
LORD VOROTRON: FINDING THE BEST JFA VARIANT FOR THE COMING WINTER

DRAFT

Maciej A. Czyzewski
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology
Piotrowo 2, 60-965 Poznan, Poland
maciejanthonyczyzewski@gmail.com

Kamil Piechowiak
Institute of Computing Science
Poznan University of Technology
Piotrowo 2, 60-965 Poznan, Poland
kamil.cams@gmail.com

September 16, 2020

UWAGA! Przenioslem fragmenty ze starego szkicu, teraz jednak czuje ze powinni byc to takie ogolne podsumowanie wszystkich mozliwych wariantow JFA - i w jakich przypadkach sie sprawdzaja. A tak przykazji nasza wersja z szumem+trikami ktora dobrze dziala, no i dodatek taki ze mozna teraz zrobic sobie ensamble (a nie jako glowny cel tej pracy). Dlatego wszystko co ponizej to praktycznie random/bardzo mocny szkic. Wykresy to wizualizacja smaku.

ABSTRACT

This paper studies a practical usage of machine learning (AutoML) to automate research towards discovering efficient Voronoi Diagram and Distance Transform algorithms. As the baseline we used the Jump Flooding Algorithm (JFA) - by finding new mutations which works best for specific data, and then ensembling them into one, we create new state-of-the-art algorithm in this field named **Lord Vorotron** with time complexity $\approx O(1)$ and work complexity $\approx O(N)$. The algorithm is faster and produces more accurate approximations. It could be extended into 3D space in a slice-by-slice manner. We started from the assumption that JFA has potential for improvement - some benefits can be observed for specific data by adding random noise and adjusting the step size in JFA. This showed us that, AutoML could examine this space, and find the best possible algorithm in each case. In the further part of the work, we discuss the results, compare the variants and ensemble for creating the final algorithm.

CEL: omawiamy dwa algorytmy? jeden nastepca JFA - JFAStar oraz ensamble po naszym score fn. - Lord Vorotron??????

Keywords aaaaaaaaaaaaaaaaaa · bbbbbbbbbbbbbbbb · cccccccccccccccccc

1 Introduction

This paper¹ studies a practical usage of machine learning to automate research towards discovering efficient Distance Transform algorithms (utilizing technique known as AutoML). Thus, by finding mutations which works best for specific data, and then ensembling them into one, we create new state-of-the-art algorithm in this field named Lord Vorotron with time complexity $\approx O(1)$ and work complexity $\approx O(N)$.

Notable contribution to the quick algorithm that makes Distance Transform (DT) using graphics hardware includes Hoff III et al. [1] that creates a cone for each input (point/seed) and renders those cones to obtain the Voronoi diagram as the lower envelope of these cones. [2] use planes tangent to a paraboloid and thus avoid the errors caused by the tessellation of the cones. Unfortunately, the drawback of this approach is the significant amount of computation and the implementation complexity.

¹the original title for this paper was “Lord Vorotron: Finding the Best JFA Variant for the Coming Winter”

Jump flooding algorithm (JFA)² is an interesting way to utilize the graphics processing unit to efficiently compute Voronoi diagrams and distance transforms [3]. This method is faster and produces more accurate results [5], and furthermore, it could be extended into 3D space in a slice-by-slice manner. This is more effective than the previous research carried out by Sud et al. [4], because the speed of JFA is almost independent to the number of seeds [5].

Based on this research and findings, several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including SKW [6], PBA [7], FastGPU [8], Honda's algorithm [9] and WTO [10].

The main question that needs to be addressed now is whether JFA has potential for improvement. We found some benefits for specific data by adding random noise and adjusting the phase size in JFA. Therefore, this shows that, AutoML could examine this unknown space, and find the best possible algorithm in each case.

For convenience, this work focus on the Voronoi diagram only - because this problem can be translated to DT [3]. The algorithm would be an approximation of the output, thus we suggest using WTO [10] for exact DT (EDT). The major contributions of this paper are thus:

1. Presenting new state-of-the-art variants of algorithm for Voronoi Diagram and Distance Transform: **JFAStar** - single best variant; **Lord Vorotron** - ensemble of weak variants; and
2. Analyzing all possible variants of JFA: comparing error and speedup relative to bruteforce method

2 Related Work

Several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including JFA [3], SKW [6], PBA [7], FastGPU [8], Honda's algorithm [9] and WTO [10].

Reference	Algorithm	Exactness	Time	Work
Assis Zampirolli et al. [8]	FastGPU	Exact	$O(n^3/p)$	-
Cao et al. [7]	PBA	Exact	$O(n)$	$O(mN)$
Honda et al. [9]	based on SKW	Exact	$O(n)$	$O(N)$
Manduhu et al. [10]	WTO	Exact	$O(\log n)$	$O(N)$
Schneider et al. [6]	SKW	Approximate	$O(n)$	$O(N)$
Rong et al. [3]	JFA	Approximate	$O(\log n)$	$O(N \log n)$
In this paper	Lord Vorotron	Approximate	$\sim O(1)$	$\sim O(N)$

Table 1: Different GPU algorithms for computing EDT

2.1 Jump Flooding

redukcja i bridge pomiedzy intro (usunac subsection)

co to jest jump flooding? tak naprawde to nie jest algorytm do voronoi-a tylko pattern komunikacyjny w programowaniu rownoleglym - swojej pracy doktorskiej autor tej techniki podaje wiele zastosowan jednak w swoich badaniach ogranicza sie do Voronoi-a. glownym pytaniem roznych takich patternow jest ile potrzebnych jest rund/operacji komunikacji aby zagwarantowac aby dana informacja zostanie dostarczona. akurat w voronoi-u wiele komorek jest lokalna w skali calego przykladu - wiec JFA ktora gwarantuje dostarczenie informacji globalnie do kazdego punktu - wykonuje pewne niepotrzebne operacje. szybkość i zajętość pamięciowa JFA jest satysfakcjonująca, jednak proste modyfikacje pokazują że algorytm ten wykonuje się szybciej w pewnych przypadkach (i to typowych). dlatego naturalnym pytaniem powinno być w jakich oraz jakie modyfikacje wpływają na szybkość działania.

