\cdot 3/8 = 16.0 \end{aligned}$$



Is it really necessary to impose $\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) = \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$?

NO!

[38] Zróbmy to samo dla wariantu B. Tu najgorszą ocenę 14 mamy na g2, potem jest g3 z oceną 16, a najlepszą ocenę 18 mamy znów na g1. W tym przypadku waga podzbioru wszystkich kryteriów jest pomnożona przez 14 minus 0; następnie, w zakresie między 14 a 16, podzbiór g1 i g3 wchodzi ze swoją wagą, a na koniec, między 16 a 18 – uwzględniamy tylko wagę g1. W porównaniu z wariantem A składnik środkowy jest inny, ponieważ poziom oceny 16 jest osiągany na g1 i g3, a nie na g1 i g2. Suma ważona dla B jest równa 16. Oczywiście nie ma sensu komplikować obliczeń w ten sposób tylko dla sumy ważonej. Możemy jednak zapytać, czy waga danego podzbioru kryteriów musi być równa sumie wag kryteriów zawartych w tym podzbiorze? Dla sumy ważonej odpowiedź jest twierdząca, ale bardziej ogólna odpowiedź brzmi: nie!

The Choquet Integral

The **Choquet integral** can be defined in the same way as the revised weighted sum:

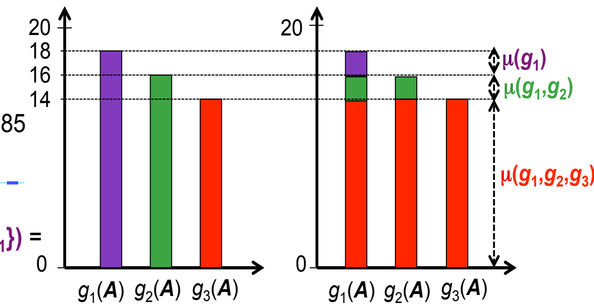
$$Ch(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \mu(\{(i),\ldots,(n)\})$$

where $_{(\cdot)}$ is an index permutation {1,…, n} such that the performances are ordered in the non-decreasing order:
$0 = g_{(0)}(a) \leq g_{(1)}(a) \leq g_{(2)}(a) \leq \ldots \leq g_{(n)}(a)$ (0 is added as the worst, artificial performance)

- without imposing the condition $\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) = \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$
- the capacities need to satisfy the previously defined normalization and monotonicity constraints, but can represent positive ($\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) > \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$) or negative ($\mu(\{(i),\ldots,(n)\}) < \sum_{j=i,\ldots,n} w_{(j)}$) interactions

Alt.	g_1	g_2	g_3
A	18	16	14

Example capacities (defined previously):
$\mu(\emptyset)=0$, $\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) = 1$
$\mu(\{g_1\}) = \mu(\{g_2\}) = 0.45$, $\mu(\{g_3\}) = 0.3$
$\mu(\{g_1,g_2\}) = 0.5$, $\mu(\{g_1,g_3\}) = \mu(\{g_2,g_3\})=0.85$



$Ch(A) = [14 - 0] \cdot \mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + [16 - 14] \cdot \mu(\{g_1,g_2\}) + [18 - 16] \cdot \mu(\{g_1\}) =$
$= 14 \cdot \mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + 2 \cdot \mu(\{g_1,g_2\}) + 2 \cdot \mu(\{g_1\}) =$
$= 14 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.45 = 15.9$

[39] Model, który nie narzuca tego restrykcyjnego założenia, nazywamy całką Choquet. Definiuje się ją jako ważoną sumę iloczynów różnic między kolejnymi ocenami uszeregowanymi w porządku niemalejącym oraz wag odpowiadających podzbiorowi kryteriów, na których osiągnięty jest górny poziom oceny w tej różnicy. Kilka slajdów temu zdefiniowaliśmy wagi, zwane capacities, dla wszystkich podzbiorów kryteriów. W szczególności waga dla podzbioru g1,g3 jest większa od sumy wag dla g1 i g3, co pozwala modelować interakcję pozytywną, dodatnią dla tej pary. Ponadto waga dla podzbioru g1,g2 jest mniejsza od sumy wag dla g1 i g2, reprezentując negatywną, ujemną interakcję dla tych kryteriów. Następnie obliczamy całkę Choquet w tym samym duchu, co zmienioną sumę ważoną. Po prostu wagi podzbiorów kryteriów nie są równe sumie wag kryteriów w nich zawartych. W efekcie otrzymujemy inną wartość końcową 15.9.

