

1 **UWAGA: wymyslic prawidlowa nazwe pracy + poprawic zlozonosci + opisac dwa algorytmy**

# 2 **Evolving New State-of-the-Art for Voronoi Diagram and** 3 **Distance Transform From JFA Using AutoML**

4  
5  
6 MACIEJ A. CZYZEWSKI, Poznan University of Technology, Poland

7 KAMIL PIECHOWIAK, Poznan University of Technology, Poland

8  
9 This paper studies a practical usage of machine learning (AutoML) to automate research towards discovering  
10 efficient Voronoi Diagram and Distance Transform algorithms. As the baseline we used the Jump Flooding  
11 Algorithm (JFA) - by finding new mutations which works best for specific data, and then ensembling them  
12 into one, we create new state-of-the-art algorithm in this field named **Vorotron** with best-case  $O(1)$  time  
13 complexity and  $O(N)$  work complexity - in addition, we introduce **JFAStar**, a single variant that in most  
14 cases outperforms original JFA with proven worst-case  $O(\log^* N)$  time complexity. The algorithm is faster  
15 and produces more accurate approximations. It could be extended into 3D space in a slice-by-slice manner.  
16 We started from the assumption that JFA has potential for improvement - some benefits can be observed for  
17 specific data by adding random noise and adjusting the step size in JFA. This showed us that, AutoML could  
18 examine this space, and find the best possible algorithm in each case. In the further part of the work, we  
19 discuss the results, compare the variants and ensemble for creating the final algorithm.

20 CCS Concepts: • **Computing methodologies** → **Computer graphics**; **Parallel computing methodologies**;  
21 • **Theory of computation** → *Randomness, geometry and discrete structures*; **Data structures design**  
22 **and analysis**.

23 Additional Key Words and Phrases: Voronoi Diagram, Distance Transform, Code Generation

## 24 **1 INTRODUCTION**

25 This paper<sup>1</sup> studies a practical usage of machine learning to automate research towards discovering  
26 efficient Distance Transform algorithms (utilizing technique known as AutoML). Thus, by finding  
27 mutations which works best for specific data, and then ensembling them into one, we create  
28 new state-of-the-art algorithm in this field named Vorotron with best-case  $O(1)$  time complexity  
29 and  $O(N)$  work complexity. In addition, we introduce JFAStar, a single variant that in most cases  
30 outperforms original JFA with proven worst-case  $O(\log^* N)$  time complexity.

31 Notable contribution to the quick algorithm that makes Distance Transform (DT) using graphics  
32 hardware includes [4] that creates a cone for each input (point/seed) and renders those cones  
33 to obtain the Voronoi diagram as the lower envelope of these cones. [3] use planes tangent to  
34 a paraboloid and thus avoid the errors caused by the tessellation of the cones. Unfortunately,  
35 the drawback of this approach is the significant amount of computation and the implementation  
36 complexity.

37 Jump flooding algorithm (JFA)<sup>2</sup> is an interesting way to utilize the graphics processing unit  
38 to efficiently compute Voronoi diagrams and distance transforms [7]. This method is faster and  
39 produces more accurate results [8], and furthermore, it could be extended into 3D space in a  
40 slice-by-slice manner. This is more effective than the previous research carried out by [10], because  
41 the speed of JFA is almost independent to the number of seeds [8].

42  
43  
44 <sup>1</sup>the original title for this paper was "Lord Vorotron: Finding the Best JFA Variant for the Coming Winter"

45 <sup>2</sup>a novel pattern of communication

46 Authors' addresses: Maciej A. Czyzewski, maciejanthonczyzewski@gmail.com, Institute of Computing Science, Poznan  
47 University of Technology, Poznan, Poland; Kamil Piechowiak, kamil.cams@gmail.com, Institute of Computing Science,  
48 Poznan University of Technology, Poznan, Poland.

Based on this research and findings, several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including SKW [9], PBA [1], FastGPU [2], Honda's algorithm [5] and WTO [6].

The main question that needs to be addressed now is whether JFA has potential for improvement. We found some benefits for specific data by adding random noise and adjusting the phase size in JFA. Therefore, this shows that, AutoML could examine this unknown space, and find the best possible algorithm in each case.

For convenience, this work focus on the Voronoi diagram only - because this problem can be translated to DT [7]. The algorithm would be an approximation of the output, thus we suggest using WTO [6] for exact DT (EDT). The major contributions of this paper are thus:

- (1) Presenting new state-of-the-art variants of algorithm for Voronoi Diagram and Distance Transform:  
**JFAStar** - (Multi-domain) single variant; **Vorotron** - (Specific-domain) ensemble of weak variants; and
- (2) Analyzing all possible variants of JFA: comparing error and speedup relative to brute force method

## 2 RELATED WORK

Several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including JFA [7], SKW [9], PBA [1], FastGPU [2], Honda's algorithm [5] and WTO [6].

