Modelowanie zmienności Warszawskiego Indeksu Giełdowego przy wykorzystaniu metod GARCH

Na podstawie *Volatility Forecasting in the Hang Seng Index using the GARCH Approach*

Bartłomiej Kuźma, Maciej Odziemczyk

WNE UW

Agenda

1. Wstęp, cele, hipotezy
2. Metodologia
3. Dane i ich analiza
4. Wyniki
5. Wnioski i podsumowanie

Wstęp, cele, hipotezy

Celem pracy było sprawdzenie zdolności predykcyjnej modeli z rodziny GARCH w porównaniu z modelami uśredniającymi (zmienność)
hipoteza badawcza:

$$metric_{GARCH-N} > metric_{GARCH-T} \text{ jeżeli } Skew \approx 0,$$

$$metric_{GARCH-N} > metric_{GARCH-T} > metric_{GARCH-ST} \text{ jeżeli } Skew \not\approx 0$$

gdzie:
metric - metryka błędu predykcji (im niższa tym lepszy model),
$GARCH - N$ model GARCH z założeniem o normalnym rozkładzie błędu losowego,
$GARCH - T$ model GARCH z założeniem o rozkładzie t-studenta dla błędu losowego,
$GARCH - ST$ model GARCH z założeniem o skośnym rozkładzie t-studenta dla błędu losowego,
Skew to skośność rozkładu stóp zwrotu.

Zwykły model GARCH(1,1):

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$
$$h_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2$$

Exponential-GARCH(1,1) (E-GARCH):

$$\ln h_t^2 = \omega + \beta \ln h_{t-j}^2 + \alpha\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}}\right| + \gamma\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}}$$

Threshold-GARCH(1,1) (T-GARCH):

$$h_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$
$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Component-GARCH(1,1) (C-GARCH):
W odróżnieniu od powyższych modeli GARCH, model C-GARCH rozróżnia długo- i krótko-okresowość zjawiska mean-reversion (m_t to próg)

$$h_t^2 - m_t = \bar{\omega} + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - \bar{\omega}) + \beta(h_{t-1}^2 - \bar{\omega})$$
$$m_t = \omega + \rho(m_{t-1} - \omega) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}^2)$$

Błądzenie Losowe:

$$h_t^2 = h_{t-1}^2$$

Średnia Historyczna:

$$h_t^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t-1} h_i^2$$

Średnia Ruchoma:

$$h_t^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=t-\tau}^{t-1} h_i^2$$

Średni błąd (Mean Error, ME):

$$ME = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)$$

Średni błąd bezwzględny (Mean Absolute Error, MAE):

$$MAE = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} |h_t^2 - s_t^2|$$

Błąd średnio kwadratowy (Root Mean Square Error, RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)^2}$$

Dopasowany średni procentowy błąd bezwzględny (Adjusted Mean Absolute Percentage Error, AMAPE):

$$AMAPE = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} \left| \frac{(h_t^2 - s_t^2)}{(h_t^2 + s_t^2)} \right|$$

Współczynnik nierówności Theila (Theil Income Coefficient, TIC):

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} (h_t^2 - s_t^2)^2}}{\sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} h_t^4} + \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} s_t^4}}$$

Średni błąd asymetryczny (niedoszacowania) (MME(U)):

$$MME(U) = \frac{1}{\tau}\left[\sum_{i=1}^{O}|(h_t^2 - s_t^2)| + \sum_{i=1}^{U}\sqrt{|h_t^2 + s_t^2|}\right]$$

Średni błąd asymetryczny (przeszacowania) (MME(O)):

$$MME(O) = \frac{1}{\tau}\left[\sum_{i=1}^{O}\sqrt{|(h_t^2 - s_t^2)|} + \sum_{i=1}^{U}|h_t^2 + s_t^2|\right]$$

DCP:

$$\%\text{ correct direction change predictions (DCP)} = \frac{1}{\tau}\sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_{t+1}$$

$$z_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad (s_{t+1}^2 - s_t^2)(h_{t+1}^2 - s_t^2) > 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

DCPU:

$$DCPU = \frac{1}{\tau} \sum_{t=T+1}^{T+\tau} z_{t+1},$$

$$z_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad (s_{t+1}^2 - s_t^2)(h_{t+1}^2 - s_t^2) > 0, \quad s_t^2 > T \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

- metryki liczone były dla okresu OOS,
- prognozy robione były na jeden okres do przodu (szacowanie modeli co krok).

