Podstawy robotyki

Praca domowa nr 1

Maciej Dominiak

TEMAT: Zadanie kinematyki prostej i odwrotnej

1. Zadanie kinematyki prostej

Aby rozwiązać zadanie kinematyki prostej należy obliczyć macierz transformacji układu bazowego w układ nadgarstka. Na samym początku zadania, stosując formalizm Denavita-Hartenberga, uzupełniamy poniższą tabele.

Para kinematyczna	θ_n	d_n	a_n	α_n
1	θ_1	350	16	90°
2	θ_2	0	220	0°
3	θ_3	0	220	0°
4	θ_4	0	0	90°
5	θ_5+90°	150	0	0°

Tak przygotowana tabela pozwala nam określić jednorodne macierze transformacji pomiędzy kolejnymi układami współrzędnych.

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 16\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 16\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 220\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 220\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 220\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 220\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3^4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & \sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & -\cos\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_4^5 = \begin{bmatrix} -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chcąc uzyskać macierz transformacji układu bazowego w układ narzędzia, mnożymy przez siebie kolejne macierze jednorodne. Dla zmniejszenia rozmiarów macierzy przyjmiemy następujące skróty: C1=$\cos\theta_1$, C2=$\cos\theta_2$, itd. S1=$\sin\theta_1$, S2=$\sin\theta_2$, itd.

$$H_0^2 = H_0^1 * H_1^2 = \begin{bmatrix} C1C2 & -C1S2 & S1 & 16C1+220C1C2 \\ S1C2 & -S1S2 & -C1 & 16S1+220S1C2 \\ S2 & C2 & 0 & 220S2+350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^3 = H_0^2 * H_2^3$$
$$= \begin{bmatrix} C1C2C3 - C1S2S3 & -C1C3S2 - C1C2S3 & S1 & 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ C2C3S1 - S1S2S3 & -C3S1S2 - C2S1S3 & -C1 & 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ C3S2 + C2S3 & C2C3 - S2S3 & 0 & 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0^4 = H_0^3 * H_3^4 =$$

C1C2C3C4-C1C4S2S3-C1C3S2S4-C1C2S3S4	S1	C1C3C4S2+C1C2C4S3+C1C2C3S4-C1S2S3S4	16C1+220C1C2+220C1C2C3-220C1S2S3
C2C3C4S1-C4S1S2S3-C3S1S2S4-C2S1S3S4	-C1	C3C4S1S2+C2C4S1S3+C2C3S1S4-S1S2S3S4	220C2S1+220C2C3S1+16S1-220S1S2S3
C3C4S2+C2C4S3+C2C3S4-S2S3S4	0	-C2C3C4+C4S2S3+C3S2S4+C2S3S4	220C3S2+220S2+220C2S3+350
0	0	0	1

$$H_0^5 = H_0^4 * H_4^5 =$$

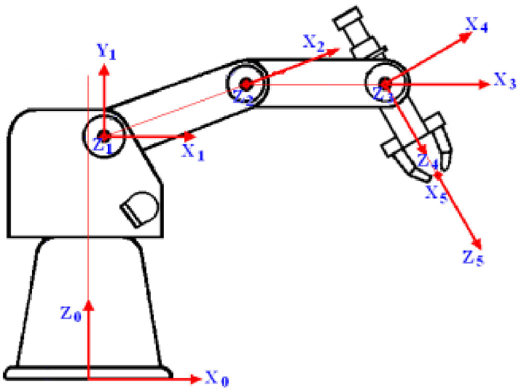
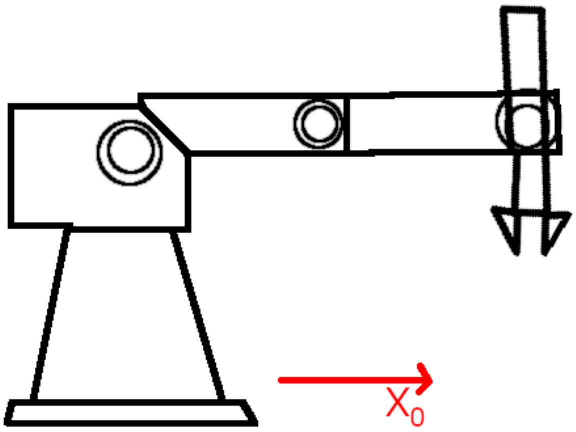
C5S1-C1C2C3C4S5+C1C4S2S3S5+C1C3S2S4S5+C1C2S3S4S5	-C1C2C3C4C5+C1C4C5S2S3+C1C3C5S2S4+C1C2C5S3S4-S1S5	C1C3C4S2+C1C2C4S3+C1C2C3S4-C1S2S3S4	16C1+220C1C2+220C1C2C3+150C1C3C4S2+150C1C2C4S3-220C1S2S3+150C1C2C3S4-150C1S2S3S4
-C1C5-C2C3C4S1S5+C4S1S2S3S5+C3S1S2S4S5+C2S1S3S4S5	-C2C3C4C5S1+C4C5S1S2S3+C3C5S1S2S4+C2C5S1S3S4+C1S5	C3C4S1S2+C2C4S1S3+C2C3S1S4-S1S2S3S4	220C2S1+220C2C3S1+16S1+150C3C4S1S2+150C2C4S1S3-220S1S2S3+150C2C3S1S4-150S1S2S3S4
-C3C4S2S5-C2C4S3S5-C2C3S4S5+S2S3S4S5	-C3C4C5S2-C2C4C5S3-C2C3C5S4+C5S2S3S4	-C2C3C4+C4S2S3+C3S2S4+C2S3S4	-150C2C3C4+220C3S2+220S2+220C2S3+150C4S2S3+150C3S2S4+150C2S3S4+350

