Laboratorium problemowe
Suwnica 3-D

Maciej Cebula
Maciej Talar

Spis treści

Laboratorium nr 1

1.1 Cel zajęć

Celem zajęć jest zaproponowanie sposobu sterowania suwnicą 3D, które umożliwi przetransportowanie podwieszonego ładunku pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni. Zadanie to polega na przeprowadzeniu szeregu badań, na bazie których to zaprojektowany zostanie regulator realizujący postawione zadanie. Wartości sterowania w tym przypadku będą podawane na trzy silniki prądu stałego odpowiedzialne za przemieszczanie wózka z podwieszonym ładunkiem wzdłuż trzech osi. Przebieg całego zadania można wstępnie podzielić na następujące etapy:

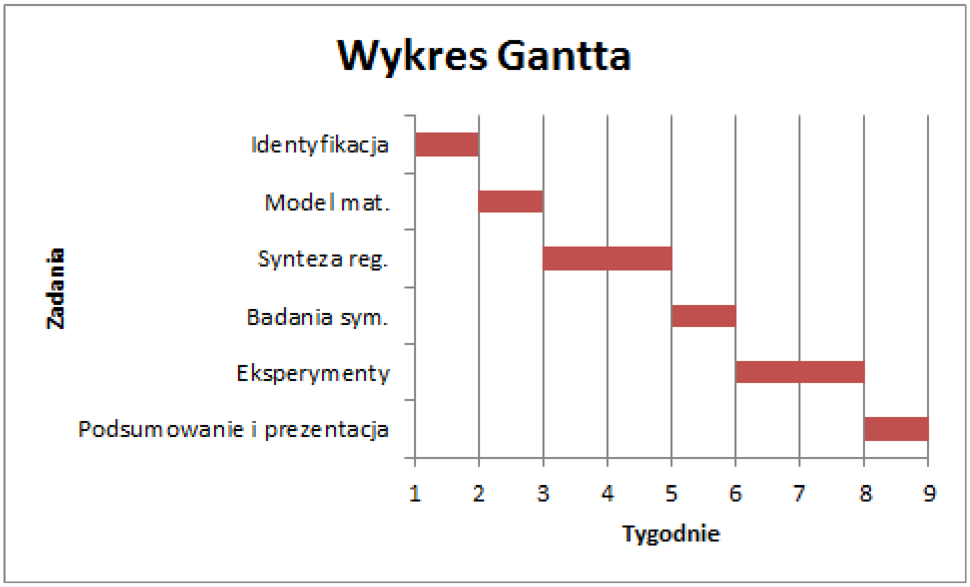
1. Identyfikacja parametrów obiektu
2. Stworzenie model matematycznego
3. Zaproponowanie struktury regulatora w formie ciągłej odpowiedzialnego za realizacje postawionego zadania
4. Przeprowadzenie badań symulacyjnych w środowisku MATLAB/SIMULINK
5. Przeprowadzeniu eksperymentów i porównaniu ich wyników z wynikami symulacji
6. Realizacja wybranego regulatora w formie dyskretnej i porównaniu efektów jego działania z wersją ciągłą
7. Prezentacja i omówienie otrzymanych wyników

Aby móc porównać poszczególne wyniki sterowania uzyskane dla różnych struktur regulatora konieczne będzie zdefiniowanie wskaźników jakości. Na tym etapie najbardziej odpowiednie wydają się być:

1. czas regulacji
2. maksymalne odchylenie od położenie pionowego podwieszonego ładunku

1.2 Plan działania

Z racji na dość napięty grafik na poniższym wykresie Gantta przedstawiającym szacunkowy czas potrzebny na realizacje poszczególnych etapów laboratorium nie uwzględniono syntezy regulatora dyskretnego. Przedstawiony podział może ulegać korektom w wyniku wystąpienia trudności w realizacji poszczególnych zadań.



Rys. 1.1: Wykres Gantta poszczególnych etapów laboratorium.

Laboratorium nr 2

2.1 Identyfikacja parametrów

Proces identyfikacji polegał na wyznaczeniu parametrów silników napędzających wózek wzdłuż osi X i Y. Z racji na to, że w układzie występuje racie statyczne przyjęto model o następującej transmitancji:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)} \tag{2.1}$$

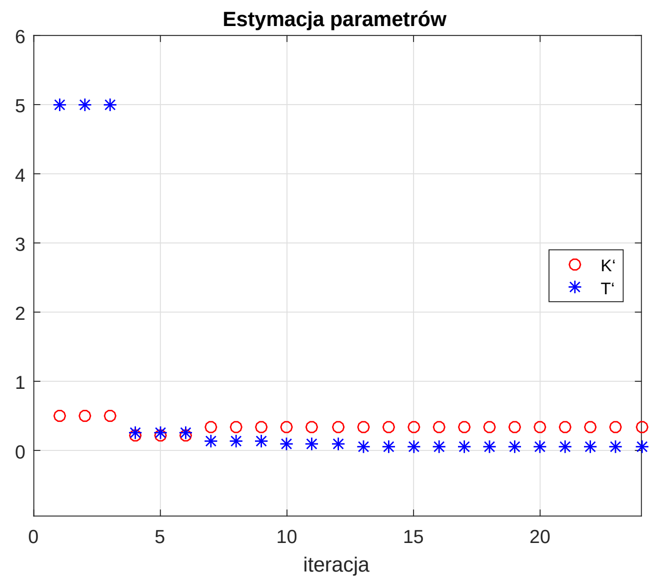
gdzie:
$X(s)$ - położenie wózka
$u(s)$ - sterowanie w postaci współczynnika wypełnienia sygnału PWM