2.2 AutoML

przenieść do Proposed Method

okay przeniosłem - dodać prace co też tak szuka algosów

²a novel pattern of communication

3 Proposed Method

przepisać ten szkic bo język się placzy

JFA opiera się na tym że informacja jest przekazywana ??????. Przekazanie odbywa się w $\log(n)$ krokach. Wiele przeprowadziliśmy krótki eksperyment applyując losowy szum na wejściową masę. Okazało się że ilość potrzebnych kroków spadła - powstały losowe shortcuty. Co oznacza że powinny istnieć inne "mutacje" algorytmów lepsze w pewnych określonych przypadkach. Wiele szukanie najszybszego algorytmu będzie następujące:

- Wymyślenie wszystkich możliwych wariantów JFA
- Mutacje i zapisanie najlepszych wersji dla danej domeny
- Ensemblacja algorytmów tak aby wybierać najlepszy wariant dla danej domeny

3.1 Domain Space

jakie domeny i dlaczego (i jak działały `gen_uniform`, `gen_polar`, `gen_grid`)

- **shapes:** $\{(64, 64), (128, 128), (256, 256), (512, 512), (768, 768)\}$
- **cases:**
 - `gen_uniform`: seeds=1,
 - `gen_uniform`: seeds=2,
 - `gen_uniform`: density=0.0001,
 - `gen_uniform`: density=0.001,
 - `gen_uniform`: density=0.01,
 - `gen_uniform`: density=0.02,
 - `gen_uniform`: density=0.03,
 - `gen_uniform`: density=0.04,
 - `gen_uniform`: density=0.05,
 - `gen_uniform`: density=0.1,

3.2 Search Space

bridge z score function gdziekolwiek to będzie obliczyć ile jest aktualnie wersji algosów np. czy jest to już 2do14 jak mamy 3xreal w wielomianie AKTUALNIE JEST około 7,200?

jakie modyfikacje, na to osobna sekcja? więc co tu napisać chyba tylko o złożoności problemu i że kod jest składany i testowany a niektóre wersje są pomijane zgodnie z działaniem `gp_minimize` (Bayesian optimization using Gaussian Processes).

w naszym wypadku zdefiniowaliśmy pewien zbiór wariantów pewnych części algorytmu (Search Space), moduł testujący daną mutację/wariant - składa kod kernela a później go weryfikuje na naszej Domain Space.

3.3 Score Function

SCORE CZY METRIC? różnica w pikselach pomiędzy bruteforce a algorytmem - napisać o tym / też że to wszystko to ilorazy do bruteforce

dla voronoi-a interesują nas 2 parametry Error oraz Szybkość, aby wyniki były wiarygodne porównujemy je z bruteforcem (a więc będzie to iloraz). aby ocenić daną mutację musimy przypisać jakiś Score danej wersji, więc użyliśmy wzoru poniżej

$$S(x, y) = \max\{0, x \cdot (100 - y^{1.5})\}, \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq 100, 0 < x \quad (2)$$

który kaže za zbyt wysokie error, dając zerowy wynik - składnik przy y rośnie szybciej niż x więc gdy przekroczy 100 da nam ujemny wynik - czyli 0.

3.4 Optimizer

opisac dwie osobne taktyki optymalizacji dla best single vs. ensemble

mozemy napisac ze korzystalismy z forest/gp minimize, ale tez wspomniec ze aby miec najlepszy best single to trzeba bylo optymalizowac rownoczesnie cala przestrzen (od malych do duzych, gestych po rzadkie), a zeby miec najlepszego Vorotrona - czyli ensmbela to trzeba bylo dla kazdej domeny z optymalizowac a pozniej jedynie zrobic balancera!!!!!!!!!!!!

trzeba to przeszukiwac tak aby nie sfiksowal na zadanych parametrach - bo niechcacy ocenia na poczatku ze szum/dual jest nie fajny i pozniej go juz nie rozwaza

3.5 Ensemble

mozna zapisac tabele dla kazdej domeny (shape) / i zrobic przewidywania parametrow (slownik wariantu) - bo dla malych oplacalne sa Circle6 a dla wiekszych Circle12 i tak dalej - jak to zrobic?

