

EaIB Informatyka	Pęcak Tomasz Bielech Maciej		Rok II	Grupa 3a	Zespół II
Pracownia FIZYCZNA WFiIS AGH	Temat: Moduł Younga				nr ćwiczenia: 11
Data wykonania: 21.10.2017	Data oddania: 24.10.2017	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	OCENA:

1 Wstęp

Celem ćwiczenia było wyznaczenie wartości modułu Younga poprzez pomiar wydłużenia drutu z mosiądzu i stali. Aby wyznaczyć moduł Younga należało obciążać druty coraz większą siłą.

Moduł Younga (E) nazywany współczynnikiem sprężystości podłużnej jest to wielkość określająca własności sprężyste ciała stałego, charakteryzująca podatność materiału na odkształcenia podłużne przy rozciąganiu, ściskaniu, czy zginaniu.

W prawie Hooke'a (1) moduł Younga stanowi współczynnik proporcjonalności między naprężeniem i odkształceniem:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1)$$

Wartość modułu Younga wyznaczana jest doświadczalnie. Nazwa pochodzi od nazwiska Thomasa Younga. Jednostką modułu Younga jest pascal [Pa].

$$E = \frac{Fl}{S\Delta l} \quad (2)$$

$$F = mg \quad (3)$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \quad (4)$$

Przekształcając wzór na moduł Younga (2), korzystając z wzorów na siłę (3) i powierzchnię przekroju druta (4) otrzymujemy następującą zależność:

$$E = \frac{4mgl}{\pi d^2 \Delta l}. \quad (5)$$

W celu oszacowania modułu Younga skorzystaliśmy z następujących metod:

- Wykonywanie wykresów
- Regresja liniowa
- Linearyzacja nieliniowych zależności funkcyjnych
- Wykorzystanie współczynnika prostej do obliczeń

2 Wykonanie ćwiczenia

Ćwiczenie wykonywaliśmy dla drutów: mosiężnego i stalowego. Dla każdego z nich wykonaliśmy następujące czynności:

- W pierwszym kroku dokonaliśmy pomiaru długości drutu przy użyciu przymiaru milimetrowego z dokładnością 1 mm.
- Następnie po wcześniejszym obciążeniu drutu masą około 2kg zmierzaliśmy średnicę drutu za pomocą śruby mikrometrycznej z dokładnością 0,01 mm. Pomiaru tego dokonaliśmy w pięciu miejscach, aby sprawdzić czy drut ma stałą średnicę.
- Kolejnym krokiem było opróżnienie szalki z odważników i wyzerowanie czujnika mikrometrycznego.
- Po tym obciążaliśmy szalkę przez dokładanie kolejnych odważników notując w tabeli sumaryczną masę odważników i wynikające wydłużenie drutu. Odważniki wazyliśmy na wadze o dokładności do 1 g. Pomiary wykonywaliśmy przy dokładaniu odważników (\uparrow) i przy ich zdejmowaniu (\downarrow), dla lepszej dokładności.
- Wykonując ćwiczenie dbaliśmy o to, aby odkształcenie drutu było sprężyste, gdyż po przekroczeniu granicy sprężystości drut uległ by odkształceniu nieodwracalnemu, co niekorzystnie wpłynęłoby na wyniki obliczeń.
- Wartości odczytane z czujnika przenieśliśmy do tabel: (1, 2) dla mosiądzu i (3) dla stali. Dla mosiądzu wykonaliśmy dwie serie pomiarów ze względu na błąd systematyczny, o którym domyślaliśmy się wykonując pomiary pierwszej serii (więcej w sekcji 3).

Tabela 1: Pomiary dla drutu mosiężnego

Tabela 2: Druga seria pomiarów dla drutu mosiężnego

Masa odważników [kg]	Siła F [N]	Wskazanie czujnika \uparrow [mm]	Wskazanie czujnika \downarrow [mm]	Wydłużenie średnie Δ [mm]
1,033	10,135	0,26	0,3	0,14
1,529	15,001	0,43	0,48	0,23
2,044	20,054	0,68	0,74	0,36
2,540	24,920	0,89	0,9	0,45
3,092	30,336	1,1	1,18	0,57
3,588	35,202	1,3	1,32	0,66
4,119	40,412	1,49	1,58	0,77
4,615	45,278	1,65	1,69	0,84
5,114	50,173	1,87	1,96	0,96
5,610	55,040	2,04	2,04	1,02

