

# Evolving New State-of-the-Art for Voronoi Diagram and Distance Transform From JFA Using AutoML

MACIEJ A. CZYZEWSKI, Poznan University of Technology, Poland  
KAMIL PIECHOWIAK, Poznan University of Technology, Poland

This paper studies a practical usage of machine learning (AutoML) to automate research towards discovering efficient Voronoi Diagram and Distance Transform algorithms. As the baseline we used the Jump Flooding Algorithm (JFA) - by finding new mutations which works best for specific data, and then ensembling them into one, we create new state-of-the-art algorithm in this field named **Vorotron** with best-case  $O(1)$  time complexity and  $O(N)$  work complexity - in addition, we introduce **JFAStar**, a single variant that in most cases outperforms original JFA with proven worst-case  $O(\log^* N)$  time complexity. The algorithm is faster and produces more accurate approximations. It could be extended into 3D space in a slice-by-slice manner. We started from the assumption that JFA has potential for improvement - some benefits can be observed for specific data by adding random noise and adjusting the step size in JFA. This showed us that, AutoML could examine this space, and find the best possible algorithm in each case. In the further part of the work, we discuss the results, compare the variants and ensemble for creating the final algorithm.

CCS Concepts: • **Computing methodologies** → **Computer graphics**; **Parallel computing methodologies**; • **Theory of computation** → *Randomness, geometry and discrete structures*; **Data structures design and analysis**.

Additional Key Words and Phrases: Voronoi Diagram, Distance Transform, Code Generation

## 1 INTRODUCTION

This paper<sup>1</sup> studies a practical usage of machine learning to automate research towards discovering efficient Distance Transform algorithms (utilizing technique known as AutoML). Thus, by finding mutations which works best for specific data, and then ensembling them into one, we create new state-of-the-art algorithm in this field named **Vorotron** with best-case  $O(1)$  time complexity and  $O(N)$  work complexity. In addition, we introduce **JFAStar**, a single variant that in most cases outperforms original JFA with proven worst-case  $O(\log^* N)$  time complexity.<sup>2</sup>

Notable contribution to the quick algorithm that makes Distance Transform (DT) using graphics hardware includes [4] that creates a cone for each input (point/seed) and renders those cones to obtain the Voronoi diagram as the lower envelope of these cones. [3] use planes tangent to a paraboloid and thus avoid the errors caused by the tessellation of the cones. Unfortunately, the drawback of this approach is the significant amount of computation and the implementation complexity.

Jump flooding algorithm (JFA)<sup>3</sup> is an interesting way to utilize the graphics processing unit to efficiently compute Voronoi diagrams and distance transforms [7]. This method is faster and produces more accurate results [8], and furthermore, it could be extended into 3D space in a slice-by-slice manner. This is more effective than the previous research carried out by [10], because the speed of JFA is almost independent to the number of seeds [8].

<sup>1</sup>the original title for this paper was “Lord Vorotron: Finding the Best JFA Variant for the Coming Winter”

<sup>2</sup>source code is available at [https://github.com/maciejczyzewski/fast\\_gpu\\_voronoi](https://github.com/maciejczyzewski/fast_gpu_voronoi)

<sup>3</sup>a novel pattern of communication

Based on this research and findings, several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including SKW [9], PBA [1], FastGPU [2], Honda's algorithm [5] and WTO [6]. The main question that needs to be addressed is whether JFA has potential for improvement. We found some benefits for specific data by adding random noise and adjusting the phase size in JFA. Therefore, this shows that, AutoML could examine this unknown space, and find the best possible algorithm in each case.

For convenience, this work focus on the Voronoi diagram only - because this problem can be translated to DT [7]. The algorithm would be an approximation of the output, thus we suggest using WTO [6] for exact DT (EDT). The major contributions of this paper are thus:

- (1) Presenting new envolved state-of-the-art variants of algorithm for Voronoi Diagram and Distance Transform: **JFAStar** - Multi-domain single variant, replacement of JFA; **Vorotron** - Ensemble of domain-specific variants, production ready; and
- (2) Analyzing all possible variants of JFA: comparing error and speedup relative to bruteforce method in different domains.

## 2 RELATED WORK

Several efficient GPU-based algorithms which are either work optimal or time optimal have been proposed including JFA [7], SKW [9], PBA [1], FastGPU [2], Honda's algorithm [5] and WTO [6].

Reference	Algorithm	Exactness	Time	Work
[2]	FastGPU	Exact	$O(n^3/p)$	-
[1]	PBA	Exact	$O(n)$	$O(mN)$
[5]	based on SKW	Exact	$O(n)$	$O(N)$
[6]	WTO	<b>Exact</b>	$O(\log n)$	$O(N)$
[9]	SKW	Approximate	$O(n)$	$O(N)$
[7]	JFA	Approximate	$O(\log n)$	$O(N \log n)$
In this paper	JFAStar	<b>Approximate</b>	$\sim O(\log^* n)$	$\sim O(N \log^* n)$
	Vorotron	<b>Approximate</b>	$\sim O(1)$	$\sim O(N)$

Table 1. Different GPU algorithms for computing EDT

The original author of JFA<sup>4</sup> defined some variants and modifications [8], in this work we continue on this subject and examine the relationship between them.