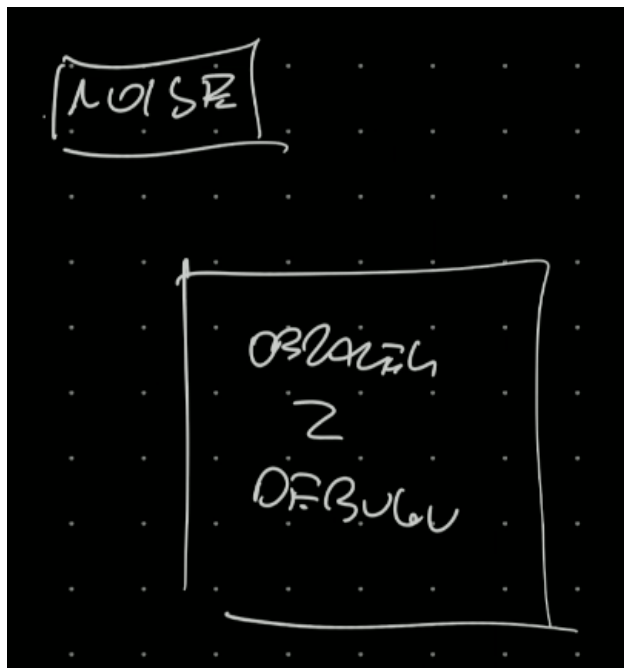
patrzac na rezultaty mozemy znalezac jaki algorytm najlepiej sprawdza sie w zadanej domenie. np. widac ze dla malej ilosci seedow (malo gestych przypadkow, ktore maja mala powierzchnie) oplaca sie uzyc bruteforce. Dla kolejnych wiekszych przypadkow innych wariantow JFA. Jak wybrac algorytm? Kazdy przypadek ma 'shape' oraz 'num' wiec mozna na CPU wysemplowac pare punktow albo odrazu obliczyc gestosc i wybrac odpowiedni algorytm. To takich ensmbelacji najlepiej sprawdzi sie drzewo decyzyjne (moze byc boostowane).

4 Variants

ZROBIC LADNE RYSUNECHY w Google Slides - eksport to pdf! wyjasnic slownictwo? np. co okreslamy przez anchor i wyjasnic jak powstaly nazwy? np. Circle11DualFactor3+Noise

problem z Special - on overfituje przyklady zmieniajac 5 miejsce po przecinku aby 2 zamienialo sie np. w 1

4.1 Noise

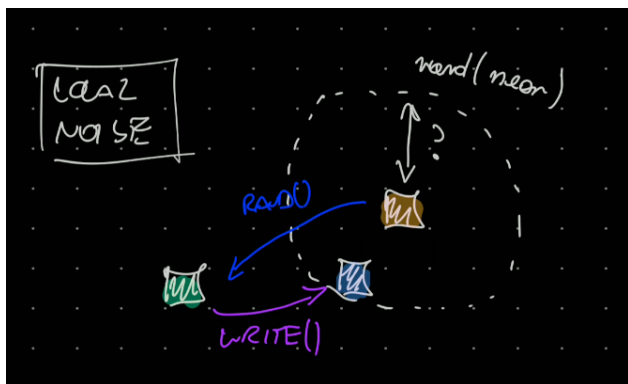


w poczatkowej wersji dodanie szumu pozwolilo zmienic zlozonosc - dodatkowo mamy na to dowod kamila

a moze zrobic rozne gestosci szumu? wiekszy grid na karcie mniej operacji np. losuje tylko 1 punkt na kwadracie 5x5 lub zadanego density - wtedy szum powinien byc oplacalny

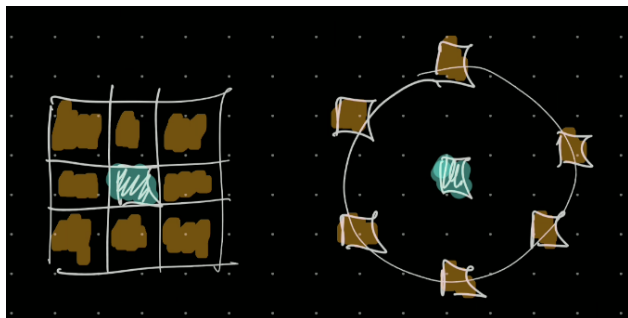
przed wykonaniem algorytmu punkty informacja o punktach jest losowo rozrzucana po macierzy - tworząc przypadkowe short-cuty

4.1.1 Local Noise



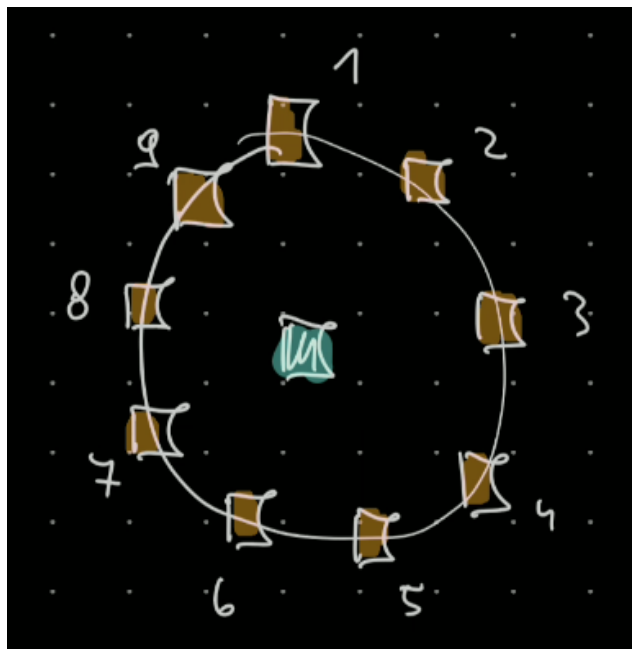
czy jest możliwe losowanie szumu w takich plamach? aby lokalne seedy losowały lokalne seedy? - albo próbują modyfikować wylosowany - hehe - czyli prostując jestem na pozycji (x,y) wylosowałem punkt (a,b) rzucam nim w okolice (a+rand(density), b+rand(density))

