<table>
<tr><td>EAiIB<br>Informatyka</td><td colspan="2">Pęcak Tomasz<br>Bielech Maciej</td><td>Rok<br>II</td><td>Grupa<br>3a</td><td>Zespół<br>II</td></tr>
<tr><td>Pracownia<br>FIZYCZNA<br>WFiIS AGH</td><td colspan="4">Temat:<br>Fale podłużne w ciałach stałych</td><td>nr ćwiczenia:<br>29</td></tr>
<tr><td>Data wykonania:<br>28.10.2017</td><td>Data oddania:<br>31.10.2017</td><td>Zwrot do poprawki:</td><td>Data oddania:</td><td>Data zaliczenia:</td><td>OCENA:</td></tr>
</table>

# 1 Wstęp

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wartości modułu Younga dla różnych materiałów przy wykorzystaniu równania fali rozchodzącej się w pręcie.

Moduł Younga ($E$) to współczynnik sprężystości podłużnej. Określa on własności sprężyste ciała stałego, charakteryzując podatność materiału na odkształcenia. Jego jednostką jest pascal.

Fala dźwiękowa to rozchodzące się w ośrodku mechaniczne drgania cząteczek tego ośrodka. Na skutek wychylenia częsci pręta z położenia równowagi w jego wnętrzu powstaje fala i zostaje on wprawiony w drgania. Z teorii drgań sprężystych, na podstawie równania ruchu fali, wiemy, że prędkość rozchodzenia się fali w ciele drgającym zależy od jego Modułu Younga oraz gęstości. Zależność tę opisuje wzór:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{1}$$

który po przekształceniach pozwala nam obliczyć moduł Younga danego materiału:

$$E = \rho v^2. \tag{2}$$

Interferencja jest zjawiskiem nakładania się fal, co prowadzi do wzmocnień i wygaszeń amplitudy. Szczególnym przypadkiem interfencji jest fala stojąca, która powstaje w wyniku nałożenia się dwóch takich samych fal, poruszających się w tym samym kierunku, ale o przeciwynch zwrotach. Z takim przypadkiem mamy do czynienia w pręcie, gdzie interferują fala padająca i odbita. Długość fali stojącej wynosi: $\lambda = 2l$, gdzie l to odległość miedzy jej węzłami. Korzystając z tej zależności możemy wyliczyć prędkość fali w pręcie jako: $v = 2lf$. Skąd wyproadzamy wzór roboczy na moduł Younga, z którego korzystamy w ćwiczeniu:

$$E = 4\rho l^2 f^2 \tag{3}$$

Szybka transformata Fouriera pozwala nam wyznaczyć częstotliwości kolejnych haramoniczych fali, których długości obliczamy jako: $\lambda = \frac{2l}{n}$,gdzie $n$ to numer harmonicznej.

## 2 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie wykonywaliśmy dla drutów: mosiężnego, stalowego, miedzianego i aluminiowego. Dla każdego z nich powtórzyliśmy nastepujące czynności:

- W pierwszym kroku dokonaliśmy pomiaru wymiarów próbki danego materiału w celu wyznaczenia jego objętości. W zależności od jej kształtu stosowaliśmy: taśmę mierniczą o dokładności $\pm 1$ mm lub suwmiarkę $\pm 0.05$ mm.
- Następnie każdą próbkę zwarzyliśmy. Ze względu na różne wielkości próbek używaliśmy wag o różnych dokładnościach( $\pm 1$g lub $\pm 0.001$g).
- W kolejnym kroku zmierzyliśmy długość pręta przy pomocy taśmy mierniczej.
- Na końcu dokonaliśmy pomiaru częstotliwości harmoniczych przy pomocy oscyloskopu w programie Zelscope. W tym celu umieśliśmy pręt na nitkach stojaka, by mógł swobonie drgać. Ustawiliśmy mikrofon w odpowiedniej odległości od drutu. Następnie uderzaliśmy młotkiem w koniec pręta i zapisywaliśmy wyniki uzykane w programie.

## 3 Opracowanie danych pomiarowych

Tabela 1: Pomiary dla materiału miedzianego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 1 | 1180 | 3,60 | 4248 |
| 2 | 2160 | 1,80 | 3888 |
| 3 | 3240 | 1,20 | 3888 |
| 4 | 4280 | 0,90 | 3852 |
| 5 | 5260 | 0,72 | 3787,2 |
| 6 | 6200 | 0,60 | 3720 |

Tabela 2: Pomiary dla materiału aluminiowego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 1 | 2440 | 1,98 | 4831,2 |
| 2 | 4960 | 0,99 | 4910,4 |
| 3 | 6840 | 0,66 | 4514,4 |
| 4 | 9560 | 0,50 | 4732,2 |
| 5 | 11340 | 0,40 | 4490,64 |
| 6 | 12360 | 0,33 | 4078,8 |

Tabela 3: Pomiary dla materiału mosiężnego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 1 | 1690 | 1,98 | 3346,2 |
| 2 | 3460 | 0,99 | 3425,4 |
| 3 | 5160 | 0,66 | 3405,6 |
| 4 | 6840 | 0,50 | 3385,8 |
| 5 | 8620 | 0,40 | 3413,52 |
| 6 | 12000 | 0,33 | 3960 |

Tabela 4: Pomiary dla materiału stalowego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|---|---|---|---|
| 1 | 1420 | 3,60 | 5112 |
| 2 | 2900 | 1,80 | 5220 |
| 3 | 4300 | 1,20 | 5160 |
| 4 | 5720 | 0,90 | 5148 |
| 5 | 7120 | 0,72 | 5126,4 |
| 6 | 8600 | 0,60 | 5160 |

### 3.1 Analiza błedów

Na czerwono zostały oznaczone pomiary, których prędkość znacząco odbiega od średniej. Utożsamiamy je z błedami grubymi, które najprawdopodniej są wynikiem błędnego odczytu częstotliwości.