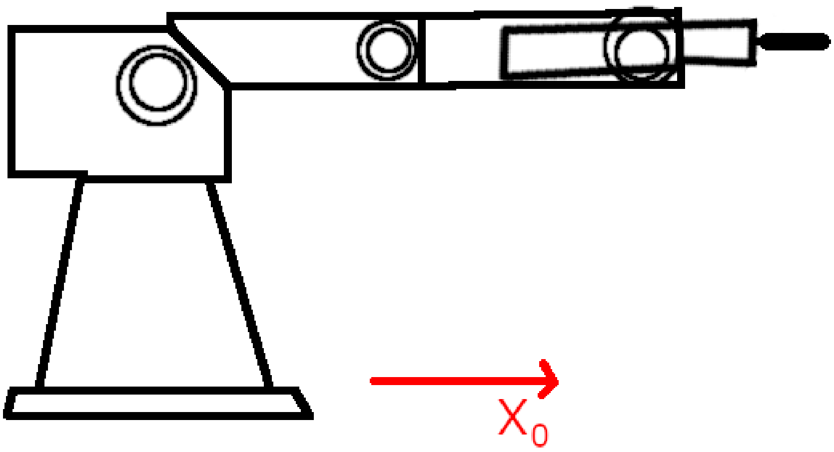
0	0	0	1

Tak wyliczoną macierz H_0^5 możemy wykorzystać do obliczenia położenia i orientacji narzędzia, dla podanych w tabeli kątów.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
A	0°	0°	0°	90°	90°
B	0°	90°	0°	90°	90°
C	-90°	90°	-90°	180°	0°
D	0°	120°	-90°	0°	0°

Rozmieszczenie układów współrzędnych oraz pozycja początkowa ramienia:

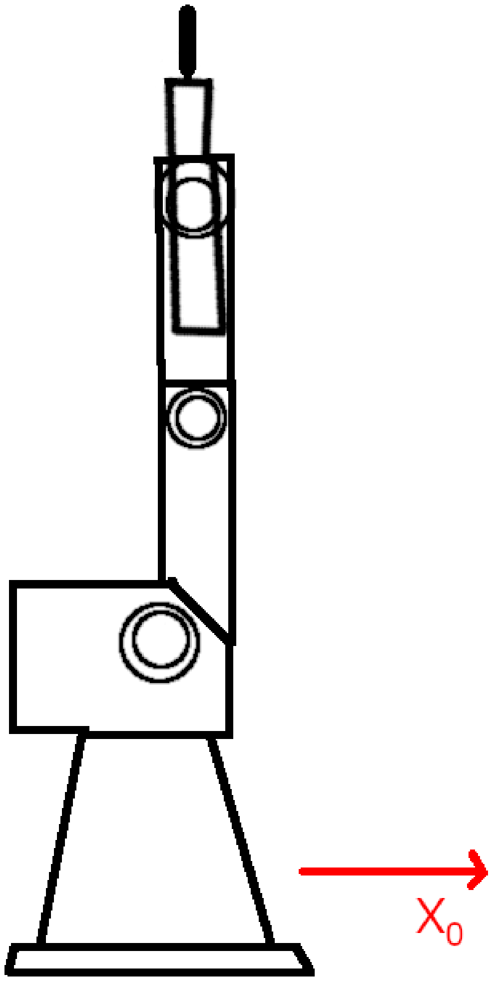
<table>
<tr><td>Układy współrzędnych</td><td>Pozycja ramienia dla kątów θ_n równych zero</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

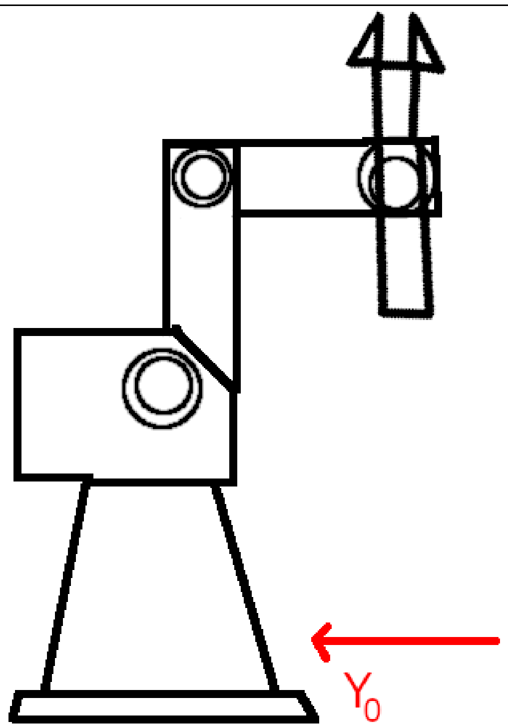
<table>
<tr><td>Pozycja ramienia dla konfiguracji A</td><td>Kąty konfiguracji A oraz macierz H_0^5 dla tych kątów</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

