

# Modelowanie zmienności Warszawskiego Indeksu Giełdowego przy wykorzystaniu metod GARCH

na podstawie

*Volatility Forecasting in the Hang Seng Index using the GARCH Approach*

Bartłomiej Kuźma Maciej Odziemczyk

384866

388581

WNE UW

### **Oświadczenie autorów pracy**

Mając świadomość odpowiedzialności prawnej oświadczamy, że niniejsza praca zaliczeniowa została napisana przez nas samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób nie zgodny z obowiązującymi przepisami prawa. Oświadczamy również, że przedstawiona praca zaliczeniowa, ani jej fragmenty nie są równoległe i nie były wcześniej wykorzystywane do uzyskania zaliczenia z innego przedmiotu w toku studiów na WNE UW (wyłączając badania na potrzeby pracy magisterskiej). Oświadczamy ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z przesłaną wersją elektroniczną.

# 1 Wstęp

Celem niniejszego projektu było sprawdzenie czy modele z rodziny GARCH generują lepsze predykcje zmienności Warszawskiego Indeksu Giełdowego w porównaniu do modeli klasycznych - błędzenia przypadkowego, średniej historycznej (model benchmarkowy) oraz średniej ruchomej. Podobnie jak w badaniu referencyjnym [4] zweryfikowana została hipoteza o wrażliwości predykcji modeli klasy GARCH na założenia o rozkładzie składnika losowego. w związku z leptokurtycznością rozkładu stóp zwrotu oczekiwano, że dużo lepszym modelem rozkładu reszt jest rozkład t-studenta z uwagi na swój kształt w stosunku do rozkładu normalnego (wysmukłość i grubość ogonów). Ponadto w przypadku asymetrii rozkładu stóp zwrotu rozkład skośny t-studenta powinien okazać się lepszy. Hipotezę formalnie można zapisać w następujący sposób:

$$metric_{GARCH-N} > metric_{GARCH-T} \text{ jeżeli } Skew \approx 0,$$

$$metric_{GARCH-N} > metric_{GARCH-T} > metric_{GARCH-ST} \text{ jeżeli } Skew \neq 0$$

gdzie:

$metric$  oznacza metrykę błędu predykcji (im niższa tym lepszy model),

$GARCH - N$  model GARCH z założeniem o normalnym rozkładzie błędu losowego,

$GARCH - T$  model GARCH z założeniem o rozkładzie t-studenta dla błędu losowego,

$GARCH - ST$  model GARCH z założeniem o skośnym rozkładzie t-studenta dla błędu losowego,

$Skew$  to skośność rozkładu stóp zwrotu.

Metryki opisane zostały dokładniej w sekcji poświęconej Metodologii. Poza rozkładem Normalnym, t-Studenta i skośnym t-Studenta, przetestowany został również generalizowany rozkład błędu (*Generalized Error Distribution*).

Zmienność jest jedną z najważniejszych miar w dziedzinie modelowania rynków finansowych, jest ona bowiem podstawą oceny ryzyka, tym samym wielu różnych modeli np. VaR (*Value at Risk*), dlatego też wiedza o jakości modeli służących do jej przewidywania jest niezwykle istotna. Dotychczas większość badań empirycznych dotyczących zmienności indeksów giełdowych skupiona była na rynku w Wielkiej Brytanii i Stanach Zjednoczonych, a mimo to wyniki nie były jednoznaczne. Badanie referencyjne dotyczy natomiast giełdowego indeksu z Hong Kongu (Hang Seng Index) i wyniki tam uzyskane wskazywały na wyższość modeli kasy GARCH, szczególnie tych uwzględniających w jakiś sposób asymetrię, nad modelami klasycznymi, zarówno w standardowych metrykach jak i w wyspecjalizowanych finansowych funkcjach straty. Ponadto okazało się również, predykcje wrażliwe są na rozkład reszt i Normalny wypada najgorzej, najlepszą kombinacją okazały się inne niż normalne rozkłady z modelem uwzględniającym asymetrię.

## 2 Dane i ich analiza

W analizie wykorzystano dane cen zamknięcia Warszawskiego Indeksu Giełdowego dla lat 2010-2020 (dziennie i tygodniowe, źródło <https://stooq.pl>), na których podstawie obliczono logarytmiczne stopy zwrotu według wzoru:

$$r_t = \ln \left( \frac{p_t}{p_{t-1}} \right)$$

gdzie:

$r_t$  to logarytmiczna stopa zwrotu z indeksu,

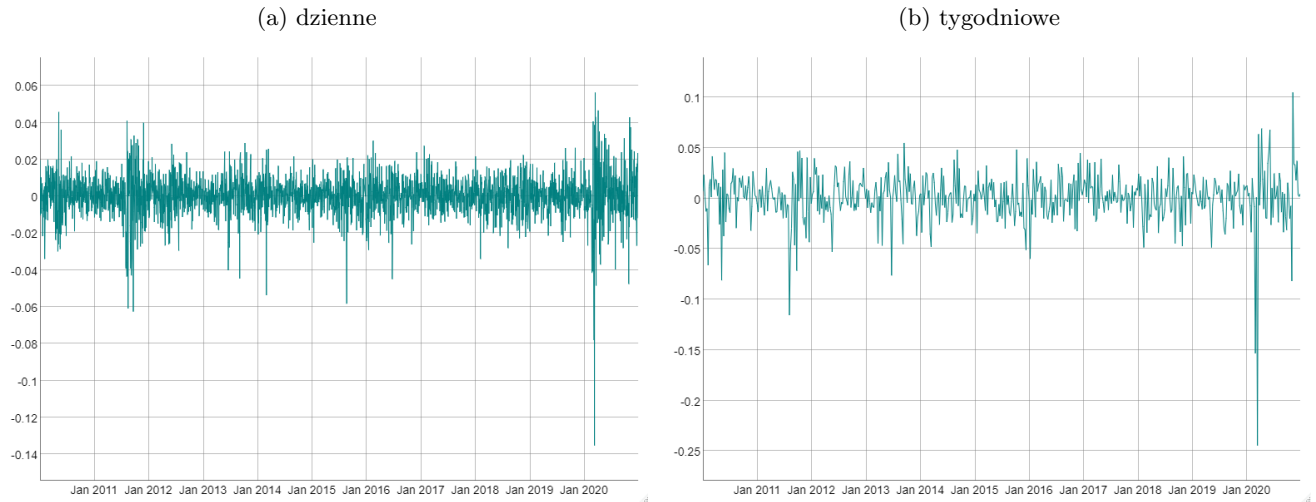
a  $p_t$  i  $p_{t-1}$  to odpowiednio cena zamknięcia indeksu w okresie bieżącym i poprzedzającym go.

Rysunek 1. obrazuje uzyskane zwroty dzienne i tygodniowe, można zauważyć tam zjawisko grupowania wariancji co zwiastuje warunkową heteroskedastyczność.

Rysunek 2. obrazuje wykresy ACF dla przybliżenia zrealizowanej zmienności analizowanych szeregów, pozwalają one na nabranie intuicji dotyczącej korelacji tejsze zmienności w czasie. Przybliżeniem wspomnianej zmienności są kwadraty stóp zwrotu dla danych dziennych oraz wariancja danych o wyżej częstotliwości dla danych tygodniowych, o poprawności takiego podejścia pisali Poon i Granger [3].

Korelogramy wykazują silną zależność zmienności od swoich poprzednich realizacji, w celu formalnego potwierdzenia zdecydowano się na przeprowadzenie testu ARCH. Dla jedenastu pierwszych opóźnień danych dziennych uzyskano statystykę testową 479.66 co w rozkładzie  $\chi^2_{11}$  oznacza silne odrzucenie hipotezy zerowej o braku zależności. Dla danych tygodniowych przetestowano 5 opóźnień, statystyka testowa wyniosła 47.87 co przy rozkładzie  $\chi^2_5$  również nie daje podstaw do przyjęcia hipotezy zerowej. W Tabeli 1. przedstawiono podstawowe charakterystyki

Rysunek 1: log-stopu zwrotu WIG

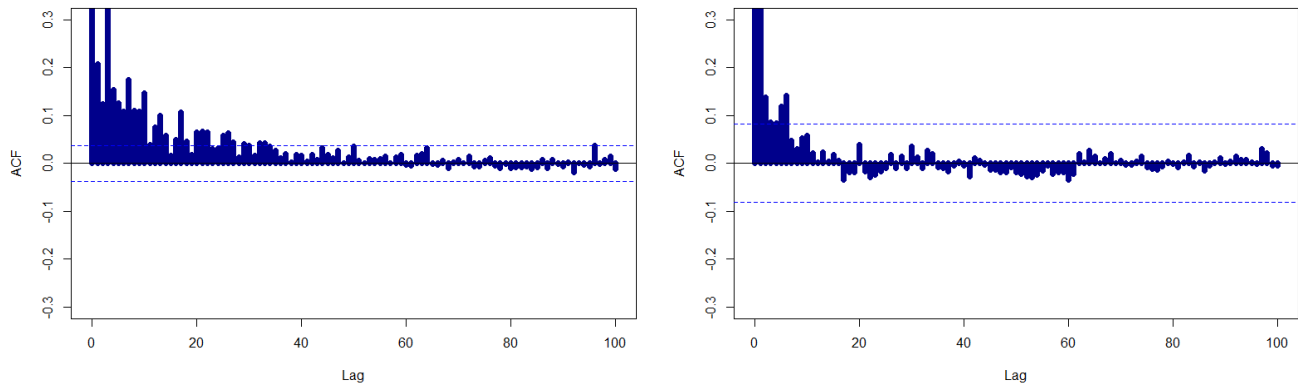


Źródło: Opracowanie własne.