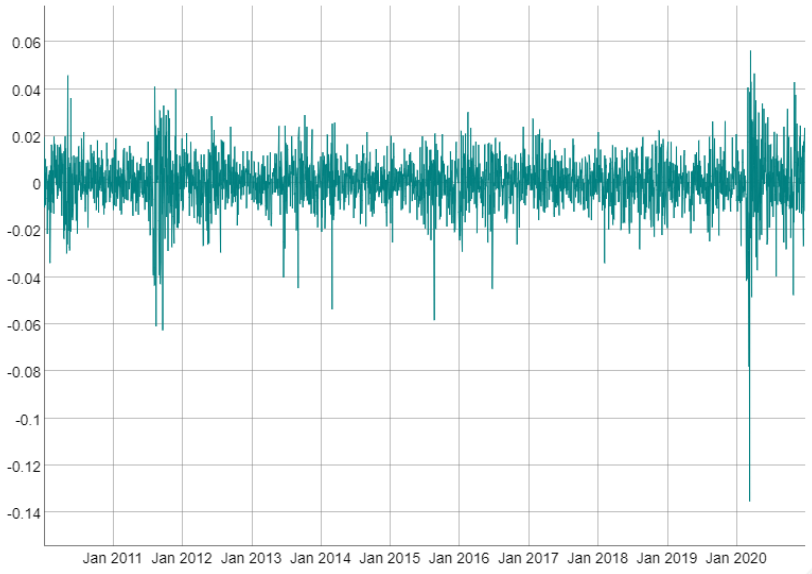
Dane i ich analiza I

Logarytmincze stopy zwrotu z indeksu WIG:

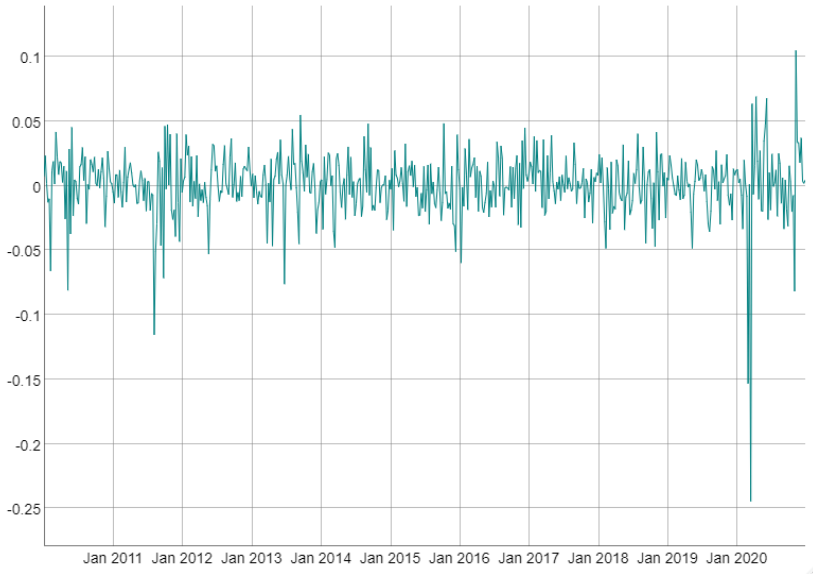
- 2010-2019 (in sample), 2020 (out of sample),
- częstotliwość dzienna i tygodniowa,
- źródło: `https://stooq.pl`.