### 2.1 Jump Flooding

**redukcja i bridge pomiędzy intro (usunac subsection)**

co to jest jump flooding? tak naprawde to nie jest algorytm do voronoi-a tylko pattern komunikacyjny w programowaniu rownoleglym - swojej pracy doktorskiej autor tej techniki podaje wiele zastosowan jednak w swoich badaniach ogranicza sie do Voronoi-a. glownym pytaniem roznych takich patternow jest ile potrzebnych jest rund/operacji komunikacji aby zagwarantowac aby dana informacja zostanie dostarczona. akurat w voronoi-u wiele komorek jest lokalna w skali calego przykladu - wiec JFA ktora gwarantuje dostarczenie informacji globalnie do kazdego punktu

<sup>4</sup>Guodong Rong

- wykonuje pewne niepotrzebne operacje. szybkość i zajętość pamięciowa JFA jest satysfakcjonująca, jednak proste modyfikacje pokazują, że algorytm ten wykonuje się szybciej w pewnych przypadkach (i to typowych). Dlatego naturalnym pytaniem powinno być, w jakich oraz jakie modyfikacje wpływają na szybkość działania.

2.2 AutoML

przenieść do Proposed Method

<https://arxiv.org/pdf/1801.09373.pdf> <https://arxiv.org/pdf/1804.10120.pdf> <https://arxiv.org/pdf/1703.06353.pdf>

okay przeniosłem - dodać prace, co też tak szuka algosów

3 PROPOSED METHOD

przepisać ten szkic, bo język się plącze

JFA opiera się na tym, że informacja jest przekazywana ??????. Przekazanie odbywa się w  $\log(n)$  krokach. Więc przeprowadziliśmy krótki eksperyment, aplikując losowy szum na wejściową masę. Okazało się, że ilość potrzebnych kroków spadła - powstały losowe shortcuty. Co oznacza, że powinny istnieć inne "mutacje" algorytmów lepsze w pewnych określonych przypadkach. Więc szukanie najszybszego algorytmu będzie następujące:

- Wymyślenie wszystkich możliwych wariantów JFA
- Mutacje i zapisanie najlepszych wersji dla danej domeny
- Ensemblacja algorytmów, tak aby wybierać najlepszy wariant dla danej domeny

3.1 Domain Space

okay, zupełnie inaczej tutaj podejść, opisać, jakie są przypadki i jakie są spotykane domeny i dlaczego (i jak działały `gen_uniform`, `gen_polar`, `gen_grid`) KWADRAT TUTAJ????????? (komentarz latex)

Density \ Shape	Shape		
	Small (32-128)	Medium (256-448)	Large (512-1536)
Low ( $\rho=0.00005-0.001$ )	Bruteforce	Bruteforce	JFA
High ( $\rho=0.01-0.1$ )	JFA	JFA	JFA

Table 2. State-of-the-art for specific domains (before our work).

3.2 Search Space

UWAGA: opisać, że szukamy 4 podprzestrzeni w turach! (może też o nowym wzorku, który szuka tylko prawidłowych)

bridge z score function, gdziekolwiek to będzie obliczyć, ile jest aktualnie wersji algosów np. czy jest to już 2do14, jak mamy 3xreal w wielomianie AKTUALNIE JEST około 7,200?

jakie modyfikacje, na to osobna sekcja? więc co tu napisać, chyba tylko o złożoności problemu i że kod jest składany i testowany, a niektóre wersje są pomijane zgodnie z działaniem `gp_minimize` (Bayesian optimization using Gaussian Processes).

w naszym wypadku zdefiniowaliśmy pewien zbiór wariantów pewnych części algorytmu (Search Space), moduł testujący daną mutację/wariant - składa kod, kernela, a później go weryfikuje na naszym Domain Space.

### 3.3 Score Function

JEST PROBLEM - zdazaja sie warianty ktore 0zeruja rzadkie i sa bardzo szybkie na duzy matrycach - trzeba do ponownie zbalansowac roznica w pikselach pomiedzy bruteforce a algorytmem - napisac o tym / tez ze to wszystko to ilorazy do bruteforce

dla voronoi-a interesuja nas 2 parametry Error oraz Szybkosc, aby wyniki byly wiarygodne porownujemy je z bruteforcem (a wiec bedzie to iloraz). aby ocenic dana mutacje musimy przypisac jakis Score danej wersji, wiec uzyliśmy wzor ponizej

$$S(x, y) = \max\{0, \sqrt{x} \cdot (100 - y^2)\}, \quad (1)$$

$$0 \leq y \leq 100, 0 < x \quad (2)$$

ktory kaze za zbyt wysokie errorry, dajac zerowy wynik - skladnik przy y rosnie szybciej niz x wiec gdy przekroczy 100 da nam ujemny wynik - czyli 0.