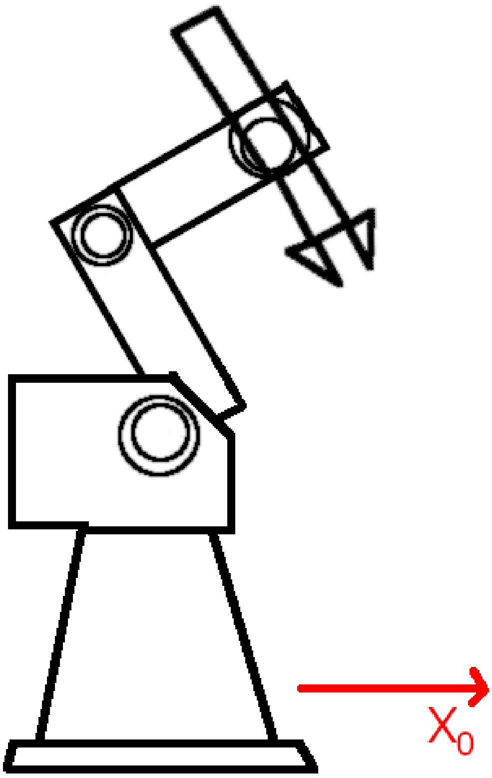
$$\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$$

$$H_0^5=\begin{bmatrix}0&0&1&606\\0&1&0&0\\-1&0&0&350\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

</td></tr>
</table>

Pozycja ramienia dla konfiguracji B	Kąty konfiguracji B oraz macierz H_0^5 dla tych kątów
	$\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0^\circ\\90^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$ $H_0^5=\begin{bmatrix}1&0&0&16\\0&1&0&0\\0&0&1&940\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Pozycja ramienia dla konfiguracji C	Kąty konfiguracji C oraz macierz H_0^5 dla tych kątów
	$\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-90^\circ\\90^\circ\\-90^\circ\\180^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$ $H_0^5=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&-236\\0&0&1&720\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Pozycja ramienia dla konfiguracji D	Kąty konfiguracji D oraz macierz H_0^5 dla tych kątów
	$\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\\\theta_3\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0^\circ\\120^\circ\\-90^\circ\\0^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$ $H_0^5=\begin{bmatrix}0 & -0.87 & 0.5 & 171.53\\-1 & 0 & 0 & 0\\0 & -0.5 & -0.87 & 520.62\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2. Uproszczone zadanie kinematyki prostej

Korzystając z wcześniej obliczonej macierzy H_0^3 wyliczamy kolejne położenia środka nadgarstka.

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} C1C2C3 - C1S2S3 & -C1C3S2 - C1C2S3 & S1 & 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ C2C3S1 - S1S2S3 & -C3S1S2 - C2S1S3 & -C1 & 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ C3S2 + C2S3 & C2C3 - S2S3 & 0 & 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konfiguracja kątów	Macierz H_0^3	Położenie
$A=\begin{bmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 456\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 350\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}456\\0\\350\end{bmatrix}$
$B=\begin{bmatrix}0^\circ\\90^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 16\\0 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & 790\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16\\0\\790\end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -90^\circ \\ 90^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -236 \\ 0 & 1 & 0 & 570 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -236 \\ 570 \end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 120^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.87 & -0.5 & 0 & 96.53 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0.87 & 0 & 650.53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 96.53 \\ 0 \\ 650.53 \end{bmatrix}$

3. Uproszczone zadanie kinematyki odwrotnej

By rozwiązać zadanie kinematyki odwrotnej musimy na podstawie macierzy transformacji określić jakie kąty mają być zastosowane na konkretnych przegubach, by środek nadgarstka ramienia znalazł się w punkcie określonym przez użytkownika. Na samym początku, tworzymy równanie, mamy trzy przeguby więc pomijamy orientację i obliczamy tylko położenie.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & p_x \\ * & * & * & p_y \\ * & * & * & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ * & * & * & 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ * & * & * & 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozpisujemy to na układ równań:

$$\begin{cases} p_x = 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ p_y = 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ p_z = 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \end{cases}$$

By pokazać, że niewiadomymi są kąty, a nie wartości C1, C2, itd. powrócę do zapisu z funkcjami trygonometrycznymi, oraz uproszczę układ równań.

