# . Prawdopodobieństwo warunkowe

**Zadanie 1** † Losujemy kulę z urny, w której jest 8 kul białych oznaczonych cyfrą 1, 7 kul białych oznaczonych cyfrą 2, 3 kule czarne oznaczone cyfrą 1 i 2 kule czarne oznaczone cyfrą 2. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej, jeśli wiadomo, że wylosowano kulę z cyfrą 2?

**Zadanie 2** † W pewnym przedsiębiorstwie 96% produkowanych wyrobów jest dobrych. Spośród nich 75 na 100 jest I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana sztuka jest I gatunku.

**Zadanie 3** † W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej urnie są 4 kule czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeżeli wypadną mniej niż 3 oczka, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

**Zadanie 4** † W prawej kieszeni znajdują się 3 monety po 2 zł i 4 monety po 1 zł, a w lewej kieszeni 6 monet po 2 zł i 3 monety po 1 zł. Z prawej kieszeni do lewej przełożono losowo dwie monety. Oblicz prawdopodobieństwo, że z lewej kieszeni wylosujemy teraz monetę dwuzłotową.

**Zadanie 5** † Grasz w turnieju szachowym, w którym z 50% graczy masz szansę wygrania 30%, z 25% graczy szansę 40% i z 25% graczy szansę 50%. Pierwszą partię rozgrywasz z losowym przeciwnikiem.
(i) Jakie są twoje szanse wygrania?
(ii) Przypuśćmy, że udało ci się wygrać pierwszą partię. Jakie jest prawdopodobieństwo, że grałeś z graczem 3-go rodzaju?

**Zadanie 6** W hurtowni znajdują się wyroby z trzech fabryk $F_1$, $F_2$ i $F_3$. Zapotrzebowanie pokrywane jest przez te fabryki odpowiednio w 25%, 35% i 40%. Produkcje tych fabryk zawierają odpowiednio 2%, 4% i 5% braków. Z jakiej fabryki najprawdopodobniej pochodzi wylosowany produkt, jeśli okazał sie dobry?

**Zadanie 7** † Jest $n$ monet, z których $k$ jest asymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest asymetryczna?

**Zadanie 8** Wybrano losowo jedną z trzech kartek, pomalowanych z obu stron: czarno-czarnej, czarno-białej i biało-białej, a następnie wybrano losowo jedną z jej stron. Jeśli ta strona jest czarna, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że druga też jest czarna?

**Zadanie 9** Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek.

**Zadanie 10** W pierwszej urnie jest 5 kul białych i 7 kul zielonych, a w drugiej 6 kul białych i 3 zielone. Z losowo wybranej urny wyciągamy bez zwrotu dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że

a) obie wylosowane kule są białe;

b) pochodzą z pierwszej urny, jeśli obie są zielone;

c) pochodzą z drugiej urny, jeśli przynajmniej jedna jest biała.

**Zadanie 11** † Z talii 52 kart losujemy dwie karty bez zwrotu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z pozostałych 50 kart wylosujemy asa?

**Zadanie 12** † Zestaw tematów egzaminacyjnych zawiera 10 pytań łatwych, 6 trudnych i 4 średnio trudne. Trzech studentów losuje tematy po kolei bez zwrotu. Który z nich ma największe szanse na wylosowanie tematu łatwego?

**Zadanie 13** Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie wypadł orzeł 6 razy z rzędu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to moneta z dwoma orłami?

**Zadanie 14** Prawdopodobieństwo wykonania detalu pierwszego gatunku na pierwszej obrabiarce jest równe $0,7$. Przy wykonaniu tego samego detalu na drugiej obrabiarce prawdopodobieństwo to jest równe $0,8$. Na pierwszej obrabiarce wykonano dwa detale, a na drugiej trzy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie detale będą pierwszego gatunku?

**Zadanie 15** Prawdopodobieństwo, że dany strzelec trafi w pierwszą tarczę jest równe $\frac{2}{3}$. Jeśli trafi on w tarczę przy pierwszym strzale, to uzyskuje prawo oddania drugiego strzału - tym razem do drugiej tarczy. Prawdopodobieństwo, że trafi on w obie tarcze przy dwóch strzałach, jest równe $0,5$. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia w drugą tarczę, jeśli strzelec otrzymał prawo do oddania drugiego strzału.

**Zadanie 16** Obie strony jednego z trzech żetonów są białe, drugiego - czarne, a trzeci żeton ma jedną białą i jedną czarną stronę. Wybieramy w sposób losowy jeden żeton i rzucamy na stół. Jeśli wierzchnia strona żetonu po upadnięciu na stół okaże się biała, to jakie jest prawdopodobieństwo, że jego spodnia (niewidoczna) strona jest także biała?