### 3.4 Optimizer

opisac dwie osobne taktyki optymalizacji dla best single vs. ensemble

mozemy napisac ze korzystalismy z forest/gp minimize, ale tez wspomniec ze aby miec najlepszy best single to trzeba bylo optymalizowac rownoczesnie cala przestrzen (od malych do duzych, gestych po rzadkie), a zeby miec najlepszego Vorotrona - czyli ensambla to trzeba bylo dla kazdej domeny z optymalizowac a pozniej jedynie zrobic balancera!!!!!!!!!!!!

trzeba to przeszukiwac tak aby nie sfiksowal na zadanych parametrach - bo niechcacy ocenia na poczatku ze szum/dual jest nie fajny i pozniej go juz nie rozwaza

### 3.5 Ensemble

mozna zapisac tabele dla kazdej domeny (shape) / i zrobic przewidywania parametrow (sownik wariantu) - bo dla malych oplacalne sa Circle6 a dla wiekszych Circle12 i tak dalej - jak to zrobic?

patrzac na rezultaty mozemy znalezc jaki algorytm najlepiej sprawdza sie w zadanej domenie. np. widac ze dla malej ilosci seedow (malo gestych przypadkow, ktore maja mala powierzchnie) oplaca sie uzyc bruteforce. Dla kolejnych wiekszych przypadkow innych wariantow JFA. Jak wybrac algorytm? Kazdy przypadek ma 'shape' oraz 'num' wiec mozna na CPU wysemplowac pare punktow albo odrazu obliczyc gestosc i wybrac odpowiedni algorytm. To takich ensambelacji najlepiej sprawdzi sie drzewo decyzyjne (moze byc boostowane).

## 4 VARIANTS

ZROBIC LADNE RYSUNECZKI w Google Slides - eksport to pdf!

To compute the Voronoi diagram for a 2D grid of size  $n \times n$  with a given set of seeds at some grid points, we are interested to propagate the content (in particular, position information) of each seed s to each grid point so that each grid point can decide which seed is its closest one.

Niektore operacje propagacji informacji sa zbędne - tylko w przypadkach rzadkich macierzy potrzeba jest  $\log(n)$  krokow aby uzyskac prawidlowy wynik. Rzne warianty omawiane w [8] pozwalaja zredukowac blad klasycznego JFA. Nie zostaly jednak omawiane przypadki gdzie poszczególne modyfikacje sa uzywane z innymi.

Dlatego w tej pracy prezentujemy dodatkowe modyfikacje ktore mozna zastosowac aby stworzyc nowe warianty. Pewne modyfikacje sa oczywiste i wynikaja z alternatywnego podejscia (zamiast anchoru<sup>5</sup> kwadratowego mozna uzyc kola), informacje mozna wstepnie rozpropagowac losowo - w nadzie ze pozwoli nam skonczyc algorytm w mniejszej ilosci krokow.

<sup>5</sup>anchorem nazywamy metode ktora pobiera sasiadow do przekazania informacji

Aby badania były bardziej przejrzyste trzymaliśmy się pewnej konfencji nazewnictwa:

`[anchor_type][anchor_num][anchor_double] - [step_function] + [noise]`

dla przykładu `Circle11(1/3)Dual(1/4)-Factor3+Noise` które można przeczytać jako:

```
[anchor_type] = Circle,
[anchor_num] = 11,
[anchor_number_ratio] = 1/3,
[anchor_double] = True,
[anchor_distance_ratio] = 1/4,
[step_function] = Factor3,
[noise] = True
```

#### 4.1 Noise

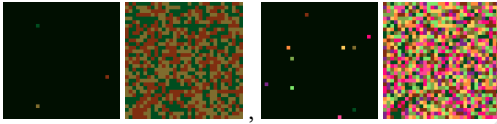


Fig. 1. Noise for 32x32

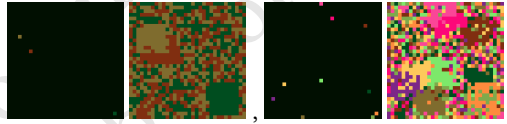


Fig. 2. Local Noise for 32x32

**FIXME: figure z przykładami szumu (+local) i jak to wygląda i jak wyglądało instancja!**

Zamiast zaczynać od pustej macierzy z seed-ami początkowymi można ją losowo uzupełnić szumem - tworząc przypadkowe short-cuty. Można tego dokonać osobnym kerneliem który zostanie wywołany przed wykonaniem głównej części algorytmu. Interpretacja jest taka że pewne rejony która w JFA są wypełnione zerami podczas pierwszych iteracji nie podejmują żadnych decyzji. Uzupełniając szumem mogą one przypadkowo ustawić się na prawidłową wartość i propagować w kolejnej rundzie najlepszą wartość w swoim otoczeniu (zgodnie ze stepem).