### 3.2 Pomiary i ich niepewności.

Wszystkie wielkości mierzyliśmy niewielką ilość razy, dlatego dla każdej z nich przyjmujemy ocenę niepewności typu B, co w naszym przypadku będzie odpowiadać dokładności przyrządu pomiarowego.
W każdym przypadku $u(f) = 20$ Hz.

Tablica 1: Niepewności standardowe miedzi

| Symbol | $d$ [mm] | $d_w$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g] |
|---|---|---|---|---|
| Wartość(niepewność) | 15,2(5) | 17,9(5) | 1801(1) | 761(1) |

Tablica 2: Niepewności standardowe aluminium

| Symbol | $h$ [mm] | $d$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g] |
|---|---|---|---|---|
| Wartość(niepewność) | 43,9(5) | 4,9(5) | 999(1) | 23,89(1) |

Tablica 3: Niepewności standardowe stal

| Symbol | $h$ [mm] | $b$ [mm] | $c$ [mm] | $m$ [g] |
|---|---|---|---|---|
| Wartość(niepewność) | 19,8(5) | 14,1(5) | 14,2(5) | 30,86(1) |

Tablica 4: Niepewności standardowe mosiadz

| Symbol | $d$ [mm] | $h$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g] |
|---|---|---|---|---|
| Wartość(niepewność) | 5,9(5) | 31,1(5) | 1800(1) | 74(1) |

Niepewność złożona powierzchni prostokąta:

$$u(P_P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_P}{\partial b}u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial P_p}{\partial a}u(a)\right)^2} = \sqrt{\left(bu(a)\right)^2 + \left(au(b)\right)^2} \tag{4}$$

Niepewność złożona powierzchni koła:

$$u(P_p) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_P}{\partial d}u(d)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}du(d)\right)^2} \tag{5}$$

Niepewność złożona objętości:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h}u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_p}u(P_p)\right)^2} = \sqrt{\left(hu(P_p)\right)^2 + \left(P_p u(h)\right)^2} \tag{6}$$

Niepewność złożona gęstości:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{m}{V^2}u(V)\right)^2 + \left(\frac{1}{V}u(m)\right)^2} \tag{7}$$

Niepewność złożona prędkości:

$$u(v) = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f}u(f)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(\lambda u(f)\right)^2 + \left(fu(\lambda)\right)^2} \tag{8}$$

Niepewność złożona modułu Younga:

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \rho}u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v}u(v)\right)^2} = \sqrt{\left(v^2 u(\rho)\right)^2 + \left(2\rho v u(v)\right)^2} \tag{9}$$

Korzystając z odpowiednich wzorów(zależnych od kszatłtu próbki) obliczamy niepewność złożoną modułu Younga dla wszystkich metali.

## 4 Podsumowanie

| Opis wielkości | $E_0$ [GPa] | $E$ [GPa] | $U(E)$ [GPa] | $\frac{u(E)}{E}$ |
|---|---|---|---|---|
| Mosiądz | 100 | 100,3 | 4,93 | 2,46 % |
| Stal | 210-220 | 215,5 | 5,55 | 1,29 % |
| Aluminium | 70 | 63,6 | 2,82 | 2,21 % |
| Miedź | 110-130 | 86,4 | 4,86 | 2,81% |

- Zarówno dla mosiądzu jak i dla stali otrzymane przez nas wyniki pokrywają się z wartościami tabelarycznymi. Świadczy to o poprawności wykonanych pomiarów.

- W przypadku aluminium uzyskany wynik, nawet po uwzględnieniu niepewności rozszerzonej, nie pokrywa się z wartością dokładną. Te pomiary zostały dokonane jako pierwsze i odczytywane wartości częstotliwości nie są dokładne. Mamy tutaj do czynienia z błedem systematycznym, wynikającym z nieodpowiednio umieszczoną skalą w oprogramowaniu. Po uwzględnieniu przesunięcia o +200 Hz (o taką różnicę podejrzewamy odczyt ze skali i odczyt myszą) moduł Younga równa się: $E = 68,6 \pm 3$ Gpa, co jest wynikiem poprawnym w zakresie obliczonej niepewności.

- Najgorsze wyniki otrzymaliśmy dla miedzi. Przyczyną tak dużej rozbieżności jest najprawdopodobniej źle obliczona gęstość, której wartość dla naszych pomiarów wynosi $\rho = 5900 \pm 304 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ , przy wartości tabelarycznej wynoszącej $\rho_0 = 8900 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Po zamianie gęstości na dokładną moduł Younga badanej próbki miedzi jest równy: $E = 130 \pm 6$GPa, co jest zgodne z wartością tabelaryczną w zakresie obliczonej niepewności. Możemy przypuszczać, że dokonaliśmy złych pomiarów rurki miedzianej, lub ewentualnie była ona wykonana z innego metalu.