

EaIB Informatyka	Pęcak Tomasz Bielech Maciej	Rok II	Grupa 3a	Zespół II
Pracownia FIZYCZNA WFiS AGH	Temat: Fale podłużne w ciałach stałych			nr ćwiczenia: 29
Data wykonania: 28.10.2017	Data oddania: 31.10.2017	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:
				OCENA:

1 Wstęp

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wartości modułu Younga dla różnych materiałów przy wykorzystaniu równania fali rozchodzącej się w pręcie.

Moduł Younga (E) to współczynnik sprężystości podłużnej. Określa on własności sprężyste ciała stałego, charakteryzując podatność materiału na odkształcenia. Jego jednostką jest pascal.

Fala dźwiękowa to rozchodzące się w ośrodku mechaniczne drgania cząteczek tego ośrodka. Na skutek wychylenia części pręta z położenia równowagi w jego wnętrzu powstaje fala i zostaje on wprowadzony w drgania. Z teorii drgań sprężystych, na podstawie równania ruchu fali, wiemy, że prędkość rozchodzenia się fali w ciele drgającym zależy od jego Modułu Younga oraz gęstości. Zależność tę opisuje wzór:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

który po przekształceniach pozwala nam obliczyć moduł Younga danego materiału:

$$E = \rho v^2. \quad (2)$$

Interferencja jest zjawiskiem nakładania się fal, co prowadzi do wzmocnień i wygaszeń amplitudy. Szczególnym przypadkiem interferencji jest fala stojąca, która powstaje w wyniku nałożenia się dwóch takich samych fal, poruszających się w tym samym kierunku, ale o przeciwnych zwrotach. Z takim przypadkiem mamy do czynienia w pręcie, gdzie interferują fala padająca i odbita. Długość fali stojącej wynosi: $\lambda = 2l$, gdzie l to odległość między jej węzłami. Korzystając z tej zależności możemy wyliczyć prędkość fali w pręcie jako: $v = 2lf$. Skąd wyprowadzamy wzór roboczy na moduł Younga, z którego korzystamy w ćwiczeniu:

$$E = 4\rho l^2 f^2 \quad (3)$$

Szybka transformata Fouriera pozwala nam wyznaczyć częstotliwości kolejnych harmonicznych fali, których długości obliczamy jako: $\lambda = \frac{2l}{n}$, gdzie n to numer harmonicznej.

2 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie wykonywaliśmy dla drutów: mosiężnego, stalowego, miedzianego i aluminiowego. Dla każdego z nich powtórzyliśmy następujące czynności:

- W pierwszym kroku dokonaliśmy pomiaru wymiarów próbki danego materiału w celu wyznaczenia jego objętości. W zależności od jej kształtu stosowaliśmy: taśmę mierniczą o dokładności ± 1 mm lub suwmiarkę ± 0.05 mm.
- Następnie każdą próbkę zwarzyliśmy. Ze względu na różne wielkości próbek używaliśmy wag o różnych dokładnościach (± 1 g lub ± 0.001 g).
- W kolejnym kroku zmierzaliśmy długość pręta przy pomocy taśmy mierniczej.
- Na końcu dokonaliśmy pomiaru częstotliwości harmonicznych przy pomocy oscyloskopu w programie Zelscope. W tym celu umieściliśmy pręt na nitkach stojaka, by mógł swobodnie drgać. Ustawiliśmy mikrofon w odpowiedniej odległości od drutu. Następnie uderzaliśmy młotkiem w koniec pręta i zapisywaliśmy wyniki uzyskane w programie.

3 Opracowanie danych pomiarowych

Tabela 1: Pomiary dla materiału miedzianego.

Nr harmoniczej	Częstotliwość f [Hz]	Długość fali λ [m]	Prędkość fali v [m/s]
1	1180	3,60	4248
2	2160	1,80	3888
3	3240	1,20	3888
4	4280	0,90	3852
5	5260	0,72	3787,2
6	6200	0,60	3720

Tabela 2: Pomiary dla materiału aluminiowego.

Nr harmoniczej	Częstotliwość f [Hz]	Długość fali λ [m]	Prędkość fali v [m/s]
1	2440	1,98	4831,2
2	4960	0,99	4910,4
3	6840	0,66	4514,4
4	9560	0,50	4732,2
5	11340	0,40	4490,64
6	12360	0,33	4078,8

Tabela 3: Pomiary dla materiału mosiężnego.

Nr harmonicznej	Częstotliwość f [Hz]	Długość fali λ [m]	Prędkość fali v [m/s]
1	1690	1,98	3346,2
2	3460	0,99	3425,4
3	5160	0,66	3405,6
4	6840	0,50	3385,8
5	8620	0,40	3413,52
6	12000	0,33	3960

Tabela 4: Pomiary dla materiału stalowego.