**Zadanie 17** W urnie jest 7 kul czarnych i 5 białych. Sześć z nich przekładamy do drugiej urny, początkowo pustej, i z niej losujemy 2 kule bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga z nich będzie biała.

**Zadanie 18** Rzucamy monetą tak długo, aż dwa razy z rzędu upadnie tą samą stroną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zdarzenie skończy się najwyżej po $n$ rzutach?

**Zadanie 19** Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą pozytywną odpowiedź w 5% przypadków (u osoby chorej daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora?

**Zadanie 20** Rzucamy raz sześcienną kostką do gry, a następnie rzucamy tyloma monetami, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dokładnie na jednej z wyrzuconych monet jest reszka. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

**Zadanie 21** Mamy dwie talie kart po 24 karty. Z pierwszej talii losujemy jedną kartę i nie oglądając jej wkładamy do drugiej talii. Następnie z drugiej talii losujemy jedną kartę.
(i) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania króla, jeżeli wiemy, że z pierwszej talii przełożono do drugiej trefla?
(ii) Obliczyć prawdopodobieństwo, że wylosowana karta jest kierem.
(iii) Wylosowana karta okazała się kierem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z pierwszej talii także został wylosowany kier?

**Zadanie 22** Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej dwie „dwójki”, pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „piątkę”.

**Zadanie 23** W partii $2n$ sztuk zegarków $k$ chodzi do tyłu. Jak zapakować je do dwóch paczek po $n$ sztuk w taki sposób, by szansa wykrycia przez kontrolera wadliwych egzemplarzy była jak najmniejsza? Kontroler wybiera jedną sztukę z losowo wyznaczonej paczki.

**Zadanie 24** Na klasówce z historii Jan i Paweł siedzieli obok siebie. Między innymi mieli napisać dwie daty. Jan je pamiętał, ale nie wiedział jak je przyporządkować. Zapytał Pawła, wiedząc, że w 3 przypadkach na 4 Paweł zna prawidłową odpowiedź, chociaż Paweł uważał, że zawsze wie dobrze. Jednak Paweł w 1 przypadku na 4 oszukuje Jana. Co jest lepsze dla Jana: posłuchać Pawła czy odpowiedzieć losowo?

**Zadanie 25** Z talii 52 kart losujemy jednocześnie dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna z nich będzie starsza od 10, jeśli wiadomo, że żadna z nich nie jest karem.

**Zadanie 26** Rzucamy nieskończenie wiele razy dwoma sześciennymi kośćmi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek równa 7 pojawi się zanim pojawi się suma oczek równa 5?

**Zadanie 27** Z talii 8 kart - czterech królów i czterech asów - wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrano dwa asy, jeśli wiemy, że:
(i) wybrano co najmniej jednego asa;
(ii) wśród wybranych kart jest czerwony as;
(iii) wśród wybranych kart jest as trefl.

**Zadanie 28** Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że ma przynajmniej jednego asa?

**Zadanie 29** Rzucamy sześcienną kostką do gry tak długo, aż otrzymamy co najmniej dwie nieparzyste liczby oczek, albo 10 parzystych liczb oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że w przeprowadzonym doświadczeniu otrzymaliśmy liczbę oczek równą 5, przy założeniu, że otrzymaliśmy tylko jedną nieparzystą liczbę oczek.

**Zadanie 30** W partii brydża przed licytacją gracz $E$ widzi, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że jego partner ma przynajmniej dwa asy?

**Zadanie 31** Każda z urn oznaczonych liczbami 1, 2, 3 zawiera po 3 kule czarne i 4 białe, a każda urna oznaczona liczbami 4, 5, 6 zawiera po 3 czarne i 2 białe kule. Rzucamy sześcienną kostką do gry, a następnie z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek losujemy bez zwracania 2 kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul czarnych, czy dwóch kul białych?

**Zadanie 32** Rzucono dwa razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 8, jeżeli:
(i) w którymś rzucie wypadnie 5 oczek?
(ii) w pierwszym rzucie wypadnie 5 oczek?

**Zadanie 33** Rzucamy trzema kostkami. Wiadomo, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
(i) na żadnej kostce nie wypadła szóstka?
(ii) wypadła dokładnie jedna szóstka?

