

|                                   |  |                    |               |                     |
|-----------------------------------|--|--------------------|---------------|---------------------|
| EaIB<br>Informatyka               | Pęcak Tomasz<br>Bielech Maciej                   | Rok<br>II          | Grupa<br>3a   | Zespół<br>II        |
| Pracownia<br>FIZYCZNA<br>WFiS AGH | Temat:<br><b>Fale podłużne w ciałach stałych</b> |                    |               | nr ćwiczenia:<br>29 |
| Data wykonania:<br>28.10.2017     | Data oddania:<br>31.10.2017                      | Zwrot do poprawki: | Data oddania: | Data zaliczenia:    |
|                                   |  |                    |               | OCENA:              |

## 1 Wstęp

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wartości modułu Younga dla różnych materiałów przy wykorzystaniu równania fali rozchodzącej się w pręcie.

Moduł Younga ( $E$ ) to współczynnik sprężystości podłużnej. Określa on własności sprężyste ciała stałego, charakteryzując podatność materiału na odkształcenia. Jego jednostką jest pascal.

Fala dźwiękowa to rozchodzące się w ośrodku mechaniczne drgania cząteczek tego ośrodka. Na skutek wychylenia części pręta z położenia równowagi w jego wnętrzu powstaje fala i zostaje on wprowadzony w drgania. Z teorii drgań sprężystych, na podstawie równania ruchu fali, wiemy, że prędkość rozchodzenia się fali w ciele drgającym zależy od jego Modułu Younga oraz gęstości. Zależność tę opisuje wzór:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

który po przekształceniach pozwala nam obliczyć moduł Younga danego materiału:

$$E = \rho v^2. \quad (2)$$

Interferencja jest zjawiskiem nakładania się fal, co prowadzi do wzmocnień i wygaszeń amplitudy. Szczególnym przypadkiem interferencji jest fala stojąca, która powstaje w wyniku nałożenia się dwóch takich samych fal, poruszających się w tym samym kierunku, ale o przeciwnych zwrotach. Z takim przypadkiem mamy do czynienia w pręcie, gdzie interferują fala padająca i odbita. Długość fali stojącej wynosi:  $\lambda = 2l$ , gdzie  $l$  to odległość między jej węzłami. Korzystając z tej zależności możemy wyliczyć prędkość fali w pręcie jako:  $v = 2lf$ . Skąd wyprowadzamy wzór roboczy na moduł Younga, z którego korzystamy w ćwiczeniu:

$$E = 4\rho l^2 f^2 \quad (3)$$

Szybka transformata Fouriera pozwala nam wyznaczyć częstotliwości kolejnych harmonicznych fali, których długości obliczamy jako:  $\lambda = \frac{2l}{n}$ , gdzie  $n$  to numer harmonicznej.

## 2 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie wykonywaliśmy dla drutów: mosiężnego, stalowego, miedzianego i aluminiowego. Dla każdego z nich powtórzyliśmy następujące czynności:

- W pierwszym kroku dokonaliśmy pomiaru wymiarów próbki danego materiału w celu wyznaczenia jego objętości. W zależności od jej kształtu stosowaliśmy: taśmę mierniczą o dokładności  $\pm 1$  mm lub suwmiarkę  $\pm 0.05$  mm.
- Następnie każdą próbkę zwarzyliśmy. Ze względu na różne wielkości próbek używaliśmy wag o różnych dokładnościach ( $\pm 1$ g lub  $\pm 0.001$ g).
- W kolejnym kroku zmierzaliśmy długość pręta przy pomocy taśmy mierniczej.
- Na końcu dokonaliśmy pomiaru częstotliwości harmonicznych przy pomocy oscyloskopu w programie Zelscope. W tym celu umieściliśmy pręt na nitkach stojaka, by mógł swobodnie drgać. Ustawiliśmy mikrofon w odpowiedniej odległości od drutu. Następnie uderzaliśmy młotkiem w koniec pręta i zapisywaliśmy wyniki uzyskane w programie.

## 3 Opracowanie danych pomiarowych

Tabela 1: Pomiary dla materiału miedzianego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|-----------------|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1               | 1180                   | 3,60                       | 4248                    |
| 2               | 2160                   | 1,80                       | 3888                    |
| 3               | 3240                   | 1,20                       | 3888                    |
| 4               | 4280                   | 0,90                       | 3852                    |
| 5               | 5260                   | 0,72                       | 3787,2                  |
| 6               | 6200                   | 0,60                       | 3720                    |

Tabela 2: Pomiary dla materiału aluminiowego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|-----------------|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1               | 2440                   | 1,98                       | 4831,2                  |
| 2               | 4960                   | 0,99                       | 4910,4                  |
| 3               | 6840                   | 0,66                       | 4514,4                  |
| 4               | 9560                   | 0,50                       | 4732,2                  |
| 5               | 11340                  | 0,40                       | 4490,64                 |
| 6               | 12360                  | 0,33                       | 4078,8                  |

Tabela 3: Pomiary dla materiału mosiężnego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|-----------------|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1               | 1690                   | 1,98                       | 3346,2                  |
| 2               | 3460                   | 0,99                       | 3425,4                  |
| 3               | 5160                   | 0,66                       | 3405,6                  |
| 4               | 6840                   | 0,50                       | 3385,8                  |
| 5               | 8620                   | 0,40                       | 3413,52                 |
| 6               | 12000                  | 0,33                       | 3960                    |

Tabela 4: Pomiary dla materiału stalowego.

| Nr harmonicznej | Częstotliwość $f$ [Hz] | Długość fali $\lambda$ [m] | Prędkość fali $v$ [m/s] |
|-----------------|------------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1               | 1420                   | 3,60                       | 5112                    |
| 2               | 2900                   | 1,80                       | 5220                    |
| 3               | 4300                   | 1,20                       | 5160                    |
| 4               | 5720                   | 0,90                       | 5148                    |
| 5               | 7120                   | 0,72                       | 5126,4                  |
| 6               | 8600                   | 0,60                       | 5160                    |

### 3.1 Analiza błędów

Na czerwono zostały oznaczone pomiary, których prędkość znacząco odbiega od średniej. Utożsamiamy je z błędami grubymi, które najprawdopodobniej są wynikiem błędnego odczytu częstotliwości.