Tabela 3: Pomiary dla drutu stalowego

Masa odważników [kg]	Siła F [N]	Wskazanie czujnika \uparrow [mm]	Wskazanie czujnika \downarrow [mm]	Wydłużenie średnie Δl [mm]
1,033	10,135	0,46	0,54	0,25
2,044	20,054	0,87	1	0,47
3,090	30,316	1,26	1,37	0,66
4,118	40,402	1,61	1,77	0,85
5,112	50,154	1,92	2,08	1,00
6,100	59,847	2,22	2,4	1,16
7,082	69,482	2,52	2,66	1,30
8,048	78,959	2,82	2,94	1,44
9,076	89,045	3,1	3,11	1,55
9,572	93,911	3,26	3,26	1,63

3 Opracowanie danych pomiarowych

- a) Ocena niepewności pomiaru długości drutu.

Pomiaru długości drutu dokonywaliśmy przymiarem milimetrowym z dokładnością do 1 mm. Jednak ze względu na odległość przymiaru od drutu przyjmujemy niepewność pomiaru typu B większą od dokładności przyrządu pomiarowego: $u(l) = 2 \text{ mm}$.

- b) Ocena niepewności pomiaru wydłużenia.

Pomiaru wydłużenia dokonywaliśmy czujnikiem mikrometrycznego z dokładnością do 0,01 mm. Przyjmujemy więc niepewność pomiaru typu B równą dokładności przyrządu pomiarowego: $u(\Delta l) = 0,01 \text{ mm}$.

- c) Ocena niepewności pomiaru średnicy drutu.

Pomiaru średnicy drutu dokonywaliśmy śrubą mikrometryczną z dokładnością do 0,01 mm. Przyjmujemy więc niepewność pomiaru typu B równą dokładności przyrządu pomiarowego: $u(d) = 0,01 \text{ mm}$.

- d) Ocena niepewności pomiaru masy ciężarków.

Pomiaru masy dokonywaliśmy wagą elektroniczną z dokładnością do 1 g. Przyjmujemy więc niepewność pomiaru typu B równą: $u(m) = 1 \text{ g}$ dla każdego ciężarka.

3.1 Opracowanie danych dla drutu mosiężnego.

Wykres 1: Wykres regresji liniowej dla pomiaru modułu Younga mosiądzu.

- a) Analiza błędów

Nie stwierdziliśmy wystąpienia błędów grubych, gdyż na wykresie (1) nie zauważamy pomiarów odstających.

b) Prawo przenoszenia niepewności.

Obliczając niepewność złożoną (6) oraz rozszerzoną (7) dochodzimy do wyników:

$$u_c(E) = \sqrt{\left[\frac{4mg}{\pi d^2 \Delta l} u(l)\right]^2 + \left[-\frac{8mgl}{\pi d^3 \Delta l} u(d)\right]^2 + \left[-\frac{4mgl}{\pi d^2 \Delta l^2} u(\Delta l)\right]^2 + \left[\frac{4gl}{\pi d^2 \Delta l} u(m)\right]^2} \quad (6)$$

$$u_c(E) = 0,XXX \text{ GPa},$$

$$U(E) = k \cdot u_c(E) = 2 \cdot 0,XXX \text{ GPa} = 0,XXX \text{ GPa} \quad (7)$$

Niepewność względna złożona jest równa:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(l)}{l}\right]^2 + \left[-2\frac{u(d)}{d}\right]^2 + \left[-\frac{u(\Delta l)}{\Delta l}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2} \quad (8)$$

$$\frac{u_c(E)}{E} = 0,XX\%$$

c) Zastosowanie niepewności rozszerzonej do oceny zgodności z wartością dokładną.

Różnica pomiędzy obliczoną wartością modułu Younga, a wartością tabelaryczną wynosi:

$$|E - E_0| = |X,XXX \text{ GPa} - X,XXX \text{ GPa}| = X,XXX \text{ GPa}. \quad (9)$$

Niepewność rozszerzona wyniku jest mniejsza od modułu różnicy pomiędzy obliczoną wartością przyspieszenia, a wartością tabelaryczną. Nie możemy więc uznać, że policzona wartość modułu Younga jest zgodna z wartością tabelaryczną w zakresie wyznaczonej niepewności. Wyniki pomiarów w przybliżeniu liniowe i niezgodny wynik mogą świadczyć o błędzie systematycznym. Było to złe wyzerowanie czujnika, dlatego każdy z pomiarów wskazuje niższą wartość wydłużenia drutu niż spodziewana. Błąd ten zauważyliśmy podczas wykonywania pomiarów, dlatego wykonaliśmy kolejną serię pomiarów dla drutu mosiężnego.

