<table>
<tr><td>EAiIB
Informatyka</td><td colspan="2">Pęcak Tomasz
Bielech Maciej</td><td>Rok
II</td><td>Grupa
3a</td><td>Zespół
II</td></tr>
<tr><td>Pracownia
FIZYCZNA
WFiIS AGH</td><td colspan="4">Temat:
Opracowanie danych pomiarowych</td><td>nr ćwiczenia:
0</td></tr>
<tr><td>Data wykonania:
14.10.2017</td><td>Data oddania:
18.10.2017</td><td>Zwrot do poprawki:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>OCENA:</td></tr>
</table>

1 Wstęp

Celem ćwiczenia było wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła matematycznego na dwa różne sposoby oraz zapoznanie się z metodami opracowania danych pomiarowych.

Wahadło matematyczne jest przykładem oscylatora harmoniczego. Składa się z ciała o masie punktowej zawieszonego na nierozciągliwej nici, np. ciężarek na lince. Po wytrąceniu cieżarka z równowagi zaczyna on drgać pod wpływem siły grawitacji.

Pomimo, że wahadło matematyczne jest stosunkowo prostym narzędziem, korzystając z niego możemy wyznaczyć przyspieszenie ziemskie na kilka sposobów. W naszym ćwiczeniu skorzystaliśmy z dwóch takich metod. W obu z nich wykorzystaliśmy wzór na okres wahadła:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \; . \tag{1}$$

Jest on słuszny tylko wtedy, kiedy wartość sinusa jest równa w przybliżeniu wartości kąta wyrażonego w radianach. Przyjeliśmy, że taka sytuacja zachodzi dla kątów nie większych od 3°.

Przekształcając wzór (1) możemy wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \; . \tag{2}$$

W celu opracowania wyników skorzystaliśmy z następujących metod:

- Analiza błędów
- Ocena niepewności typu A

  Ocenę niepewności typu A stosujemy, gdy pomiary są obarczone błędem przypadkowym. Najczęściej ta niepewność jest wykorzystywana dla analizy wielkrotnej obserwacji tego samego doświadczenia. Do obliczenia przybliżeń wykorzystujemy estymatory: odchylenia standardowego, który jest miarą rozrzutu wyników pomiarów:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - x_0)^2}{n-1}} \tag{3}$$

oraz estymator odchylenia standardowego średniej, który przyjmujemy jako wyznaczaną niepewność pomiaru:

$$s_{x_0} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Przy obliczaniu wyżej wymienionych estymatorów, za wartość dokładną przyjmuje się średnią arytmetyczną pomiarów:

$$x \equiv x_0 = \frac{1}{n}\sum x_i \tag{5}$$

- Ocena niepewności typu B

  Ocene tę wyliczamy, gdy niemożliwe jest wyliczenie oceny niepewności typu A. Użyliśmy jej w drugiej części ćwiczenia, gdyż do dyspozycji mieliśmy jedynie jeden wynik pomiaru dla danej długości wahadła. Do jej określenia posłużyliśmy się znajomością niedokładności przyrządów pomiarowych.

- Prawo przenoszenia niepewności

  Pomiar przyspieszenia był obarczony błędem pomiaru długości wahadła i pomiaru czasu dwudziestu okresów, dlatego też skorzystaliśmy z prawa przenoszenia niepewności:

  – Policzenie niepewności złożonej jako:

  $$u_c(y) = \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k)\right]^2}, \tag{6}$$

  – Wyznaczenie niepewności względnej:

  $$\frac{u_c(y)}{y} = \frac{1}{y}\sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k)\right]^2} = \sqrt{\sum_k \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_k} \cdot \frac{x_k}{y}\right) \cdot \frac{u(x_k)}{x_k}\right]^2}, \tag{7}$$

- Obliczanie niepewności rozszerzonej

  Aby policzyć niepewność rozszerzoną mnożymy wartość niepewności złożonej przez współczynnik rozszerzenia k, przyjmując, że jest równy 2:

  $$U(y) = k \cdot u_c(y) \tag{8}$$

- Wykonywanie tabel/wykresów

- Regresja liniowa

  W drugiej części ćwiczenia wykorzystaliśmy metodę regresji liniowej. Metoda ta jest przybliżaniem wykresu wykonanego podczas przenoszenia pomiarów do funkcji liniowej. Mogliśmy tak postąpić, gdyż wyniki powinny przyrastać liniowo. Wykres regresji liniowej został wykonany przy użyciu programu Microsoft Excel.