Dla każdej z osi X i Y przeprowadzano eksperyment polegający na rejestrowaniu położenia wózka w reakcji na zadane sterowanie. Na podstawie otrzymanych danych otrzymano przybliżone wartości parametrów K, T z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. W tabeli 2.1 zamieszczono wyniki całej procedury.

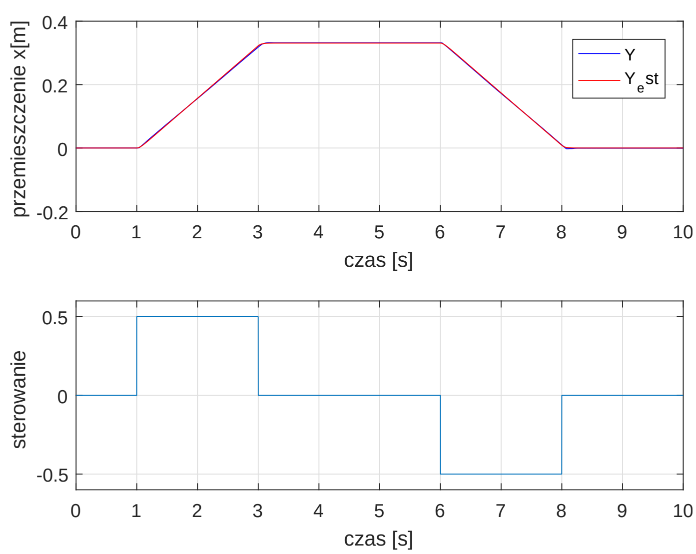
Tabela 2.1: Parametry przyjętego modelu silników.

Oś	**K**	**T**
X	0.3224	0.0471
Y	0.3184	0.057

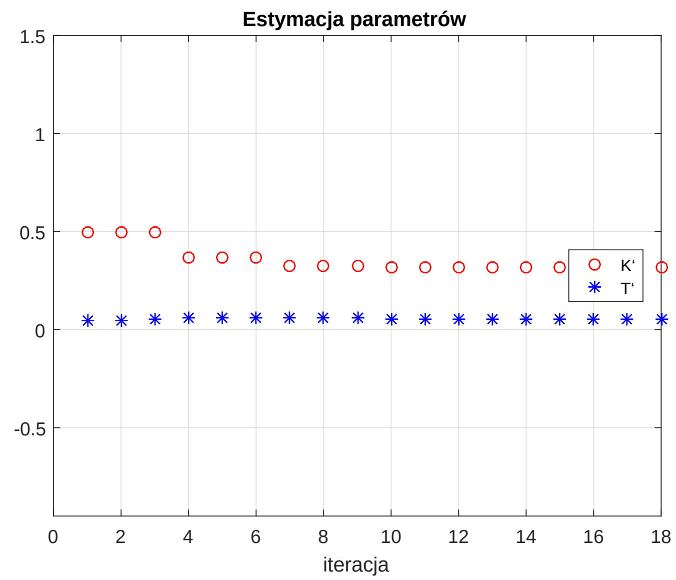
2.1.1 Wyznaczenie parametrów silników elektrycznych.



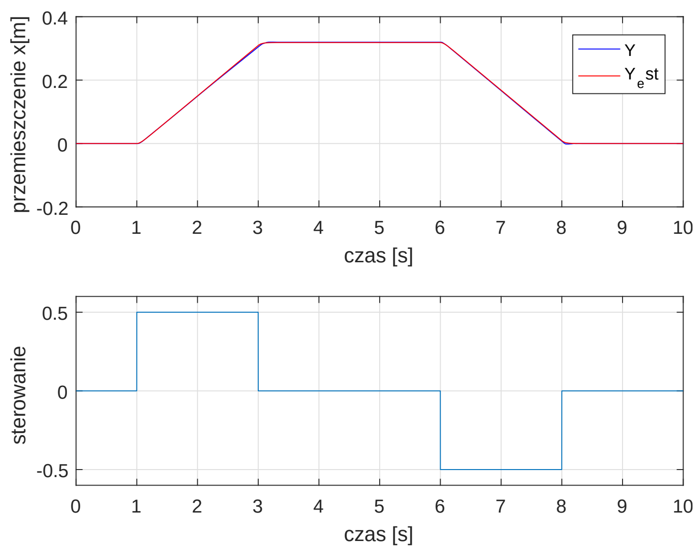
Rys. 2.1: Przebieg estymacji parametrów . Ruch wzdłuż osi X. Metoda najmniejszych kwadratów.