**dowód kamila tutaj????????????????**

##### 4.1.1 Local Noise. **przesunięta ciężkość??? czyli średnia z wagami poprawiła? a może uzależnić wagę od rozmiaru pierwszego stepu?**

Można też szum uzupełniać nie losowo tylko w otoczeniu. Więc gdy w punkcie  $(x, y)$  wylosujemy losowego seed-a o wartości  $(x_{rand}, y_{rand})$  to wyliczamy nową pozycję  $(x', y')$  która znajduje się w połowie drogi w następujący sposób:  $x' = \frac{x+3x_{rand}}{4}$ , analogicznie dla  $y'$ . Dodatkowo jeśli  $(x', y')$  jest pusta to też uzupełniamy to pole tą informacją. Nie przejmujemy się wycięciem w dostępie do danych. Nadpisania będą losowe - a szum też.

#### 4.2 Anchor Type

**losowane punkty na okregu???**

Zamiast pobierać informacje od 8 sąsiadów o step size from grid points at  $(x + i, y + j)$  where  $i, j \in \{-step, 0, step\}$ . Można zastosować okrąg - otwiera nam to nowe możliwości na swobodną modyfikację ilości punktów od których będziemy pobierać informacje. Naturalnie wydaje się że mała ilość punktów w anchorze spowoduje wzrost błędu, a duża ilość punktów spowoduje zmniejszenie błędu.

4.2.1 *Anchor Number*. Dlatego kolejnym parametrem bedzie mozliwosc kontrolowania ilosci punktow. Niestety nie rozwazalismy wariantu kwadratow o dowolnej ilosci punktow (poniewaz byly by to wielokrotnosci  $2 \times 2 = 4$ ,  $3 \times 3 = 9$ ,  $4 \times 4 = 16$ ,  $5 \times 5 = 25$ ) bo i tak nie dalo by sie wybrac uniformly tej wartosci. Dla okregu punkty sasiada  $(x_i, y_i)$  byly liczone nastepujaco:

$$x_i = x + \text{step} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{[\text{anchor\_num}]} \cdot i\right), y_i = y + \text{step} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{[\text{anchor\_num}]} \cdot i\right)$$

### 4.3 Anchor Double

Oprocz pojedynczego anchora, mozliwe jest uzycie podwojnej warstwy anchorow (czyli np. male kolko i wieksze). Idea za tym stojaca to ze male kolko wewnetrzne jest dokladne (dziala jak w JFA) - a wielkie zewnetrzne jest skautujace lub aby poprawic error wynikajacy np. z mniejszej ilosci anchor\_num (w sumie to podobny mechanizm jak w Lookahead - wolny/szybki)

4.3.1 *Anchor Distance Ratio*. Parametr mowiacy o stosunku dlugosci step size od wewnetrznego anchora do zewnetrznego.

4.3.2 *Anchor Number Ratio*. Parametr mowiacy o statusku ilosci detektorow od wewnetrznego anchora do zewnetrznego.

### 4.4 Step Function

Gdy nasza informacja propaguje sie szybciej lub jest bardziej zagęszczona dlatego sasiedzi szybciej dostaja prawidlowa informacje - to oznacza ze mozna skrocic ilosc round wykonania algorytmu.

Step size jak i ich ilosc mozna okreslic za pomoca 2 podstawowych parametrow: shape and number of points - z ktorych pozniej mozemy okreslic np. srednia gestosc. Zaimplementowalismy 2 warianty ktore sa uzaleznione jedynie od shape: defaultowy z JFA, z JFA o podstawie 3; oraz jeden uzaleny od shape oraz od num: logstar. Jednak aby wygeneralizowac problem stworzyliśmy tez mozliwosc wygenerowania dowolnego polynomialu.

4.4.1 *Special Polynomial*. powinno byc ograniczone do 3 PARAMETROW! wymyślisz nowa funkcje problem z Special - on overfituje przyklady zmieniajac 5 miejsc po przecinku aby 2 zamienialo sie np. w 1

Implementacja nie jest wazna - chodzi o idea zwiazania shape oraz num. Oraz modyfikowanie wartosci, szybkoosci spadku, ksztaltu (np. pilokształtne) - jakimis parametrami. Wada tego rozwiazania jest ze trzeba optymalizowac ta funkcje na calej dziedzinie (malej, duzej, gestej, zadkiej) - bo inaczej z overfituje ona ilosc krokow i wiekosc stepu pod rozmiar.