2 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie było podzielone na dwie części. Każda część to jedna z metod (wspomianych we wstępie) wyznaczania grawitacji za pomocą wahadła matematycznego.

- Część I - Pomiary okresu dla ustalonej długości wahadła.

  W pierwszym kroku dokonaliśmy pomiaru długości wahadła przy użyciu linijki milimetrowej z dokładnością 1 mm. Korzystając ze zmierzonej długości obliczyliśmy przybliżoną amplitudę drgań.

$$A \approx l \frac{\pi}{60} \tag{9}$$

$$A \approx 18 \text{ mm}$$

  Następnie dziesięciokrotnie wykonaliśmy pomiar czasu dwudziestu okresów dbając o odpowiednie początkowe wychylenie wahadła (nie większe niż wyliczona amplituda).

  Otrzymane wyniki nanieśliśmy do tabeli (1).

Tabela 1: Pomiary - część pierwsza

Lp.	Liczba okresów k	czas t dla k okresów [s]	okres T_i = t/k [s]
1	20	23,68	1,184
2		23,60	1,180
3		23,38	1,169
4		23,40	1,170
5		23,49	1,175
6		23,42	1,171
7		23,40	1,170
8		23,41	1,171
9		23,48	1,174
10		23,32	1,166

- Część II - Pomiary zależności okresu drgań od długości wahadła.

  W tej części wyznaczaliśmy czas dwudziestu okresów dla różnych długości wahadła w celu znalezienia ich zależności. Pomiary rozpoczeliśmy od najmniejszej długości nici, dla której amplituda nie była zbyt mała i wyznaczanie okresów było możliwe. Po każdym pomiarze zwiększaliśmy długość wahadła poprzez odwijanie nici ze statywu. Długość nici nie pozwoliła na wykonanie więcej niż 10 pomiarów.

  Otrzymane wyniki nanieśliśmy do tabeli (2).

Tabela 2: Pomiary - część druga

Lp.	Liczba okresów k	l [mm]	t [s]	T_i [s]	T_i^2 [s^2]	A [mm]
1	20	126	14,16	0,708	0,501	6,6
2		163	16,13	0,807	0,650	8,5
3		192	17,60	0,880	0,774	10,1
4		224	18,97	0,949	0,900	11,7
5		256	20,19	1,010	1,019	13,4
6		287	21,56	1,078	1,162	15,0
7		315	22,53	1,127	1,269	16,5
8		344	23,44	1,172	1,374	18,0
9		367	24,12	1,206	1,454	19,2
10		389	25,13	1,257	1,579	20,4

3 Opracowanie danych pomiarowych

3.1 Część pierwsza

a) Analiza błędów.

Nie stwierdzamy błędu grubego, gdyż wartości skrajne nie odbiegają zbytnio od średniej arytmetycznej wszystkich wyników:

$$T_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \approx 1,173 \text{ s}, \tag{10}$$

gdzie n to ilość wykonywanych powtórzeń pomiaru czasu.

b) Ocena niepewności pomiaru czasu.

Pomiary były wykonywane dziesięciokrotnie, dlatego wykorzystaliśmy obliczanie niepewności typu A:

$$s(T_0) = \sqrt{\frac{\sum(T_i - T_0)^2}{n-1}} = 0,054 \text{ s}, \tag{11}$$

$$u(T_0) = \frac{s(T_0)}{\sqrt{n}} = 0,0017 \text{ s}. \tag{12}$$

gdzie (11) to estymator odchylenia standardowego, a (12) to estymator odchylenia standardowego średniej.

c) Ocena niepewności pomiaru długości wahadła.

Długość wahadła zmierzyliśmy linijką milimetrową uzyskując wartość l = 344 mm. Przyjmujemy niepewność pomiaru typu B równą: $u(l) = 2$ mm. Ocena ta bierze pod uwagę trudność dobrego przyłożenia linijki do odcinka: środek kuli – punkt zawieszenia wahadła.

d) Prawo przenoszenia niepewności.