Rys. 2.2: Porównanie odpowiedzi obiektu z modelem.

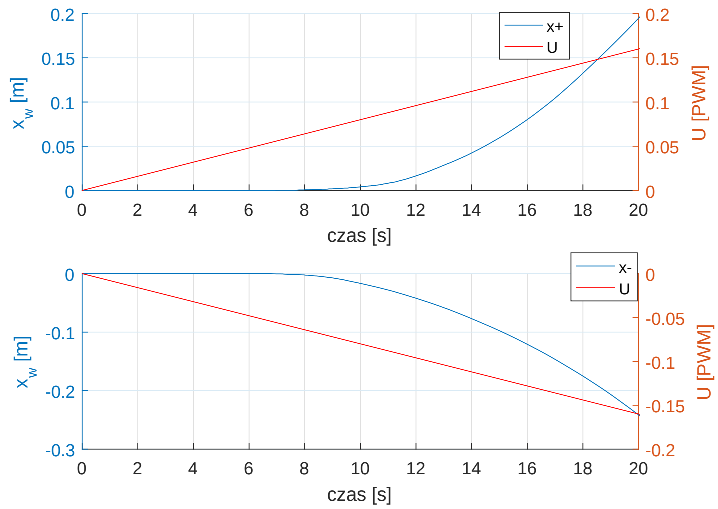


Rys. 2.3: Przebieg estymacji parametrów . Ruch wzdłuż osi Y. Metoda najmniejszych kwadratów.



Rys. 2.4: Porównanie odpowiedzi obiektu z modelem.

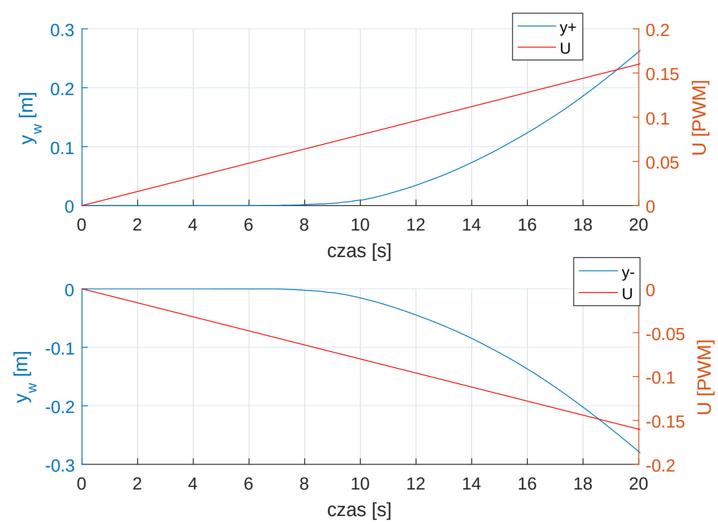
2.1.2 Wyznaczenie tarcia statycznego.



Rys. 2.5: Wyznaczenie tarcia statycznego oś X .

$$U_{-} = 0.056648$$

$$U_{+} = 0.05782$$

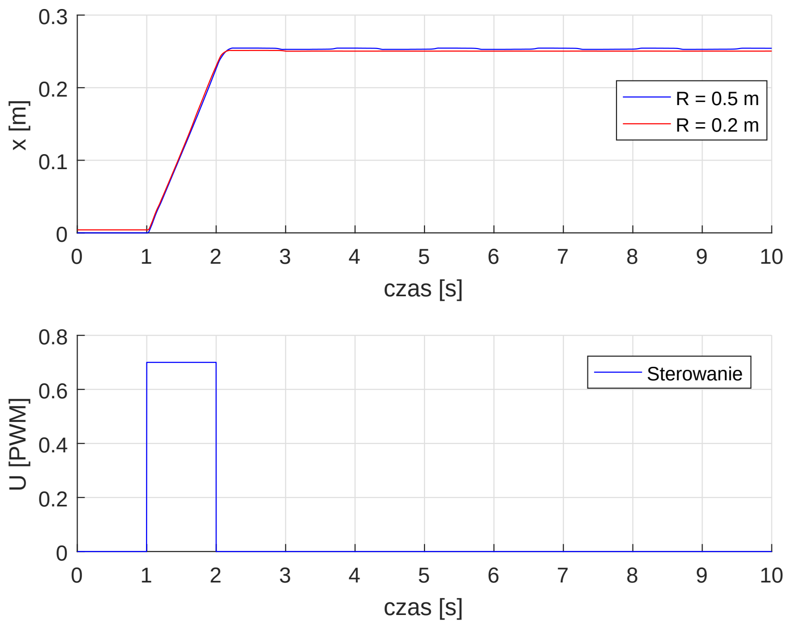


Rys. 2.6: Wyznaczenie tarcia statycznego oś Y.

