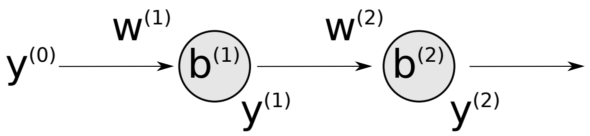
EIO – Laboratorium 2

Algorytm wstecznej propagacji błędu

Zadanie 1

Schemat sieci neuronowej:



Zbiór uczący:

$X_1 = (0, \hat{y} = 0)$
$X_2 = (4, \hat{y} = 2)$

Funkcja aktywacji: ReLU

Funkcja błędu: MSE

a) Korzystając z reguły łańcuchowej wyprowadź wzory na obliczenie pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial E}{\partial w^{(2)}} = \frac{dE}{dy^{(2)}} \frac{dy^{(2)}}{dz^{(2)}} \frac{dz^{(2)}}{dw^{(2)}} = \delta^{(2)} y^{(1)} \quad \Big| \quad \delta^{(2)} = 2 \cdot (y - y') \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } z^{(2)} \leq 0 \\ 1 & \text{if } z^{(2)} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w^{(1)}} = \frac{dE}{dy^{(2)}} \frac{dy^{(2)}}{dz^{(2)}} \frac{dz^{(2)}}{dy^{(1)}} \frac{dy^{(1)}}{dz^{(1)}} \frac{dz^{(1)}}{dw^{(1)}} = \delta^{(1)} y^{(0)} \quad \Big| \quad \delta^{(1)} = \delta^{(2)} \cdot w^{(2)} \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } z^{(1)} \leq 0 \\ 1 & \text{if } z^{(1)} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b^{(2)}} = \frac{dE}{dy^{(2)}} \frac{dy^{(2)}}{dz^{(2)}} \frac{dz^{(2)}}{db^{(2)}} = \delta^{(2)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b^{(1)}} = \frac{dE}{dy^{(2)}} \frac{dy^{(2)}}{dz^{(2)}} \frac{dz^{(2)}}{dy^{(1)}} \frac{dy^{(1)}}{dz^{(1)}} \frac{dz^{(1)}}{db^{(1)}} = \delta^{(1)}$$

Generalnie:

1) $w' = w - \mu \frac{dE}{dw}$; $b' = b - \mu \frac{dE}{db}$

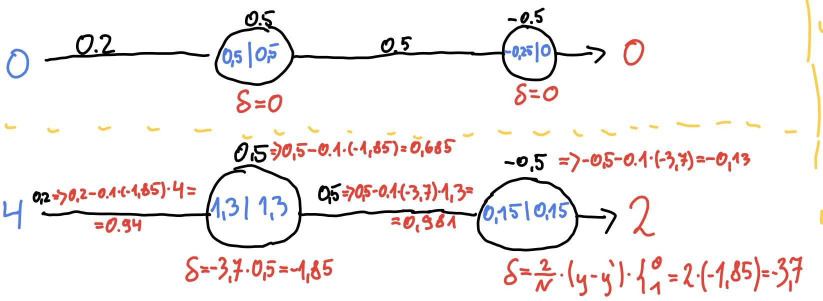
2) $\frac{dE}{dw_{ij}^{(k)}} = \delta_j^{(k)} y_i^{(k-1)}$; $\frac{dE}{db_j^{(k)}} = \delta_j^{(k)}$

3) $\delta_j' = \frac{dE}{dy_i'} \cdot \frac{dy_i'}{dz_j'}$; $\delta_j^{(k)} = \sum_i \delta_i^{(k+1)} w_{ji}^{(k+1)} \cdot \frac{dy_j^{(k)}}{dz_j^{(k)}}$

ostatnia warstwa   pośrednia warstwa

b) Oblicz zaktualizowane wagi dla $\mu = 0.1$ oraz następujących wartości wag: $w^{(1)} = 0.2, b^{(1)} = 0.5, w^{(2)} = 0.5, b^{(2)} = -0.5$

1) Graficznie



$w^{(2)'} = [0{,}5] - 0.1 \cdot agg\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}3 \end{bmatrix}\right) = [0{,}5] - 0.1 \cdot [-2{,}405] = [0{,}7405]$