4.2 Anchor Type



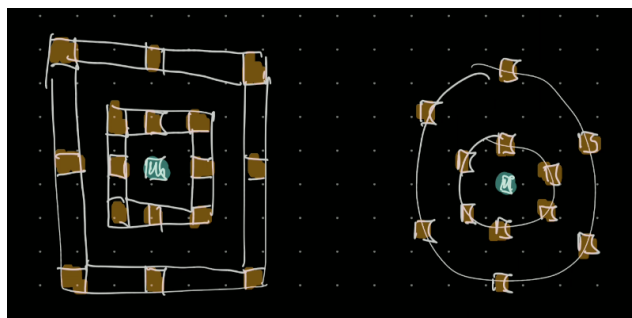
oryginalnie jest to kwadrat 3x3, my proponujemy okrag (rownomierny), lub losowane punkty na okregu (doimplementowac).

4.2.1 Anchor Num



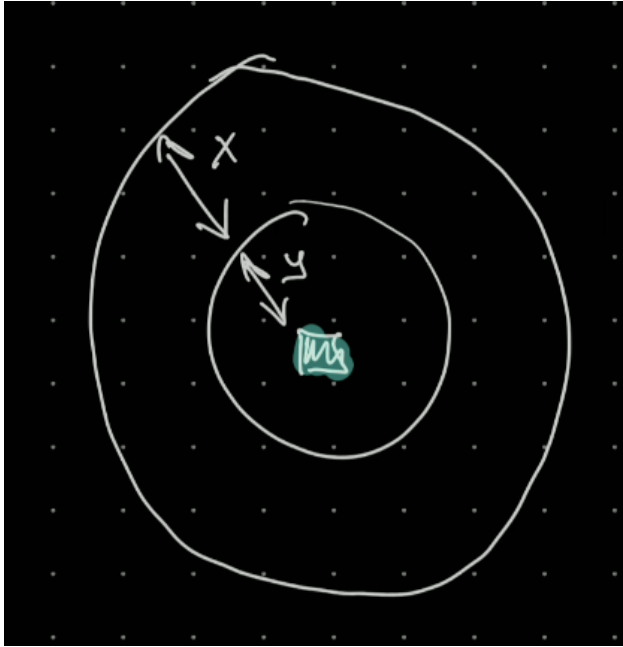
tylko dla okregow? ile ma byc punktow w anchorze (np. na okregu). czy da sie to sensownie zaimplementowac dla kwadratu? tak naprawde tylko 3x3, 5x5 maja jakikolwiek sens

4.3 Anchor Double



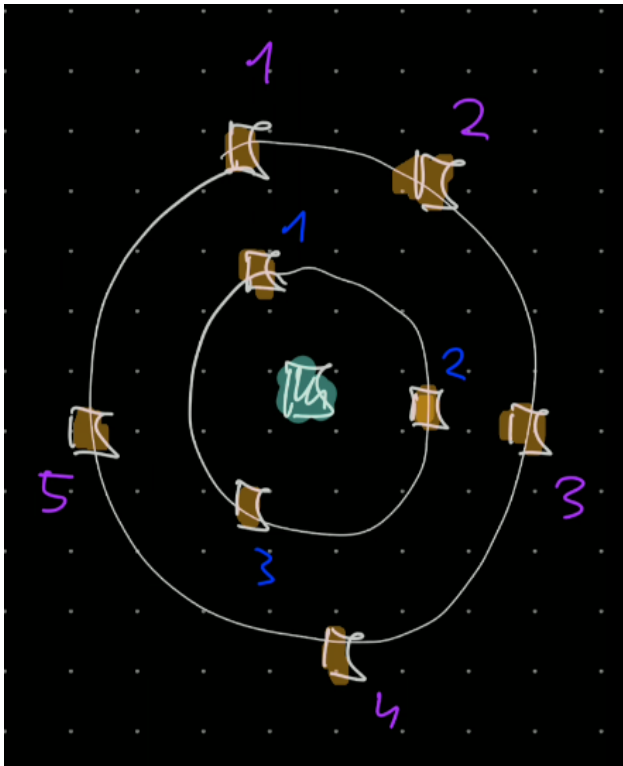
opocz pojedynczego anchora, mozliwe jest uzycie podwójnej warstwy anchorow (czyli np. male kolko i wieksze) - idea - male kolko jest dokladne - a wielkie jest skautujace (w sumie to podobny mechanizm jak w Lookahead - wolny/szybki)