---

```
def mod_step_function__special(shape, num=None, config=None):
    # [EXAMPLE]
    # Special(1.51/0.92/0.92/1.08/0.42)
    # ----- A -- B -- C -- D -- X ---

    A = config["A"] # <1, 2>
    B = config["B"] # <0, 1>
    C = config["C"] # <0, 1>
    D = config["D"] # <1, 2>
    X = config["X"] # <0.2, 1>

    q = num / (shape[0] * shape[1])
    qm = ((shape[0] + shape[1]) / 2) * q**(1 / 2)
    S = B * qm + (1 - B) * (max(shape) / 2)
    St = math.log2(S)
```

```
steps = []
for i in range(1, int(X * St * 2), 1):
    f = round(1 / (D**(i**A) + i % max(1, int(C * St))), 4)
    ffm = int(f * S)
    if ffm >= 1:
        steps.append(ffm)
if len(steps) == 0:
    return [1]

return steps
```

5 RESULTS

przenieść legende? JAKO OSOBNY PDF? i podać w tej sekcji - tak się nie robi ale było by ok i czytelnie + więcej miejsca na wykresy a przypadków będzie więcej czy wykres loss oraz score dla przypadków powinny być nałożone? albo połączony subfigurem tak aby osie były sync. i dało się porównać

performance plot<sup>6</sup>

UWAGA: usunąć z tabelki PODOBNE ALGORYTMY i ich słabsze rezultaty

Density \ Shape	Small (32-128)	Medium (256-448)	Large (512-1536)
Low ( $\rho=0.00005-0.001$ )	Bruteforce	?	?
High ( $\rho=0.01-0.1$ )	?	?	?

Table 3. Found in this paper state-of-the-art for specific domains.

5.1 Multi-domain Variant (JFAStar)

- **shapes:** {32x32, 64x64, 96x96, 128x128, 256x256, 320x320, 384x384, 448x448, 512x512, 768x768, 1024x1024, 1536x1536}
- **cases:**
  - gen\_uniform: seeds=1,
  - gen\_uniform: seeds=3,
  - gen\_uniform: density=0.0001,
  - gen\_uniform: density=0.001,
  - gen\_uniform: density=0.01,
  - gen\_uniform: density=0.02,
  - gen\_uniform: density=0.03,
  - gen\_uniform: density=0.04,
  - gen\_uniform: density=0.05,
  - gen\_uniform: density=0.1,

<sup>6</sup>wykres został zrobiony poprzez posortowanie score'ów - dzięki temu widac różnice w przyroście i łatwo dostrzec który algorytm ma najwyższy score lub jaka ma charakterystykę (np. jest bardzo skuteczny dla wąskiej grupy przykładów)





