Politechnika Łódzka

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki
i Matematyki Stosowanej

Kierunek: Matematyka Stosowana
Specjalność: Matematyka finansowa i ubezpieczeniowa

O rozkładzie sumy zmiennych losowych

Maciej Domagała

Numer albumu: 219998

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem dr inż. Violetty Lipińskiej
Instytut Matematyki

Łódź, maj 2019

Spis treści

Wstęp

Rozdział 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

1.1 Podstawowe definicje

Poniższa praca dotyczy pewnych własności zmiennych losowych, a zatem wskazane jest przytoczenie pewnych podstawowych definicji z zakresu probabilistyki.

Definicja 1 ([3], str. 18)
Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gdzie P jest funkcją prawdopodobieństwa określoną na σ-ciele $\mathcal{F}$ podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych Ω, nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 2 ([3], str. 75)
Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}$, jeżeli dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $X^{-1}((1-\infty, a])$ jest zdarzeniem, czyli $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

Głównymi zmiennymi losowymi rozważanymi w tej pracy będą ciągłe zmienne losowe zdefiniowane następująco:

Definicja 3 ([1], str. 31)
Mówimy, że zmienna losowa X jest typu ciągłego, jeżeli istnieje nieujemna funkcja f, określona i całkowalna do jedynki na całej osi, spełniająca warunek

$$\forall_{[x_1,x_2]}\, P\left(\{\omega : x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Definicja 4 ([1], str. 35)
Niech $p \in (0,1)$. Liczbę $q_p(X)$ spełniającą warunki:

$$P(X \leqslant q_p(X)) \geqslant p \wedge P(X < q_p(X)) \leqslant p$$

nazywamy kwantylem rzędu p zmiennej losowej X.

Kwantyle tego samego rzędu tworzą przedział $[q_X^-(p), q_X^+(p)]$ gdzie

$$\begin{aligned} q_X^-(p) &= \sup\{x : P(X < x) < p\} \\ &= \inf\{x : F(x) \geqslant p\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} q_X^+(p) &= \inf\{x : F(x) > p\} \\ &= \sup\{x : P(X < x) \leqslant p\}. \end{aligned}$$

Można zauważyć, że gdy zmienna losowa X ma ciągłą i ściśle rosnącą dystrybuantę, to zachodzi równość $q_X^-(p) = q_X^+(p)$ dla każdego $p \in (0, 1)$.

1.2 Miara ryzyka

Główną miarą ryzyka rozpatrywaną w tej pracy jest miara Value at Risk, zaproponowana w latach pięćdziesiątych zeszłego wieku przez m. in. Henry'ego Markowitza. W latach osiemdziesiątych firma JP Morgan wprowadziła system kalkulacji metryk VaR dla firm jako zastępstwo dla dotychczasowego systemu obliczania ryzyk portfeli inwestycyjnych. Sama miara jak i jej liczne pochodne (Expected Shortfall, CVaR) jest używana do dziś np. w przepisach regulacji zasad wypłacalności firm "Wypłacalność II" opublikowanych przez Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (EIOPA).

Definicja 5 *Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F, oznaczającą wielkość straty portfela inwestycyjnego. Na zadanym poziomie ufności $p \in (0, 1)$, Value at Risk jest najmniejszą taką liczbą x, że prawdopodobieństwo przekroczenia jej przez X jest nie większe niż $(1 - p)$:*

$$VaR_p(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant p\} = q_p(X).$$

Niech $\mathcal{L}$ oznacza przestrzeń zmiennych losowych opisanych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, reprezentujących stratę portfela inwestycyjnego w pewnym ustalonym przedziale czasu. W celu poprawnego zdefiniowania miary ryzyka zakładać będziemy, że dla dowolnych $X_1, X_2 \in \mathcal{L}$ oraz $\lambda > 0$ zachodzi $X_1 + X_2 \in \mathcal{L}$ oraz $\lambda X_1 \in \mathcal{L}$.

Definicja 6 ([4], str. 5)
Funkcję rzeczywistą $\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ nazywamy miarą ryzyka.

W pracy Artznera z 1999 roku przedstawione zostało pojęcie miar koherentnych, czyli spełniających pewne aksjomaty przedstawione poniżej. Koherentność miary ryzyka jest z finansowego punktu widzenia pożądanym zjawiskiem, wskazującym na dobre przełożenie pomiędzy zachowaniem ryzyk finansowych a wartością miary ryzyka.

Definicja 7 ([4], str. 7)
Miarę ryzyka $\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ nazywamy koherentną, jeżeli spełnia własności:

1. *monotoniczności, czyli dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{L}$*
$$X \leqslant Y \Rightarrow \rho(X) \leqslant \rho(Y),$$
2. *niezmienności na przesunięcia, czyli dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ i $X \in \mathcal{L}$*
$$\rho(X + c) = \rho(X) + c,$$
3. *dodatniej jednorodności, czyli dla dowolnego $\lambda > 0$ i $X \in \mathcal{L}$*
$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X),$$
4. *podaddytywności, czyli dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{L}$*
$$\rho(X + Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y).$$

Warto zauważyć, że pomimo dużej popularności miary Value at Risk, nie spełnia ona wszystkich warunków powyższej definicji.