The Choquet integral $Ch(a) = \sum_{i=1,\ldots,n} [g_{(i)}(a) - g_{(i-1)}(a)] \cdot \mu(\{(i),\ldots,(n)\})$

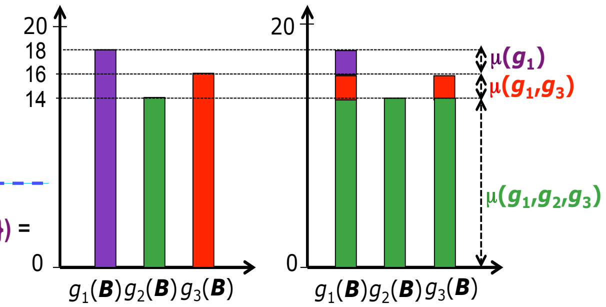
Example capacities (defined previously):

$\mu(\emptyset)=0$, $\mu(\{g_1,g_2,g_3\}) = 1$

$\mu(\{g_1\}) = \mu(\{g_2\}) = 0.45$, $\mu(\{g_3\}) = 0.3$

$\mu(\{g_1,g_2\}) = 0.5$, $\mu(\{g_1,g_3\}) = \mu(\{g_2,g_3\}) = 0.85$

$Ch(B) = [14 - 0] \cdot \mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + [16 - 14] \cdot \mu(\{g_1,g_3\}) + [18 - 16] \cdot \mu(\{g_1\}) =$
$= 14 \cdot \mu(\{g_1,g_2,g_3\}) + 2 \cdot \mu(\{g_1,g_3\}) + 2 \cdot \mu(\{g_1\}) =$
$= 14 \cdot 1 + 2 \cdot 0.85 + 2 \cdot 0.45 = 16.6$



- The Choquet integral is able to represent preferences:
  B > **A** and **C** > **D**
  by considering postive and negative interactions between criteria, and not adhering to the condition of preference independence
- *Drawback*: all criteria must have **the same cardinal evaluation scale**

Alt.	g_1	g_2	g_3	*Ch*	Rank
A	18	16	14	15.9	2
B	18	14	16	16.6	1
C	14	16	14	14.9	3
D	14	14	16	14.6	4

[40] Powtarzając te kroki z tymi samymi capacities dla wariantu B otrzymujemy całkę Choquet równą 16.6. Jest ona większa niż dla wariantu A, co sprawia, że B jest bardziej preferowany niż A. Jednocześnie wariant C uzyskuje wyższą całkę Choquet niż wariant D. Potwierdza to, że uwzględnienie interakcji między kryteriami pozwala na jednoczesne reprezentowanie preferencji B względem A oraz C względem D. Niewielka wada całki Choquet wynika z konieczności wyrażenia ocen na wszystkich kryteriach na tej samej skali. Użyliśmy skali od 0 do 20, ale w praktyce często sprowadza się wszystkie wyniki do zakresu między 0 a 1.

2-additive Choquet Integral

- The Choquet integral admitting interactions between any subsets of criteria is hard to interpret
- It is also difficult to understand the impact of various subsets on the integral's values for different alternatives (their intervention depends on the order of performances of a particular alternative)
- In practice, one often reduces the interactions to pairs of criteria (**2-additive Choquet integral**)

Let us consider alternative a evaluated in terms of only two criteria ($n = 2$): $a = [g_1(a), g_2(a)]$

- *If* $g_1(a) \le g_2(a)$, then $Ch(a) = g_1(a) \cdot \mu(\{1,2\}) + [g_2(a) - g_1(a)] \cdot \mu(\{2\})$
- *If* $g_1(a) > g_2(a)$, then $Ch(a) = g_2(a) \cdot \mu(\{1,2\}) + [g_1(a) - g_2(a)] \cdot \mu(\{1\})$

In general: $Ch(a) = g_1(a) \cdot \mu(\{1\}) + g_2(a) \cdot \mu(\{2\}) + \min\{g_1(a), g_2(a)\} \cdot [\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\})]$

e.g., *If* $g_1(a) \le g_2(a)$, then $Ch(a) = g_1(a) \cdot \mu(\{1\}) + g_2(a) \cdot \mu(\{2\}) + g_1(a) \cdot [\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\})] =$

$$= g_1(a) \cdot [\mu(\{1,2\})] + [g_2(a) - g_1(a)] \cdot \mu(\{2\})$$

- If $\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) < 0$ (i.e., $\mu(\{1,2\}) < \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$), then the interaction is negative
- If $\mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) > 0$ (i.e., $\mu(\{1,2\}) > \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$), then the interaction is positive