Reference	Algorithm	Exactness	Time	Work
[2]	FastGPU	Exact	$O(n^3/p)$	-
[1]	PBA	Exact	$O(n)$	$O(mN)$
[5]	based on SKW	Exact	$O(n)$	$O(N)$
[6]	WTO	<b>Exact</b>	<b><math>O(\log n)</math></b>	$O(N)$
[9]	SKW	Approximate	$O(n)$	$O(N)$
[7]	JFA	Approximate	$O(\log n)$	$O(N \log n)$
In this paper	JFAStar	<b>Approximate</b>	<b><math>\sim O(\log^* n)</math></b>	$\sim O(N)$
	Vorotron	<b>Approximate</b>	<b><math>\sim O(1)</math></b>	$\sim O(N)$

Table 1. Different GPU algorithms for computing EDT

### 2.1 Jump Flooding

#### redukcja i bridge pomiedzy intro (usunac subsection)

co to jest jump flooding? tak naprawde to nie jest algorytm do voronoi-a tylko pattern komunikacyjny w programowaniu rownoleglym - swojej pracy doktorskiej autor tej techniki podaje wiele zastosowan jednak w swoich badaniach ogranicza sie do Voronoi-a. glownym pytaniem roznych takich patternow jest ile potrzebnych jest rund/operacji komunikacji aby zagwarantowac aby dana informacja zostanie dostarczona. akurat w voronoi-u wiele komorek jest lokalna w skali calego przykladu - wiec JFA ktora gwarantuje dostarczenie informacji globalnie do kazdego punktu - wykonuje pewne niepotrzebne operacje. szybkość i zajetosc pamieciowa JFA jest satysfakujaca,

jednak proste modyfikacje pokazuja ze algorytm ten wykonuje sie szybciej w pewnych przypadkach (i to typowych). dlatego naturalnym pytanie powinno byc w jakich oraz jakie modyfikacje wplywaja na szybkoosc dzialania.

2.2 AutoML

przeniesc do Proposed Method

<https://arxiv.org/pdf/1801.09373.pdf> <https://arxiv.org/pdf/1804.10120.pdf> <https://arxiv.org/pdf/1703.06353.pdf>

okay przenioslem - dodac prace co tez tak szuka algosow

3 PROPOSED METHOD

przepisac ten szkic bo jezyk sie placzy

JFA opiera sie na tym ze informacja jest przekazywana ??????. Przekazanie odbywa sie w log(n) krokach. Wiec przeprowadziliśmy krotki eksperyment aplyujac losowy szum na wejsciowa masce. Okazalose sie ze ilosc potrzebnych krokow spadla - powstaly losowe shortcuts. Co oznacza ze powinny istniec inne "mutacje" algorytmow lepsze w pewnych okreslonych przypadkach. Wiec szukanie najszybszego algorytmu bedzie nastepujace:

- Wymyslenie wszystkich mozliwych wariantow JFA
- Mutacje i zapisanie najlepszych wersji dla danej domeny
- Ensemblacja algorytmow tak aby wybierac najlepszy variant dla danej domeny

3.1 Domain Space

okay, zupełnie inaczej tutaj podejśc, opisać jakie są przypadki i jakie są spotykane jakie domeny i dlaczego (i jak działały gen\_uniform, gen\_polar, gen\_grid) KWADRAT TUTAJ???????? (komentarz latex)

Density \ Shape	Shape		
	Small (32-128)	Medium (256-448)	Large (512-1536)
Low ( $\rho=0.00005-0.001$ )	Bruteforce	Bruteforce	JFA
High ( $\rho=0.01-0.1$ )	JFA	JFA	JFA

Table 2. State-of-the-art for specific domains (before our work).

3.2 Search Space

UWAGA: opisać że szukamy 4 podprzestrzenie w turach! (może też o nowym wzorku który szuka tylko prawidłowych

bridge z score function gdziekolwiek to będzie obliczyć ile jest aktualnie wersji algosów np. czy jest to już 2do14 jak mamy 3xreal w wielomianie AKTUALNIE JEST około 7,200?

jakie modyfikacje, na to osobna sekcja? wiec co tu napisac chyba tylko o zlozonosci problemu i ze kod jest skladany i testowany a niektore wersje sa pomijane zgodnie z dzialaniem gp\_minimize (Bayesian optimization using Gaussian Processes).

w naszym wypadku zdefiniowalismy pewien zbior wariantow pewnych czesci algorytmu (Search Space), modul testujacy dana mutacje/wariant - sklada kod kernela a pozniej go weryfikuje na naszej Domain Space.