Lemat 1

Miara ryzyka Value at Risk spełnia warunki dodatniej jednorodności, niezmienniczości na przesunięcia oraz monotoniczności, natomiast nie spełnia warunku podaddytywności. Nie jest zatem koherentną miarą ryzyka.

Dowód.

Niech $p \in \mathbb{R}$.

1. Pokażmy warunek monotoniczności. Niech $X, Y \in \mathcal{L}$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $X \leqslant Y$. Zauważmy, że $Y \leqslant x \Rightarrow X \leqslant x$, co bezpośrednio implikuje $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leqslant x\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$. Zatem dla dowolnego poziomu ufności $p \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$P(Y \leqslant x) \geqslant p \Rightarrow P(X \leqslant x) \geqslant p.$$

Z dowolności $x \in \mathbb{R}$ mamy zatem

$$\{x \in \mathbb{R} : P(Y \leqslant x) \geqslant p\} \subset \{x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x) \geqslant p\},$$

co z własności infimum zbiorów daje

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x) \geqslant p\} \leqslant \inf\{x \in \mathbb{R} : P(Y \leqslant x) \geqslant p\}.$$

Zatem $VaR_p(X) \leqslant VaR_p(Y)$.

2. Pokażmy warunek niezmienniczości na przesunięcia. Niech $c \in \mathbb{R}$ i $X \in \mathcal{L}$.

$$VaR_p(X+c) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X+c \leqslant x) \geqslant p\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x-c) \geqslant p\}.$$

Dla $y = x - c$ mamy $x = y + c$ i z własności infimum zbioru

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x - c) \geqslant p\} = \inf\{y + c \in \mathbb{R} : P(X \leqslant y) \geqslant p\} =$$
$$\inf\{y \in \mathbb{R} : P(X \leqslant y) \geqslant p\} + c = VaR_p(X) + c.$$

3. Pokażmy warunek dodatniej jednorodności. Niech $\lambda > 0$ i $X \in \mathcal{L}$.

$$VaR_p(\lambda X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(\lambda X \leqslant x) \geqslant p\} = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : P\left(X \leqslant \frac{x}{p}\right) \geqslant p\right\}$$
$$= \inf\{\lambda x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x) \geqslant p\} = \lambda VaR_p(X).$$

4. Pokażmy kontrprzykład na warunek podaddytywności. Niech $p = 0.95$. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, który można opisać poniższą tabelą

X	100	0
p_i	0.96	0.04

Niech Y będzie zmienną losową o tym samym rozkładzie, niezależną od X.
Zauważmy, że $VaR_{0.95}(X) = VaR_{0.95}(Y) = 0$.
Rozważmy rozkład sumy $X + Y$. Możemy go przedstawić następująco

$X+Y$	200	100	0
p_i	$(0.96)^2 = 0.9216$	0.0768	$(0.04)^2 = 0.0016$

Otrzymujemy, że $VaR_{0.95}(X+Y) = 100$, zatem $VaR_{0.95}(X+Y) = 100 \nleqslant 0+0 = VaR_{0.95}(X) + VaR_{0.95}(Y)$, co przeczy warunkowi subaddytywności.

$\square$

1.2.1 Definicja z punktu widzenia inwestora

Należy nadmienić, że w literaturze występuje zróżnicowanie dotyczące sposobu definiowania Value at Risk oraz aksjomatów określających koherentną miarę ryzyka. Podane w tym podrozdziale definicje dotyczą mierzenia zmiennych losowych opisujących pewną **stratę**. Takie podejście zaprezentowane jest np. w [5], [6] i dotyczy tzw. "ubezpieczeniowej" wersji Value at Risk. Często (np. w [2]) Value at Risk definiowany jest dla zmiennych losowych określających **zysk** inwestora, wówczas wprowadzany jest wzór

$$VaR_p^z(X) = -q_X^+(p) = -\inf\{x : P(X \leqslant x) > p\} = VaR_p(-X).$$

Jeżeli zmienna losowa X przyjmuje jedynie wartości dodatnie, czyli inwestor na pewno nie poniesie żadnych strat, $VaR_p^z(X)$ przyjmuje wartości ujemne, zatem kapitał inwestora nie jest zagrożony. Znajdywanie wartości VaR portfela związane jest z oszacowaniem dystrybuanty, stąd też w tej pracy wykorzystywana jest definicja VaR bezpośrednio nawiązująca do rozkładu, czyli "kwantylowa"definicja VaR.