Let us formulate the Choquet integral as:

$$Ch(a) = m(\{1\}) \cdot g_1(a) + m(\{2\}) \cdot g_2(a) + m(\{1,2\}) \cdot \min\{g_1(a), g_2(a)\}$$

where $m(\{1\})$, $m(\{2\})$ are weights of individual criteria and $m(\{1,2\})$ is the interaction coefficient

- $m(\{1\}) = \mu(\{1\})$, $m(\{2\}) = \mu(\{2\})$, $m(\{1,2\}) = \mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\})$
- *We change symbols from* μ *to* m to *avoid confusion between different notations*

[41] Innym problemem związanym z całką Choquet jest konieczność określenia wag dla wszystkich podzbiorów kryteriów. Dla większych rodzin wyzwaniem staje się określenie tak wielu precyzyjnych liczb i kontrola pożądanych efektów interakcji. Dlatego w praktyce często ogranicza się interakcje do par kryteriów w ramach tzw. 2-addytywnej całki Choquet. Sformułujmy ją jeszcze bardziej intuicyjnie. Rozważmy prosty przypadek, w którym występują tylko dwa kryteria, g1 i g2. Wtedy całkę Choquet można sformułować jako sumę mniejszej z dwóch ocen pomnożoną przez capacity związaną z podzbiorem dwóch kryteriów oraz różnicy między większą i mniejszą oceną pomnożoną przez capacity kryterium, na którym osiągnięto wyższą ocenę. Można to przełożyć na bardziej ogólną formę sumy ważonej ocen na dwóch kryteriach rozpatrywanych indywidualnie, do której dodajemy minimalną ocenę na jednym z dwóch kryteriów pomnożoną przez różnicę między wagą dwóch kryteriów rozpatrywanych łącznie a wagami dwóch kryteriów rozpatrywanych indywidualnie. Gdy taka różnica jest mniejsza od 0, kryteria oddziałują na siebie negatywnie, natomiast jej dodatnia wartość oznacza oddziaływanie pozytywne. Skoro ta różnica jest tak kluczowa, a przy tym łatwo interpretowalna, to może zróbmy z niej osobny parametr. Uchwyciłby on premię w przypadku pozytywnej interakcji lub karę w przypadku negatywnej interakcji. Po pomnożeniu przez minimum z dwóch ocen, należy go dodać do standardowej sumy ważonej na dwóch kryteriach. Aby uniknąć pomyłek w różnych zapisach, nowe wagi oznaczamy przez m zamiast greckiej litery mu (miu).

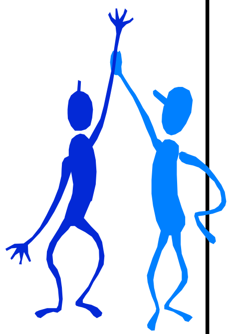
Möbius Representation of the 2-additive Choquet Integral

- The Choquet integral for problems involving two criteria (n = 2):

$$\boldsymbol{Ch(a)} = m(\{1\})\cdot g_1(a) + m(\{2\})\cdot g_2(a) + m(\{1,2\})\cdot \min\{g_1(a),g_2(a)\} =$$
$$= \sum_{i=1,2} m(\{i\})\cdot g_i(a) + m(\{1,2\})\cdot \min\{g_1(a),g_2(a)\}$$

- The weights of individual criteria need to be non-negative, but the interaction coefficients are not restricted in this way (they can be negative, positive, or equal to 0)
- The above model can be generalized to the **Möbius representation of the 2-additive Choquet integral**:

$$\boldsymbol{Ch(a)} = \sum_{i=1,\ldots,n} m(\{i\})\cdot g_i(a) + \sum_{\{i,j\}\subseteq G} m(\{i,j\})\cdot \min\{g_i(a),g_j(a)\}$$



where:

- **normalization**: $m(\emptyset) = 0$ and $\sum_{i=1,\ldots,n} m(\{i\}) + \sum_{\{i,j\}\subseteq G} m(\{i,j\}) = 1$
- **monotonicity**: $m(\{i\}) \geq 0$, for $i = 1,\ldots,n$

$$m(\{i\}) + \sum_{j\in F} m(\{i,j\}) \geq 0, \text{ for } i = 1,\ldots,n \text{ and } F \subseteq G \setminus \{i\},\ G \neq \emptyset$$

- The Möbius representation clearly exhibits the contributions of both individual criteria and pairs of criteria that interact **positively ($m(\{i,j\}) > 0$)** or **negatively ($m(\{i,j\}) < 0$)**