$w^{(1)'} = [0{,}2] - 0.1 \cdot agg\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = [0{,}2] - 0.1 \cdot [-3{,}7] = [0{,}57]$

$b^{(2)'} = [-0{,}5] - 0.1 \cdot agg\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}7 \end{bmatrix}\right) = [-0{,}5] - 0.1 \cdot [-1{,}85] = [-0{,}315]$

$b^{(1)'} = [0{,}2] - 0.1 \cdot agg\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}85 \end{bmatrix}\right) = [0{,}2] - 0.1 \cdot [-0{,}925] = [0{,}2925]$

2) Macierzowo (uwaga: tu występuje jedna aktualizacja wag)

$z^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \odot [0{,}2]^T + [0{,}5]^T = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}3 \end{bmatrix}$ $y^{(1)} = f(z^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}3 \end{bmatrix}$

$z^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}3 \end{bmatrix} \odot [0{,}5]^T + [-0{,}5]^T = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$ $y^{(2)} = f(z^{(2)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$

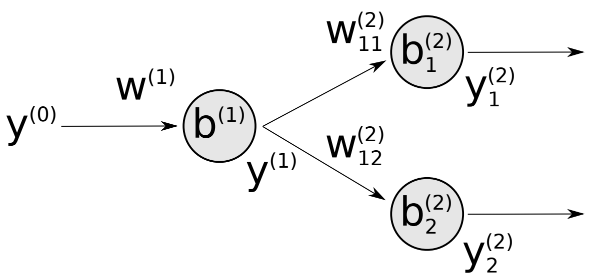
$\delta^{(2)} = 2 \cdot (y^{(2)} - y') \cdot \begin{cases} 0 & \text{if} \dots \\ 1 \end{cases} = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}7 \end{bmatrix}$

$\delta^{(1)} = \delta^{(2)} \odot w^{(2)} \cdot \begin{cases} 0 & \text{if} \dots \\ 1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3{,}7 \end{bmatrix} \odot [0{,}5] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}85 \end{bmatrix}$

agg() - funkcja agregująca po wierszach macierzy wejściowej. Tu wykorzystano średnią po kolumnach. np. $agg\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = [1{,}5 \ \ 3{,}5]$

Zadanie 2

Schemat sieci neuronowej:



Zbiór uczący:

$X_1 = (0, \hat{y} = (0, 1))$
$X_2 = (4, \hat{y} = (2, 5))$

Funkcja aktywacji: ReLU

Funkcja błędu: MSE

a) Korzystając z reguły łańcuchowej wyprowadź wzory na obliczenie pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{11}^{(2)}} = \frac{dE}{dy_1^{(2)}} \frac{dy_1^{(2)}}{dz_1^{(2)}} \frac{dz_1^{(2)}}{dw_{11}^{(2)}} = \delta_1^{(2)} y_1^{(1)} \quad \Big| \quad \delta_1^{(2)} = \left(y_1^{(2)} - y_1^{(2)'}\right) \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } z_1^{(2)} \leq 0 \\ 1 & \text{if } z_1^{(2)} > 0 \end{cases}$$