4.3.1 Anchor Distance Ratio



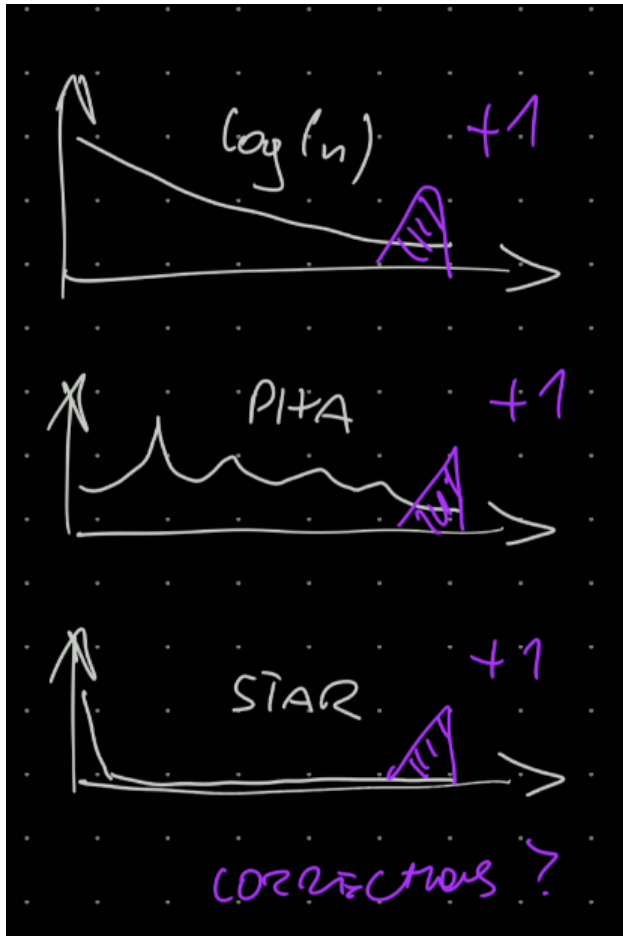
ratio pomiędzy zewnętrznymi a wewnętrznymi (doimplementować) - możliwość od 0 do 1

4.3.2 Anchor Number Ratio



ratio ale ilościowe pomiędzy zewnętrznymi a wewnętrznymi (doimplementować) - czyli np. 5 na zewnętrznym a na bliskim 10

4.4 Step Function



aktualnie 3 warianty, standart JFA, zmieniona podstawa na 3, oraz logstar krokow, powinna istniec tez wersja 4-ta, uzalezniona od num oraz shape - pozwalajaca na robienie pilokształtnych lub isogaussowskich ciagow.

wielomian z 3 parametrami (uzalezniony od dwoch wejsci - shape, num)

4.4.1 Correction???

mozna domplementowac flagę dla +1, +2 (jak u JFA), lub przechowywanie 2 najlepszych i ich przekazywanie (pewnie duzo wolniejsze wiec sie nie oplaca)

5 Results

przenieść legende? JAKO OSOBNY PDF? i podać w tej sekcji - tak sie nie robi ale bylo by ok i czytelnie + wiecej miejsca na wykresy a przypadkow bedzie wiecej

czy wykres loss oraz score dla przypadkow powinny być nałożone? albo polaczony subfigurem tak aby osie byly sync. i dalo sie porownac

5.1 Performance

wykres zostal zrobiony poprzez posortowanie scorow - dzieki temu widac roznice w przyroscie i latwo dostrzec ktory algorytm ma najwyzszy score lub jaka ma chaktersytyke (np. jest bardzo skuteczny dla waskiej grupy przykladow)

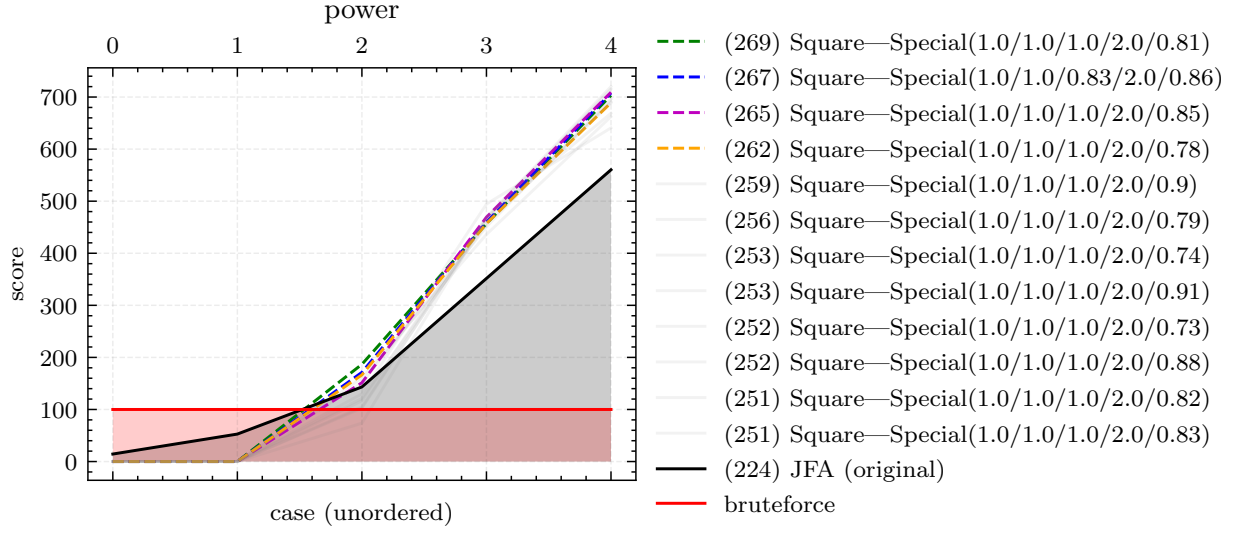


Figure 1: bla bla bla

5.2 Performance? ale taki inny

te same dane jak w poprzedniej sekcji tylko nie posortowane - dlatego widac jak wygladaja "gorki" dla danych shapow i rosnacych gestosci