3.2 Opracowanie danych dla drutu mosiężnego. Wyniki drugiej serii pomiarów

a) Analiza błędów

Nie stwierdziliśmy wystąpienia błędów grubych, gdyż na wykresie (2) nie zauważamy pomiarów odstających.

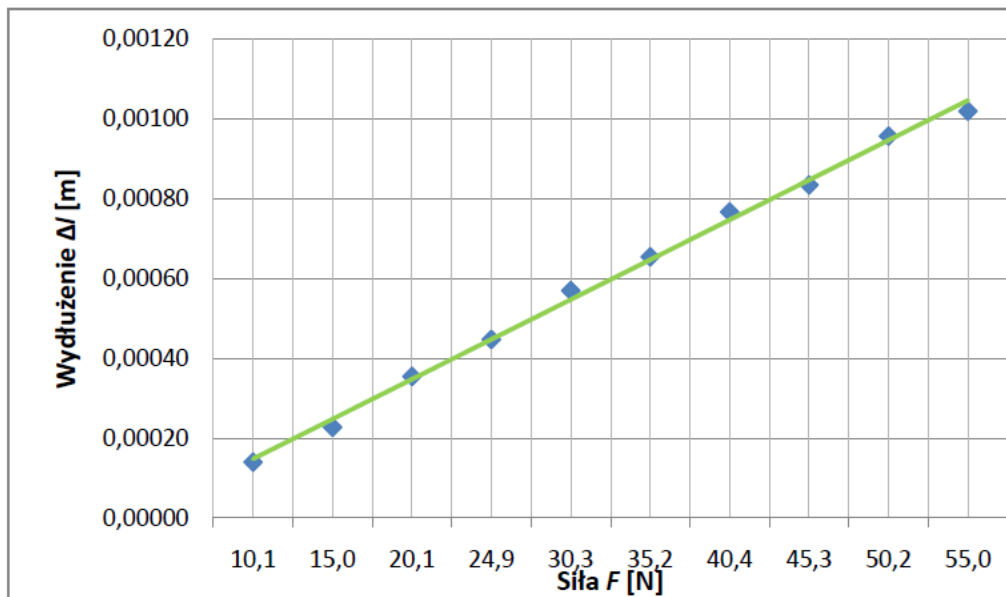
b) Prawo przenoszenia niepewności.

Obliczając niepewność złożoną (10) oraz rozszerzoną (11) dochodzimy do wyników:

$$u_c(E) = \sqrt{\left[\frac{4mg}{\pi d^2 \Delta l} u(l)\right]^2 + \left[-\frac{8mgl}{\pi d^3 \Delta l} u(d)\right]^2 + \left[-\frac{4mgl}{\pi d^2 \Delta l^2} u(\Delta l)\right]^2 + \left[\frac{4gl}{\pi d^2 \Delta l} u(m)\right]^2} \quad (10)$$

$$u_c(E) = 0,XXX \text{ GPa},$$

$$U(E) = k \cdot u_c(E) = 2 \cdot 0,XXX \text{ GPa} = 0,XXX \text{ GPa} \quad (11)$$



Wykres 2: Wykres regresji liniowej dla drugiej serii pomiaru modułu Younga mosiądzu.

Niepewność względna złożona jest równa:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(l)}{l}\right]^2 + \left[-2\frac{u(d)}{d}\right]^2 + \left[-\frac{u(\Delta l)}{\Delta l}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2} \quad (12)$$

$$\frac{u_c(E)}{E} = 0,XX\%$$

c) Zastosowanie niepewności rozszerzonej do oceny zgodności z wartością dokładną.

Różnica pomiędzy obliczoną wartością modułu Younga, a wartością tabelaryczną wynosi:

$$|E - E_0| = |X,XXX \text{ GPa} - X,XXX \text{ GPa}| = X,XXX \text{ GPa}. \quad (13)$$