$$\begin{cases} p_x = 16cos(\theta_1) + 220cos(\theta_1)cos(\theta_2) + 220cos(\theta_1)cos(\theta_2)cos(\theta_3) - 220cos(\theta_1)sin(\theta_2)sin(\theta_3) \\ p_y = 16sin(\theta_1) + 220cos(\theta_2)sin(\theta_1) + 220cos(\theta_2)cos(\theta_3)sin(\theta_1) - 220sin(\theta_1)sin(\theta_2)sin(\theta_3) \\ p_z = 220cos(\theta_3)sin(\theta_2) + 220sin(\theta_2) + 220cos(\theta_2)sin(\theta_3) + 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = 16cos(\theta_1) + 220\cos(\theta_1)(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ p_y = 16sin(\theta_1) + 220\sin(\theta_1)(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ p_z = 220(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_2 + \theta_3)) + 350 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_x = 4\cos(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ p_y = 4\sin(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ p_z = 220(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_2 + \theta_3)) + 350 \end{cases}$$

Wyliczając θ_1, mnożymy p_x przez $\sin(\theta_1)$, a p_y przez $\cos(\theta_1)$, p_z na razie zostawiamy.

$$\begin{cases} \sin(\theta_1)p_x = 4\sin(\theta_1)\cos(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \cos(\theta_1)p_y = 4\sin(\theta_1)\cos(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \end{cases}$$

Odejmujemy od siebie oba równania.

$$\sin(\theta_1)p_x - \cos(\theta_1)p_y = 0$$

Wiemy że jeżeli równanie ma postać a $* \cos(\theta) - b * \sin(\theta) = 0$, to $\theta^{(1)} = Atan2(a, b)$ oraz $\theta^{(2)} = Atan2(-a, -b) = \theta^1 + \pi$. Więc dla naszych obliczeń:

$$\theta_1^{(1)} = Atan2(p_y, p_x)$$

$$\theta_1^{(2)} = Atan2(-p_y, -p_x)$$

Atan2 jest nieokreślony dla wartości zerowych (0,0), więc gdy $p_x = p_y = 0$ to mamy nieskończenie wiele rozwiązań

Obliczając θ_3, wracamy do równań z sprzed mnożenia i tym razem p_x mnożymy przez $\cos(\theta_1)$, a p_y przez $\sin(\theta_1)$.

$$\begin{cases} \cos(\theta_1)p_x = 4cos^2(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ \sin(\theta_1)p_y = 4sin^2(\theta_1)(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3)) \end{cases}$$

Dodajemy równania, przemnażamy przez 4 i przenosimy 16 na drugą stronę.

$$\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y = 4(4 + 55\cos(\theta_2) + 55\cos(\theta_2 + \theta_3))$$

$$\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16 = 220\cos(\theta_2) + 220\cos(\theta_2 + \theta_3))$$

Dalej skorzystamy z następujących równań:

$$\begin{cases} \sin(\theta_1)p_x - \cos(\theta_1)p_y = 0 \\ \cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16 = 220\cos(\theta_2) + 220\cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ p_z - 350 = 220\sin(\theta_2) + 220\sin(\theta_2 + \theta_3) \end{cases}$$

Podnosimy wszystkie równania do kwadratu.

$$\begin{cases} (\sin(\theta_1)p_x - \cos(\theta_1)p_y)^2 = 0 \\ (\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16)^2 = (220\cos(\theta_2) + 220\cos(\theta_2 + \theta_3))^2 \\ (p_z - 350)^2 = (220\sin(\theta_2) + 220\sin(\theta_2 + \theta_3))^2 \end{cases}$$

Dodajemy do siebie dwa pierwsze równania.

$$p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) = (220\cos(\theta_2) + 220\cos(\theta_2 + \theta_3))^2$$

Sumujemy to z równaniem trzecim.

$$p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) + (p_z - 350)^2 = 220^2 + 220^2 + 2 * 220^2\,(\cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3))$$

Zauważamy, że:

$$(\cos(\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) + \sin(\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3)) = \cos(\theta_2+\theta_3-\theta_2) = \cos(\theta_3)$$

Więc dalej:

$$p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) + (p_z - 350)^2 = 220^2 + 220^2 + 2 * 220^2\cos(\theta_3)$$

$$2 * 220^2\cos(\theta_3) = p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) + (p_z - 350)^2 - 2 * 220^2$$

$$\cos(\theta_3) = \frac{p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) + (p_z - 350)^2 - 2 * 220^2}{2 * 220^2}$$

$$CCC = \frac{p_x{}^2 + p_y{}^2 + 16^2 - 32(\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y) + (p_z - 350)^2 - 2 * 220^2}{2 * 220^2}$$

Stąd już mamy następujące rozwiązania:

$$\theta_3^{(1)} = Atan2(\sqrt{1 - CCC^2}, CCC)$$

$$\theta_3^{(2)} = Atan2(-\sqrt{1 - CCC^2}, CCC)$$

Widzimy, że jeśli CCC większe od 1 to brak rozwiązań. Wynika to z ograniczonego zasięgu ramienia.