Rozdział 2

Ograniczenia dystrybuanty rozkładu sumy zmiennych losowych

Rozważmy łączny portfel ubezpieczyciela $\sum_{i=1}^{n} X_i$ składający się z ryzyk opisanych przez wektor $X = (X_1, ..., X_n)$, gdzie dystrybuanty brzegowe $F_i \sim X_i$ są znane, ale struktura zależności pomiędzy składowymi portfela jest nieznana. Problem polega na znalezieniu największej i najmniejszej wartości Value at Risk. Zważywszy na przyjętą definicję VaR (kwantyl rozkładu), problem w dużej mierze polega na rozpatrzeniu różnych postaci rozkładu sumy zmiennych losowych. Co za tym idzie, w tym i kolejnym rozdziale przedstawione zostaną rozważania dotyczące ograniczeń dystrybuanty sumy zmiennych oraz twierdzenie łączące otrzymane wyniki z ograniczeniami VaR.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$M_n(t) := \sup \left\{ P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t \right) : X_i \sim F_i, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

oraz

$$m_n(t) := \inf \left\{ P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t \right) : X_i \sim F_i, 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

gdzie supremum i infimum są brane z uwzględnieniem wszystkich możliwych zależności między zmiennymi X_i. Wówczas powyższe wzory indykują naturalną zależność

$$m_n(t) \leqslant P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t \right) \leqslant M_n(t).$$

Na początku przedstawione zostanie twierdzenie wprowadzające tzw. standardowe ograniczenia dystrybuanty sumy zmiennych losowych. Przedstawmy najpierw dwie wykorzystywane w twierdzeniu definicje.

Definicja 8 ([5], str. 72)
Niech $t \in \mathbb{R}$. Liczbę

$$\bigwedge_{i=1}^{n} F_i(t) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} F_i(u_i) : \sum_{i=1}^{n} u_i = t \right\}$$

*nazywamy **minimalnym splotem** dystrybuant (F_i), zaś liczbę*

$$\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} F_i(u_i) : \sum_{i=1}^{n} u_i = t \right\}$$

*nazywamy **maksymalnym splotem** dystrybuant (F_i).*

Twierdzenie 2 ([5], str. 72)
Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie wektorem losowym o dystrybuantach brzegowych $F_1, ..., F_n$. Wówczas dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności:

$$\max \left(\bigvee_{i=1}^{n} F_i(t) - (n-1), 0 \right) \leqslant P \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t \right) \leqslant \min \left(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i(t), 1 \right).$$

Dowód.

Niech $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ oraz niech $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ będą tak dobrane, że $\sum_{i=1}^{n} u_i = t$.
Pokażmy najpierw, że zachodzi nierówność

$$P \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t \right) \leqslant P \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \leqslant u_i\} \right) \qquad (\star)$$

Rozważmy następujące podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

$$A_1 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + ... + x_n > u_1 + ... + u_n\}$$
$$A_2 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \{x_1 > u_1\} \cap ... \cap \{x_n > u_n\}$$

Zauważmy, że dla pewnego małego $\epsilon > 0$ możemy dobrać następujące elementy:

$$x_1 = u_1 + \epsilon$$
$$x_1 = u_1 + \epsilon$$

$$\vdots$$
$$x_{n-1} = u_{n-1} + \epsilon$$
$$x_n = u_n - \frac{(n-1)\epsilon}{2}.$$

Wówczas

$$x_1 + ... + x_n = u_1 + ... + u_n + (n-1)\epsilon - \frac{(n-1)\epsilon}{2} = u_1 + ... + u_n + \frac{(n-1)\epsilon}{2}.$$

Widać, że $x = (x_1, ..., x_n) \in A_1$, ale $x_n < u_n$, zatem $x = (x_1, ..., x_n) \notin A_2$.
Z drugiej strony, jeżeli dla pewnego $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ zachodzi warunek $\forall_i \; x_i > u_i$, to naturalnie $x_1 + ... + x_n > u_1 + ... + u_n$. Z powyższych wnioskujemy, że $A_2 \subset A_1$ oraz $A_1 \not\subset A_2$. Przechodząc do prawdopodobieństwa, mamy zatem $P(A_2) < P(A_1)$, co implikuje $P(A_1^c) < P(A_2^c)$, gdzie A_i^c oznacza dopełnienie zbioru A_i.
Przyjmując $A_1 = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > t\right\}$ oraz $A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{X_i > u_i\}$ dostajemy

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t\right) = P(A_1^c) < P(A_2^c) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > u_i\}\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant u_i\}\right).$$

Ponadto zauważmy, że

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i \leqslant u_i\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(\{X_i \leqslant u_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} F_i(u_i). \qquad (\star\star)$$

Ograniczenie zostało pokazane dla dowolnych $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ spełniających $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = t$. Biorąc elementy $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ minimalizujące sumę dystrybuant i korzystając z $(\star)$ oraz $(\star\star)$ mamy więc

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t\right) \leqslant \min\left(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i(t), 1\right).$$

Ograniczenie z góry zostało pokazane, pokażmy teraz ograniczenie z dołu.
Udowodnimy pomocniczą nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(t) - (n-1) \leqslant P\left(X_1 \leqslant u_1, ..., X_n \leqslant u_n\right). \qquad (\star\text{'})$$

Pokażemy ją w sposób indukcyjny. Zauważmy wpierw, że dla $n = 2$ zbiorów A_1 i A_2 zachodzi $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, zatem

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1 = P(A) + P(B) - (n-1)$$

Załóżmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i zbiorów $A_1, ..., A_n$ zachodzi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1). \tag{i}$$

Wówczas dla $n+1$ zbiorów $A_1, ..., A_{n+1}$ zachodzi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \geqslant P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(A_{n+1}\right) - 1 \geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P\left(A_{n+1}\right) - 1 = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - ((n+1)-1).$$