Rysunek: log-stopy zwrotu WIG

(a) dzienne

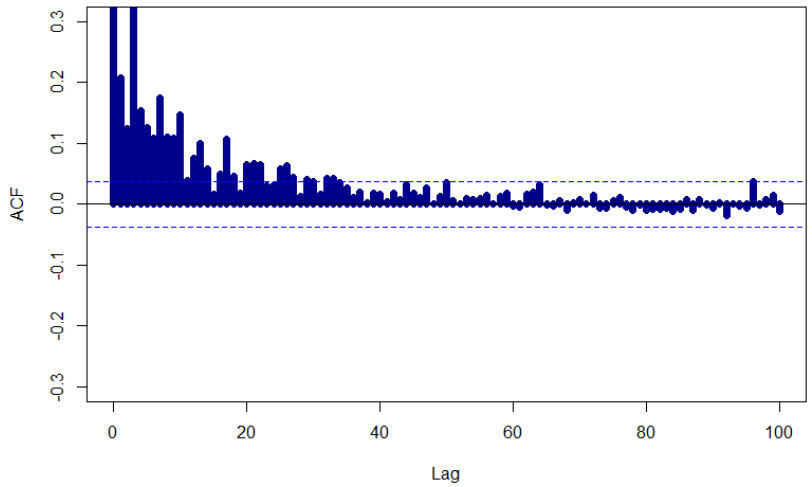


(b) tygodniowe

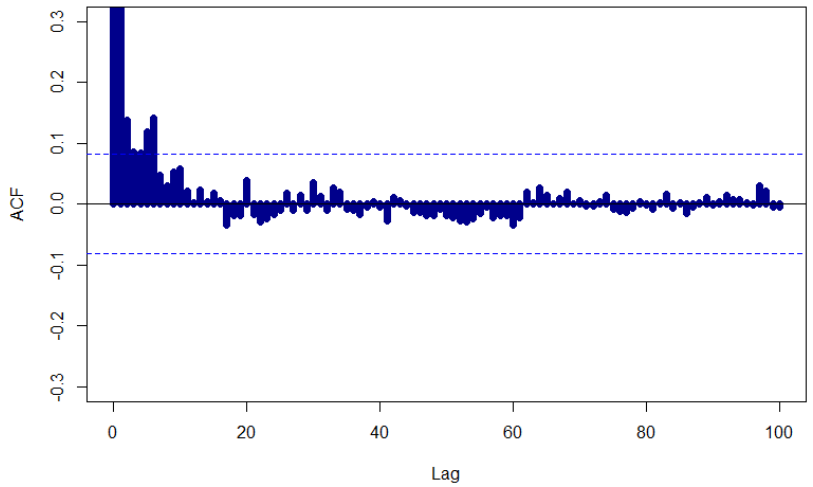


Rysunek: Wykresy ACF dla proxy zmienności zrealizowanej log-stóp zwrotu z WIG

(a) dzienne (kwadrat log-stóp zwrotu)



(b) tygodniowe (wariancja danych o wyższej częstotliwości)



Źródło: Opracowanie własne.

Dane i ich analiza III

Tablica: Statystyki rozkładów log-stóp zwrotu

	dzienne	tygodniowe
N	2748	574
Średnia	0.000129	0.000595
Mediana	0.000396	0.002114
Odchylenie standardowe	0.010937	0.025013
Skośność	-1.1712	-2.2507
Kurtoza	12.4303	18.9578

Źródło: Opracowanie własne.

Testy ARCH i Jarque-Bera odrzucają H0 dla obu wariantów częstotliwości (homoskedastyczność i normalność rozkładu).

