RAP – 5

Prawdopodobieństwo warunkowe

1. Dane są zdarzenia $A, B \subseteq \Omega$ i $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Pokaż, że jeżeli $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A)$, to $\mathbb{P}(A) = 0$.

2. Pokaż bez dokładnych obliczeń, że prawdopodobieństwo, że brydżysta ma asa pik, jeśli wiadomo, że ma co najmniej 1 asa, jest większe od prawdopodobieństwa (bezwarunkowego), że ma asa pik.

3. Losujemy 3 razy bez zwracania kulkę z kapelusza z 10 kulkami białymi i 6 czarnymi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane kule będą czarne? Rozwiązać to zadanie
a) klasycznie, bez użycia prawdopodobieństw warunkowych; b) korzystając z wzoru łańcuchowego.

4. Gracz dostał kolejno 13 kart (z 52), obejrzał 8 pierwszych i stwierdził, że nie ma wśród nich asa. Jaka jest szansa, że dostał asa?

5. Załóżmy, że prawdopodobieństwo kradzieży w supermarkecie wynosi $\frac{n}{n+k}$, gdzie k jest liczbą ochroniarzy, a n – liczbą złodziei ($n+k \geqslant 1$). Jeśli pewnego dnia zdarza sie kradzież (zawsze można ją wykryć na podstawie manka na końcu dnia), to następnego dnia liczba ochroniarzy jest zwiększana o 1. Przyjmijmy, że po udanej kradzieży liczba złodziei też rośnie o 1. W pn jest 1 pilnujący i 1 złodziej. Jaka jest szansa, że supermarket będzie okradany (skutecznie) aż do niedzieli?

6. Dla sytuacji z poprzedniego zadania porównaj $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(A|B)$ dla zdarzeń A – ,,we wtorek kradzież udała się" i B – ,,we poniedziałek kradzież udała się". Rozważyć warianty:
a) Zaczynamy pn z 1 ochroniarzem i 1 złodziejem.
b) Zaczynamy pn z 1 ochroniarzem i 2 złodziejami.

7. Rozważyć paradoks więźnia przy założeniu, że udzielając informacji więźniowi X, preferencje wyboru przez strażnika więźniów Y i Z wynoszą p i $1 - p$.

8. Konkurs składa się z etapów. W każdym etapie szansa wygranej wynosi p (i kończymy grać), szansa odpadnięcia z konkursu bez nagrody wynosi q ($p + q < 1$), a jeśli nie wygramy i nie odpadniemy, to gramy dalej, tzn. przechodzimy do następnego etapu. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

9. W pierwszym kapeluszu jest 5 kul białych i 4 czarne, w drugim 2 białe i 8 czarnych. Dziecko losuje 2 kule (kolejność nieistotna) z pierwszego kapelusza i wrzuca je do drugiego, a następnie losuje kulkę z drugiego kapelusza.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w drugim losowaniu wyciągnie czarną?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w obie przełożone w pierwszym etapie kule były białe, jeżeli wyciągnięta w drugim losowaniu kula jest biała?

10. W każdej z trzech urn jest 5 kul białych i 4 czarne. Losujemy kulę z pierwszej urny, wrzucamy ją do drugiej, potem losowo wybraną z drugiej urny kulę przekładamy do trzeciej, na koniec losujemy dwie kule z trzeciej urny. Okazało się, że obie są białe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie przełożone w pierwszym etapie i drugim etapie kule były czarne?

11. Spośród mężczyzn 5%, a spośród kobiet 0.25% jest daltonistami. Wybrana losowo osoba okazała się daltonistą (zakładamy, że szanse trafienia na mężczyznę lub na kobietę są takie same). Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

12. Test na pewną chorobę, na którą cierpi średnio 1 osoba na 1000, daje zawsze odpowiedź dodatnią u chorego, a tzw. fałszywą odpowiedź dodatnią u 5% zdrowych. Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora? Zakładamy, że osoba była wybrana do badań losowo.

13. *Czułością* testu nazywamy odsetek chorych, u których test daje wynik dodatni. *Swoistość* to odsetek zdrowych, u których test daje wynik ujemny. Np. w zadaniu poprzednim test ma czułość 100%, a swoistość 95%. Załóżmy, że czułość testu na chorobę wieńcową wynosi 65%, a swoistość – 85%. Przyjmując, że 10% ludzi ma chorobę wieńcową, chcemy obliczyć prawdopodobieństwo, że test doprowadzi do złej diagnozy. Czy poniższe rozwiązanie jest poprawne?

,,Test doprowadzi do złej diagnozy" oznacza, że wynik jest dodatni, jeśli pacjent jest zdrowy lub wynik jest ujemny, jeśli pacjent jest chory. Dodajemy oba przypadki i otrzymujemy wynik $0.15 + 0.35 = 0.5$.

15. Gracz A otrzymuje informację wyrażającą się poprzez "tak" lub "nie" i oznajmia ją graczowi B. Następnie B przekazuje informację C, a C przekazuje ją D, który ujawnia otrzymaną informację. Każdy z graczy mówi prawdę w jednym przypadku na trzy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że A powiedział prawdę, jeśli wiadomo, że D podał prawdziwą informację ?

16. Ciemne włosy u człowieka, to cecha dominująca, a włosy rude, to cecha recesywne. Załóżmy, że pewien rudy mężczyzna ma ciemnowłosą żonę, której ojciec był rudy. Jaka jest szansa, że dziecko tej pary będzie ciemnowłose?