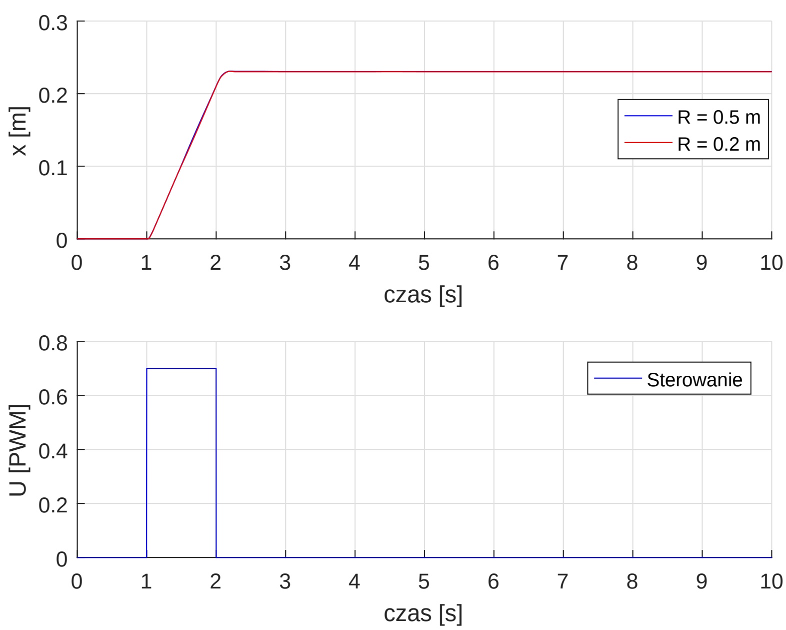
$$U_{-} = 0.06738$$

$$U_{+} = 0.06692$$

2.1.3 Badanie wpływu ruchu ciężarka na ruch wózka.



Rys. 2.7: Porównanie położenia wózka dla różnych długości linki - R, oś Y.



Rys. 2.8: Porównanie położenia wózka dla różnych długości linki - R, oś X.

Jak można zauważyć na rysunkach 2.7 i 2.8 długość linki na której zawieszony jest ładunek nie ma wpływu na ruch samego wózka. Moment siły generowany przez wahający się ładunek był w każdym z rozważanych przypadków niwelowany przez wykorzystane w układzie przekładnie. Na bazie tych obserwacji w późniejszym modelowaniu całego układu zaniedbano wpływ momentu sił pochodzących od podwieszonego ładunku na położenie wózka.

2.1.4 Wyznaczenie modelu oscylacyjnego dla podwieszonego ciężarka

Z racji na to że podczas laboratorium nie było możliwość zważenie wózka do którego był przymocowany ładunek jak i również szyny po której jeździł wózek to do zamodelowania całego układu nie mogliśmy wykorzystać modelu z pracy [1] lub [2]. Dlatego też zdecydowano się na zamodelowanie podwieszonego ładunku jako obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu z tłumieniem i następnie połączenie go z modelem jeżdżącego wózka (równanie 2.1).
Przyjęty model wahadła z tłumieniem:

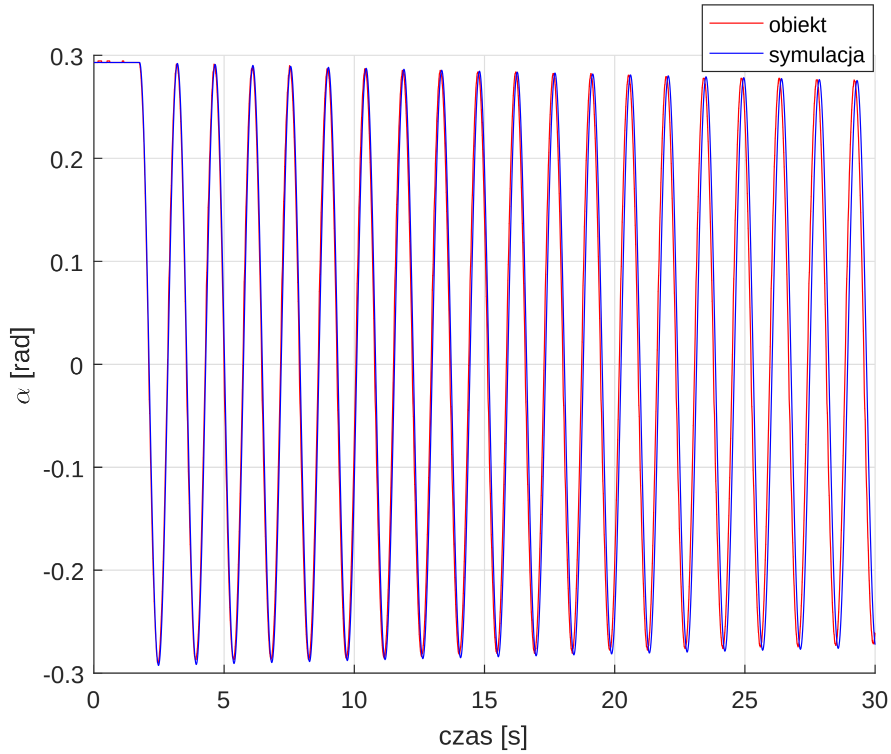
$$G(s) = \frac{K{\omega_0}^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + {\omega_0}^2} \tag{2.2}$$

gdzie:
K - współczynnik wzmocnienia,
ξ - współczynnik tłumienia,
ω_w - częstotliwość drgań własnych ciężarka,
$\omega_0 = \frac{\omega_w}{\sqrt{1-\xi^2}}$ - częstotliwość drgań swobodnych