Wyniki I

Tablica 2: Błędy prognozy, dane tygodniowe

model	ME		MAE		RMSE		AMAPE		TIC	
Random walk	-0.000000*	*0.00*	0.000245	*1.33*	0.000668	*1.15*	0.476530	*1.09*	0.551043*	*0.65*
Historical ave.	-0.000143	*1.00*	0.000184*	*1.00*	0.000583*	*1.00*	0.436195**	*1.00*	0.850964	*1.00*
MA—1year	-0.000056**	*0.39*	0.000207***	*1.12*	0.000585***	*1.00*	0.457780***	*1.05*	0.747517	*0.88*
MA—3year	-0.000128***	*0.89*	0.000186**	*1.01*	0.000584**	*1.00*	0.434961*	*1.00*	0.831373	*0.98*
GARCH-N	0.001024	*-7.16*	0.001173	*6.36*	0.001968	*3.37*	0.754718	*1.73*	0.738220	*0.87*
GARCH-T	0.001247	*-8.72*	0.001343	*7.29*	0.001901	*3.26*	0.780532	*1.79*	0.716255	*0.84*
GARCH-G	0.001104	*-7.72*	0.001255	*6.81*	0.001902	*3.26*	0.771298	*1.77*	0.732034	*0.86*
GARCH-ST	0.001388	*-9.71*	0.001480	*8.03*	0.002065	*3.54*	0.790393	*1.81*	0.731506	*0.86*
EGARCH-N	0.000746	*-5.22*	0.000870	*4.72*	0.001785	*3.06*	0.700629	*1.61*	0.716094	*0.84*
EGARCH-T	0.000837	*-5.85*	0.000940	*5.10*	0.001371	*2.35*	0.751132	*1.72*	0.649630	*0.76*
EGARCH-G	0.000828	*-5.79*	0.000939	*5.10*	0.001579	*2.71*	0.736675	*1.69*	0.684270	*0.80*
EGARCH-ST	0.000942	*-6.59*	0.001042	*5.65*	0.001470	*2.52*	0.767838	*1.76*	0.663185	*0.78*
TGARCH-N	0.000850	*-5.94*	0.000958	*5.20*	0.001890	*3.24*	0.718342	*1.65*	0.720454	*0.85*
TGARCH-T	0.000775	*-5.42*	0.000885	*4.80*	0.001213	*2.08*	0.748120	*1.72*	0.627071**	*0.74*
TGARCH-G	0.000781	*-5.46*	0.000890	*4.83*	0.001404	*2.41*	0.734760	*1.68*	0.658633	*0.77*
TGARCH-ST	0.000839	*-5.86*	0.000948	*5.15*	0.001254	*2.15*	0.761043	*1.74*	0.634342***	*0.75*
CGARCH-N	0.001044	*-7.30*	0.001166	*6.33*	0.001927	*3.30*	0.754246	*1.73*	0.728049	*0.86*
CGARCH-T	0.001236	*-8.64*	0.001333	*7.23*	0.001868	*3.20*	0.779943	*1.79*	0.713124	*0.84*
CGARCH-G	0.001163	*-8.13*	0.001271	*6.90*	0.001883	*3.23*	0.770886	*1.77*	0.718181	*0.84*
CGARCH-ST	0.001341	*-9.38*	0.001436	*7.79*	0.001994	*3.42*	0.787025	*1.80*	0.725426	*0.85*

Źródło: Opracowanie własne.