Obliczając θ_2 wykorzystamy następujące wzory:

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y = 16 + 220\cos(\theta_2) + 220\cos(\theta_2+\theta_3)) \\ p_z = 220\sin(\theta_2) + 220\sin(\theta_2+\theta_3) + 350\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 220\cos(\theta_2) - 16 = 220\cos(\theta_2+\theta_3)) \\ p_z - 220\sin(\theta_2) - 350 = 220\sin(\theta_2+\theta_3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 220\cos(\theta_2) - 16 = 220(\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_3)) \\ p_z - 220\sin(\theta_2) - 350 = 220(\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_3))\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 220\cos(\theta_2) - 16 = 220(\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sin(\theta_2)\sin(\theta_3)) \\ p_z - 220\sin(\theta_2) - 350 = 220(\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_3))\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)p_x + \sin(\theta_1)p_y - 220\cos(\theta_2) - 16 = 220\cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - 220\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\ p_z - 220\sin(\theta_2) - 350 = 220\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) + 220\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\theta_2)\,(220\cos(\theta_3) + 220) - 220\sin(\theta_3)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_1)\,p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16 \\ \sin(\theta_2)\,(220\cos(\theta_3) + 220) + 220\sin(\theta_3)\cos(\theta_2) = p_z - 350\end{cases}$$

Korzystamy z następującego wzoru:

$$\begin{cases}a * \cos(\theta) - b * sin(\theta) = c \\ a * \sin(\theta) + b * cos(\theta) = d\end{cases}$$

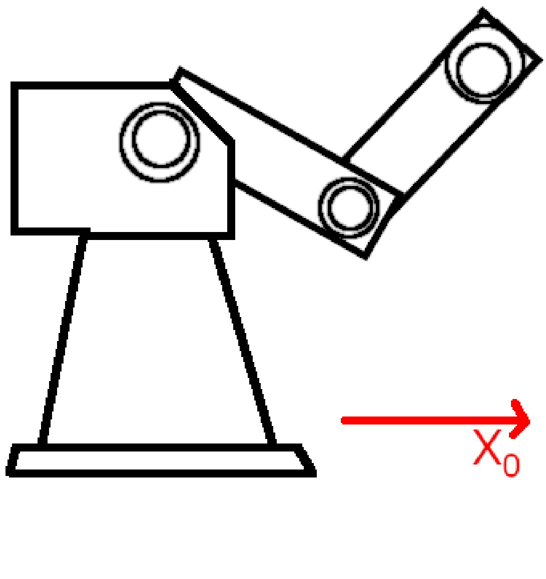
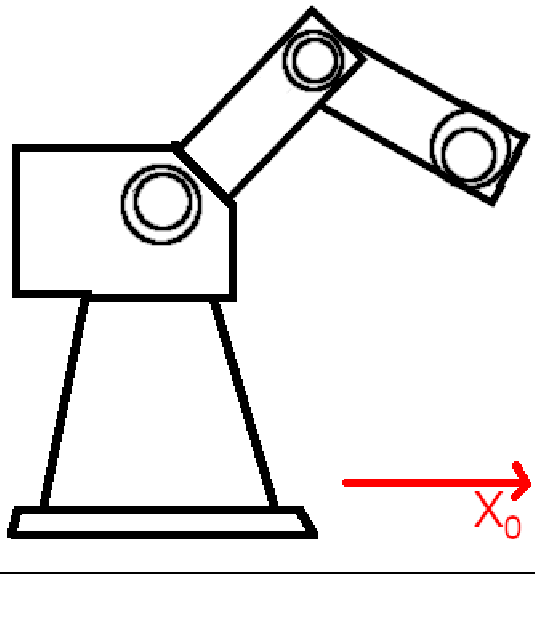
$$\theta = Atan2(ad - bc, ac + bd)$$

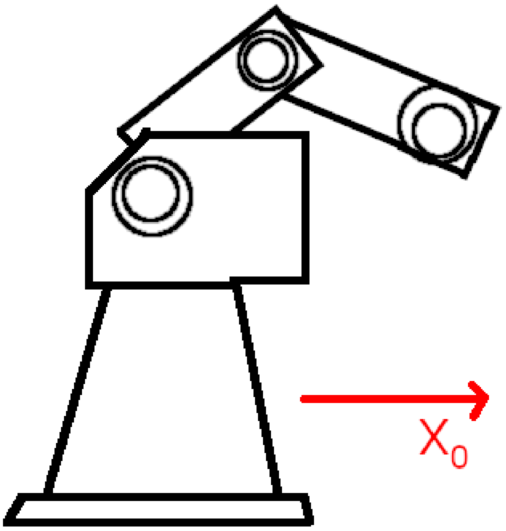
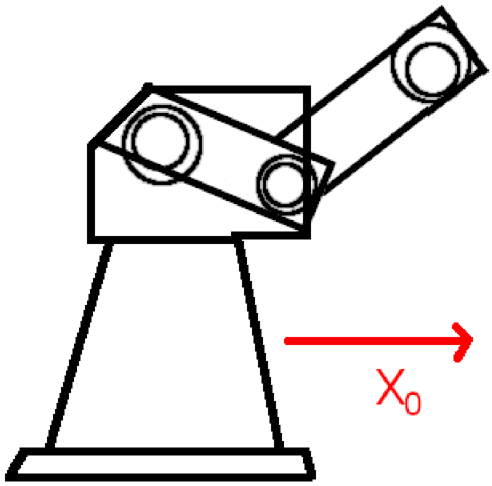
Otrzymujemy rozwiązanie:

$$\theta_2 = Atan2((220\cos(\theta_3) + 220)(p_z - 350) - (220\sin(\theta_3))\big(\cos(\theta_1)\,p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16\big), (220\cos(\theta_3) + 220)\big(\cos(\theta_1)\,p_x + \sin(\theta_1)p_y - 16\big) + (220\sin(\theta_3))(p_z - 350))$$