Fig. 3. bla bla bla



Algorithm	$\rho=0.0003$	$\rho=0.0002$	$\rho=0.0003$	$\rho=0.0004$	$\rho=0.0008$	Score
Square Special(1.92/0.9/0.68/1.2/0.67)+Noise	40.4	51.1	74.8	95.1	<b>113.6</b>	74
Square Star+Noise	44.5	50.5	71.2	87.9	<b>115.8</b>	73
Square Special(1.98/0.8/0.95/1.2/0.46)+Noise	40.8	51.5	74.7	95.5	<b>102.6</b>	72
Square Special(1.47/0.68/0.75/1.52/0.41)+Noise	41	51.9	75.5	96.7	98.3	69
Square Special(1.46/0.81/0.68/1.33/0.5)+Noise	39.6	50.9	73	88.1	<b>112.1</b>	69
Square Special(1.98/0.69/0.74/1.22/0.49)+Noise	37.4	49.5	71.2	91.7	<b>102.6</b>	66
Square Special(1.14/0.8/0.61/1.38/0.62)+Noise	34.6	44.9	64.7	80.4	<b>108.7</b>	66
SquareDual(1/3) Special(1.56/0.88/0.57/1.64/0.39)+Noise	39.1	48.5	67.5	85.7	98.2	65
Square Special(1.97/0.79/0.61/1.24/0.61)+Noise	37.9	49.5	72.8	93.4	88.2	64
Square Special(1.92/0.55/0.61/1.1/0.53)+Noise	33.7	41.8	60.9	77.5	<b>105.4</b>	63
Square Special(1.83/0.69/0.81/1.24/0.45)+Noise	38.3	49.5	72.5	92.7	<b>102.5</b>	62
Square Factor3+Noise	31	39.4	58.9	76.2	<b>105.3</b>	61
Square Special(1.84/0.65/0.84/1.26/0.52)+Noise	37.2	48.8	70.3	89.7	<b>101.9</b>	60
Square Special(1.8/0.65/0.58/1.27/0.59)+Noise	36.9	46	67.5	86.8	98.0	59
Square Special(1.94/0.64/0.8/1.28/0.4)+Noise	40.1	52	77.7	96.3	88.2	58
Square Special(1.82/0.71/0.73/1.2/0.42)+Noise	40.4	51.5	75.1	94.4	82.5	58
Square Special(1.33/0.5/0.7/1.26/0.46)+Noise	35	46.1	65.8	80.9	81.3	57
SquareDual(1/3) Special(1.71/0.06/0.95/1.46/0.34)+Noise	32	38	54.2	68.8	92.2	56
Square Special(1.93/0.64/0.92/1.21/0.98)+Noise	34.6	43.9	65.6	85.4	96.7	56
JFA (original)	30.2	37.2	54.2	69.2	94.4	56
SquareDual(1/3) Special(1.51/0.46/0.97/1.88/0.57)+Noise	31.7	39.1	56.7	72.8	83.4	55
SquareDual(3/4) Star+Noise	34.8	38.6	52.9	65.7	84.8	54
SquareDual(1/3) Star+Noise	35.4	38	52.5	65.1	83.5	54
SquareDual Star+Noise	34.6	38	52	65.2	83.3	54
SquareDual(1/3) Special(1.2/0.9/0.84/1.96/0.44)+Noise	38.6	47.2	65.7	73.5	95.8	53
Square Default+Noise	26.6	33.6	49.9	64.1	88.7	52
Circle10(1/4) Special(1.58/0.9/0.64/1.16/0.6)+Noise	29.3	34.7	46.8	57.1	72.9	47
SquareDual(1/3) Special(1.45/0.85/0.74/1.95/0.34)+LNoise	40.2	44.2	45.2	54.6	56.7	45
Circle11(1/3) Star+Noise	30	32.5	44.5	51.7	67.4	44
SquareDual Special(1.48/0.39/0.84/1.34/0.72)+Noise	24	29.9	42.8	54.7	74.6	44
Circle11(3/4)Dual(2/3) Factor3+Noise	24.7	30	43.1	56.1	69.9	44
Circle9(1/4) Star+Noise	31.8	35.1	47.6	49.9	61.9	44
Circle9(3/4) Star+Noise	31.9	34.6	47.1	50.8	61.8	44
Circle12(1/3) Star+Noise	28.6	32	42.7	51.2	65.5	43
Circle14(1/4) Special(1.38/0.71/0.93/1.77/0.95)+Noise	24.3	29.4	41.5	51.5	62.2	41
SquareDual(1/3) Special(1.5/0.31/0.9/0.43)+Noise	40.9	51.6	73.7	92.9	73.2	40
SquareDual(3/4) Default	22.5	27.6	39.1	49.7	66.9	40
SquareDual Default	22.6	27.3	38.8	49.2	65.7	40
Square Special(1.92/0.9/0.68/1.2/0.67)+Noise	40.4	51.1	74.8	95.1	<b>113.6</b>	74

## 5.2 Domain-specific Variants

### 5.2.1 Small Shape: 32x32, 64x64, 96x96, 128x128. Square-Special(1.44/0.96/0.17/1.63/0.86)+Noise and Square-Special(1.07/0.24/0.9/1.88/0.64)

--- (62) Square—Special(1.44/0.96/0.17/1.63/0.86)+Noise  
 --- (61) Square—Special(1.32/0.96/0.28/1.68/0.76)+Noise  
 --- (61) Square—Special(1.21/0.96/0.3/1.23/0.8)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.17/0.95/0.55/2.0/0.89)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.61/0.92/0.37/1.74/0.75)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.15/0.94/0.02/1.93/0.75)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.24/0.94/0.36/1.93/0.78)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.34/0.9/0.67/1.78/0.97)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.3/0.92/0.57/1.89/0.72)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.39/0.91/0.46/1.98/0.88)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.69/0.93/0.69/1.64/0.87)+Noise  
 --- (60) Square—Special(1.4/0.96/0.06/1.72/0.88)+Noise  
 --- (44) JFA (original)  
 --- bruteforce