Zatem indukcyjnie pokazaliśmy nierówność (i). Kładąc $A_i = \{X_i \leqslant u_i\}$ otrzymujemy wzór $\star'$. Ponadto, powtarzając rozumowanie z pierwszej części dowodu, jeżeli dla pewnego $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ zachodzi warunek $\forall_i \ x_i \leqslant u_i$, to naturalnie $x_1 + ... + x_n \leqslant u_1 + ... + u_n$. Stąd wynika

$$P\left(X_1 \leqslant u_1, ..., X_n \leqslant u_n\right) \leqslant P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant t\right) \tag{$\star\star$'}$$

Korzystając z $\star$' oraz $\star\star$' oraz dobierając u_i maksymalizujące sumę dystrybuant otrzymujemy ograniczenie z dołu. Łącząc ograniczenia z góry i z dołu otrzymujemy tezę twierdzenia.

□

Należy nadmienić, że udowodnione powyżej twierdzenie jest dość ogólne - zachodzi dla dowolnej liczby zmiennych losowych oraz dla dowolnych postaci dystrybuant tych zmiennych. Wiąże się z tym pewne ograniczenie dokładności wyprowadzonych nierówności, bowiem pokazane w twierdzeniu 2 ograniczenia można polepszyć już dla $n \geqslant 3$ zmiennych, zakładając znajomość rozkładów X_i. Mimo tego ogólność zastosowania twierdzenia jest użyteczna - otrzymane wyniki można wykorzystać np. przy numerycznym poszukiwaniu wartości dystrybuanty sumy wykorzystując metodę poławiania - wówczas przedział otrzymany przy użyciu twierdzenia 2 możemy traktować jako przedział startowy algorytmu.
Okazuje się, że dla $n = 2$ zmiennych losowych ograniczenia twierdzenia 2 są optymalne - równe są odpowiednio $m_2(t)$ oraz $M_2(t)$. W kolejnym rozdziale zostanie przedstawiony dowód tego faktu.

Rozdział 3

Maksymalny i minimalny VaR dla sumy dwóch zmiennych losowych

3.1 Ograniczenia dystrybuanty sumy dwóch zmiennych losowych

Niech zmienne losowe X_1 i X_2 mają dystrybuanty odpowiednio $F_1(x) = P(X_1 \leqslant x)$ i $F_2(x) = P(X_2 \leqslant x)$. Wprowadźmy ponadto dla uproszczenia zapisów $\psi_i(p) = VaR_p(X_i) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_i(x) \geqslant p\}$. Wobec oznaczeń wprowadzonych w poprzednim rozdziale można pokazać, że

$$M_2(t) = \inf_{0<u_1<t} \{F_1(u_1) + F_2(t-u_1)\}, \tag{3.1}$$

$$m_2(t) = \sup_{0<u_1<t} \{F_1(u_1) + F_2(t-u_1)\} - 1. \tag{3.2}$$

zakładając, że obie wartości należą do przedziału $[0,1]$. W tej pracy zamieszczone zostaną dowody twierdzeń dotyczących $M_2(t)$ - idee wykorzystywane przy rozważaniu $m_2(t)$ są analogiczne.
Aby pokazać (3.1), zauważmy najpierw pewną relację.

Twierdzenie 3 (własne)
Niech

$$p^\star = \inf_{0<u_1<t} \{F_1(u_1) + F_2(t-u_1)\} \tag{3.3}$$

oraz

$$\bar{c} = \sup\left\{0 < c < 1 : \sup_{0<p<c} \{\psi_1(p) + \psi_2(c-p)\} < t\right\}. \tag{3.4}$$

Wówczas $p^\star = \bar{c}$.

Dowód.

I. Pokażemy, że $p^\star \leqslant \bar{c}$.

Załóżmy, że $p^\star > \bar{c}$. Wówczas istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $p^\star > p^\star_\epsilon = p^\star - \epsilon > \bar{c}$. Warunek $p^\star_\epsilon > \bar{c}$ oznacza istnienie takiego $p' \in (0, p^\star_\epsilon)$, że $\psi_1(p') + \psi_2(p^\star_\epsilon - p') \geqslant t$.

Przypuśćmy pierw, że $\psi_1(p') + \psi_2(p^\star_\epsilon - p') = t$.

Przyjmując $u'_1 = \psi_1(p')$ oraz $u'_2 = \psi_2(p^\star_\epsilon - p')$ uzyskujemy $u'_1 + u'_2 = t$ oraz $F_1(u'_1) + F_2(u'_2) = p' + p^\star_\epsilon - p' = p^\star_\epsilon < p^\star$ co przeczy definicji $p^\star$.

Przypuśćmy, że $\psi_1(p') + \psi_2(p^\star_\epsilon - p') = t' > t$.

Ponownie, niech $u'_1 = \psi_1(p')$ i $u'_2 = \psi_2(p^\star_\epsilon - p')$. Skoro $t' > t$ to $t' - u'_1 > t - u'_1$. Zatem z monotoniczności dystrybuanty

$$F_1(u'_1) + F_2(t - u'_1) \leqslant F_1(u'_1) + F_2(t' - u'_1) = p^\star_\epsilon.$$

Z drugiej strony

$$p^\star = \inf_{0<u'_1<t} \{F_1(u'_1) + F_2(t - u'_1)\} \leqslant F_1(u'_1) + F_2(t - u'_1),$$

Co prowadzi do $p^\star \leqslant p^\star_\epsilon$, zatem sprzeczność z $p^\star > p^\star_\epsilon$.