### 3.3 Score Function

JEST PROBLEM - zdazaja sie warianty ktore 0zeruja rzadkie i sa bardzo szybkie na duzy matrycach - trzeba do ponownie zbalansowac roznica w pikselach pomiedzy bruteforce a algorytmem - napisac o tym / tez ze to wszystko to ilorazy do bruteforce

dla voronoi-a interesuja nas 2 parametry Error oraz Szybkosc, aby wyniki byly wiarygodne porownujemy je z bruteforcem (a wiec bedzie to iloraz). aby ocenic dana mutacje musimy przypisac jakis Score danej wersji, wiec uzyliśmy wzor ponizej

$$S(x, y) = \max\{0, \sqrt{x} \cdot (100 - y^2)\}, \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq 100, 0 < x \quad (2)$$

ktory kaze za zbyt wysokie errorry, dajac zerowy wynik - skladnik przy y rosnie szybciej niz x wiec gdy przekroczy 100 da nam ujemny wynik - czyli 0.

### 3.4 Optimizer

opisac dwie osobne taktyki optymalizacji dla best single vs. ensemble

mozemy napisac ze korzystalismy z forest/gp minimize, ale tez wspomniec ze aby miec najlepszy best single to trzeba bylo optymalizowac rownoczesnie cala przestrzen (od malych do duzych, gestych po rzadkie), a zeby miec najlepszego Vorotrona - czyli ensambla to trzeba bylo dla kazdej domeny z optymalizowac a pozniej jedynie zrobic balancera!!!!!!!!!!!!

trzeba to przeszukiwac tak aby nie sfiksowal na zadanych parametrach - bo niechcacy ocenia na poczatku ze szum/dual jest nie fajny i pozniej go juz nie rozwaza

### 3.5 Ensemble

mozna zapisac tabele dla kazdej domeny (shape) / i zrobic przewidywania parametrow (sownik wariantu) - bo dla malych oplacalne sa Circle6 a dla wiekszych Circle12 i tak dalej - jak to zrobic?

patrzac na rezultaty mozemy znalezc jaki algorytm najlepiej sprawdza sie w zadanej domenie. np. widac ze dla malej ilosci seedow (malo gestych przypadkow, ktore maja mala powierzchnie) oplaca sie uzyc bruteforce. Dla kolejnych wiekszych przypadkow innych wariantow JFA. Jak wybrac algorytm? Kazdy przypadek ma 'shape' oraz 'num' wiec mozna na CPU wysemplowac pare punktow albo odrazu obliczyc gestosc i wybrac odpowiedni algorytm. To takich ensambelacji najlepiej sprawdzi sie drzewo decyzyjne (moze byc boostowane).

## 4 VARIANTS

ZROBIC LADNE RYSUNECZKI w Google Slides - eksport to pdf!

To compute the Voronoi diagram for a 2D grid of size  $n \times n$  with a given set of seeds at some grid points, we are interested to propagate the content (in particular, position information) of each seed s to each grid point so that each grid point can decide which seed is its closest one.

Niektore operacje propagacji informacji sa zbędne - tylko w przypadkach rzadkich macierzy potrzeba jest  $\log(n)$  krokow aby uzyskac prawidlowy wynik. Rzne warianty omawiane w [8] pozwalaja zredukowac blad klasycznego JFA. Nie zostaly jednak omawiane przypadki gdzie poszczególne modyfikacje sa uzywane z innymi.

Dlatego w tej pracy prezentujemy dodatkowe modyfikacje ktore mozna zastosowac aby stworzyc nowe warianty. Pewne modyfikacje sa oczywiste i wynikaja z alternatywnego podejscia (zamiast anchoru<sup>3</sup> kwadratowego mozna uzyc kola), informacje mozna wstepnie rozpropagowac losowo - w nadzie ze pozwoli nam skonczyc algorytm w mniejszej ilosci krokow.

<sup>3</sup>anchorem nazywamy metode ktora pobiera sasiadow do przekazania informacji

Aby badania były bardziej przejrzyste trzymaliśmy się pewnej konfencji nazewnictwa:

`[anchor_type][anchor_num][anchor_double] - [step_function] + [noise]`

dla przykładu `Circle11(1/3)Dual(1/4)-Factor3+Noise` które można przeczytać jako:

```
[anchor_type] = Circle,
[anchor_num] = 11,
[anchor_number_ratio] = 1/3,
[anchor_double] = True,
[anchor_distance_ratio] = 1/4,
[step_function] = Factor3,
[noise] = True
```

#### 4.1 Noise

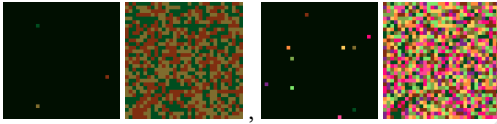


Fig. 1. Noise for 32x32

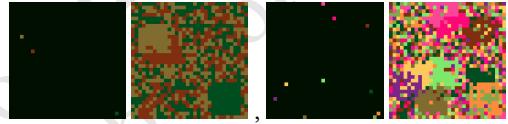


Fig. 2. Local Noise for 32x32

**FIXME: figure z przykładami szumu (+local) i jak to wygląda i jak wyglądało instancja!**

Zamiast zaczynać od pustej macierzy z seed-ami początkowymi można ją losowo uzupełnić szumem - tworząc przypadkowe short-cuty. Można tego dokonać osobnym kerneliem który zostanie wywołany przed wykonaniem głównej części algorytmu. Interpretacja jest taka że pewne rejony która w JFA są wypełnione zerami podczas pierwszych iteracji nie podejmują żadnych decyzji. Uzupełniając szumem mogą one przypadkowo ustawić się na prawidłową wartość i propagować w kolejnej rundzie najlepszą wartość w swoim otoczeniu (zgodnie ze stepem).