Przyspieszenie ziemskie obliczamy jako:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2} \approx 9,872 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \tag{13}$$

Stosując prawo przenoszenia niepewności, obliczamy niepewność złożoną pomiaru przyspieszenia:

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{T_0^2}u(l)\right]^2 + \left[-\frac{8\pi^2 l}{T_0^3}u(T_0)\right]^2} = 0,064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{14}$$

oraz niepewność względną złożoną:

$$\frac{u_c(g)}{g} \approx 0,7\%. \tag{15}$$

e) Obliczanie niepewności rozszerzonej.

Różnica pomiedzy obliczoną wartością przyspieszenia, a wartością tabelaryczną wynosi:

$$|g - g_0| = \left|9,872\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 9,811\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right| = 0,061\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{16}$$

Obliczamy niepewność rozszerzoną wyniku:

$$U(g) = ku_c(g) = 2 \cdot 0,064\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0,128\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{17}$$

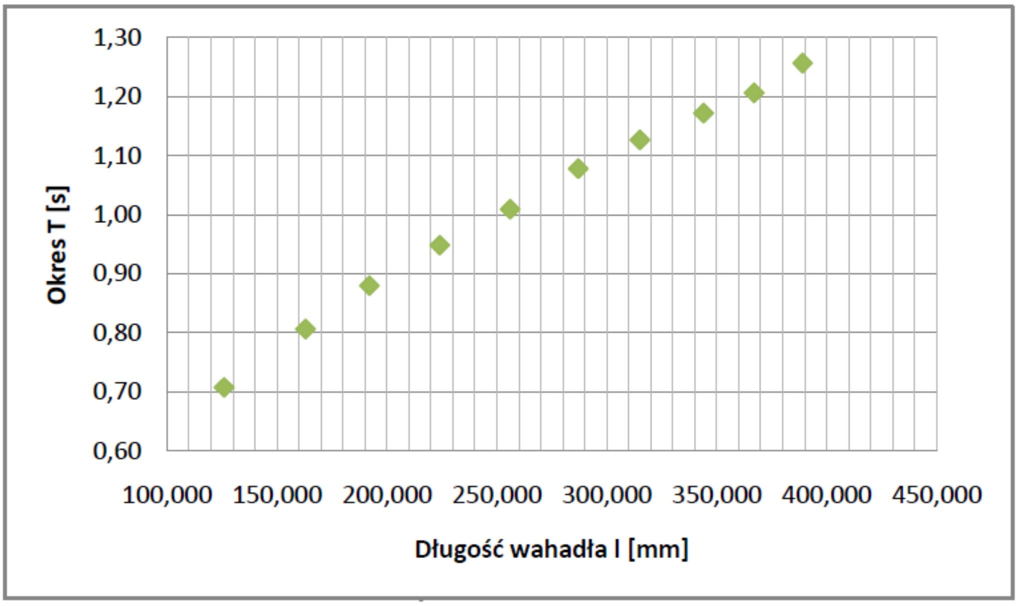
gdzie k to współczynnik rozszerzenia równy 2.

f) Zastosowanie niepewności rozszerzonej do oceny zgodności z wartością dokładną.

Niepewność rozszerzona wyniku jest większa od modułu różnicy pomiędzy obliczoną wartością przyspieszenia, a wartością tabelaryczną. Uznajemy więc, że policzone przyspieszenie jest zgodne z wartością tabelaryczną w zakresie wyznaczonej niepewności.

3.2 Część druga

a) Wykres obrazujący wyniki przebiegu części drugiej doświadczenia.