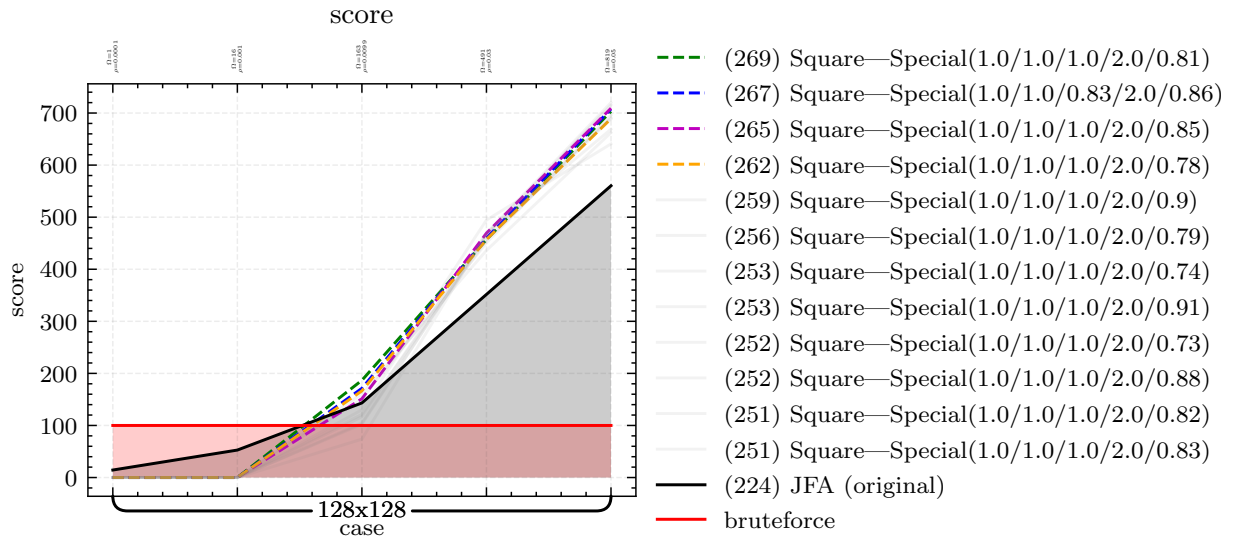


Figure 2: bla bla bla

Algorithm	$\rho=0.0001$	$\rho=0.001$	$\rho=0.0099$	$\rho=0.03$	$\rho=0.05$	Avg. score
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.81)	0	0	186.7	457.0	703.3	26
SquareSpecial(1.0/1.0/0.83/2.0/0.86)	0	0	171.3	459.9	707.8	26
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.85)	0	0	151.3	469.2	709.2	26
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.78)	0	0	166.5	457.2	689.1	26
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.9)	0	0	151.0	450.9	695.9	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.79)	0	0	102.5	466.4	715.5	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.74)	0	0	121.4	456.0	688.8	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.91)	0	0	130.0	494.5	640.7	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.73)	0	0	73.7	468.8	720.1	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.88)	0	0	104.8	464.6	690.9	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.82)	0	0	160.3	436.2	662.3	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.83)	0	0	116.6	470.2	668.9	25
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.86)	0	0	133.6	461.7	657.4	25
SquareSpecial(1.0/1.0/0.0/2.0/0.81)	0	0	233.9	468.9	538.6	24
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.71)	0	0	122.5	436.2	681.8	24
SquareSpecial(1.0/1.0/0.11/2.0/0.82)	0	0	236.5	441.5	550.5	24
SquareSpecial(1.0/0.0/0.86/2.0/0.86)	0	57.7	149.5	358.8	531.7	21
SquareSpecial(1.0/0.29/0.62/1.96/1.0)	0	34.2	145.7	357.1	531.9	21
SquareSpecial(1.0/1.0/0.9/1.91/0.88)	0	0	102.2	431.5	532.6	21
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/2.0/0.91)+Noise	25.6	4.9	155.5	313.7	483.2	19
SquareSpecial(1.0/0.26/0.34/2.0/1.0)	0	63.7	157.4	329.9	430.4	19
SquareSpecial(1.0/1.0/0.0/2.0/1.0)+Noise	28.9	65	159.5	321.8	387.7	19
SquareSpecial(1.0/0.27/1.0/2.0/1.0)+Noise	12.4	42	111.9	272.4	389.9	16
SquareSpecial(1.01/0.4/0.95/1.49/0.96)	0	34.9	90.9	198.8	294.2	12
SquareSpecial(1.0/0.33/1.0/1.46/1.0)	0	34.2	77.0	177.3	251.6	10
Circle8(3/4) Special(1.0/0.88/0.36/2.0/0.91)	0	0	128.7	0.0	376.1	10
Circle10(3/4) Special(1.85/0.48/1.0/1.12/0.88)+Noise	8.7	23.7	67.7	155.6	244.1	9
SquareDual(3/2) Special(1.0/1.0/1.0/2.0/0.87)	0	0	85.1	158.4	233.2	9
Circle10(1/4) Special(1.02/0.5/0.04/1.92/1.0)+Noise	8.7	28.4	76.9	187.2	150.5	9
Circle10(3/4) Special(1.68/0.45/0.98/1.12/0.81)+Noise	7.9	21.2	58.0	141.0	189.9	8
Circle10(3/4) Special(1.86/0.48/1.0/1.12/0.88)+Noise	8.8	25.5	66.6	162.8	136.3	8
Circle10(3/4) Special(2.0/0.29/0.87/1.06/0.98)+Noise	6.4	20.1	50.6	138.1	179.6	7
Circle10(2/3) Special(1.81/0.63/1.0/1.04/0.72)+Noise	7.7	29.5	66.4	53.7	0.0	3
Circle18(1/4) Special(2.0/0.81/1.0/1.0/0.88)+Noise	6.7	19.6	43.6	59.7	0.0	2
SquareSpecial(1.58/0.54/0.76/1.11/0.58)+Noise	16.8	48.9	58.7	0.0	0.0	2
SquareSpecial(1.58/1.0/0.19/1.05/0.89)	0	0	102.1	0.0	0.0	2
SquareDual(4/3) Special(1.51/0.92/0.92/1.08/0.42)+Noise	18.4	3	74.9	0.0	0.0	1
Circle13Dual Special(1.33/0.04/0.63/1.96/0.72)+Noise	21.1	62.7	0.0	0.0	0.0	1
Circle6 Special(1.84/0.34/0.65/1.37/0.97)+Noise	20.5	63.1	0.0	0.0	0.0	1
Circle11(1/3) Dual(3/2) Special(1.45/0.02/0.44/1.98/0.49)+Noise	18.5	60.1	0.0	0.0	0.0	1
SquareSpecial(1.0/1.0/1.0/1.76/0.2)+Noise	36.3	0	0.0	0.0	0.0	
Circle5(1/3) Dual(1/3) Special(1.39/0.9/0.45/1.61/0.92)+Noise	28.9	0	0.0	0.0	0.0	
Circle4(3/4) Dual(3/2) Special(1.67/0.32/0.78/1.95/0.73)+Noise	23.9	0	0.0	0.0	0.0	
Circle14(3/4) Dual(2/3) Special(1.0/0.0/0.0/1.0/1.0)+Noise	6.2	0	0.0	0.0	0.0	
SquareSpecial(1.55/0.0/0.81/2.0/1.0)	0	0	0.0	0.0	0.0	