Identyfikacja parametrów obiektu opisanego równaniem 2.2 polegała na wychyleniu ładunku o zadany kąt od pionu i rejestrowaniu kata wychylenia. Na tej podstawie odczytano z wykresów amplitudy potrzebne do wyznaczenia współczynnika tarcia jak i również okres drgań wykorzystany do obliczenia częstotliwości ω.

Kąt α - wzdłuż osi X

$$K_x = 0.107$$
$$\omega_w = 4.331\ [\frac{rad}{s}]$$
$$\xi_x = 5.139 \cdot 10^{-4}$$
$$\omega_{0x} = \frac{\omega_w}{\sqrt{1-\xi^2}} = 4.331\ \frac{rad}{s}$$



Rys. 2.9: Porównanie kąta wychylenia wahadła wzdłuż osi X.

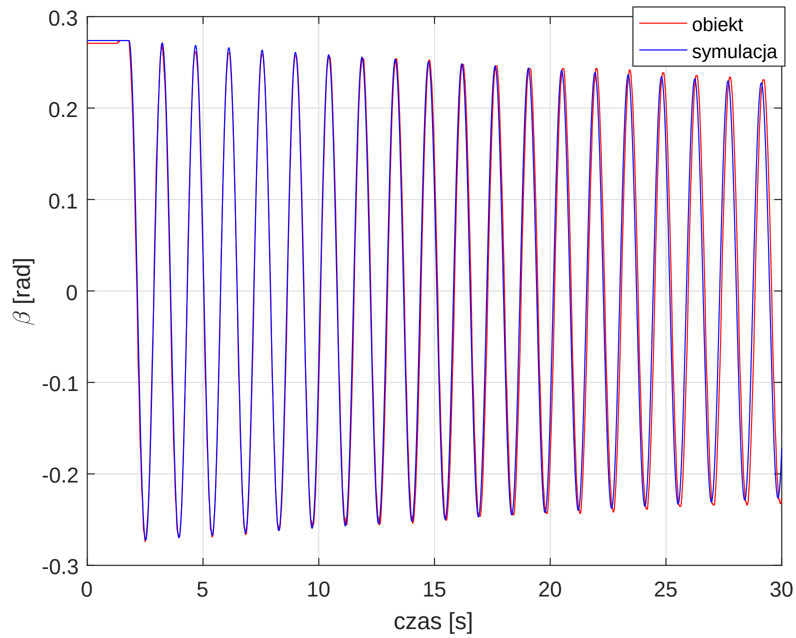
Kąt β - wzdłuż osi Y

$$K_y = 0.09107$$

$$\omega_w = 4.37 \; [\frac{rad}{s}]$$

$$\xi_y = 1.5526 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_{0y} = \frac{\omega_w}{\sqrt{1-\xi^2}} = 4.371 \; \frac{rad}{s}$$



Rys. 2.10: Porównanie kąta wychylenia wahadła wzdłuż osi Y.

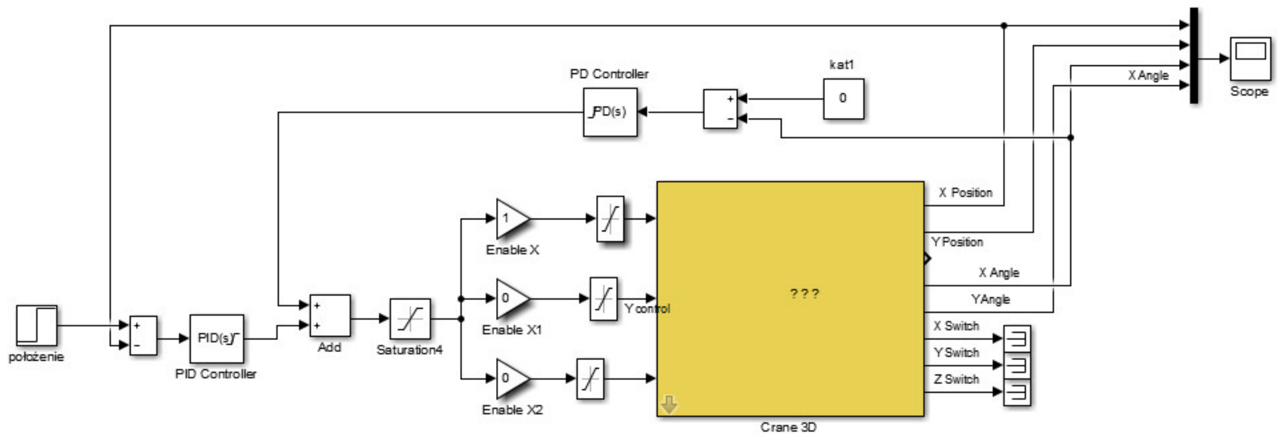
2.1.5 Porównanie pełnego modelu z obiektem