II. Pokażemy, że $p^\star \geqslant \bar{c}$.

Załóżmy, że $p^\star < \bar{c}$. Wówczas dla dowolnego $p' \in (0, p^\star)$ zachodzi $\psi_1(p') + \psi_2(p^\star - p') < t$. Z drugiej strony $p^\star = F_1(u^\star_1) + F_2(t - u^\star_1)$ dla pewnego $u^\star_1 \in (0, t)$, więc

$$\psi_1(p^\star_1) + \psi_2(p^\star - p^\star_1) = t,$$

co ponownie doprowadza do sprzeczności.

□

Podobnie można przeprowadzić dowód twierdzenia

Twierdzenie 4 (własne)

Niech

$$p^{\star\star} = \sup_{0<u_1<t} \{F_1(u_1) + F_2(t - u_1)\} - 1. \tag{3.5}$$

oraz

$$\underline{c} = \inf \left\{ 0 < c < 1 : \inf_{c<p<1} \{\psi_1(p) + \psi_2(1 + c - p)\} \geqslant t \right\}. \tag{3.6}$$

Wówczas $p^{\star\star} = \underline{c}$.

Wnioskując z twierdzenia (3), aby pokazać (3.1) wystarczy pokazać, że $M_2(t) = \bar{c}$. Twierdzenie w takiej formie zostało udowodnione przez Makarova w 1981 roku. Dowód z uwzględnieniem prawostronnie ciągłej dystrybuanty zostanie przedstawiony poniżej.

Twierdzenie 5 ([3], str. 804)
Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas zachodzi równość:

$$M_2(t) = \sup\left\{0 < c < 1 : \sup_{0<p<c} \{\psi_1(p) + \psi_2(c-p)\} < t \right\}.$$

Twierdzenie 6 ([3], str. 804)
Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas zachodzi równość:

$$m_2(t) = \inf\left\{0 < c < 1 : \inf_{c<p<1} \{\psi_1(p) + \psi_2(1+c-p)\} \geqslant t\right\}.$$

Przedstawmy najpierw metodę zdefiniowania zmiennej losowej θ wykorzystywaną w dowodzie. Zauważmy, że dla dowolnej zmiennej losowej X o dystrybuancie F możemy skonstruować zmienna θ w następujący sposób: gdy dla zdarzenia losowego ω zachodzi $P(X = X(\omega)) = 0$, to $\theta(\omega) = F(X(\omega))$, zaś gdy $P(X = X(\omega)) = p_i > 0$, to zmienna losowa θ jest jednostajnie określona na przedziale $[F(X(\omega)) - p_i, F(X(\omega))]$. Tak określona zmienna θ ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.
Ponadto, zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 7 ([7], str. 111)
Niech θ będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$ *niech zmienna losowa X będzie zdefiniowana jako $\psi(\theta)$, gdzie $\psi(p) = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}$ dla pewnej dystrybuanty F. Wówczas zachodzą warunki:*

1. $\{X \leqslant x\} = \{\theta \leqslant F(x)\}$ *dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$
2. $X = \psi(\theta)$ *ma rozkład o dystrybuancie F.*

Dowód.

Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz $X \leqslant x$. Wówczas $\psi(\theta) \leqslant x$ czyli $\inf\{t : F(t) \geqslant \theta\} \leqslant x$. To z kolei oznacza, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi $F(x + \epsilon) \geqslant \theta$, co z prawostronnej ciągłości dystrybuanty daje bezpośrednio $F(x) \geqslant \theta$.
Niech teraz $\theta \leqslant F(x)$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas $X = \psi(\theta) = \inf\{t : F(t) \geqslant \theta\} \leqslant x$, co dowodzi punktu 1 twierdzenia. Punkt 2 jest bezpośrednim następstwem punktu 1.

□

Dowód twierdzenia 4.
Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi o dystrybuantach odpowiednio F_1 i F_2 Wprowadźmy oznaczenie

$$\bar{c} = \sup\{0 < c < 1 : \sup_{0<p<c} \psi_1(p) + \psi_2(c-p)\} < t\}.,$$

I. Pokażemy, że $M_2(t) \geqslant \bar{c}$.

Dla zmiennej losowej X_1 skonstruujmy zmienną losową θ_1 w sposób podany wcześniej. Niech $0 \leqslant c \leqslant \bar{c}$ oraz

$$\theta_2 = \begin{cases} c - \theta_1 & \text{dla } \theta_1 < c \\ \theta_1 & \text{dla } \theta_1 \geqslant c \end{cases}$$

Zauważmy, że $\psi_2(\theta_2)$ ma rozkład o dystrybuancie F_2. Mamy

$$\begin{aligned} P(\psi_2(\theta_2) \leqslant y) &= P(\{\psi_2(c-\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &= P(\{\psi_2(\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) = P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi zależność

$$\{p : p < F(y)\} \subseteq \{p : \psi(p) \leqslant y\} \subseteq \{p : p \leqslant F(y)\}. \qquad (\star_1)$$

Istotnie, niech $y \in \mathbb{R}$ oraz $p < F(y)$ i załóżmy, że $\psi(p) > y$. To oznaczałoby, że $\inf\{x : F(x) \geqslant p\} > y$, czyli, że dla dowolnego x spełniającego $F(x) \geqslant p$ zachodzi $x > y$.