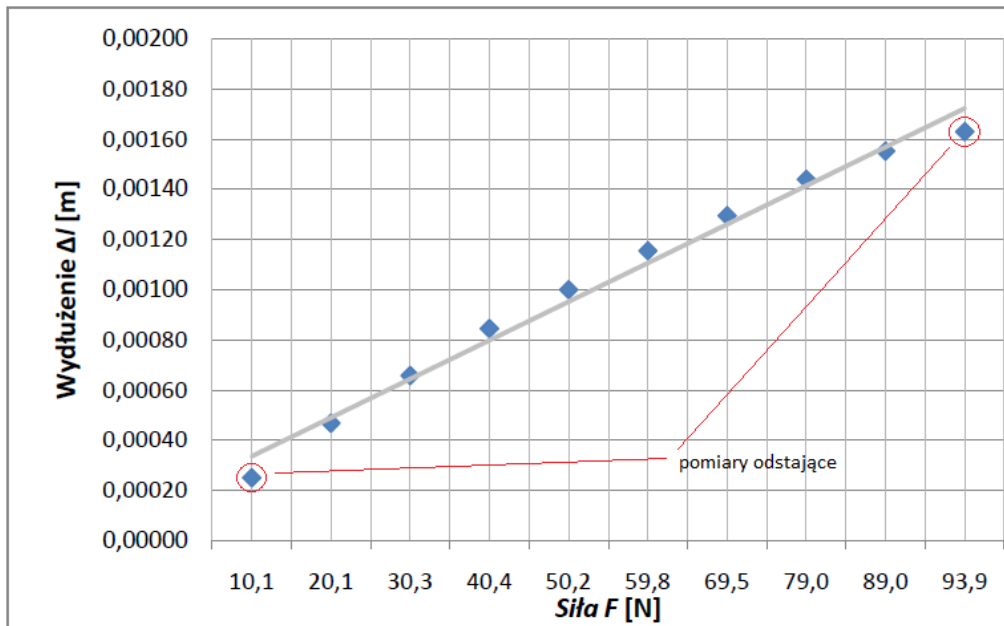
Wyniki drugiej serii pomiarów dla drutu mosiężnego potwierdziły nasze przypuszczenia odnośnie złego wyzerowania czujnika. Tym razem niepewność rozszerzona wyniku jest większa od modułu różnicy pomiędzy obliczoną wartością modułu Younga, a wartością tabelaryczną. Uznajemy więc, że policzona wartość modułu Younga jest zgodna z wartością tabelaryczną w zakresie wyznaczonej niepewności.

3.3 Opracowanie danych dla drutu stalowego.

a) Analiza błędów

Stwierdziliśmy wystąpienie dwóch błędów grubych. Błędy te zaznaczyliśmy na wykresie (3) jako pomiary odstające. Błędy te mogły zostać spowodowane niedokładnym wyzerowaniem czujnika, wygięciami druta lub błędnym odczytem pomiaru z czujnika.

b) Prawo przenoszenia niepewności.



Wykres 3: Wykres regresji liniowej dla pomiaru modułu Younga stali.

Obliczając niepewność złożoną (14) oraz rozszerzoną (15) dochodzimy do wyników:

$$u_c(E) = \sqrt{\left[\frac{4mg}{\pi d^2 \Delta l} u(l)\right]^2 + \left[-\frac{8mgl}{\pi d^3 \Delta l} u(d)\right]^2 + \left[-\frac{4mgl}{\pi d^2 \Delta l^2} u(\Delta l)\right]^2 + \left[\frac{4gl}{\pi d^2 \Delta l} u(m)\right]^2} \quad (14)$$

$$u_c(E) = 0,XXX \text{ GPa},$$

$$U(E) = k \cdot u_c(E) = 2 \cdot 0,XXX \text{ GPa} = 0,XXX \text{ GPa} \quad (15)$$

Niepewność względna złożona jest równa:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left[\frac{u(l)}{l}\right]^2 + \left[-2\frac{u(d)}{d}\right]^2 + \left[-\frac{u(\Delta l)}{\Delta l}\right]^2 + \left[\frac{u(m)}{m}\right]^2} \quad (16)$$

$$\frac{u_c(E)}{E} = 0,XX\%$$

c) Zastosowanie niepewności rozszerzonej do oceny zgodności z wartością dokładną.

Różnica pomiędzy obliczoną wartością modułu Younga, a wartością tabelaryczną wynosi:

$$|E - E_0| = |X,XXX \text{ GPa} - X,XXX \text{ GPa}| = X,XXX \text{ GPa}. \quad (17)$$

Niepewność rozszerzona wyniku jest większa od modułu różnicy pomiędzy obliczoną wartością przyspieszenia, a wartością tabelaryczną. Uznajemy więc, że policzona wartość modułu Younga jest zgodna z wartością tabelaryczną w zakresie wyznaczonej niepewności.

4 Podsumowanie

Opis wielkości	Wartość tablicowa [GPa]	E [GPa]	$u(E)$ [GPa]	$U(E)$ [GPa]	$\frac{u(E)}{E}$
Pomiary drutu mosiężnego	Tab	9,872	0,064	0,128	0,7 %
Pomiary drutu stalowego	Tab	9,796	0,098	0,196	1 %