Kolejnym krokiem były badania eksperymentalne mające na celu sprawdzenie jak wyznaczony model matematyczny sprawdza się w przypadku włączenia do układu regulatorów PID odpowiedzialnych za pozycjonowanie wózka i tłumienie drgań podwieszonego ładunku. W tym celu zaprojektowano dwa regulatory o następujących parametrach:
Regulator PID pozycjonujący wózek:

$$K = 10, \quad T_i = 0.005, \quad T_d = 2 \tag{2.3}$$

Regulator PD niwelujący kąt odchylenia ciężarka:

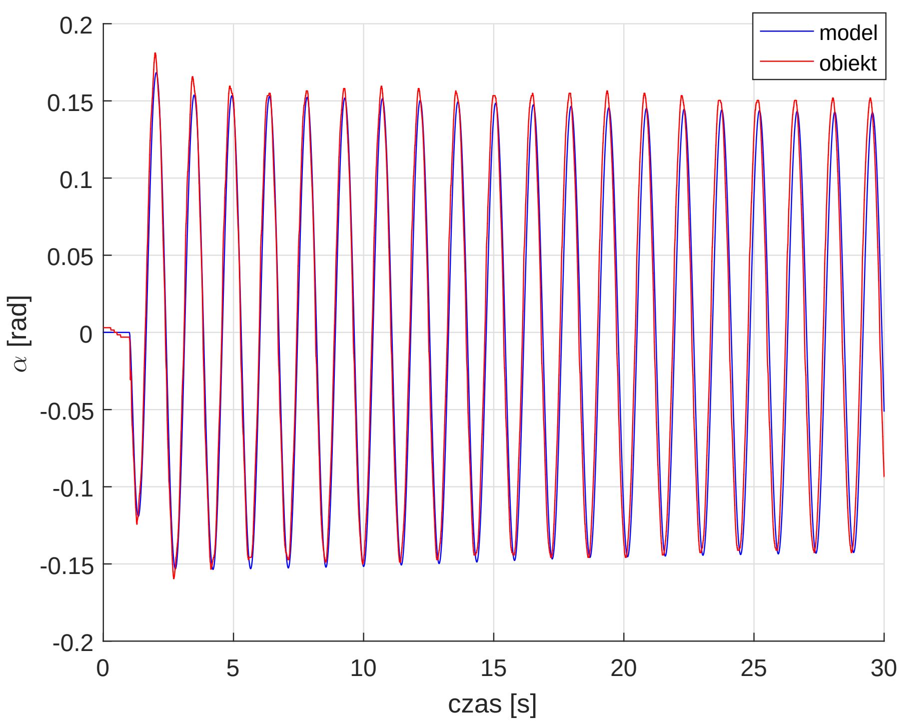
$$P = 10, \quad T_d = 0.01 \tag{2.4}$$



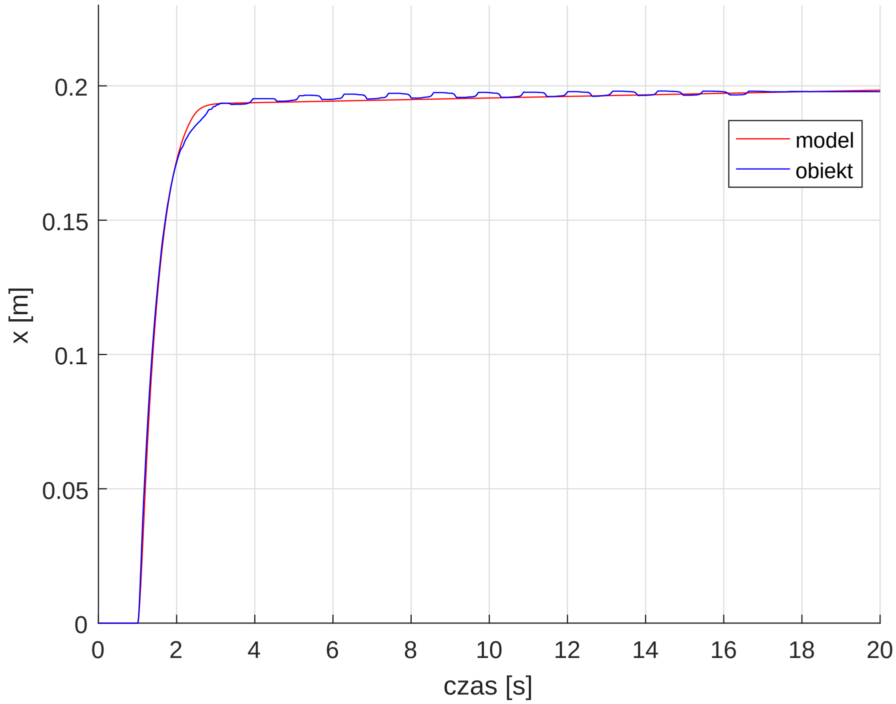
Rys. 2.11: Schemat układu regulacji z regulatorami PID.