Rysunek 2: Wykresy ACF dla proxy zmienności zrealizowanej log-stóp zwrotu z WIG

(a) dzienne (kwadrat log-stóp zwrotu)

(b) tygodniowe (wariancja danych o wyższej częstotliwości)



Źródło: Opracowanie własne.

rozkładów analizowanych stóp zwrotu, co koresponduje niejako z postawioną hipotezą badawczą (warunkowanie skośnością rozkładu modelowanej zmiennej).

Jak można zaobserwować w Tabeli 1. rozkłady charakteryzują się dużo większą kurtozą od standardowego rozkładu Normalnego ( $K = 0$ ), ponadto ich skośność jest również znacznie różna od 0, co w świetle postawionej hipotezy badawczej powinno objawić się wyższością rozkładu skośnego t-Studenta nad zwykłym, oraz Normalnym. Test Jarqua-Bera nie dał podstaw do podważenia wyciągniętych wniosków, ponieważ zarówno w przypadku danych dziennych jak i tygodniowych odrzucił on hipotezę zerową o normalności rozkładu.

Tablica 1: Statystyki rozkładów log-stóp zwrotu

	dziennie	tygodniowe
N	2748	574
Średnia	0.000129	0.000595
Mediana	0.000396	0.002114
Odchylenie standardowe	0.010937	0.025013
Skośność	-1.1712	-2.2507
Kurtoza	12.4303	18.9578

Źródło: Opracowanie własne.

### 3 Metodologia

Porównawczy charakter badania wymaga policzenia kilku modeli i zweryfikowania rezultatów za pomocą kilku metryk. Warto w tym momencie podkreślić, że weryfikacja odbędzie się na wydzielonej próbie out of sample (2020 rok) za pomocą predykcji na jeden okres do przodu, co oznacza, że modele z każdym krokiem były szacowane od nowa z uwzględnieniem obserwacji poprzedzającej przewidywany okres. w niniejszej sekcji sformułowane zostały modele wykorzystane w projekcie. Modele z rodziny GARCH opisywane są przez dwa równania, pierwsze - równanie średniej i drugie - równanie zmienności (zazwyczaj to nim różnią się poszczególne modele).

**Zwykły model GARCH(1,1):**

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \\ h_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \end{aligned}$$

gdzie:

pierwsze równanie jest równaniem średniej i w podstawowej wersji składa się ze stałej i reszty, a drugie równanie jest równaniem zmienności, zależnym od reszty i zmienności z okresu poprzedniego.

**Exponential-GARCH(1,1) (E-GARCH):**

$$\ln h_t^2 = \omega + \beta \ln h_{t-1}^2 + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}}$$

gdzie:

$\gamma$  w przypadku istotności i ujemnej wartości oznacza występowanie efektu dźwigni (asymetrycznych reakcji zmienności na dodatnie i ujemne wahania stopy zwrotu).

**Threshold-GARCH(1,1) (T-GARCH):**

$$\begin{aligned} h_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} \\ I_{t-1} &= \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie:

$\gamma$  w przypadku istotności zwiększa reakcję na negatywne zmiany.

**Component-GARCH(1,1) (C-GARCH):**

W odróżnieniu od powyższych modeli GARCH, model C-GARCH rozróżnia długo- i krótko-okresowość zjawiska mean-reversion ( $m_t$  to próg)

$$\begin{aligned} h_t^2 - m_t &= \bar{\omega} + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - \bar{\omega}) + \beta(h_{t-1}^2 - \bar{\omega}) \\ m_t &= \omega + \rho(m_{t-1} - \omega) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}^2) \end{aligned}$$

gdzie:

$\rho$  kontroluje zbliżanie się  $m_t$  do  $\omega$  i z reguły przyjmuje wartości pomiędzy 0.99 a 1, co powoduje powolną konwergencję.

w ramach klasycznych modeli uśredniających wykorzystano Błądzenie Losowe (*Random Walk*), Średnią Historyczną (*Historical Average*) oraz Średnią Ruchomą (*Moving Average*) z oknem 1- i 3-letnim.

**Błądzenie Losowe:**

$$h_t^2 = h_{t-1}^2$$

gdzie:

$h^2$  jest zrealizowaną zmiennością.

**Średnia Historyczna:**

$$h_t^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t-1} h_i^2$$

**Średnia Ruchoma:**

$$h_t^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=t-\tau}^{t-1} h_i^2$$

Każda z metryk błędu prognoz ma swoje wady i zalety i działa lepiej lub gorzej w określonych warunkach, dlatego właśnie, podobnie jak w artykule referencyjnym, do porównania wyników w niniejszym badaniu użyto szeregu metryk, w tym podstawowych miar, takich jak:

**Średni błąd (Mean Error, ME):**

$$ME = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)$$

gdzie:

$\tau$  jest liczbą kroków prognozy,

a  $s_t^2$  aktualną zmiennością

**Średni błąd bezwzględny (Mean Absolute Error, MAE):**

$$MAE = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} |h_t^2 - s_t^2|$$

gdzie:

$T$  jest ostatnim okresem in sample.