### 3.2 Pomiary i ich niepewności.

Wszystkie wielkości mierzyliśmy niewielką ilość razy, dlatego dla każdej z nich przyjmujemy ocenę niepewności typu B, co w naszym przypadku będzie odpowiadać dokładności przyrządu pomiarowego.

W każdym przypadku  $u(f) = 20$  Hz.

Tablica 1: Niepewności standardowe miedzi

| Symbol              | $d$ [mm] | $d_w$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g] |
|---------------------|----------|------------|----------|---------|
| Wartość(niepewność) | 15,2(5)  | 17,9(5)    | 1801(1)  | 761(1)  |

Tablica 2: Niepewności standardowe aluminium

| Symbol              | $h$ [mm] | $d$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g]  |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|
| Wartość(niepewność) | 43,9(5)  | 4,9(5)   | 999(1)   | 23,89(1) |

Tablica 3: Niepewności standardowe stal

| Symbol              | $h$ [mm] | $b$ [mm] | $c$ [mm] | $m$ [g]  |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|
| Wartość(niepewność) | 19,8(5)  | 14,1(5)  | 14,2(5)  | 30,86(1) |

Tablica 4: Niepewności standardowe mosiadz

| Symbol              | $d$ [mm] | $h$ [mm] | $l$ [mm] | $m$ [g] |
|---------------------|----------|----------|----------|---------|
| Wartość(niepewność) | 5,9(5)   | 31,1(5)  | 1800(1)  | 74(1)   |

Niepewność złożona powierzchni prostokąta:

$$u(P_p) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_p}{\partial b} u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial P_p}{\partial a} u(a)\right)^2} = \sqrt{\left(bu(a)\right)^2 + \left(au(b)\right)^2} \quad (4)$$

Niepewność złożona powierzchni koła:

$$u(P_p) = \sqrt{\left(\frac{\partial P_p}{\partial d} u(d)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} du(d)\right)^2} \quad (5)$$

Niepewność złożona objętości:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial h} u(h)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial P_p} u(P_p)\right)^2} = \sqrt{\left(hu(P_p)\right)^2 + \left(P_p u(h)\right)^2} \quad (6)$$

Niepewność złożona gęstości:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial V} u(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{m}{V^2} u(V)\right)^2 + \left(\frac{1}{V} u(m)\right)^2} \quad (7)$$

Niepewność złożona prędkości:

$$u(v) = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f} u(f)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(\lambda u(f)\right)^2 + \left(fu(\lambda)\right)^2} \quad (8)$$

Niepewność złożona modułu Younga:

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v} u(v)\right)^2} = \sqrt{\left(v^2 u(\rho)\right)^2 + \left(2\rho v u(v)\right)^2} \quad (9)$$

Korzystając z odpowiednich wzorów(zależnych od kształtu próbki) obliczamy niepewność złożoną modułu Younga dla wszystkich metali.

## 4 Podsumowanie

| Opis wielkości | $E_0$ [GPa] | $E$ [GPa] | $U(E)$ [GPa] | $\frac{u(E)}{E}$ |
|----------------|-------------|-----------|--------------|------------------|
| Mosiadz        | 100         | 100,3     | 4,93         | 2,46 %           |
| Stal           | 210-220     | 215,5     | 5,55         | 1,29 %           |
| Aluminium      | 70          | 63,6      | 2,82         | 2,21 %           |
| Miedź          | 110-130     | 86,4      | 4,86         | 2,81%            |

- Zarówno dla mosiądzu jak i dla stali otrzymane przez nas wyniki pokrywają się z wartościami tabelarycznymi. Świadczy to o poprawności wykonanych pomiarów.
- W przypadku aluminium uzyskany wynik, nawet po uwzględnieniu niepewności rozszerzonej, nie pokrywa się z wartością dokładną. Te pomiary zostały dokonane jako pierwsze i odczytane wartości częstotliwości nie są dokładne. Mamy tutaj do czynienia z błędem systematycznym, wynikającym z nieodpowiednio umieszczoną skalą w oprogramowaniu. Po uwzględnieniu przesunięcia o +200 Hz (o taką różnicę podejrzewamy odczyt ze skali i odczyt myszą) moduł Younga równa się:  $E = 68,6 \pm 3 \text{ GPa}$ , co jest wynikiem poprawnym w zakresie obliczonej niepewności.
- Najgorsze wyniki otrzymaliśmy dla miedzi. Przyczyną tak dużej rozbieżności jest najprawdopodobniej źle obliczona gęstość, której wartość dla naszych pomiarów wynosi  $\rho = 5900 \pm 304 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , przy wartości tabelarycznej wynoszącej  $\rho_0 = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Po zamianie gęstości na dokładną moduł Younga badanej próbki miedzi jest równy:  $E = 130 \pm 6 \text{ GPa}$ , co jest zgodne z wartością tabelaryczną w zakresie obliczonej niepewności. Możemy przypuszczać, że dokonaliśmy złych pomiarów rurki miedzianej, lub ewentualnie była ona wykonana z innego metalu.