Table 2: domain: 32x32, 64x64, 128x128, 256x256

5.3 Error Rate

score jest scisle powiazany z errorem ale tutaj przejrzyście widac w jakich przypadkach jest naprawde zle i ile (szarych) czesto jest bardzo szybkich - ale rowniez bardzo blednych dlatego maja finalnie niskie scory

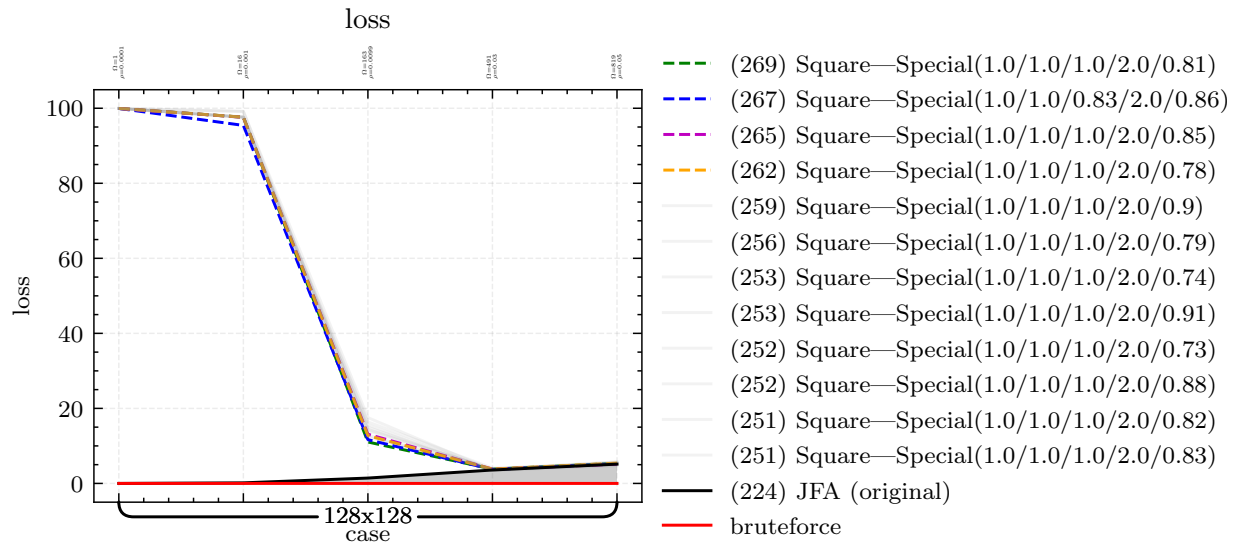


Figure 3: bla bla bla

5.4 Objectives

naprawic generowanie tego wykresu

czyli co ma wpływ na co (w sumie to najważniejsze miało być w pracy)