2.1.6 Układ bez tłumienia drgań

Na poniższych wykresach porównano przebiegi kąta wychylenia ładunku i położenia wózka, w przypadku wyłączonego regulatora PD odpowiedzialnego za tłumienie drgań. Jak można zauważyć przyjętym model w zadawalającym stopniu odwzorowuje rzeczywisty obiekt.



Rys. 2.12: Porównanie kąta wychylenia ładunku modelu z obiektem oś X.

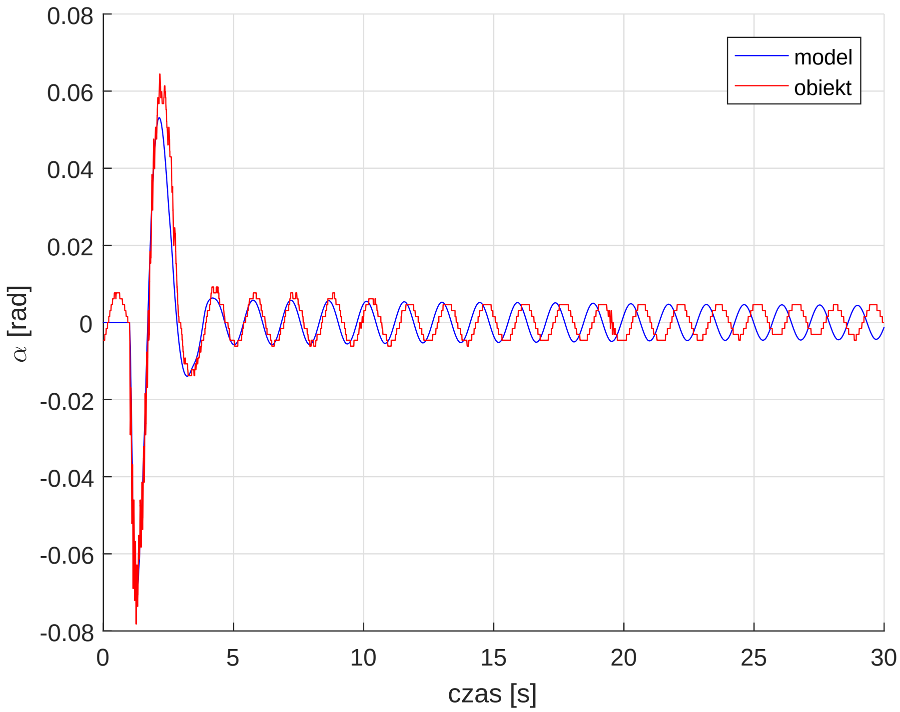


Rys. 2.13: Porównanie położenia wózka modelu z obiektem, oś X.

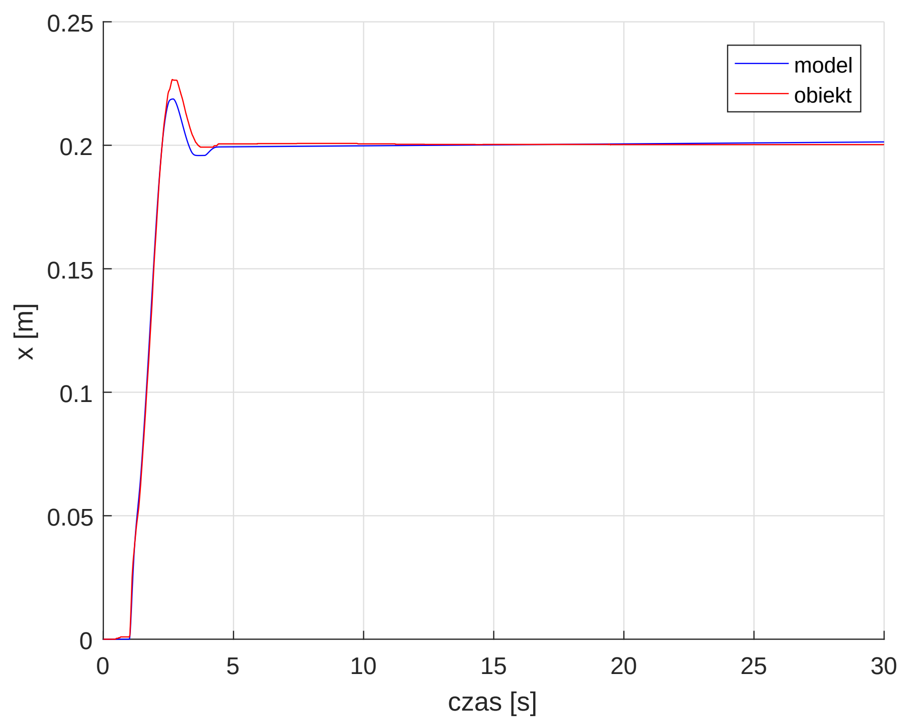
Układ z tłumieniem drgań

Podobnie jak we wcześniejszym przypadku w konfiguracji z włączonym regulatorem PD (od kąta) ponownie otrzymano bardzo zbliżone przebiegi modelu matematycznego i rzeczywistego.