Zauważmy jednak, że istnieje takie $\epsilon > 0$, że $p + \epsilon < F(y)$. Niech x_1 będzie takie, że $F(x_1) = p + \epsilon$. Wówczas z jednej strony $F(x_1) = P + \epsilon > p$, zaś z drugiej $F(x_1) = p + \epsilon < F(y)$ co pociąga za sobą $x_1 \leqslant y$. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem $\psi(p) > y$.

Pokażmy teraz drugie zawieranie. Niech $\psi(p) \leqslant y$ i załóżmy, że $p > F(y)$. Warunek $\psi(p) \leqslant y$ oznacza, że istnieje takie x_1, że $F(x_1) \geqslant p$ i $x_1 \leqslant y$. Skoro $x_1 \leqslant y$ to z własności dystrybuanty $F(x_1) \leqslant F(y)$ i finalnie $p \leqslant F(x_1) \leqslant F(y)$ co przeczy założeniu $p > F(y)$. Powyższe rozważania dowodzą $(\star_1)$.

Niech $F_2(y) \leqslant c$. Korzystając z wykazanej zależności $(\star_1)$ możemy zaprezentować poniższe nierówności:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\{\psi_2(c-\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \leqslant P(\{c - \theta_1 \leqslant F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &= P(c - F_2(y) \leqslant \theta_1 < c) = c - (c - F_2(y)) = F_2(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\{\psi_2(c-\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \geqslant P(\{c - \theta_1 < F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &= P(c - F_2(y) < \theta_1 < c) = c - (c - F_2(y)) = F_2(y), \end{aligned}$$

$$P_2 = P(\{\psi_2(\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) \leqslant P(\{\theta_1 \leqslant F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) = 0,$$

skąd otrzymujemy $P_1 + P_2 = F_2(y)$.

Niech $F_2(y) > c$. Wówczas w podobny sposób korzystając z zależności $(\star_1)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\{\psi_2(c-\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \leqslant P(\{c-\theta_1 \leqslant F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &= P(c - F_2(y) \leqslant \theta_1 < c) = P(\theta_1 < c) = c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P(\{\psi_2(c-\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \geqslant P(\{c-\theta_1 < F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &= P(c - F_2(y) < \theta_1 < c) = P(\theta_1 < c) = c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P(\{\psi_2(\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) \geqslant P(\{\theta_1 < F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) \\ &= P(c \leqslant \theta_1 \leqslant F_2(y)) = F_2(y) - c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P(\{\psi_2(\theta_1) \leqslant y\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) \leqslant P(\{\theta_1 \leqslant F_2(y)\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) \\ &= P(c \leqslant \theta_1 \leqslant F_2(y)) = F_2(y) - c, \end{aligned}$$

skąd ponownie otrzymujemy $P_1 + P_2 = F_2(y)$. Finalnie oznacza to, że $P(\psi_2(\theta_2) \leqslant y) = F_2(y)$ dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$, zatem $\psi_2(\theta_2) \sim F_2$. Z twierdzenia 5 wiemy również, że $\psi_1(\theta_1) \sim F_1$.

Niech zatem $c < \bar{c}$. Mamy

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leqslant t) &= P(\psi_1(\theta_1) + \psi_2(\theta_2) \leqslant t) \\ &= P(\{\psi_1(\theta_1) + \psi_2(\theta_2) \leqslant t\} \wedge \{\theta_1 < c\}) \\ &\quad + P(\{\psi_1(\theta_1) + \psi_2(\theta_2) \leqslant t\} \wedge \{\theta_1 \geqslant c\}) = c + \tilde{P}_2 \geqslant c, \end{aligned}$$

co wobec dowolności $c < \bar{c}$ daje

$$M_2(t) \geqslant \bar{c}. \tag{3.7}$$

II. Pokażemy, że $M_2(t) \leqslant \bar{c}$.

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną. Wprowadźmy oznaczenia:

$$x_i = \psi_1\left(\frac{i}{n}\right); \quad y_i = \psi_2\left(\frac{i}{n}\right), \quad i = 0, 1, ..., n$$

Ponadto, niech

$$k_0 = \max\{1 \leqslant k \leqslant n : \max(x_i + y_{k-i+1}) \leqslant t\}$$

Pokażemy dwie nierówności:

$$M_2(t) \leqslant \frac{k_0+2}{n} \text{ oraz } \frac{k_0}{n} \leqslant \bar{c} + \frac{3}{n}$$

IIa. $M_2(t) \leqslant \dfrac{k_0+2}{n}$.
Nierówność jest oczywista dla $k_0 \geqslant n-2$. Niech więc $k_0 \leqslant n-3$ oraz wprowadźmy zbiory:

$$A_k = \left\{\frac{k-1}{n} \leqslant \theta_1 < \frac{k}{n}\right\} \text{ i } B_k = \left\{\frac{k-1}{n} \leqslant \theta_2 < \frac{k}{n}\right\}, \qquad k = 1, .., n.$$