[42] Jesteśmy jednak daleko od rozwiązania tego problemu, ponieważ rozważaliśmy tylko dwa kryteria, a w WWD rodziny kryteriów są często większe. Na szczęście ten sam pomysł można zaadaptować do większej liczby kryteriów wykorzystując tzw. reprezentację Mobiusa całki Choquet. Wciąż jednak należy pamiętać, że ograniczamy nasze rozważania do interakcji pomiędzy parami kryteriów. W ogólności, całkę Choquet można sformułować jako sumę ważoną ocen powiększoną o sumę składowych wynikających z interakcji, z których każda jest zdefiniowana jako iloczyn minimalnej oceny z danej pary i wagi tej pary. Wagi poszczególnych kryteriów i par kryteriów muszą spełniać ograniczenia normalizacji i monotoniczności. W szczególności suma wszystkich wag musi być równa 1, wagi poszczególnych kryteriów muszą być nieujemne, a składowe wynikające z interakcji dla dowolnej pary obejmującej dane kryterium nie mogą powodować, że całkowity wkład tego kryterium jest ujemny. Co istotne, współczynniki interakcji mogą mieć dowolny znak. Gdy są dodatnie, oznaczają synergię, a gdy są ujemne, oznaczają redundancję. Skoro tak, to można je łatwiej zdefiniować.

2-additive Choquet Integral - Example

The **Möbius representation** of the 2-additive Choquet integral:

$$\boldsymbol{Ch}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1,\ldots,n} m(\{i\})\cdot g_i(a) + \sum_{\{i,j\}\subseteq G} m(\{i,j\})\cdot \min\{g_i(a), g_j(a)\}$$

Example weights satisfying normalization and monotonicity constraints:

$m(\{\boldsymbol{g}_1\}) = m(\{\boldsymbol{g}_2\}) = 0.45$, $m(\{\boldsymbol{g}_3\}) = 0.3$

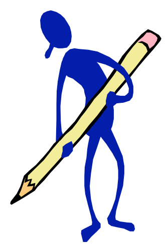
$m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\}) = -0.4$ (negative interaction)

$m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_3\}) = m(\{\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\}) = 0.1$ (positive interaction)

Alt.	g_1	g_2	g_3	*Ch*	Rank
A	18	16	14	**15.9**	2
B	18	14	16	**16.6**	1
C	14	16	14	14.9	3
D	14	14	16	14.6	4

$$Ch(\boldsymbol{A}) = 18\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1\}) + 16\cdot m(\{\boldsymbol{g}_2\}) + 14\cdot m(\{\boldsymbol{g}_3\}) +$$
$$+ \min\{18,16\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\}) + \min\{18,14\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_3\}) + \min\{16,14\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\}) =$$
$$= 18\cdot 0.45 + 16\cdot 0.45 + 14\cdot 0.3 + 16\cdot(-0.4) + 14\cdot 0.1 + 14\cdot 0.1 = \mathbf{15.9}$$

$$Ch(\boldsymbol{B}) = 18\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1\}) + 14\cdot m(\{\boldsymbol{g}_2\}) + 16\cdot m(\{\boldsymbol{g}_3\}) +$$
$$+ \min\{18,14\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\}) + \min\{18,16\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_3\}) + \min\{14,16\}\cdot m(\{\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\}) =$$
$$= 18\cdot 0.45 + 14\cdot 0.45 + 16\cdot 0.3 + 14\cdot(-0.4) + 16\cdot 0.1 + 14\cdot 0.1 = \mathbf{16.6}$$



- In many real decision problems, it suffices to consider 2-additive measures
  - In this case, positive and negative interactions between couples of criteria are modeled
- From the point of view of MCDA, the use of 2-additive measures is justified by observing that the information on the importance of the single criteria and the interactions between couples of criteria are noteworthy
- It could be not easy for the DM to provide information on the interactions among three or more criteria during the decision procedure

[43] Na ostatnim slajdzie rozważamy reprezentację Mobiusa 2-addytywnej całki Choquet. Jest ona sparametryzowana wagami, które spełniają ograniczenia normalizacji i monotoniczności, a jednocześnie odzwierciedlają ujemną interakcję dla g1 i g2 oraz dodatnią dla g1 i g3 oraz g2 i g3. Zwróćcie uwagę, że np. waga dla podzbioru {g1,g2} jest mniejsza od zera. Aby obliczyć całkę Choquet, zaczynamy od sumy ważonej, a następnie rozpatrujemy wszystkie pary kryteriów, dla których mnożymy minimalną ocenę z dwóch przez wagę danej pary. Ponownie otrzymane całki potwierdzają, że możliwe jest jednoczesne preferowanie B nad A oraz C nad D. 2-addytywna całka Choquet jest często stosowana w praktyce, ponieważ rozważanie interakcji między trójkami, czwórkami i większymi podzbiorami n kryteriów jest bardzo wymagające.