**Błąd średnio kwadratowy (Root Mean Square Error, RMSE):**

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)^2}$$

**Dopasowany średni procentowy błąd bezwzględny (Adjusted Mean Absolute Percentage Error, AMAPE):**

$$AMAPE = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} \left| \frac{(h_t^2 - s_t^2)}{(h_t^2 + s_t^2)} \right|$$

**Współczynnik nierówności Theila (Theil Income Coefficient, TIC):**

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)^2}}{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} h_t^4} + \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} s_t^4}}$$

Użyto także statystyk asymetrycznych, które w różnym stopniu karzą za przeszacowania i niedoszacowania prognoz:

**Średni błąd asymetryczny (niedoszacowania) (MME(U)):**

$$MME(U) = \frac{1}{\tau} \left[ \sum_{i=1}^O |(h_t^2 - s_t^2)| + \sum_{i=1}^U \sqrt{|h_t^2 + s_t^2|} \right]$$

**Średni błąd asymetryczny (przeszacowania) (MME(O)):**

$$MME(O) = \frac{1}{\tau} \left[ \sum_{i=1}^O \sqrt{|(h_t^2 - s_t^2)|} + \sum_{i=1}^U |h_t^2 + s_t^2| \right]$$

gdzie:

U mówi o liczbie niedoszacowań (*underpredictions*),

a o (*overpredictions*) o liczbie przeszacowań pośród predykcji.

By sprawdzić jak skuteczne są modele jeżeli chodzi o prognozowanie kierunku zmian zastosowano także takie metryki finansowe, jak:

**DCP:**

$$\% \text{ correct direction change predictions (DCP)} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_{t+1}$$

$$z_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (s_{t+1}^2 - s_t^2)(h_{t+1}^2 - s_t^2) > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

**DCPU:**

$$DCPU = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_{t+1},$$

$$z_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } (s_{t+1}^2 - s_t^2)(h_{t+1}^2 - s_t^2) > 0, \quad s_t^2 > T \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

gdzie:

T to próg, dla wartości powyżej, którego liczona jest wartość metryki. w przypadku niniejszego, jak i referencyjnego badania  $T = 2e-4$ .

## 4 Wyniki

Przed przystąpieniem do analizy wyników, warto zaznaczyć, że w tabelach z wartościami statystyk obok każdej z kolumn znajduje się jej wystandaryzowana wersja (wynik podzielono przez wartość danej metryki dla modelu Historycznej Średniej, ułatwia to porównywanie modeli w ramach danego kryterium). Najlepsze modele w ramach każdej metryki zaznaczono gwiazdkami (odpowiednio \* dla najlepszego, \*\* dla drugiego najlepszego wyniku i \*\*\* dla trzeciego).

W tabeli 2. zaprezentowano podstawowe metryki błędów prognozy dla wszystkich modeli w wariacie szeregu o częstotliwości tygodniowej. Jak widać podstawowe modele przodują we wszystkich statystykach. Można też stwierdzić, że modele GARCH osiągają stosunkowo słabe wyniki dla prawie każdej z metryk, co jest odstępstwem od wyników otrzymanych w referencyjnym badaniu. Jedynie w przypadku metryki TIC model T-GARCH z rozkładem t-Studenta (zarówno skośnym jak i nie) wypada dobrze, ale i tak wyniki są znacznie gorsze niż w badaniu dla rynku z Hong Kongu. Warto zauważyć również przeciwne znaki Mean Error dla modeli klasycznych w porównaniu z GARCH, może to sugerować odmienną specyfikę predykcji - jedne modele nie doszacowują, podczas gdy drugie przeszacowują; to jednak zostało zweryfikowane za pomocą metryk asymetrycznych (MME(O) i MME(U)). Obserwujemy również ogromną przewagę modeli uśredniających (Random Walk, Historical ave. i MA) w metrykach opisujących sumę odchyłeń - MAE i RMSE. Warto zauważyć również dużą wrażliwość metryk na poczynione założenie o rozkładzie w modelu GARCH jak i również na sam zastosowany model z tej rodziny, nie można jednak powiedzieć aby którykolwiek z rozkładów dominował.