Z definicji k_0 wynika, że istnieje taki indeks i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant k_0$, że $x_{i_0} + y_{k_0-i_0+2} > t$. Rozważmy $r \geqslant i_0+1$ oraz $s \geqslant k_0 - i_0 + 3$. Wówczas widać, że na zbiorze A_r zachodzi $\theta_1 \geqslant \frac{i_0}{n}$, czyli $\psi_1(\theta_1) \geqslant x_{i_0}$, natomiast na zbiorze B_s zachodzi $\theta_2 \geqslant \dfrac{k_0-i_0+2}{n}$, co implikuje $\psi_2(\theta_2) \geqslant y_{k_0-i_0+2}$. Stąd i z możemy wnioskować, że na $A_r \cap B_s$ zachodzi $X_1 + X_2 = \psi_1(\theta_1) + \psi_2(\theta_2) \geqslant x_{i_0} + y_{k_0-i_0+2} > t$. Wówczas korzystając z dopełnień zbiorów

$$\{X_1 + X_2 \leqslant t\} \subseteq (A_r \cap B_s)' = A_r' \cup B_s' = \bigcup_{i=1}^{i_0} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{k_0-i_0+2} B_i =$$
$$\left\{\theta_1 < \frac{i_0}{n}\right\} \cup \left\{\theta_2 < \frac{k_0-i_0+2}{n}\right\} = C.$$

Korzystając z własności prawdopodobieństwa otrzymujemy wniosek

$$P(X_1 + X_2 \leqslant t) \leqslant P(C) = \frac{i_0}{n} + \frac{k_0-i_0+2}{n} = \frac{k_0+2}{n}.$$

Bezpośrednio stąd otrzymujemy $M_2(t) \leqslant \dfrac{k_0+2}{n}$.

IIb. $\dfrac{k_0}{n} \leqslant \bar{c} + \dfrac{3}{n}$.
Niech $j_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\dfrac{j_0-1}{n} \leqslant \bar{c} < \dfrac{j_0}{n}$. Pokażemy wówczas, że $\dfrac{k_0}{n} \leqslant \dfrac{j_0-1}{n} + \dfrac{3}{n}$ czyli

$$k_0 \leqslant j_0 + 2. \tag{$\star$}$$

Zauważmy, że dla $j_0 \geqslant n-2$ nierówność w **IIb** jest oczywista. Niech więc $1 \leqslant j_0 \leqslant n-3$. Istnieje taka $\delta > 0$, że $c_2 = \bar{c} + \delta < \frac{j_0}{n}$. Rozważmy dowolny indeks $0 \leqslant i < j_0$ oraz $p \in \left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right]$. Mamy $c_2 - p \leqslant \frac{j_0}{n} - \frac{i+1}{n} = \frac{j_0 - i - 1}{n}$, zatem z monotoniczności funkcji ψ

$$\psi_1(p) + \psi_2(c_2 - p) \leqslant \psi_1\left(\frac{i+1}{n}\right) + \psi_2\left(\frac{j_0 - i + 1}{n}\right)$$

Z dowolności i mamy wówczas

$$\sup_{0<p<c_2} \{(\psi_1(p) + \psi_2(c_2 - p)\} \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant j_0} (x_i + y_{j_0 - i + 2}). \tag{$\star_1$}$$

Jednocześnie z definicji $\bar{c}$

$$\sup_{0<p<c_2} \{(\psi_1(p) + \psi_2(c_2 - p)\} > t \tag{$\star_2$}$$

oraz z definicji k_0

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k_0} (x_i + y_{k_0 - i + 1}) \leqslant t. \tag{$\star_3$}$$

Łącząc nierówności $\star_1$, $\star_2$ i $\star_3$ dostajemy

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k_0} (x_i + y_{k_0 - i + 1}) < \max_{1 \leqslant i \leqslant j_0} (x_i + y_{j_0 - i + 2}) = x_{l_0} + y_{j_0 - l_0 + 2}. \tag{$\star_4$}$$

dla pewnego $1 \leqslant l_0 \leqslant j_0$.

Jeśli $k_0 \leqslant j_0$ to $k_0 \leqslant j_0 + 2$ co dowodzi $\star$.

Jeśli $k_0 \geqslant j_0 + 1$ to zauważmy, że z $\star_4$

$$x_{l_0} + y_{k_0 - l_0 + 1} < x_{l_0} + y_{j_0 - l_0 + 2} \Rightarrow k_0 < j_0 + 1$$

co przeczy założeniu, że $k_0 \geqslant j_0 + 1$. Zatem zachodzi $\star$ i bezpośrednio stąd mamy prawdziwość **IIb**.