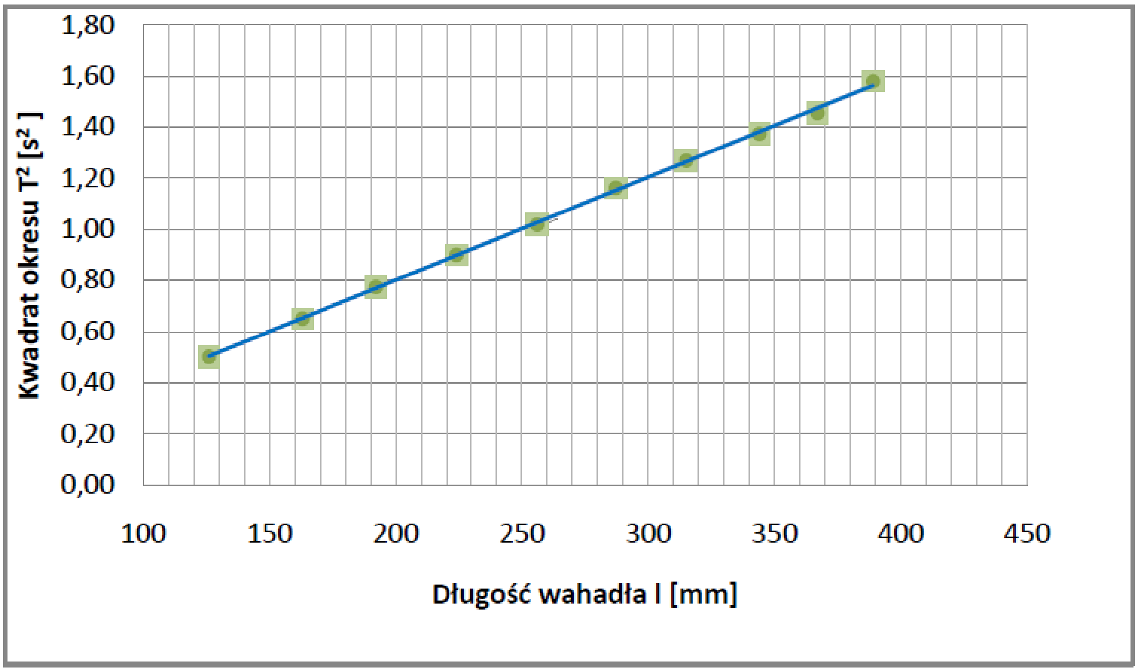


Wykres 1: Wykres zależności okresu od długości wahadła

Wykres (1) jest wykresem funkcji typu $f(x) = \sqrt{x}$, który jest trudny w analizie, dlatego w celu ułatwienia analizy danych stosujemy linearyzację. Podnosimy obie strony wzoru (1) do kwadratu:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \, . \tag{18}$$

b) Wykres regresji liniowej.



Wykres 2: Wykres zależności kwadratu okresu od długości wahadła

c) Obliczanie niepewności rozszerzonej.

Wykorzystując regresję liniową, obliczamy wartość współczynnika a prostej i jej dokładność $u(a)$:

$$a = 4,03 \ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}, \tag{19}$$

$$u(a) = 0,04 \ \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}, \tag{20}$$

Stosując prawo przenoszenia niepewności dla funkcji $g = \frac{4\pi^2}{a}$, wyliczamy niepewność złożoną (21) i rozszerzoną (22) pomiaru przyspieszenia:

$$u_c(g) = 4\pi^2 a^{-2} \cdot u(a) \approx 0,098 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \tag{21}$$

$$U(g) = k \cdot u_c(g) = 2 \cdot 0,098 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0,196 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{22}$$

oraz niepewność względną złożoną:

$$\frac{u_c(g)}{g} \approx 0,1\%. \tag{23}$$

4 Podsumowanie

Opis wielkości	$g\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$u_c(g)\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$U(g)\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\frac{u_c(g)}{g}$
Pomiary przy stałej długości wahadła	9,872	0,064	0,128	0,7 %
Pomiary przy zmiennej długości wahadła	9,796	0,098	0,196	1 %
Wartość tablicowa	9,811	-	-	-

- Pomimo swojej prostoty wahadło matematyczne jest dosyć dokładnym narzędziem do wyznaczania przyspieszenia ziemskiego.
- W obu metodach wyniki są zbliżone do wartości tablicowej, a niepewności niewielkie, co sugeruje, że pomiary zostały przeprowadzone poprawnie.
- Zestawiając obie metody obliczenia przyspieszenia ziemskiego, dokładniejszą okazała się metoda pierwsza (przy stałej długości wahadła). Sposób drugi, mimo wyniku bardziej zbliżonego do wartości tablicowej, ma większą względną niepewność pomiaru.