Tablica 2: Błędy prognozy, dane tygodniowe

model	ME		MAE		RMSE		AMAPE		TIC	
Random walk	-0.000000*	0.00	0.000245	1.33	0.000668	1.15	0.476530	1.09	0.551043*	0.65
Historical ave.	-0.000143	1.00	0.000184*	1.00	0.000583*	1.00	0.436195**	1.00	0.850964	1.00
MA—1year	-0.000056**	0.39	0.000207***	1.12	0.000585***	1.00	0.457780***	1.05	0.747517	0.88
MA—3year	-0.000128***	0.89	0.000186**	1.01	0.000584**	1.00	0.434961*	1.00	0.831373	0.98
GARCH-N	0.001024	-7.16	0.001173	6.36	0.001968	3.37	0.754718	1.73	0.738220	0.87
GARCH-T	0.001247	-8.72	0.001343	7.29	0.001901	3.26	0.780532	1.79	0.716255	0.84
GARCH-G	0.001104	-7.72	0.001255	6.81	0.001902	3.26	0.771298	1.77	0.732034	0.86
GARCH-ST	0.001388	-9.71	0.001480	8.03	0.002065	3.54	0.790393	1.81	0.731506	0.86
EGARCH-N	0.000746	-5.22	0.000870	4.72	0.001785	3.06	0.700629	1.61	0.716094	0.84
EGARCH-T	0.000837	-5.85	0.000940	5.10	0.001371	2.35	0.751132	1.72	0.649630	0.76
EGARCH-G	0.000828	-5.79	0.000939	5.10	0.001579	2.71	0.736675	1.69	0.684270	0.80
EGARCH-ST	0.000942	-6.59	0.001042	5.65	0.001470	2.52	0.767838	1.76	0.663185	0.78
TGARCH-N	0.000850	-5.94	0.000958	5.20	0.001890	3.24	0.718342	1.65	0.720454	0.85
TGARCH-T	0.000775	-5.42	0.000885	4.80	0.001213	2.08	0.748120	1.72	0.627071**	0.74
TGARCH-G	0.000781	-5.46	0.000890	4.83	0.001404	2.41	0.734760	1.68	0.658633	0.77
TGARCH-ST	0.000839	-5.86	0.000948	5.15	0.001254	2.15	0.761043	1.74	0.634342***	0.75
CGARCH-N	0.001044	-7.30	0.001166	6.33	0.001927	3.30	0.754246	1.73	0.728049	0.86
CGARCH-T	0.001236	-8.64	0.001333	7.23	0.001868	3.20	0.779943	1.79	0.713124	0.84
CGARCH-G	0.001163	-8.13	0.001271	6.90	0.001883	3.23	0.770886	1.77	0.718181	0.84
CGARCH-ST	0.001341	-9.38	0.001436	7.79	0.001994	3.42	0.787025	1.80	0.725426	0.85

Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku danych o częstotliwości dziennej (tabela 3.) widzimy, że sytuacja jest zupełnie inna niż w wariancie tygodniowym. Rozstęp wynikowy jest dużo mniejszy, a także nie powtarza się sytuacja, w której najlepsze wyniki dla większości metryk osiągają te same modele. w przypadku metryki MAE najlepsze okazują się modele E-GARCH, niezależnie od rozkładu osiągają one najlepsze wyniki. Modele T-GARCH okazały się z kolei najlepsze pod względem kryterium RMSE. w pozostałych metrykach dobrze radzą sobie także standardowe modele GARCH, czy też model C-GARCH. Model referencyjny - średnia historyczna w przypadku danych dziennych okazał się jednym z najgorszych rozwiązań. w tym miejscu zauważyć należy jednak bardzo małe różnice, zwłaszcza pomiędzy modelami z rodziny GARCH, co może sugerować nie tylko niewrażliwość predykcji na założenie o rozkładzie ale również na typ modelu GARCH dla danych o większej częstotliwości. w przypadku badania indeksu HSI wyniki wydają się być trochę bardziej zróżnicowane. Brak jest tam również sytuacji, w której jeden z modeli osiąga 3 najlepsze wyniki, dla którejs z metryk.