Z **IIa** oraz **IIb** dostajemy

$$M_2(t) \leqslant \frac{k_0}{n} + \frac{2}{n} \leqslant \bar{c} + \frac{3}{n} + \frac{2}{n} = \bar{c} + \frac{5}{n} \tag{3.8}$$

co z dowolności $n \in \mathbb{N}$ daje ostatecznie **II**. Z **I** i **II** otrzymujemy tezę twierdzenia. □

3.2 Postać maksymalnego i minimalnego VaR

Z twierdzenia udowodnionego w poprzednim rozdziale możemy wywnioskować postać VaR dla sumy dwóch zmiennych losowych. Wprowadźmy analogiczne oznaczenia do tych z rozdziału 2. Niech $p \in (0,1)$ i $S_n = X_1 + ... + X_n$. Oznaczmy

$$\overline{VaR}_p(S_n) := \sup\left\{VaR_p\left(S_n\right) : X_i \sim F_i, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}, \tag{3.9}$$

$$\underline{VaR}_p(S_n) := \inf\left\{VaR_p\left(S_n\right) : X_i \sim F_i, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}, \tag{3.10}$$

Wówczas prawdziwy jest poniższy wniosek

Wniosek z twierdzeń 5 i 6 ([8], str. 14)
Dla dowolnego $p \in (0,1)$ *zachodzą zależności*

$$\overline{VaR}_p(X_1 + X_2) = \inf_{x \in [0, 1-p]} \{F_1^{-1}(p+x) + F_2^{-1}(1-x)\} \tag{3.11}$$

oraz

$$\underline{VaR}_p(X_1 + X_2) = \sup_{x \in [0,p]} \{F_1^{-1}(x) + F_2^{-1}(p-x)\}. \tag{3.12}$$

Obserwacją z powyższego wniosku jest fakt, że gdy współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi X_1 i X_2 wynosi $\rho = 1$ (pełna komonotoniczność pomiędzy zmiennymi), to VaR niekoniecznie jest maksymalizowany. Prezentacją tej zależności może być przykład dotyczący dwóch zmiennych o rozkładzie normalnym. Zauważmy wpierw, że zachodzi twierdzenie

Twierdzenie 8 ([9], str. 52)
Niech X *będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią* μ *oraz wariancją* σ^2 *o gęstości*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Wówczas dla dowolnego $p \in (0,1)$ *zachodzi*

$$VaR_p(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p).$$

Dowód.
Korzystając bezpośrednio z definicji VaR oraz standaryzacji zmiennej losowej otrzy-

mujemy ciąg zależności

$$\begin{aligned}
VaR_p(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leqslant x) \geqslant p\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \geqslant p\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \geqslant p\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-\mu}{\sigma} \geqslant \Phi^{-1}(p)\right\} \\
&= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant \mu + \sigma\Phi^1(p)\right\} = \mu + \sigma\Phi^1(p)
\end{aligned}$$

Przykład 1.

Niech zmienne losowe X_1, X_2 mają rozkład normalny z wartością oczekiwaną 0 oraz wariancją równą 1. Oznaczmy dystrybuanty tych zmiennych losowych jako F_1, F_2. Niech $p = 0,95$.

Bazując na wzorze (2.2), wprowadźmy funkcję g określoną wzorem:

$$g(x) = F_1^{-1}(0,95 + x) + F_2^{-1}(1 - x).$$

Interesuje nas minimum tej funkcji w przypadku, gdy $x \in [0; 0,05]$.

Widzimy, że minimum tej funkcji jest osiągane dla $x = 0,025$ i wynosi:

$$g(0.025) = F_1^{-1}(0,975) + F_2^{-1}(0,975) = 2 \cdot F_1^{-1}(0,975) = 2 \cdot 1,959964 = 3,919928.$$

Zatem $\overline{VaR}_{0,95}(X_1 + X_2) = 3,919928$.

Z drugiej strony, suma $X_1 + X_2$ ma rozkład $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ dla $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ oraz korelacji ρ pomiędzy nimi. Wobec tego dla $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ i $\rho = 1$ z poprzedniego twierdzenia dostajemy

$$VaR_{0,95}(X_1 + X_2) = \sqrt{4} \cdot \Phi^{-1}(0,95) = 2 \cdot 1,6449 = 3,2898.$$

Co za tym idzie, pełna komonotoniczność liniowa nie jest przypadkiem, w którym otrzymujemy maksymalny VaR sumy.

Bibliografia

[1] Gajek L, Kałuszka M.: *Wnioskowanie statystyczne*, WNT, Warszawa 1996.

[2] Jakubowski J.: *Modelowanie rynków finansowych*, Script, Warszawa 2006.

[3] Jakubowski J., Sztencel R.: *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, Script, Warszawa 2002.

[4] Artzner P., Eber J., Delbaen F., Heath D.: *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance 9(3):203-228, 1999.

[5] Makarov G.D: *Estimates for the distribution function of a sum of two random variables when the marginal distribution are fixed*, Theory of Probability & Its Applications: Vol. 26, No. 4,1982.

[5] Ruschendorf L., *Mathematical Risk Analysis*, Springer, Berlin 2013.

[6] McNeil J. A., Frey R., Embrechts P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, 2005.

[7] Shorack R. Galen, *Probability for Statisticians*, Springer-Verlag New York, 2000.

[8] Embrechts P, *Risk Aggregation under Dependence Uncertainty - Challenges in Theory and Practice*, Selected talk presentation, 2014.

[9] Panjer H.H., *Operational Risk: Modeling Analytics*, John Wiley and Sons, 2006.