**dowód kamila tutaj????????????????**

##### 4.1.1 Local Noise. **przesunięta ciężkość??? czyli średnia z wagami poprawiła? a może uzależnić wagę od rozmiaru pierwszego stepu?**

Można też szum uzupełniać nie losowo tylko w otoczeniu. Więc gdy w punkcie  $(x, y)$  wylosujemy losowego seed-a o wartości  $(x_{rand}, y_{rand})$  to wyliczamy nową pozycję  $(x', y')$  która znajduje się w połowie drogi w następujący sposób:  $x' = \frac{x+3x_{rand}}{4}$ , analogicznie dla  $y'$ . Dodatkowo jeśli  $(x', y')$  jest pusta to też uzupełniamy to pole tą informacją. Nie przejmujemy się wycięciem w dostępie do danych. Nadpisanie błąd losowe - a szum też.

#### 4.2 Anchor Type

**losowane punkty na okregu???**

Zamiast pobierać informacje od 8 sąsiadów o step size from grid points at  $(x + i, y + j)$  where  $i, j \in \{-step, 0, step\}$ . Można zastosować okrąg - otwiera nam to nowe możliwości na swobodną modyfikację ilości punktów od których będziemy pobierać informacje. Naturalnie wydaje się że mała ilość punktów w anchorze spowoduje wzrost błędu, a duża ilość punktów spowoduje zmniejszenie błędu.

4.2.1 *Anchor Number*. Dlatego kolejnym parametrem bedzie mozliwosc kontrolowania ilosci punktow. Niestety nie rozwazalismy wariantu kwadratow o dowolnej ilosci punktow (poniewaz byly by to wielokrotnosci  $2 \times 2 = 4$ ,  $3 \times 3 = 9$ ,  $4 \times 4 = 16$ ,  $5 \times 5 = 25$ ) bo i tak nie dalo by sie wybrac uniformly tej wartosci. Dla okregu punkty sasiada  $(x_i, y_i)$  byly liczone nastepujaco:

$$x_i = x + \text{step} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{[\text{anchor\_num}]} \cdot i\right), y_i = y + \text{step} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{[\text{anchor\_num}]} \cdot i\right)$$

### 4.3 Anchor Double

Oprocz pojedynczego anchora, mozliwe jest uzycie podwojnej warstwy anchorow (czyli np. male kolko i wieksze). Idea za tym stojaca to ze male kolko wewnetrzne jest dokladne (dziala jak w JFA) - a wielkie zewnetrzne jest skautujace lub aby poprawic error wynikajacy np. z mniejszej ilosci anchor\_num (w sumie to podobny mechanizm jak w Lookahead - wolny/szybki)

4.3.1 *Anchor Distance Ratio*. Parametr mowiacy o stosunku dlugosci step size od wewnetrzengo anchora do zewnetrznego.

4.3.2 *Anchor Number Ratio*. Parametr mowiacy o statusunku ilosci detektorow od wewnetrznego anchora do zewnetrznego.

### 4.4 Step Function

Gdy nasza informacja propaguje sie szybciej lub jest bardziej zagieszczona dlatego sasiedzi szybciej dostaja prawidlowa informacje - to oznacza ze mozna skrocic ilosc round wykonania algorytmu.

Step size jak i ich ilosc mozna okreslic za pomoca 2 podstawowych parametrow: shape and number of points - z ktorych pozniej mozemy okreslic np. srednia gestosc. Zaimplementowalismy 2 warianty ktore sa uzaleznione jedynie od shape: defaultowy z JFA, z JFA o podstawie 3; oraz jeden uzaleny od shape oraz od num: logstar. Jednak aby wygeneralizowac problem stworzyliśmy tez mozliwosc wygenerowania dowolnego polinomialu.

4.4.1 *Special Polynomial*. powinno byc ograniczone do 3 PARAMETROW! wymyślisz nowa funkcje problem z Special - on overfituje przykłady zmieniając 5 miejsc po przecinku aby 2 zamieniało sie np. w 1

Implementacja nie jest wazna - chodzi o idea zwiazania shape oraz num. Oraz modyfikowanie wartosci, szybkoosci spadku, ksztaltu (np. pilokształtne) - jakimis parametrami. Wada tego rozwiazania jest ze trzeba optymalizowac ta funkcje na calej dziedzinie (malej, duzej, gestej, zadkiej) - bo inaczej z overfituje ona ilosc krokow i wiekosc stepu pod rozmiar.