Podsumowując obliczenia, jest jedno rozwiązanie osobliwe, gdy $p_x = p_y = 0$, wtedy Atan2 jest nieokreślony i mamy nieskończenie wiele rozwiązań. Podstawa ramienia może obracać się dookoła własnej osi, a końcówka ramienia wciąż będzie w żądanym punkcie.

Mamy również kilka rozwiązań wielokrotnych. θ_1 oraz θ_3 mają po dwa rozwiązania, co daje nam w sumie cztery zestawy rozwiązań. Zobrazuje je dla danych wejściowych wynoszących: $p_x = 360,\ p_y = 0,\ p_z = 400$

$\theta_1^{(1)} = 0;\ \theta_2 = -29.54;\ \theta_3^{(1)} = 75.62$	$\theta_1^{(1)} = 0;\ \theta_2 = 46.08;\ \theta_3^{(2)} = -75.62$
	

$\theta_1^{(2)} = 180;\ \theta_2 = 141.97;\ \theta_3^{(1)} = 60.9$	$\theta_1^{(2)} = 180;\ \theta_2 = -156.12;\ \theta_3^{(2)} = -60.9$
	

Widzimy że konfiguracja kątów $\left(\theta_1^{(2)}, \theta_3^{(2)}\right)$ jest fizycznie niemożliwa do osiągnięcia, ponieważ przegub drugi obracając się, przechodzi przez podstawę ramienia. Idąc dalej, dla niektórych pozycji, szczególnie dla tych leżących niżej górnej krawędzi kolumny podstawy, konfiguracja kątów $\left(\theta_1^{(2)}, \theta_3^{(1)}\right)$ mogłaby uszkodzić konstrukcję robota.

Na koniec sprawdzamy czy uzyskane rozwiązania dają poprawne wyniki.

Konfiguracja kątów	Położenie z H_0^3	$\left(\theta_1^{(1)}, \theta_2, \theta_3^{(1)}\right)$	$\left(\theta_1^{(1)}, \theta_2, \theta_3^{(2)}\right)$	$\left(\theta_1^{(2)}, \theta_2, \theta_3^{(1)}\right)$	$\left(\theta_1^{(2)}, \theta_2, \theta_3^{(2)}\right)$
$A = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 456 \\ 0 \\ 350 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 0^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	Brak rozwiązania	Brak rozwiązania
$B = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 90^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 790 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 90^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 90^\circ \\ 0^\circ \end{bmatrix}$	Brak rozwiązania	Brak rozwiązania
$C = \begin{bmatrix} -90^\circ \\ 90^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -236 \\ 570 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -90^\circ \\ 0^\circ \\ 90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -90^\circ \\ 90^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90^\circ \\ 98.37^\circ \\ 81.02^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 90^\circ \\ 179.39^\circ \\ -81.02^\circ \end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix} 0^\circ \\ 120^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 96.53 \\ 0 \\ 650.53 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 30^\circ \\ 90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0^\circ \\ 120^\circ \\ -90^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 180^\circ \\ 67.36^\circ \\ 86.34^\circ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 180^\circ \\ 153.70^\circ \\ -86.34^\circ \end{bmatrix}$

W tabeli możemy odnaleźć znane nam z poprzednich zadań konfiguracje.

4. Pełne zadanie kinematyki odwrotnej

Na początku szukamy ograniczeń na możliwe konfiguracje narzędzia. Można od razu zauważyć, patrząc z góry na ramię, że nadgarstek nie może odchylać się na prawo i lewo. W takim wypadku, wiemy że dwa konkretne wektory muszą być równoległe. Sprawdźmy to.

Ogólny warunek wygląda tak:

$$H_{base}^{tool} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [a_x \quad a_y] \,||\, [p_x \quad p_y]$$

$$a_x p_y - a_y p_x = 0$$

Uprośćmy macierz H_0^5 i sprawdźmy równoległość tych wektorów.

$$H_0^5 =$$

$\cos(\theta_5)\sin(\theta_1) - \sin(\theta_5)\cos(\theta_1)\cos(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3)$	$-\cos(\theta_1)\cos(\theta_5)\cos(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_5)$	$\cos(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)$	$2\cos(\theta_1)(8 + 75\sin(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) + 110(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3))$
$-\cos(\theta_1)\cos(\theta_5) - \sin(\theta_5)\sin(\theta_1)\cos(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3)$	$-\sin(\theta_1)\cos(\theta_5)\cos(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_5)$	$\sin(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)$	$2\sin(\theta_1)(8 + 75\sin(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) + 110(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3))$
$-\sin(\theta_5)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)$	$-\cos(\theta_5)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)$	$-\cos(\theta_3 + \theta_4)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_3 + \theta_4)\sin(\theta_2)$	$10\big(35 - 15\cos(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) + 22(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_3 + \theta_2))\big)$
0	0	0	1