Tablica 3: Błędy prognozy, dane dzienne

model	ME		MAE		RMSE		MAPE		TIC	
Random walk	-0.000001*	0.00	0.000530	1.53	0.001645	1.25	0.667039	1.14	0.613278*	0.68
Historical ave.	-0.000248	1.00	0.000347	1.00	0.001317	1.00	0.583329	1.00	0.905538	1.00
MA—1year	-0.000101	0.41	0.000415	1.20	0.001313	1.00	0.628684	1.08	0.811254	0.90
MA—3year	-0.000225	0.90	0.000356	1.03	0.001316	1.00	0.593164	1.02	0.888582	0.98
GARCH-N	-0.000079***	0.32	0.000381	1.10	0.001259	0.96	0.578332	0.99	0.700110**	0.77
GARCH-T	-0.000082	0.33	0.000379	1.09	0.001256	0.95	0.577685	0.99	0.701183***	0.77
GARCH-G	-0.000085	0.34	0.000378	1.09	0.001257	0.95	0.576741	0.99	0.702682	0.78
GARCH-ST	-0.000081	0.33	0.000379	1.09	0.001256	0.95	0.577979	0.99	0.701471	0.77
EGARCH-N	-0.000143	0.57	0.000346	1.00	0.001239	0.94	0.560509	0.96	0.732538	0.81
EGARCH-T	-0.000142	0.57	0.000345**	0.99	0.001236	0.94	0.560237	0.96	0.729620	0.81
EGARCH-G	-0.000145	0.58	0.000344*	0.99	0.001237	0.94	0.559314***	0.96	0.732583	0.81
EGARCH-ST	-0.000141	0.57	0.000346***	1.00	0.001236	0.94	0.560633	0.96	0.730869	0.81
TGARCH-N	-0.000132	0.53	0.000350	1.01	0.001236	0.94	0.559253**	0.96	0.712847	0.79
TGARCH-T	-0.000129	0.52	0.000351	1.01	0.001233*	0.94	0.559439	0.96	0.709366	0.78
TGARCH-G	-0.000134	0.54	0.000349	1.01	0.001234**	0.94	0.558409*	0.96	0.712189	0.79
TGARCH-ST	-0.000129	0.52	0.000351	1.01	0.001234***	0.94	0.559721	0.96	0.711877	0.79
CGARCH-N	-0.000079	0.32	0.000385	1.11	0.001259	0.96	0.579690	0.99	0.701555	0.77
CGARCH-T	-0.000080	0.32	0.000380	1.09	0.001255	0.95	0.579984	0.99	0.702123	0.78
CGARCH-G	-0.000084	0.34	0.000378	1.09	0.001256	0.95	0.578373	0.99	0.702627	0.78
CGARCH-ST	-0.000079**	0.32	0.000380	1.10	0.001255	0.95	0.580986	1.00	0.702320	0.78

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 4. pokazuje wyniki, zaproponowanych przez Pagana i Schwerta [1], asymetrycznych metryk MME(U) i MME(O), dla wszystkich modeli zarówno w wariancie tygodniowym jak i dziennym. Dla danych tygodniowych w przypadku metryki, która nakłada większą karę na niedoszacowania najlepsze wyniki osiągnęły modele T-GARCH (rozkłady t-Studenta i GED). Zdecydowanie najslabsze rezultaty osiągnął w tym przypadku model Średniej Historycznej, co widać po tym, że wartość wystandaryzowanej metryki jest mniejsza niż 1 w przypadku każdego innego modelu. Statystyka bardziej karząca przeszacowania osiąga najlepsze wyniki dla podstawowych modeli, tj. Błądzenia Przypadkowego, Średniej Historycznej i 3-letniej Średniej Ruchomej. Patrząc na wyniki dla tygodniowych stóp zwrotu, przypuszczenie o tendencji modeli GARCH do przeszacowań wydaje się potwierdzać.

Dla danych dziennych i statystyki MME(U) dobre wyniki osiąga przede wszystkim model C-GARCH, ale warto zauważyć, że poza Błądzeniem Przypadkowym i Średnią Historyczną pozostałe modele osiągnęły bardzo zbliżone wyniki. Tym razem, w przypadku dziennej zmienności, wyniki dla wszystkich modeli są bardziej zbliżone jeśli chodzi o statystykę karząca przeszacowania, niż miało to miejsce w przypadku danych tygodniowych. Co się jednak nie zmieniło to to, że najlepsze wyniki osiągnęły tu podstawowe modele. w kontekście znaku błędów wnioski dla danych dziennych wydają się być podobne do przypadku tygodniowego; co różni natomiast te dwa zbiory to zakres rezultatów, wyższa częstotliwość wydaje się znacznie wygładzać predykcje, do tego stopnia, że różnice zauważalne są właściwie tylko pomiędzy rodzinami modeli: uśredniające vs GARCH.

Wartości finansowych funkcji starty, oceniających czy kierunek predykcji jest zgodny z faktyczną zmianą, znajdują się tabeli 5. Jak widać w przypadku danych tygodniowych najlepsze rezultaty osiągnęły modele podstawowe (im wartość statystyki bliższa 1, tym lepiej model przewiduje kierunek zmian), za wyjątkiem Błądzenia Przypadkowego, które zgodnie z teorią musi otrzymać wartość 0 (wynika to z definicji tychże metryk). Co warto jednak wyraźnie zaznaczyć to fakt, że modele GARCH osiągnęły znacznie gorsze wyniki, niż miało to miejsce w referencyjnym artykule.

W przypadku danych dziennych, każdy z modeli wydaje się prognozować kierunek zmian z podobną precyzją. Jeśli chodzi jednak o statystykę DCPU (która bierze pod uwagę jedynie zmienność powyżej pewnego progu, w tym przypadku, tak jak zostało to wcześniej zaznaczone, chodziło o  $2.00e-4$ ), widzimy, że najlepszy rezultat osiąga historyczna średnia, a pozostałe modele nie odstają specjalnie (w szczególności modele GARCH osiągnęły niewiele gorsze wyniki).