Nr harmonicznej	Częstotliwość f [Hz]	Długość fali λ [m]	Prędkość fali v [m/s]
1	1420	3,60	5112
2	2900	1,80	5220
3	4300	1,20	5160
4	5720	0,90	5148
5	7120	0,72	5126,4
6	8600	0,60	5160

3.1 Analiza błędów

Na czerwono zostały oznaczone pomiary, których prędkość znacząco odbiega od średniej. Utożsamiamy je z błędami grubymi, które najprawdopodobniej są wynikiem błędnego odczytu częstotliwości.

3.2 Pomiary i ich niepewności.

Wszystkie wielkości mierzyliśmy niewielką ilość razy, dlatego dla każdej z nich przyjmujemy ocenę niepewności typu B, co w naszym przypadku będzie odpowiadać dokładności przyrządu pomiarowego.

W każdym przypadku $u(f) = 20$ Hz.

Tablica 1: Niepewności standardowe miedzi

Symbol	d [mm]	d_w [mm]	l [mm]	m [g]
Wartość(niepewność)	15,2(5)	17,9(5)	1801(1)	761(1)

Tablica 2: Niepewności standardowe aluminium

Symbol	h [mm]	d [mm]	l [mm]	m [g]
Wartość(niepewność)	43,9(5)	4,9(5)	999(1)	23,89(1)

Tablica 3: Niepewności standardowe stal

Symbol	h [mm]	b [mm]	c [mm]	m [g]
Wartość(niepewność)	19,8(5)	14,1(5)	14,2(5)	30,86(1)

Tablica 4: Niepewności standardowe mosiadz

Symbol	d [mm]	h [mm]	l [mm]	m [g]
Wartość(niepewność)	5,9(5)	31,1(5)	1800(1)	74(1)

Niepewność złożona powierzchni prostokąta:

$$u(P_p) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_p}{\partial b} u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial P_p}{\partial a} u(a)\right)^2} = \sqrt{\left(bu(a)\right)^2 + \left(au(b)\right)^2} \quad (4)$$

Niepewność złożona powierzchni koła:

$$u(P_p) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_p}{\partial d} u(d)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} du(d)\right)^2} \quad (5)$$

Niepewność złożona objętości:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h} u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_p} u(P_p)\right)^2} = \sqrt{\left(hu(P_p)\right)^2 + \left(P_p u(h)\right)^2} \quad (6)$$

Niepewność złożona gęstości:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial V} u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{m}{V^2} u(V)\right)^2 + \left(\frac{1}{V} u(m)\right)^2} \quad (7)$$

Niepewność złożona prędkości:

$$u(v) = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f} u(f)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(\lambda u(f)\right)^2 + \left(fu(\lambda)\right)^2} \quad (8)$$

Niepewność złożona modułu Younga:

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v} u(v)\right)^2} = \sqrt{\left(v^2 u(\rho)\right)^2 + \left(2\rho v u(v)\right)^2} \quad (9)$$

Korzystając z odpowiednich wzorów(zależnych od kształtu próbki) obliczamy niepewność złożoną modułu Younga dla wszystkich metali.

4 Podsumowanie

Opis wielkości	E_0 [GPa]	E [GPa]	$U(E)$ [GPa]	$\frac{u(E)}{E}$
Mosiadz	100	100,3	4,93	2,46 %
Stal	210-220	215,5	5,55	1,29 %
Aluminium	70	63,6	2,82	2,21 %
Miedź	110-130	86,4	4,86	2,81%

- Zarówno dla mosiądzu jak i dla stali otrzymane przez nas wyniki pokrywają się z wartościami tabelarycznymi. Świadczy to o poprawności wykonanych pomiarów.
- W przypadku aluminium uzyskany wynik, nawet po uwzględnieniu niepewności rozszerzonej, nie pokrywa się z wartością dokładną. Te pomiary zostały dokonane jako pierwsze i odczytane wartości częstotliwości nie są dokładne. Mamy tutaj do czynienia z błędem systematycznym, wynikającym z nieodpowiednio umieszczoną skalą w oprogramowaniu. Po uwzględnieniu przesunięcia o +200 Hz (o taką różnicę podejrzewamy odczyt ze skali i odczyt myszą) moduł Younga równa się: $E = 68,6 \pm 3 \text{ GPa}$, co jest wynikiem poprawnym w zakresie obliczonej niepewności.
- Najgorsze wyniki otrzymaliśmy dla miedzi. Przyczyną tak dużej rozbieżności jest najprawdopodobniej źle obliczona gęstość, której wartość dla naszych pomiarów wynosi $\rho = 5900 \pm 304 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, przy wartości tabelarycznej wynoszącej $\rho_0 = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Po zamianie gęstości na dokładną moduł Younga badanej próbki miedzi jest równy: $E = 130 \pm 6 \text{ GPa}$, co jest zgodne z wartością tabelaryczną w zakresie obliczonej niepewności. Możemy przypuszczać, że dokonaliśmy złych pomiarów rurki miedzianej, lub ewentualnie była ona wykonana z innego metalu.