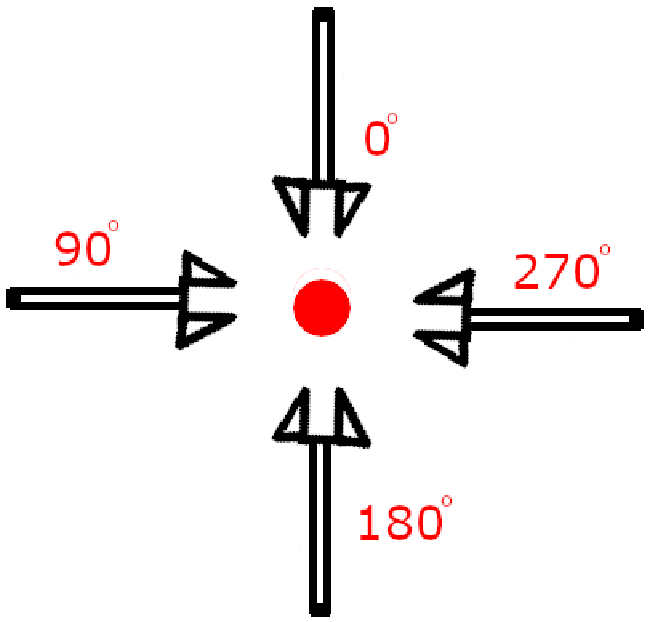
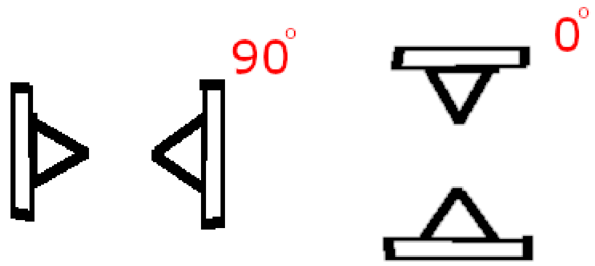
$$\begin{aligned} &\cos(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) * 2\sin(\theta_1)(8 + 75\sin(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) \\ &\qquad + 110(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ &\qquad = \sin(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) * 2\cos(\theta_1)(8 + 75\sin(\theta_4 + \theta_2 + \theta_3) \\ &\qquad + 110(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_2 + \theta_3)) \\ &\sin(2\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)\big(8 \\ &\qquad + 110(\cos(\theta_3 + \theta_2) + \cos(\theta_2) + 75\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2))\big) \\ &\qquad = \sin(2\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)\big(8 \\ &\qquad + 110(\cos(\theta_3 + \theta_2) + \cos(\theta_2) + 75\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2))\big) \end{aligned}$$

$$0 = 0$$

Uzyskaliśmy dowód, że orientacja, w rzucie z góry, narzędzia i całego ramienia będzie taka sama.

Zauważamy że nasz nadgarstek jest nadgarstkiem kulistym, co w naszym przypadku oznacza, że dwie ostatnie osie obrotu przecinają się w jednym punkcie. To spostrzeżenie pozwala nam obliczyć kąty przegubów ramienia w prostszy sposób.

Określmy na początku jakie dane wprowadza użytkownik. Jest to położenie końcówki nadgarstka, podane w postaci punktu o współrzędnych x, y, z, oraz orientacja nadgarstka. Jak już zdążyliśmy udowodnić narzędzie nie porusza się prawo/lewo, ale może się obracać wokół własnej osi(roll) oraz może podnosić się i opadać(pitch). By uprościć wprowadzanie danych przygotowałem rysunki pomagające zorientować się jak należy podać dane.

Pitch	Roll
	

Zacznijmy obliczenia od wyznaczenia położenia środka nadgarstka z wzoru podanego poniżej. (Wektor $[a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ obliczamy z danych podanych przez użytkownika.)

$$\begin{bmatrix} p_x^w \\ p_y^w \\ p_z^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - 150 * \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

Dalej obliczamy trzy pierwsze kąty przegubów ramienia z macierzy H_0^3, konkretnie z jej części odpowiedzialnej za położenie.

$$\begin{bmatrix} p_x^w \\ p_y^w \\ p_z^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \end{bmatrix}$$

Tak samo jak w uproszczonym zadaniu kinematyki odwrotnej dostajemy następujący układ równań.

$$\begin{cases} p_x^w = 16C1 + 220C1C2 + 220C1C2C3 - 220C1S2S3 \\ p_y^w = 220C2S1 + 220C2C3S1 + 16S1 - 220S1S2S3 \\ p_z^w = 220C3S2 + 220S2 + 220C2S3 + 350 \end{cases}$$

Z poprzedniej części znamy już rozwiązanie tego układu, wystarczy zaktualizować oznaczenia.