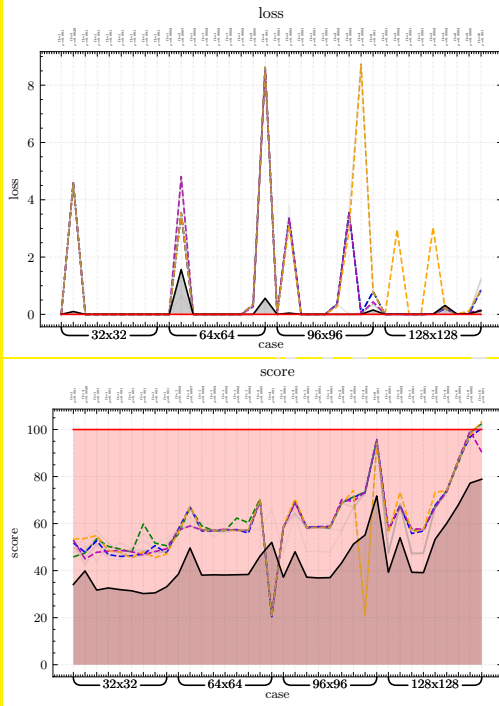


Fig. 4. Low Density

--- (128) Square—Special(1.07/0.24/0.9/1.88/0.64)  
 --- (120) Square—Star  
 --- (112) Square—Special(1.15/0.08/0.13/1.61/1.0)  
 --- (112) Square—Star+Noise  
 --- (111) Square—Factor3+Noise  
 --- (110) Square—Special(1.26/0.4/0.74/1.42/0.76)  
 --- (104) Square—Special(1.02/0.71/0.94/1.55/0.78)+Noise  
 --- (102) Square—Special(1.1/0.76/0.54/1.46/0.85)+Noise  
 --- (97) Square—Special(1.1/0.48/0.04/1.55/0.82)+Noise  
 --- (97) Square—Default+Noise  
 --- (96) Square—Factor3  
 --- (76) SquareDual(1/3)—Special(1.05/0.87/0.37/1.92/0.99)+Noise  
 --- (111) JFA (original)  
 --- bruteforce

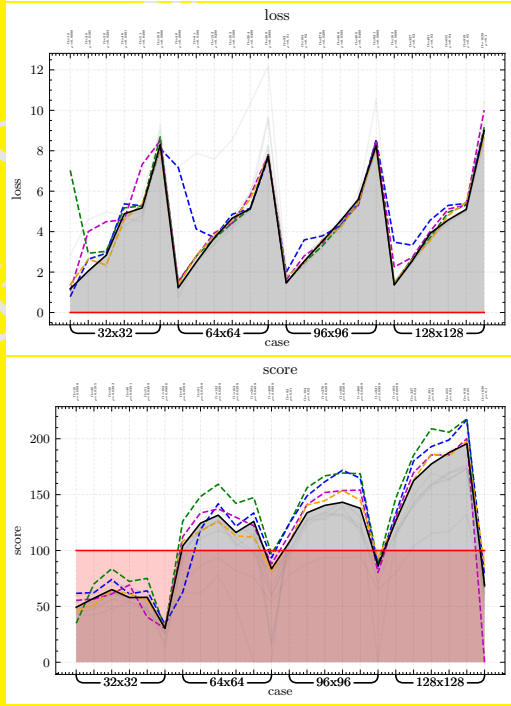


Fig. 5. High Density

### 5.2.2 Medium Shape: 256x256, 320x320, 384x384, 448x448.

### 5.2.3 Large Shape: 512x512, 768x768, 1024x1024, 1536x1536.

### 5.2.4 Low Density.

### 5.2.5 High Density.

5.3 Ensemble of Domain-specific (VoroTron)

bla bla

5.4 Objectives

naprawic generowanie tego wykresu napisac co nie moze byc uzyte z czym?  
czyli co ma wplyw na co (w sumie to najwazniejsze mialo byc w pracy)