---

```
def mod_step_function__special(shape, num=None, config=None):
    # [EXAMPLE]
    # Special(1.51/0.92/0.92/1.08/0.42)
    # ----- A -- B -- C -- D -- X ---

    A = config["A"] # <1, 2>
    B = config["B"] # <0, 1>
    C = config["C"] # <0, 1>
    D = config["D"] # <1, 2>
    X = config["X"] # <0.2, 1>

    q = num / (shape[0] * shape[1])
    qm = ((shape[0] + shape[1]) / 2) * q**(1 / 2)
    S = B * qm + (1 - B) * (max(shape) / 2)
    St = math.log2(S)
```

```
steps = []
for i in range(1, int(X * St * 2), 1):
    f = round(1 / (D**(i**A) + i % max(1, int(C * St))), 4)
    ffm = int(f * S)
    if ffm >= 1:
        steps.append(ffm)
if len(steps) == 0:
    return [1]

return steps
```

5 RESULTS

przenieść legende? JAKO OSOBNY PDF? i podać w tej sekcji - tak się nie robi ale było by ok i czytelnie + więcej miejsca na wykresy a przypadków będzie więcej czy wykres loss oraz score dla przypadków powinny być nałożone? albo połączony subfigurem tak aby osie były sync. i dało się porównać

performance plot<sup>4</sup>

UWAGA: usunąć z tabelki PODOBNE ALGORYTMY i ich słabsze rezultaty

Density \ Shape	Small (32-128)	Medium (256-448)	Large (512-1536)
Low ( $\rho=0.00005-0.001$ )	Bruteforce	?	?
High ( $\rho=0.01-0.1$ )	?	?	?

Table 3. Found in this paper state-of-the-art for specific domains.

5.1 Multi-domain Algorithm (JFAStar)

- **shapes:** {32x32, 64x64, 96x96, 128x128, 256x256, 320x320, 384x384, 448x448, 512x512, 768x768, 1024x1024, 1536x1536}
- **cases:**
  - gen\_uniform: seeds=1,
  - gen\_uniform: seeds=3,
  - gen\_uniform: density=0.0001,
  - gen\_uniform: density=0.001,
  - gen\_uniform: density=0.01,
  - gen\_uniform: density=0.02,
  - gen\_uniform: density=0.03,
  - gen\_uniform: density=0.04,
  - gen\_uniform: density=0.05,
  - gen\_uniform: density=0.1,

<sup>4</sup>wykres został zrobiony poprzez posortowanie score'ów - dzięki temu widac różnice w przyroście i łatwo dostrzec który algorytm ma najwyższy score lub jaka ma charakterystykę (np. jest bardzo skuteczny dla wąskiej grupy przykładów)