Wyniki II

Tablica 3: Błędy prognozy, dane dzienne

model	ME		MAE		RMSE		AMAPE		TIC	
Random walk	-0.000001*	*0.00*	0.000530	*1.53*	0.001645	*1.25*	0.667039	*1.14*	0.613278*	*0.68*
Historical ave.	-0.000248	*1.00*	0.000347	*1.00*	0.001317	*1.00*	0.583329	*1.00*	0.905538	*1.00*
MA—1year	-0.000101	*0.41*	0.000415	*1.20*	0.001313	*1.00*	0.628684	*1.08*	0.811254	*0.90*
MA—3year	-0.000225	*0.90*	0.000356	*1.03*	0.001316	*1.00*	0.593164	*1.02*	0.888582	*0.98*
GARCH-N	-0.000079***	*0.32*	0.000381	*1.10*	0.001259	*0.96*	0.578332	*0.99*	0.700110**	*0.77*
GARCH-T	-0.000082	*0.33*	0.000379	*1.09*	0.001256	*0.95*	0.577685	*0.99*	0.701183***	*0.77*
GARCH-G	-0.000085	*0.34*	0.000378	*1.09*	0.001257	*0.95*	0.576741	*0.99*	0.702682	*0.78*
GARCH-ST	-0.000081	*0.33*	0.000379	*1.09*	0.001256	*0.95*	0.577979	*0.99*	0.701471	*0.77*
EGARCH-N	-0.000143	*0.57*	0.000346	*1.00*	0.001239	*0.94*	0.560509	*0.96*	0.732538	*0.81*
EGARCH-T	-0.000142	*0.57*	0.000345**	*0.99*	0.001236	*0.94*	0.560237	*0.96*	0.729620	*0.81*
EGARCH-G	-0.000145	*0.58*	0.000344*	*0.99*	0.001237	*0.94*	0.559314***	*0.96*	0.732583	*0.81*
EGARCH-ST	-0.000141	*0.57*	0.000346***	*1.00*	0.001236	*0.94*	0.560633	*0.96*	0.730869	*0.81*
TGARCH-N	-0.000132	*0.53*	0.000350	*1.01*	0.001236	*0.94*	0.559253**	*0.96*	0.712847	*0.79*
TGARCH-T	-0.000129	*0.52*	0.000351	*1.01*	0.001233*	*0.94*	0.559439	*0.96*	0.709366	*0.78*
TGARCH-G	-0.000134	*0.54*	0.000349	*1.01*	0.001234**	*0.94*	0.558409*	*0.96*	0.712189	*0.79*
TGARCH-ST	-0.000129	*0.52*	0.000351	*1.01*	0.001234***	*0.94*	0.559721	*0.96*	0.711877	*0.79*
CGARCH-N	-0.000079	*0.32*	0.000385	*1.11*	0.001259	*0.96*	0.579690	*0.99*	0.701555	*0.77*
CGARCH-T	-0.000080	*0.32*	0.000380	*1.09*	0.001255	*0.95*	0.579984	*0.99*	0.702123	*0.78*
CGARCH-G	-0.000084	*0.34*	0.000378	*1.09*	0.001256	*0.95*	0.578373	*0.99*	0.702627	*0.78*
CGARCH-ST	-0.000079**	*0.32*	0.000380	*1.10*	0.001255	*0.95*	0.580986	*1.00*	0.702320	*0.78*

Źródło: Opracowanie własne.