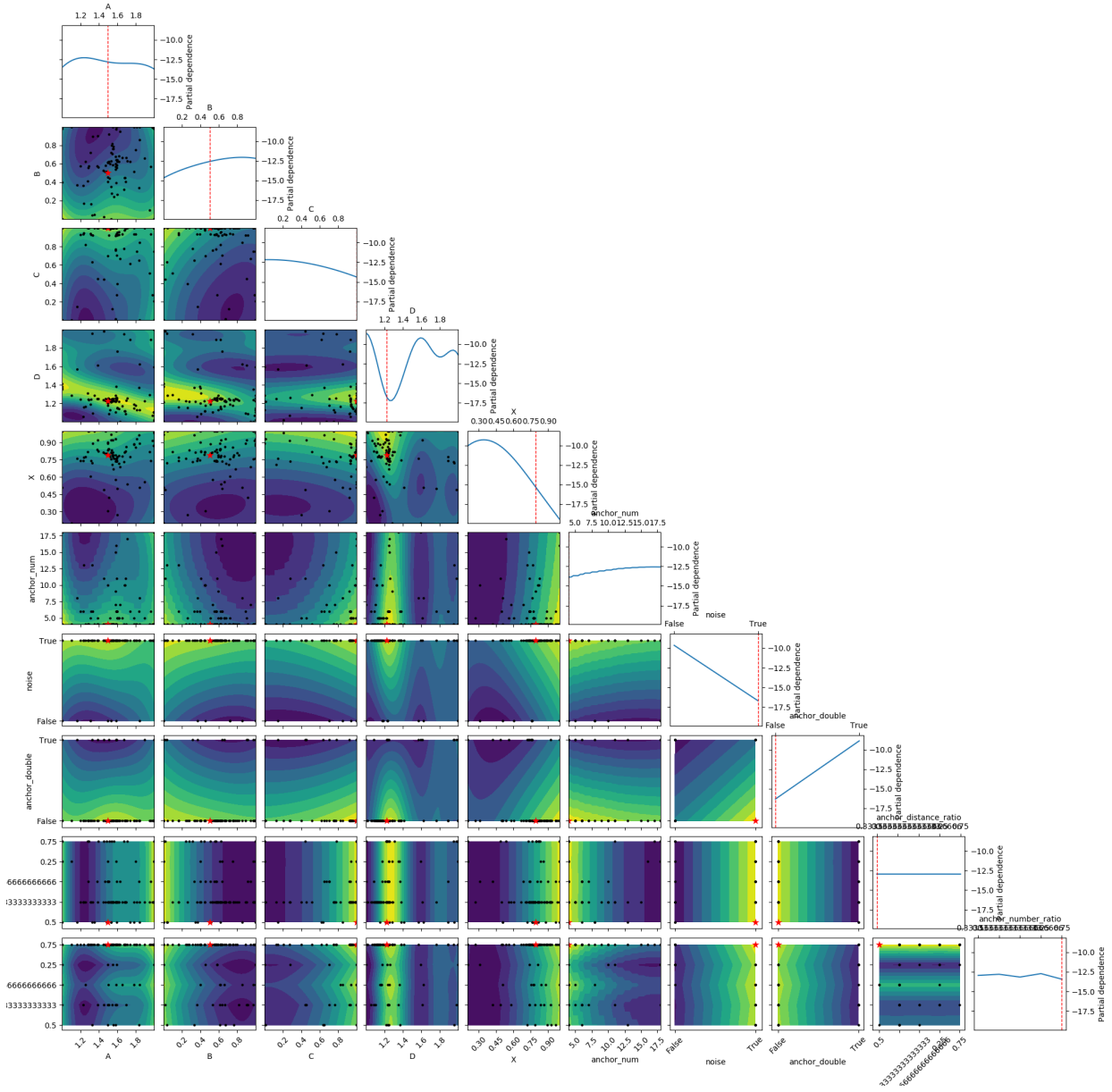


Figure 4: bla bla bla

6 Practical Usage

polaczyc z Conclusions

Jest wiele projektow ktore potrzebuje DT lub voronoi-a. Jedyne dwa praktyczne przyklady z tej pracy to SOTA dla JFA - czyli JFAstar, oraz praktyczny Ensemble (uwzgledniajacy np. bruteforce dla malych instancji).

7 Conclusions

This paper presents the GPU's effective, almost constant, algorithm for calculating the Euclidean distance transform (DT) approximation for 2D and higher dimensional images. As mentioned in [7], it remains challenging to balance the

workload in such an approach. *Lord Vorotron* does not explicitly solve this issue but, by constructing an alternative solution utilizing random shortcuts and parameter estimation, it makes it a reasonable approximation. In practice, such a constant time algorithm is useful in many interactive applications, such as tessellations, rendering, and image processing, involving [3].

8 Acknowledgements

Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!
 Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!
 Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!
 Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!
 Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!

References

- [1] Kenneth E Hoff III et al. “Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware”. In: *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1999, pp. 277–286.
- [2] Ian Fischer and Craig Gotsman. “Fast approximation of high-order Voronoi diagrams and distance transforms on the GPU”. In: *Journal of Graphics Tools* 11.4 (2006), pp. 39–60.
- [3] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. “Jump flooding in GPU with applications to Voronoi diagram and distance transform”. In: *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 2006, pp. 109–116.
- [4] Avneesh Sud et al. “Interactive 3D distance field computation using linear factorization”. In: *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 2006, pp. 117–124.
- [5] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. “Variants of jump flooding algorithm for computing discrete Voronoi diagrams”. In: *4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2007)*. IEEE. 2007, pp. 176–181.
- [6] Jens Schneider, Martin Kraus, and Rüdiger Westermann. “GPU-based real-time discrete Euclidean distance transforms with precise error bounds.” In: *VISAPP (I)*. 2009, pp. 435–442.
- [7] Thanh-Tung Cao et al. “Parallel banding algorithm to compute exact distance transform with the GPU”. In: *Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. 2010, pp. 83–90.
- [8] Francisco de Assis Zampiroli and Leonardo Filipe. “A fast CUDA-based implementation for the Euclidean distance transform”. In: *2017 International Conference on High Performance Computing & Simulation (HPCS)*. IEEE. 2017, pp. 815–818.
- [9] Takumi Honda et al. “Simple and fast parallel algorithms for the Voronoi map and the Euclidean distance map, with GPU implementations”. In: *2017 46th International Conference on Parallel Processing (ICPP)*. IEEE. 2017, pp. 362–371.
- [10] Manduhu Manduhu and Mark W Jones. “A work efficient parallel Algorithm for exact Euclidean distance transform”. In: *IEEE Transactions on Image Processing* 28.11 (2019), pp. 5322–5335.