Tablica 4: Asymetryczne błędy prognozy

model	Dane tygodniowe				Dane dzienne			
	MME(U)		MME(O)		MME(U)		MME(O)	
Random walk	0.0058	<i>0.81</i>	0.0060***	<i>1.93</i>	0.0084	<i>1.03</i>	0.0083	<i>1.47</i>
Historical ave.	0.0072	<i>1.00</i>	0.0031*	<i>1.00</i>	0.0081	<i>1.00</i>	0.0057*	<i>1.00</i>
MA—1year	0.0048	<i>0.68</i>	0.0067	<i>2.17</i>	0.0065	<i>0.81</i>	0.0105	<i>1.85</i>
MA—3year	0.0065	<i>0.91</i>	0.0039**	<i>1.27</i>	0.0077	<i>0.96</i>	0.0066**	<i>1.17</i>
GARCH-N	0.0026	<i>0.36</i>	0.0283	<i>9.11</i>	0.0062***	<i>0.76</i>	0.0093	<i>1.64</i>
GARCH-T	0.0023	<i>0.31</i>	0.0320	<i>10.29</i>	0.0062	<i>0.77</i>	0.0093	<i>1.63</i>
GARCH-G	0.0027	<i>0.37</i>	0.0299	<i>9.61</i>	0.0062	<i>0.77</i>	0.0092	<i>1.62</i>
GARCH-ST	0.0024	<i>0.33</i>	0.0336	<i>10.83</i>	0.0062	<i>0.77</i>	0.0093	<i>1.64</i>
EGARCH-N	0.0019	<i>0.26</i>	0.0241	<i>7.76</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0077	<i>1.36</i>
EGARCH-T	0.0019***	<i>0.26</i>	0.0271	<i>8.72</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0077	<i>1.36</i>
EGARCH-G	0.0019	<i>0.27</i>	0.0263	<i>8.45</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0076***	<i>1.34</i>
EGARCH-ST	0.0020	<i>0.27</i>	0.0287	<i>9.24</i>	0.0066	<i>0.81</i>	0.0077	<i>1.37</i>
TGARCH-N	0.0019	<i>0.27</i>	0.0256	<i>8.23</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0077	<i>1.36</i>
TGARCH-T	0.0019*	<i>0.26</i>	0.0266	<i>8.56</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0078	<i>1.37</i>
TGARCH-G	0.0019**	<i>0.26</i>	0.0259	<i>8.34</i>	0.0066	<i>0.82</i>	0.0076	<i>1.35</i>
TGARCH-ST	0.0019	<i>0.27</i>	0.0277	<i>8.92</i>	0.0066	<i>0.81</i>	0.0078	<i>1.38</i>
CGARCH-N	0.0022	<i>0.31</i>	0.0288	<i>9.27</i>	0.0062	<i>0.77</i>	0.0094	<i>1.66</i>
CGARCH-T	0.0022	<i>0.31</i>	0.0319	<i>10.27</i>	0.0061**	<i>0.76</i>	0.0094	<i>1.66</i>
CGARCH-G	0.0022	<i>0.31</i>	0.0307	<i>9.90</i>	0.0062	<i>0.77</i>	0.0092	<i>1.63</i>
CGARCH-ST	0.0023	<i>0.33</i>	0.0331	<i>10.67</i>	0.0061*	<i>0.76</i>	0.0095	<i>1.67</i>

Źródło: Opracowanie własne.

Tablica 5: Finansowe funkcje straty

model	Dane tygodniowe		Dane dzienne			
	DCP		DCP		DCPU	
Random walk	0.000	<i>0.00</i>	0.000	<i>0.00</i>	0.000	<i>0.00</i>
Historical ave.	0.725	<i>1.00</i>	0.697	<i>1.00</i>	0.847	<i>1.00</i>
MA—1year	0.686	<i>0.95</i>	0.665	<i>0.95</i>	0.750	<i>0.89</i>
MA—3year	0.647	<i>0.89</i>	0.665	<i>0.95</i>	0.750	<i>0.89</i>
GARCH-N	0.451	<i>0.62</i>	0.701	<i>1.01</i>	0.792	<i>0.93</i>
GARCH-T	0.471	<i>0.65</i>	0.701	<i>1.01</i>	0.792	<i>0.93</i>
GARCH-G	0.451	<i>0.62</i>	0.697	<i>1.00</i>	0.792	<i>0.93</i>
GARCH-ST	0.471	<i>0.65</i>	0.701	<i>1.01</i>	0.792	<i>0.93</i>
EGARCH-N	0.471	<i>0.65</i>	0.705	<i>1.01</i>	0.778	<i>0.92</i>
EGARCH-T	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.792	<i>0.93</i>
EGARCH-G	0.471	<i>0.65</i>	0.705	<i>1.01</i>	0.778	<i>0.92</i>
EGARCH-ST	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.778	<i>0.92</i>
TGARCH-N	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.778	<i>0.92</i>
TGARCH-T	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.778	<i>0.92</i>
TGARCH-G	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.778	<i>0.92</i>
TGARCH-ST	0.471	<i>0.65</i>	0.709	<i>1.02</i>	0.778	<i>0.92</i>
CGARCH-N	0.471	<i>0.65</i>	0.697	<i>1.00</i>	0.778	<i>0.92</i>
CGARCH-T	0.471	<i>0.65</i>	0.697	<i>1.00</i>	0.792	<i>0.93</i>
CGARCH-G	0.471	<i>0.65</i>	0.701	<i>1.01</i>	0.792	<i>0.93</i>
CGARCH-ST	0.471	<i>0.65</i>	0.689	<i>0.99</i>	0.792	<i>0.93</i>