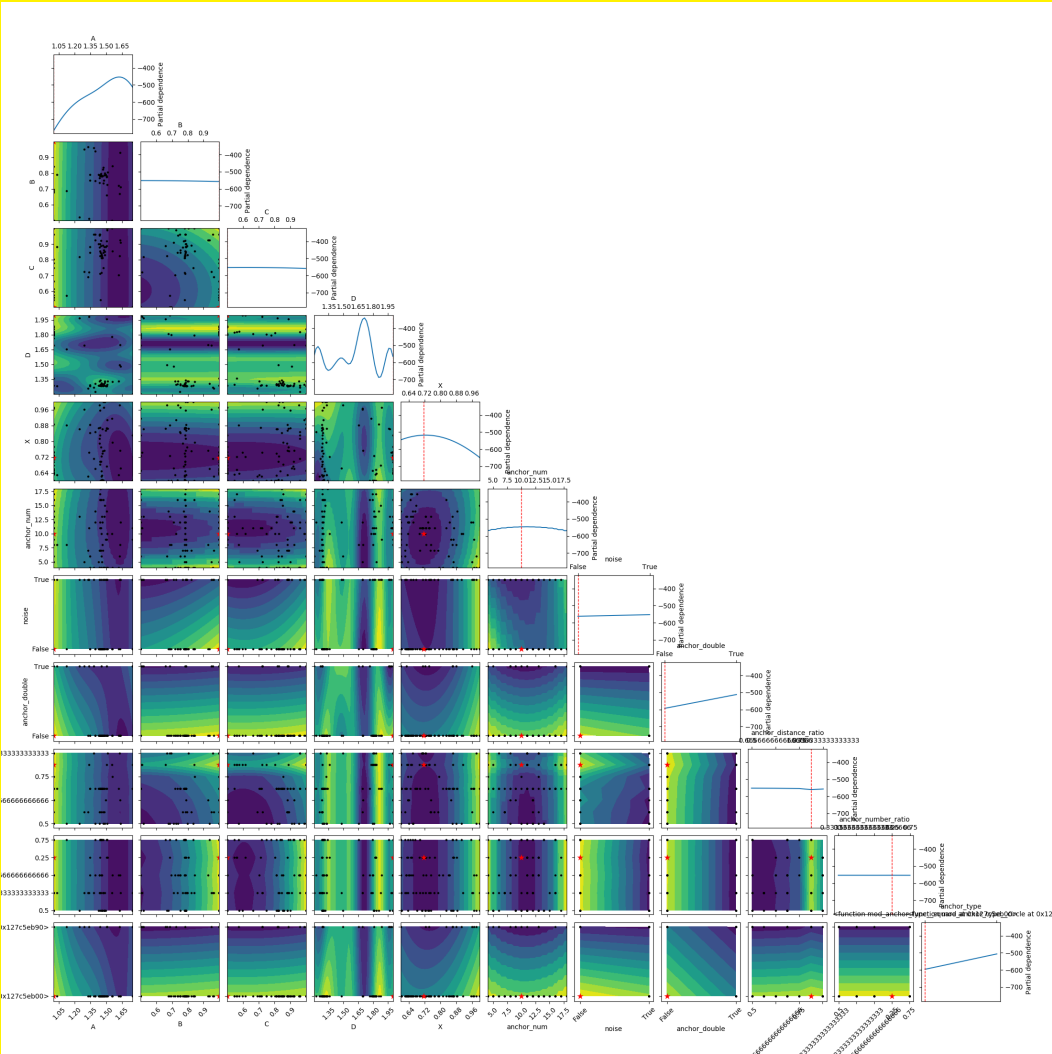


Fig. 6. bla bla bla

6 PRACTICAL USAGE

polaczyc z Conclusions

Jest wiele projektow ktore potrzebuje DT lub voronoi-a. Jedyne dwa praktyczne przyklady z tej pracy to SOTA dla JFA - czyli JFAstar, oraz praktyczny Ensemble (uwzgledniajacy np. bruteforce dla malych instancji).

This paper presents the GPU’s effective, almost constant, algorithm for calculating the Euclidean distance transform (DT) approximation for 2D and higher dimensional images. As mentioned in [1], it remains challenging to balance the workload in such an approach. *Vorotron* does not explicitly solve this issue but, by constructing an alternative solution utilizing random shortcuts and parameter estimation, it makes it a reasonable approximation. In practice, such a constant time algorithm is useful in many interactive applications, such as tessellations, rendering, and image processing, involving [7].

Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!  
Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!  
Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!  
Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!  
Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!  
Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!

---

Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu! Dziękuję swojemu psu!

- [1] Thanh-Tung Cao, Ke Tang, Anis Mohamed, and Tiow-Seng Tan. 2010. Parallel banding algorithm to compute exact distance transform with the GPU. In *Proceedings of the 2010 ACM SIGGRAPH symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. 83–90.
- [2] Francisco de Assis Zampirulli and Leonardo Filipe. 2017. A fast CUDA-based implementation for the Euclidean distance transform. In *2017 International Conference on High Performance Computing & Simulation (HPCS)*. IEEE, 815–818.
- [3] Ian Fischer and Craig Gotsman. 2006. Fast approximation of high-order Voronoi diagrams and distance transforms on the GPU. *Journal of Graphics Tools* 11, 4 (2006), 39–60.
- [4] Kenneth E Hoff III, John Keyser, Ming Lin, Dinesh Manocha, and Tim Culver. 1999. Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware. In *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 277–286.
- [5] Takumi Honda, Shinnosuke Yamamoto, Hiroaki Honda, Koji Nakano, and Yasuaki Ito. 2017. Simple and fast parallel algorithms for the Voronoi map and the Euclidean distance map, with GPU implementations. In *2017 46th International Conference on Parallel Processing (ICPP)*. IEEE, 362–371.
- [6] Manduhu Manduhu and Mark W Jones. 2019. A work efficient parallel Algorithm for exact Euclidean distance transform. *IEEE Transactions on Image Processing* 28, 11 (2019), 5322–5335.
- [7] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. 2006. Jump flooding in GPU with applications to Voronoi diagram and distance transform. In *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 109–116.
- [8] Guodong Rong and Tiow-Seng Tan. 2007. Variants of jump flooding algorithm for computing discrete Voronoi diagrams. In *4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2007)*. IEEE, 176–181.
- [9] Jens Schneider, Martin Kraus, and Rüdiger Westermann. 2009. GPU-based real-time discrete Euclidean distance transforms with precise error bounds.. In *VISAPP (1)*. 435–442.
- [10] Avneesh Sud, Naga Govindaraju, Russell Gayle, and Dinesh Manocha. 2006. Interactive 3D distance field computation using linear factorization. In *Proceedings of the 2006 symposium on Interactive 3D graphics and games*. 117–124.