Fig. 3. bla bla bla



	Algorithm	$\rho=0.0003$	$\rho=0.0002$	$\rho=0.0003$	$\rho=0.0004$	$\rho=0.0008$	Score
393	Square Special(1.92/0.9/0.68/1.2/0.67)+Noise	40.4	51.1	74.8	95.1	<b>113.6</b>	74
394	Square Star+Noise	44.5	50.5	71.2	87.9	<b>115.8</b>	73
395	Square Special(1.98/0.8/0.95/1.2/0.46)+Noise	40.8	51.5	74.7	95.5	<b>102.6</b>	72
396	Square Special(1.47/0.68/0.75/1.52/0.41)+Noise	41	51.9	75.5	96.7	98.3	69
397	Square Special(1.46/0.81/0.68/1.33/0.5)+Noise	39.6	50.9	73	88.1	<b>112.1</b>	69
398	Square Special(1.98/0.69/0.74/1.22/0.49)+Noise	37.4	49.5	71.2	91.7	<b>102.6</b>	66
399	Square Special(1.14/0.8/0.61/1.38/0.62)+Noise	34.6	44.9	64.7	80.4	<b>108.7</b>	66
400	SquareDual(1/3) Special(1.56/0.88/0.57/1.64/0.39)+Noise	39.1	48.5	67.5	85.7	98.2	65
401	Square Special(1.97/0.79/0.61/1.24/0.61)+Noise	37.9	49.5	72.8	93.4	88.2	64
402	Square Special(1.92/0.55/0.61/1.1/0.53)+Noise	33.7	41.8	60.9	77.5	<b>105.4</b>	63
403	Square Special(1.83/0.69/0.81/1.24/0.45)+Noise	38.3	49.5	72.5	92.7	<b>102.5</b>	62
404	Square Factor3+Noise	31	39.4	58.9	76.2	<b>105.3</b>	61
405	Square Special(1.84/0.65/0.84/1.26/0.52)+Noise	37.2	48.8	70.3	89.7	<b>101.9</b>	60
406	Square Special(1.8/0.65/0.58/1.27/0.59)+Noise	36.9	46	67.5	86.8	98.0	59
407	Square Special(1.94/0.64/0.8/1.28/0.4)+Noise	40.1	52	77.7	96.3	88.2	58
408	Square Special(1.82/0.71/0.73/1.2/0.42)+Noise	40.4	51.5	75.1	94.4	82.5	58
409	Square Special(1.33/0.5/0.7/1.26/0.46)+Noise	35	46.1	65.8	80.9	81.3	57
410	SquareDual(1/3) Special(1.71/0.06/0.95/1.46/0.34)+Noise	32	38	54.2	68.8	92.2	56
411	Square Special(1.93/0.64/0.92/1.21/0.98)+Noise	34.6	43.9	65.6	85.4	96.7	56
412	JFA (original)	30.2	37.2	54.2	69.2	94.4	56
413	SquareDual(1/3) Special(1.51/0.46/0.97/1.88/0.57)+Noise	31.7	39.1	56.7	72.8	83.4	55
414	SquareDual(3/4) Star+Noise	34.8	38.6	52.9	65.7	84.8	54
415	SquareDual(1/3) Star+Noise	35.4	38	52.5	65.1	83.5	54
416	SquareDual Star+Noise	34.6	38	52	65.2	83.3	54
417	SquareDual(1/3) Special(1.2/0.9/0.84/1.96/0.44)+Noise	38.6	47.2	65.7	73.5	95.8	53
418	Square Default+Noise	26.6	33.6	49.9	64.1	88.7	52
419	Circle10(1/4) Special(1.58/0.9/0.64/1.16/0.6)+Noise	29.3	34.7	46.8	57.1	72.9	47
420	SquareDual(1/3) Special(1.45/0.85/0.74/1.95/0.34)+LNoise	40.2	44.2	45.2	54.6	56.7	45
421	Circle11(1/3) Star+Noise	30	32.5	44.5	51.7	67.4	44
422	SquareDual Special(1.48/0.39/0.84/1.34/0.72)+Noise	24	29.9	42.8	54.7	74.6	44
423	Circle11(3/4)Dual(2/3) Factor3+Noise	24.7	30	43.1	56.1	69.9	44
424	Circle9(1/4) Star+Noise	31.8	35.1	47.6	49.9	61.9	44
425	Circle9(3/4) Star+Noise	31.9	34.6	47.1	50.8	61.8	44
426	Circle12(1/3) Star+Noise	28.6	32	42.7	51.2	65.5	43
427	Circle14(1/4) Special(1.38/0.71/0.93/1.77/0.95)+Noise	24.3	29.4	41.5	51.5	62.2	41
428	SquareDual(1/3) Special(1.49/0.41/0.9/0.43)+Noise	40.9	51.6	73.7	92.9	73.2	40
429	SquareDual(3/4) Default	22.5	27.6	39.1	49.7	66.9	40
430	SquareDual Default	22.6	27.3	38.8	49.2	65.7	40
431	SquareDual(1/3) Default	21.6	26.7	38.2	48.2	66.2	39

## 5.2 Specific-domain Algorithm

5.2.1 *Small Shape: 32x32, 64x64, 96x96, 128x128. Square-Special(1.44/0.96/0.17/1.63/0.86)+Noise*  
and  
*Square-Special(1.07/0.24/0.9/1.88/0.64)*

--- (62) Square—Special(1.44/0.96/0.17/1.63/0.86)+Noise  
 --- (61) Square—Special(1.32/0.96/0.28/1.68/0.76)+Noise  
 --- (61) Square—Special(1.21/0.96/0.3/1.23/0.8)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.17/0.95/0.55/2.0/0.89)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.61/0.92/0.37/1.74/0.75)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.15/0.94/0.02/1.93/0.75)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.24/0.94/0.36/1.93/0.78)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.34/0.9/0.67/1.78/0.97)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.3/0.92/0.57/1.89/0.72)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.39/0.91/0.46/1.98/0.88)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.69/0.93/0.69/1.64/0.87)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.4/0.96/0.06/1.72/0.88)+Noise  
 --- (44) JFA (original)  
 --- bruteforce