**Zadanie 34** W pierwszej urnie są kule czarne i białe, w drugiej 10 kul niebieskich i 15 kul zielonych, a w trzeciej – 14 kul niebieskich i 7 zielonych. Najpierw losujemy kulę z pierwszej urny, a następnie losujemy kulę z drugiej albo z trzeciej urny w zależności od tego, czy z pierwszej urny wylosowaliśmy odpowiednio kulę białą, czy czarną. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli z pierwszej urny, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania według opisanego schematu kuli niebieskiej jest takie samo jak zielonej.

**Zadanie 35** W loterii szkolnej losujemy jeden spośród 100 losów, przy czym w przypadku wyciągnięcia losu przegrywającego możemy wylosować jeszcze jeden los. Ile losów w tej loterii jest wygrywających, jeżeli prawdopodobieństwo wygranej jest równe $\frac{19}{55}$?

**Zadanie 36** Każda praca pisemna z egzaminu wstępnego jest sprawdzana dwukrotnie. Prawdopodobieństwo niezauważenia błędu przez pierwszą osobę sprawdzającą wynosi $0,08$, a dla drugiej osoby prawdopodobieństwo to wynosi $0,05$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd popełniony w pracy nie zostanie zauważony.

**Zadanie 37** Z trzech urn, w których jest po 2 kule białe i 3 czarne, wyjmujemy po jednej kuli i wkładamy do czwartej urny, w której była jedna kula biała. Losujemy teraz jedną kulę z czwartej urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że z czwartej urny wyjmiemy białą kulę.

**Zadanie 38** Firma komputerowa sprzedaje monitory trzech producentów, powiedzmy producentów A, B, i C, w proporcji $2 : 3 : 5$, odpowiednio. Prawdopodobieństwo awarii w okresie gwarancji monitora producenta A wynosi $0,05$, monitora producenta B wynosi $0,03$, a prawdopodobieństwo awarii w okresie gwarancji monitora producenta C wynosi $0,01$. Zakupiony monitor uległ awarii w okresie gwarancji. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to monitor producenta A.

**Zadanie 39** Mamy do dyspozycji 3 telefony. Wiemy, że jeden z nich zawsze działa, drugi nigdy nie działa (ale zjada monety), a trzeci działa z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ (w pozostałych przypadkach zjada monety). Próbujemy zadzwonić z jednego z automatów i zjada on monetę. Zmieniamy automat i udaje nam się zadzwonić. Próbujemy raz jeszcze (nie zmieniając telefonu) i znów się udaje. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że telefon z którego zadzwoniliśmy 2 razy jest tym, który zawsze działa? Czy odpowiedź zmieniłaby się, gdyby nie było w zadaniu pierwszej (nieudanej) próby?

**Zadanie 40** Zestaw tematów egzaminacyjnych składa się z 15 tematów z algebry, 15 z geometrii i $n$ tematów z prawdopodobieństwa. Z zestawu usunięto jeden temat, a następnie wylosowano z pozostałych jeden temat. Oblicz $n$, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania tematu z prawdopodobieństwa wynosi $\frac{1}{4}$.

**Zadanie 41** Pierwsza z dwóch urn zawiera 5 białych, 11 czarnych i 8 zielonych kul, a druga zawiera 10 białych, 8 czarnych i 6 zielonych kul. Z obu urn wylosowano po jednej kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie kule będą tego samego koloru?

**Zadanie 42** Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród $2^n$ uczestników jest dwu braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spotkają się oni w pojedynku?

**Zadanie 43** W urnie jest $n$ kul, przy czym $n$ może być równe 2, 3, 4, 5 z jednakowym prawdopodobieństwem. Kule są ponumerowane liczbami od 1 do $n$. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania i zapisujemy cyfry z tych kul w kolejności wylosowania. Zapisana liczba okazała się być mniejsza od 44. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $n$ było równe 3?

**Zadanie 44** Szansa udanej kradzieży w supermarkecie w ciągu jednego dnia jest równa $\frac{n}{(n+k)}$, gdzie $k$ jest liczbą pilnujących, zaś $n$ liczbą złodziei, $n + k \geq 1$. Kradzież zawsze wychodzi na jaw po podsumowaniu dziennej sprzedaży. Zatrudnia się wtedy dodatkową osobę pilnującą. Po udanej kradzieży liczba złodziei także zwiększa się o 1. Jeśli w poniedziałek jest 1 pilnujący i 1 złodziej, to jakie jest prawdopodobieństwo, że supermarket będzie okradany codziennie do niedzieli?