$$\theta_1^{(1)} = Atan2\left(p_y^w, p_x^w\right)$$

$$\theta_1^{(2)} = Atan2(-p_y^w, -p_x^w)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = Atan2((&220\cos(\theta_3) + 220)(p_z^w - 350) \\ &- (220\sin(\theta_3))\left(\cos(\theta_1)\, p_x^w + \sin(\theta_1) p_y^w - 16\right), (220\cos(\theta_3) \\ &+ 220)\left(\cos(\theta_1)\, p_x^w + \sin(\theta_1) p_y^w - 16\right) + (220\sin(\theta_3))(p_z^w - 350)) \end{aligned}$$

$$\theta_3^{(1)} = Atan2\left(\sqrt{1 - CCC^2}, CCC\right)$$

$$\theta_3^{(2)} = Atan2\left(-\sqrt{1 - CCC^2}, CCC\right)$$

Gdzie CCC wynosi:

$$CCC = \frac{(p_x^w)^2 + \left(p_y^w\right)^2 + 16^2 - 32\left(\cos(\theta_1)\, p_x^w + \sin(\theta_1) p_y^w\right) + (p_z^w - 350)^2 - 2 * 220^2}{2 * 220^2}$$

Gdy mamy już policzone kąty θ_1, θ_2 i θ_3, możemy wyliczyć kąt θ_4 używając macierzy H_0^5.(Kąt θ_5 jest dany przez użytkownika i możemy go zastosować bezpośrednio na przegubie piątym)

$$\begin{cases} a_x = \cos(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) \\ a_y = \sin(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) \end{cases}$$

Mnożymy pierwsze równanie przez $\cos(\theta_1)$, a drugie przez $\sin(\theta_1)$, równanie dodajemy.

$$\begin{cases} \cos(\theta_1)\, a_x = \cos^2(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1)\, a_y = \sin^2(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) \end{cases}$$

$$\cos(\theta_1)\, a_x + \sin(\theta_1)\, a_y = \cos^2(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1)\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)$$

$$\cos(\theta_1)\, a_x + \sin(\theta_1)\, a_y = \sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2)\,(\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1))$$

$$\sin(\theta_4 + \theta_3 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\, a_x + \sin(\theta_1)\, a_y$$

$$\theta_4^{(1)} = Atan2\left(\cos(\theta_1)\,a_x + \sin(\theta_1)\,a_y, \sqrt{1 - \left(\cos(\theta_1)\,a_x + \sin(\theta_1)\,a_y\right)^2}\right) - \theta_3 - \theta_2$$

$$\theta_4^{(2)} = Atan2\left(\cos(\theta_1)\,a_x + \sin(\theta_1)\,a_y, -\sqrt{1 - \left(\cos(\theta_1)\,a_x + \sin(\theta_1)\,a_y\right)^2}\right) - \theta_3 - \theta_2$$

Otrzymaliśmy dwa rozwiązania, podczas obliczeń będziemy musieli wybrać właściwy kąt, ponieważ użytkownik jednoznacznie określił kąt nachylenia nadgarstka.

Sprawdźmy uzyskane rozwiązania.

Konfiguracja kątów	Położenie z H_0^5 oraz orientacja	$\begin{bmatrix}\theta_1^{(1)}\\\theta_2\\\theta_3^{(1)}\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\theta_1^{(1)}\\\theta_2\\\theta_3^{(2)}\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\theta_1^{(2)}\\\theta_2\\\theta_3^{(1)}\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\theta_1^{(2)}\\\theta_2\\\theta_3^{(2)}\\\theta_4\\\theta_5\end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}606\\0\\350\end{bmatrix}$ $Pich$: 90° $Roll$: 90°	$\begin{bmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0^\circ\\0^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	Brak rozwiązania	Brak rozwiązania
$B = \begin{bmatrix}0^\circ\\90^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16\\0\\940\end{bmatrix}$ $Pich$: 180° $Roll$: 90°	$\begin{bmatrix}0^\circ\\90^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0^\circ\\90^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\end{bmatrix}$	Brak rozwiązania	Brak rozwiązania
$C = \begin{bmatrix}-90^\circ\\90^\circ\\-90^\circ\\180^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-236\\720\end{bmatrix}$ $Pich$: 0° $Roll$: 0°	$\begin{bmatrix}-90^\circ\\0^\circ\\90^\circ\\90^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-90^\circ\\90^\circ\\-90^\circ\\180^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}90^\circ\\98.37^\circ\\81.02^\circ\\0.61^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}90^\circ\\179.39^\circ\\-81.02^\circ\\81.63^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$
$D = \begin{bmatrix}0^\circ\\120^\circ\\-90^\circ\\0^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}171.53\\0\\520.62\end{bmatrix}$ $Pich$: 30° $Roll$: 0°	$\begin{bmatrix}0^\circ\\30^\circ\\90^\circ\\-90^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0^\circ\\120^\circ\\-90^\circ\\0^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}180^\circ\\67.36^\circ\\86.34^\circ\\-183.70^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}180^\circ\\153.70^\circ\\-86.34^\circ\\-97.36^\circ\\0^\circ\end{bmatrix}$

Równania dają poprawne wyniki, więc obliczenia zostały przeprowadzone prawidłowo.