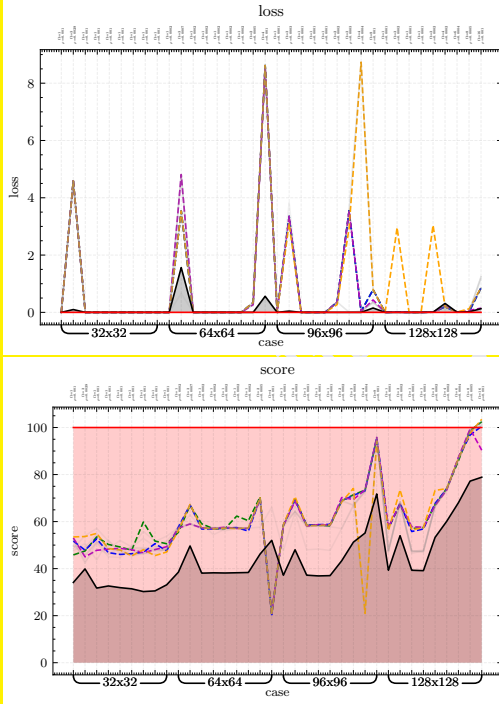


Fig. 4. Low Density

--- (128) Square—Special(1.07/0.24/0.9/1.88/0.64)  
 --- (120) Square—Star  
 --- (112) Square—Special(1.15/0.08/0.13/1.61/1.0)  
 --- (112) Square—Star+Noise  
 --- (111) Square—Factor3+Noise  
 --- (110) Square—Special(1.26/0.4/0.74/1.42/0.76)  
 --- (104) Square—Special(1.02/0.71/0.94/1.55/0.78)+Noise  
 --- (102) Square—Special(1.1/0.76/0.54/1.46/0.85)+Noise  
 --- (97) Square—Special(1.1/0.48/0.04/1.55/0.82)+Noise  
 --- (97) Square—Default+Noise  
 --- (96) Square—Factor3  
 --- (76) SquareDual(1/3)—Special(1.05/0.87/0.37/1.92/0.99)+Noise  
 --- (111) JFA (original)  
 --- bruteforce

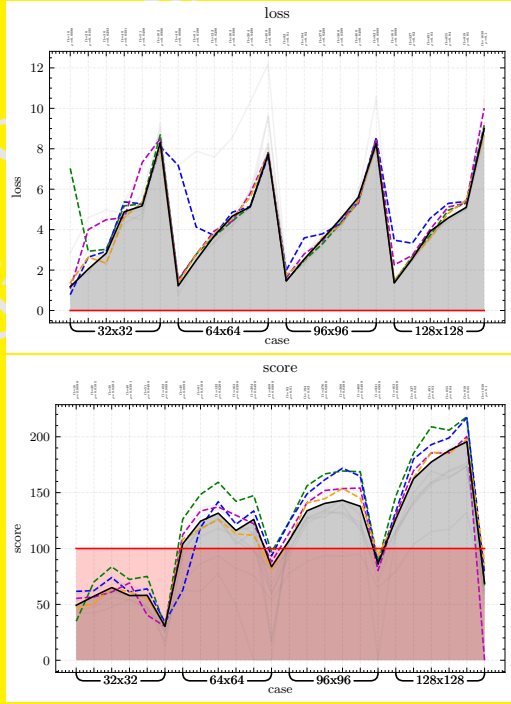


Fig. 5. High Density

5.2.2 *Medium Shape: 256x256, 320x320, 384x384, 448x448.*

5.2.3 *Large Shape: 512x512, 768x768, 1024x1024, 1536x1536.*

5.2.4 *Low Density.*

5.2.5 *High Density.*

5.3 Ensemble Across Domains (Vorotron)

bla bla

5.4 Objectives

naprawic generowanie tego wykresu napisac co nie moze byc uzyte z czym?  
czyli co ma wplyw na co (w sumie to najwazniejsze mialo byc w pracy)

