Zad. 1 Dla każdej grupy funkcji posortuj je od najmniejszej do największej złożoności asymptotycznej:

a) grupa 1:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{0.999999} \log n \\ f_2(n) &= 10000000n \\ f_3(n) &= 1.000001^n \\ f_4(n) &= n^2 \end{aligned}$$

b) grupa 2:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 2^{100n} \\ f_2(n) &= \binom{n}{2} \\ f_3(n) &= n\sqrt{n} \end{aligned}$$

c) grupa 3:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{\sqrt{n}} \\ f_2(n) &= 2^n \\ f_3(n) &= n^{10} 2^{n/2} \\ f_4(n) &= \sum_{i=1}^{n} (i+1) \end{aligned}$$

W razie wątpliwości posiłkuj się wykresami funkcji.

a) Załóżmy, że dla pewnego pewnego n zachodzą nierówności

$$f_1 < f_2 < f_4 < f_3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.999999} \log n}{10000000n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{10000000n \cdot n^{0.000001}} \overset{H}{=}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{10000000 \cdot n^{0.000001} + 10000000n \cdot 0.000001 \cdot \frac{1}{n^{0.999999}}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.999999}}{10000010n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_4(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000000n}{n^2} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{10000000}{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_4(n)}{f_3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1.000001^n} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\log n \cdot 1.000001^n} \overset{H}{=}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{n} \cdot 1.000001^n + \log n \cdot \log 1.000001 \cdot 1.000001^n} = 0$$

Ponieważ wszystkie granice wynoszą zero ten porządek jest prawdziwy.

b) Załóżmy, że dla pewnego pewnego n zachodzą nierówności

$$f_3 < f_2 < f_1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\binom{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\frac{n^2-n}{2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{2}}{2^{100n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-n}{2}}{2^{100n}} \stackrel{H}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\frac{1}{2}}{\log 2 \cdot 100 \cdot 2^{100n}} \stackrel{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log^2 2 \cdot 100^2 \cdot 2^{100n}} = 0$$

Ponieważ wszystkie granice wynoszą zero ten porządek jest prawdziwy.

c) Załóżmy, że dla pewnego pewnego n zachodzą nierówności

$$f_4 < f_1 < f_3 < f_2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_4(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i + 1}{n^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n}{2}}{n^{\sqrt{n}}} = 0$$