Wyniki III

Tablica 4: Asymetryczne błędy prognozy

	Dane tygodniowe				Dane dzienne			
model	MME(U)		MME(O)		MME(U)		MME(O)	
Random walk	0.0058	*0.81*	0.0060***	*1.93*	0.0084	*1.03*	0.0083	*1.47*
Historical ave.	0.0072	*1.00*	0.0031*	*1.00*	0.0081	*1.00*	0.0057*	*1.00*
MA—1year	0.0048	*0.68*	0.0067	*2.17*	0.0065	*0.81*	0.0105	*1.85*
MA—3year	0.0065	*0.91*	0.0039**	*1.27*	0.0077	*0.96*	0.0066**	*1.17*
GARCH-N	0.0026	*0.36*	0.0283	*9.11*	0.0062***	*0.76*	0.0093	*1.64*
GARCH-T	0.0023	*0.31*	0.0320	*10.29*	0.0062	*0.77*	0.0093	*1.63*
GARCH-G	0.0027	*0.37*	0.0299	*9.61*	0.0062	*0.77*	0.0092	*1.62*
GARCH-ST	0.0024	*0.33*	0.0336	*10.83*	0.0062	*0.77*	0.0093	*1.64*
EGARCH-N	0.0019	*0.26*	0.0241	*7.76*	0.0066	*0.82*	0.0077	*1.36*
EGARCH-T	0.0019***	*0.26*	0.0271	*8.72*	0.0066	*0.82*	0.0077	*1.36*
EGARCH-G	0.0019	*0.27*	0.0263	*8.45*	0.0066	*0.82*	0.0076***	*1.34*
EGARCH-ST	0.0020	*0.27*	0.0287	*9.24*	0.0066	*0.81*	0.0077	*1.37*
TGARCH-N	0.0019	*0.27*	0.0256	*8.23*	0.0066	*0.82*	0.0077	*1.36*
TGARCH-T	0.0019*	*0.26*	0.0266	*8.56*	0.0066	*0.82*	0.0078	*1.37*
TGARCH-G	0.0019**	*0.26*	0.0259	*8.34*	0.0066	*0.82*	0.0076	*1.35*
TGARCH-ST	0.0019	*0.27*	0.0277	*8.92*	0.0066	*0.81*	0.0078	*1.38*
CGARCH-N	0.0022	*0.31*	0.0288	*9.27*	0.0062	*0.77*	0.0094	*1.66*
CGARCH-T	0.0022	*0.31*	0.0319	*10.27*	0.0061**	*0.76*	0.0094	*1.66*
CGARCH-G	0.0022	*0.31*	0.0307	*9.90*	0.0062	*0.77*	0.0092	*1.63*
CGARCH-ST	0.0023	*0.33*	0.0331	*10.67*	0.0061*	*0.76*	0.0095	*1.67*

Źródło: Opracowanie własne.

Wyniki IV

Tablica 5: Finansowe funkcje straty

	Dane tygodniowe		Dane dzienne			
model	DCP		DCP		DCPU	
Random walk	0.000	*0.00*	0.000	*0.00*	0.000	*0.00*
Historical ave.	0.725	*1.00*	0.697	*1.00*	0.847	*1.00*
MA—1year	0.686	*0.95*	0.665	*0.95*	0.750	*0.89*
MA—3year	0.647	*0.89*	0.665	*0.95*	0.750	*0.89*
GARCH-N	0.451	*0.62*	0.701	*1.01*	0.792	*0.93*
GARCH-T	0.471	*0.65*	0.701	*1.01*	0.792	*0.93*
GARCH-G	0.451	*0.62*	0.697	*1.00*	0.792	*0.93*
GARCH-ST	0.471	*0.65*	0.701	*1.01*	0.792	*0.93*
EGARCH-N	0.471	*0.65*	0.705	*1.01*	0.778	*0.92*
EGARCH-T	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.792	*0.93*
EGARCH-G	0.471	*0.65*	0.705	*1.01*	0.778	*0.92*
EGARCH-ST	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.778	*0.92*
TGARCH-N	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.778	*0.92*
TGARCH-T	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.778	*0.92*
TGARCH-G	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.778	*0.92*
TGARCH-ST	0.471	*0.65*	0.709	*1.02*	0.778	*0.92*
CGARCH-N	0.471	*0.65*	0.697	*1.00*	0.778	*0.92*
CGARCH-T	0.471	*0.65*	0.697	*1.00*	0.792	*0.93*
CGARCH-G	0.471	*0.65*	0.701	*1.01*	0.792	*0.93*
CGARCH-ST	0.471	*0.65*	0.689	*0.99*	0.792	*0.93*

Źródło: Opracowanie własne.

Wnioski i podsumowanie

- Modele z rodziny GARCH wydają się być skuteczniejsze dla danych o wysokiej częstotliwości,
- przy niższej częstotliwości modele z rodziny GARCH wydają się być "niedotrenowane",
- większa częstotliwość wygładza wyniki do tego stopnia, że różnice między zastosowanymi rozkładami, a nawet typami modeli GARCH nie są widoczne,
- brak najlepszego modelu,
- brak podstaw do przyjęcia hipotezy badawczej.

Dziękujemy za uwagę.