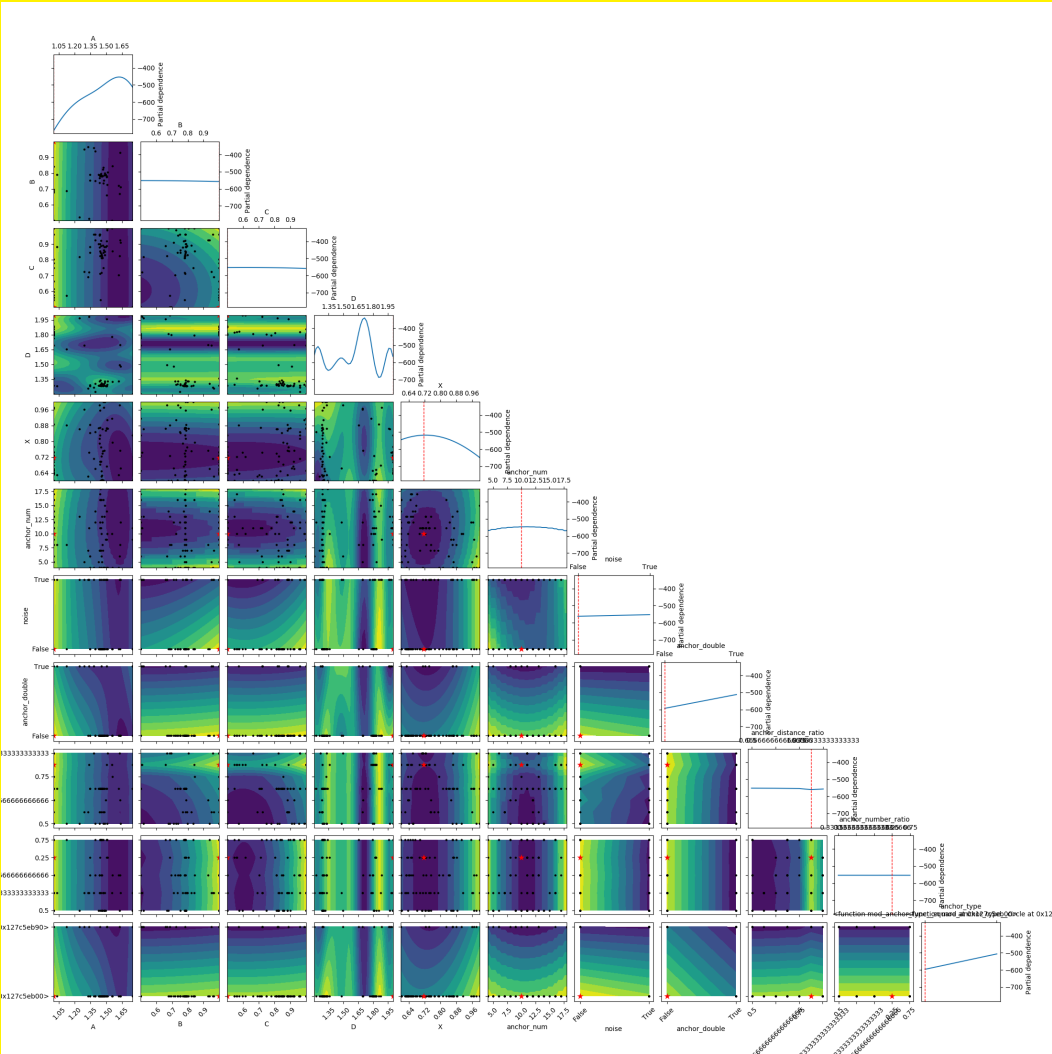


Fig. 6. bla bla bla

6 PRACTICAL USAGE

polaczyc z Conclusions

Jest wiele projektow ktore potrzebuje DT lub voronoi-a. Jedyne dwa praktyczne przyklady z tej pracy to SOTA dla JFA - czyli JFAstar, oraz praktyczny Ensemble (uwzgledniajacy np. bruteforce dla malych instancji).

## 7 CONCLUSIONS

This paper presents the GPU's effective, almost constant, algorithm for calculating the Euclidean distance transform (DT) approximation for 2D and higher dimensional images. As mentioned in [1], it remains challenging to balance the workload in such an approach. *Vorotron* does not explicitly solve this issue but, by constructing an alternative solution utilizing random shortcuts and parameter estimation, it makes it a reasonable approximation. In practice, such a constant time algorithm is useful in many interactive applications, such as tessellations, rendering, and image processing, involving [7].

## 8 ACKNOWLEDGEMENTS

Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!

## REFERENCES

- [1] Thanh-Tung Cao, Ke Tang, Anis Mohamed, and Tiow-Seng Tan. 2010. Parallel banding algorithm to compute exact distance transform with the GPU. In *Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. 83–90.
- [2] Francisco de Assis Zampieri and Leonardo Filipe. 2017. A fast CUDA-based implementation for the Euclidean distance transform. In *2017 International Conference on High Performance Computing & Simulation (HPCS)*. IEEE, 815–818.
- [3] Ian Fischer and Craig Gotsman. 2006. Fast approximation of high-order Voronoi diagrams and distance transforms on the GPU. *Journal of Graphics Tools* 11, 4 (2006), 39–60.
- [4] Kenneth E Hoff III, John Keyser, Ming Lin, Dinesh Manocha, and Tim Culver. 1999. Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 277–286.
- [5] Takumi Honda, Shinnosuke Yamamoto, Hiroaki Honda, Koji Nakano, and Yasuaki Ito. 2017. Simple and fast parallel algorithms for the Voronoi map and the Euclidean distance map, with GPU implementations. In *2017 46th International Conference on Parallel Processing (ICPP)*. IEEE, 362–371.
- [6] Manduhu Manduhu and Mark W Jones. 2019. A work efficient parallel Algorithm for exact Euclidean distance transform. *IEEE Transactions on Image Processing* 28, 11 (2019), 5322–5335.
- [7] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. 2006. Jump flooding in GPU with applications to Voronoi diagram and distance transform. In *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 109–116.
- [8] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. 2007. Variants of jump flooding algorithm for computing discrete Voronoi diagrams. In *4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2007)*. IEEE, 176–181.
- [9] Jens Schneider, Martin Kraus, and Rüdiger Westermann. 2009. GPU-based real-time discrete Euclidean distance transforms with precise error bounds.. In *VISAPP (1)*. 435–442.
- [10] Avneesh Sud, Naga Govindaraju, Russell Gayle, and Dinesh Manocha. 2006. Interactive 3D distance field computation using linear factorization. In *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 117–124.