Źródło: Opracowanie własne.

## 5 Wnioski i podsumowanie

W niniejszej pracy zbadano jak dobrze modele klasy GARCH prognozują zmienność log-stopu zwrotu Warszawskiego Indeksu Gięldowego (WIG). Wyniki te porównano z klasycznymi modelami uśredniającymi (Błądzenie Losowe, Średnia Historyczna czy Średnia Ruchoma).

Modele klasy GARCH okazały się być najskuteczniejsze w przypadku danych dziennych, brak jest jednak jednego dominującego modelu. Porównując wyniki do referencyjnego artykułu można stwierdzić, że modele klasy GARCH osiągają gorsze wyniki w przypadku symetrycznych metryk błędów prognoz. Widać to szczególnie w przypadku danych tygodniowych, że dla prawie wszystkich metryk (wyjątkiem TIC) najlepsze wyniki osiągają klasyczne podejścia uśredniające, co jest bardziej zbliżone do wyników osiągniętych przez McMillana i innych [2]. Oczywiście ze względu na zakres dat out-of-the-sample (tj. rok 2020) i panującą na świecie epidemię COVID-19, a także fakt korzystania z danych dotyczących WIG, a nie HSI, wyników między poszczególnymi badaniami nie powinno się bezrefleksyjnie porównywać.

w przypadku metryk asymetrycznych, które w różny sposób karzą przeszacowania i niedoszacowania, brak jest zdecydowanego lidera. w zależności od typu danych i metryki różne modele osiągają dobre wyniki. Co ważne w przypadku danych tygodniowych modele klasy GARCH znacznie bardziej przeszacowują niż modele klasyczne. Dla danych dziennych zdecydowanie najmniej przeszacowuje model Historycznej Średniej, natomiast pozostałe modele, zarówno klasyczne jak i z rodziny GARCH osiągają podobne wyniki, na przykład 3 najlepszy wynik osiągnął wynik model E-GARCH z rozkładem GEN.

w przypadku metryk finansowych określających skuteczność, z jaką model prognozuje kierunek zmian należy podkreślić słabą skuteczność dla modeli GARCH w przypadku danych tygodniowych i w zasadzie porównywalne wyniki dla każdego z modeli w przypadku danych dziennych. Dla zmian wartości powyżej ustanowionego progu, najlepszy okazał się być model Średniej Historycznej, ok. 8-10 punktów procentowych skuteczniejszy niż pozostałe podejścia.

w kontekście postawionej hipotezy badawczej, spełnienie warunku o skośności rozkładu stóp zwrotu odbiegającej od zera, jak się okazało, nie implikuje wyższości założenia o skośnym rozkładzie w modelu GARCH. Mało tego różnice w jakości prognoz okazały się zauważalne jedynie w przypadku danych o tygodniowej częstotliwości, obserwowano wówczas również wysokie metryki sumujące błędy co może sugerować "niedotrenowanie" modeli GARCH w takich warunkach. Zastosowanie danych dziennych znacznie zmniejszyło różnice między rezultatami modeli uśredniających i modeli GARCH, można powiedzieć zatem, że te drugie "dotreowały się" do tego stopnia, że prognozy wykazywały niską wrażliwość zarówno na założenie o rozkładzie jak i sam typ modelu GARCH. Uzyskane wyniki nie dają zatem podstaw do przyjęcia hipotezy badawczej, ponadto to który model jest najlepszy okazało się zależne od zastosowanej metryki.

## Literatura

- [1] G. W. Schwert A. R. Pagan. Alternative models for conditional stock volatilities. *Journal of Econometrics*, 45:267–290, 1990.
- [2] O. Ap Gwilym D. McMillan, A. Speight. Forecasting uk stock market volatility. *Applied Financial Economics*, 10:435–448, 2000.
- [3] Clive W. J. Granger Ser-Huang Poon. Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of Economic Literature*, 41:478—539, 2003.
- [4] Bruce Morley Wei Liu. Volatility forecasting in the hang seng index using the garch approach. *Asia-Pacific Finan Markets*, 16:51—63, 2009.