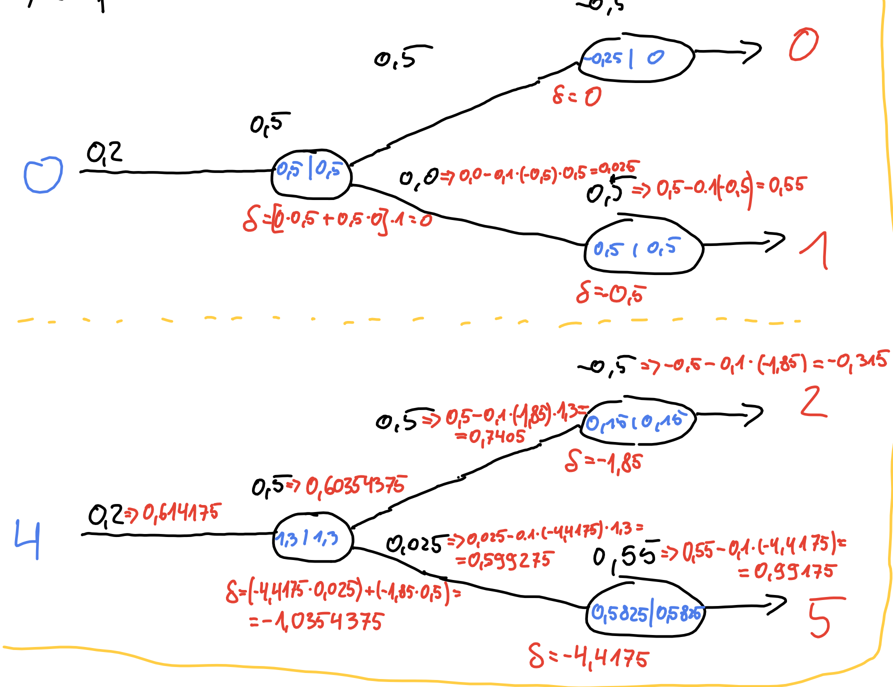
$$\frac{\partial E}{\partial w_{12}^{(2)}} = \frac{dE}{dy_2^{(2)}} \frac{dy_2^{(2)}}{dz_2^{(2)}} \frac{dz_2^{(2)}}{dw_{12}^{(2)}} = \delta_2^{(2)} y_1^{(2)} \quad \Big| \quad \delta_2^{(2)} = \left(y_2^{(2)} - y_2^{(2)'}\right) \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } z_2^{(2)} \leq 0 \\ 1 & \text{if } z_2^{(2)} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w^{(1)}} = \frac{dy^{(1)}}{dz^{(1)}} \cdot \frac{dz^{(1)}}{dw^{(1)}} \cdot \sum_i \frac{dE}{dy_i^{(2)}} \frac{dy_i^{(2)}}{dz_i^{(2)}} \frac{dz_i^{(2)}}{dy^{(1)}} = \delta^{(1)} y^{(0)} \quad \Big| \quad \delta^{(1)} = \sum_i \delta_i^{(2)} w_{1i} \cdot \begin{cases} 0 & \text{if } z^{(1)} \leq 0 \\ 1 & \text{if } z^{(1)} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E}{\partial b^{(1)}} = \frac{dy^{(1)}}{dz^{(1)}} \cdot \frac{dz^{(1)}}{db^{(1)}} \cdot \sum_i \frac{dE}{dy_i^{(2)}} \frac{dy^{(2)}}{dz_i^{(2)}} \frac{dz_i^{(2)}}{dy^{(1)}} = \delta^{(1)}$$

b) Oblicz zaktualizowane wagi dla $\mu = 0.1$ oraz następujących wartości wag: $w^{(1)} = 0.2, b^{(1)} = 0.5, w_{11}^{(2)} = 0.5, b_1^{(2)} = -0.5, w_{12}^{(2)} = 0.0, b_2^{(2)} = 0.5$

1) Graficznie



2) Macierzowo

$$z^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0,5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,3 \end{bmatrix} \quad y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

$$z^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,3 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,5 \\ 0,15 & 0,5 \end{bmatrix} \quad y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,15 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\delta^{(2)} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0,15 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,85 & -4,5 \end{bmatrix}$$

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,85 & -4,5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,925 \end{bmatrix}$$

proszę zauważyć konieczność zastosowania „broadcastingu" co przy większych sieciach wymaga skorzystania z macierzy 3-wymiarowej i stąd lepiej wykonać takie obliczenia jeden po drugim – graficznie

$$w^{(2)'} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,0 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \text{agg}\left(\begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,85 & -4,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,3 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,0 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \begin{bmatrix} -1,2025 & -3,05 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0,62025 & 0,305 \end{bmatrix}$$

$$w^{(1)'} = \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix} - 0,1 \cdot \text{agg}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -0,925 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \begin{bmatrix} -1,85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,385 \end{bmatrix}$$

$$b^{(2)'} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \text{agg}\left(\begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,85 & -4,5 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \begin{bmatrix} -0,925 & -2,5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -0,4075 & 0,75 \end{bmatrix}$$

$$b^{(1)'} = \begin{bmatrix} 0,5 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \text{agg}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -0,925 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0,5 \end{bmatrix} - 0.1 \cdot \begin{bmatrix} -0,4625 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0,54625 \end{bmatrix}$$