**Zadanie 45** W komodach $A$, $B$ i $C$ są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie $A$ są monety złote, w $C$ - srebrne, a w $B$ jest jedna moneta złota i jedna moneta srebrna. Wylosowano komodę, a następnie szufladę i znaleziono tam monetę złotą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w drugiej szufladzie jest też moneta złota?

**Zadanie 46** † W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone(85% samochodów) i Niebieskie (15% samochodów). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

**Zadanie 47** Niebieskie cukierki M&M zostały wprowadzone w 1995 roku. Wcześniej skład procentowy kolorów cukierków w torebce cukierków przedstawiał się następująco: 30% brązowych, 20% żółtych, 20% czerwonych, 10% zielonych, 10% pomarańczowych i 10% jasnobrązowych. Od 1995 roku skład ten wynosi: 24% cukierków niebieskich, 20% zielonych, 16% pomarańczowych, 14% żółtych, 13% czerwonych i 13% brązowych. Paul ma dwie torebki M&M - jedną z roku 1994 i jedną z roku 1996. Nie wie która torebka jest starsza. Losuje po jednym cukierku z każdej z torebek i wyciąga jednego cukierka żółtego i jednego zielonego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żółty cukierek pochodził z torebki z 1994 roku?

**Zadanie 48** Poprzez czułość testu medycznego rozumiemy odsetek chorych, u których test daje wynik dodatni. Swoistość testu definiowana jest jako odsetek zdrowych, u których test daje wynik ujemny. W celu stwierdzenia, czy pacjent ma chorobę wieńcową poddaje się go próbie wysiłkowej, której czułość wynosi 65%, a swoistość 85%. Załóżmy, że 10% populacji jest chorych na chorobę wieńcową. Obliczyć:

(i) prawdopodobieństwo, że próba wysiłkowa doprowadzi do prawidłowej diagnozy;

(ii) prawdopodobieństwo, że pacjent z wynikiem dodatnim jest chory;

(iii) prawdopodobieństwo, że pacjent z wynikiem ujemnym jest zdrowy.

**Zadanie 49** Antek, Beata i Jarek walczą o przywództwo w pewnej organizacji. O wyborze na prezesa organizacji zadecydują głosy nieparzystej liczby elektorów. Po pierwszej turze głosowania okazało się, że wszyscy kandydaci zebrali po $\frac{1}{3}$ ilości wszystkich głosów. Uniemożliwia to wykluczenie któregokolwiek z kandydatów w rywalizacji w drugiej turze. W tej sytuacji zaproponowano, by wszyscy elektorzy w kolejnym głosowaniu zagłosowali na tzw. kandydata drugiego wyboru, czyli na inną osobę niż głosowali w pierwszej turze. Okazało się, że również i w tym głosowaniu wszyscy otrzymali po $\frac{1}{3}$ głosów. Wówczas Jarek zaproponował wybrnięcie z pata. Chciał on, by najpierw zmierzył się Antek z Beatą, a potem zwycięzca tego pojedynku zmierzy się z nim w drugim pojedynku, który zadecyduje o przywództwie. Czy takie rozwiązanie jest sprawiedliwe?

**Zadanie 50** Dane są dwie urny. W pierwszej urnie znajdują się 2 czerwone kule i 1 czarna, w drugiej 101 czerwonych i 100 czarnych. Ktoś wybiera losowo urnę (nie wiemy którą), z wybranej urny losuje kulę i mówi nam jakiego jest ona koloru. Następnie z tej samej urny losowana jest druga kula, przy czym możemy zażądać, aby uprzednio pierwsza kula wróciła do urny. Naszym zadaniem jest zgadnięcie z której urny są losowane kule. Jak wygląda optymalna strategia? Uwaga: zadanie jest dosyć czasochłonne.

**Zadanie 51** Wiadomo, ze 5% wszystkich mężczyzn i 0,25% wszystkich kobiet to daltoniści. Spośród grupy 60 mężczyzn i 400 kobiet wybrano losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania mężczyzny, jeśli wiadomo, że wylosowano osobę, która jest daltonistą?

**Zadanie 52** Wiadomo, że $P(B_1 \cap B_2) = 0$, $P(B_1 \cup B_2) = 1$, $P(A) = 0,5$, $P(B_1) = 0,4$ i $P(A|B_1) = 0,9$. Oblicz $P(A|B_2)$, $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$.

**Zadanie 53** Niech $A$, $B$ będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0,8$.

**Zadanie 54** Wykazać, że $\frac{P(A)+P(B)-1}{P(B)} \leq P\left(A|B\right) \leq \frac{P(A)}{P(B)}$.