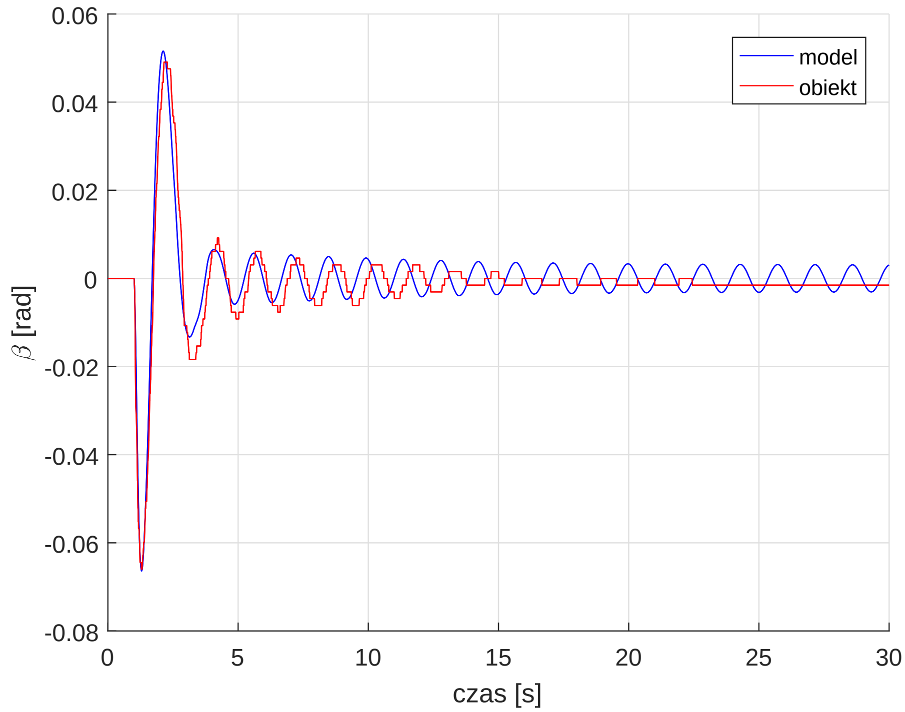
Na tej podstawie zdecydowano się wykorzystać obecny model matematyczny do zaprojektowania obserwatora Luenbergera oraz regulatora LQR.



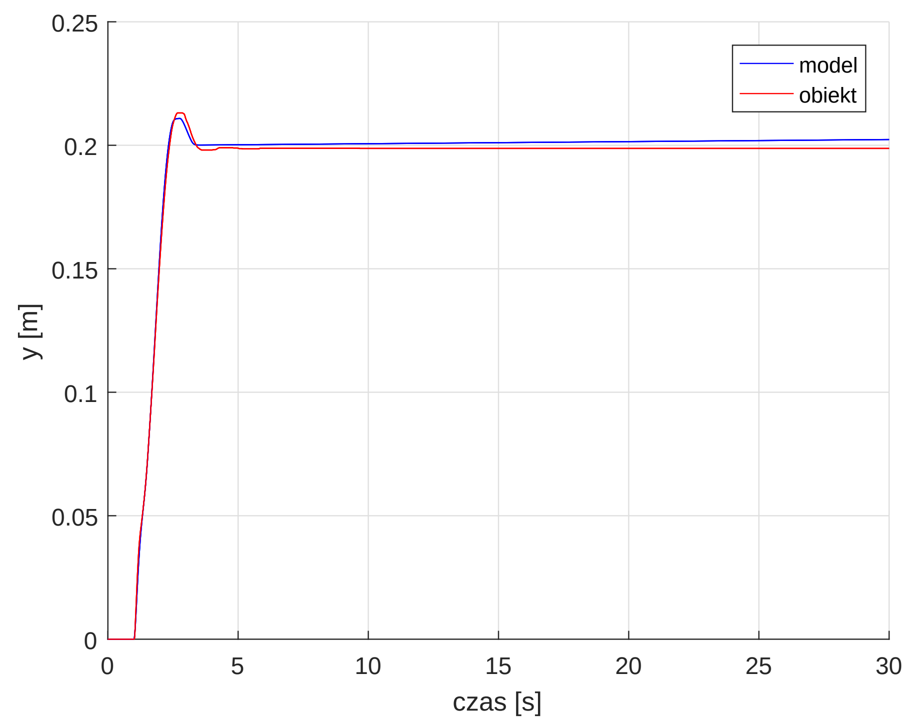
Rys. 2.14: Porównanie kąta wychylenia ładunku modelu z obiektem oś X.



Rys. 2.15: Porównanie położenia modelu wózka z obiektem, oś X.



Rys. 2.16: Porównanie kąta wychylenia ładunku modelu z obiektem oś Y.



Rys. 2.17: Porównanie położenia modelu wózka z obiektem, oś Y.

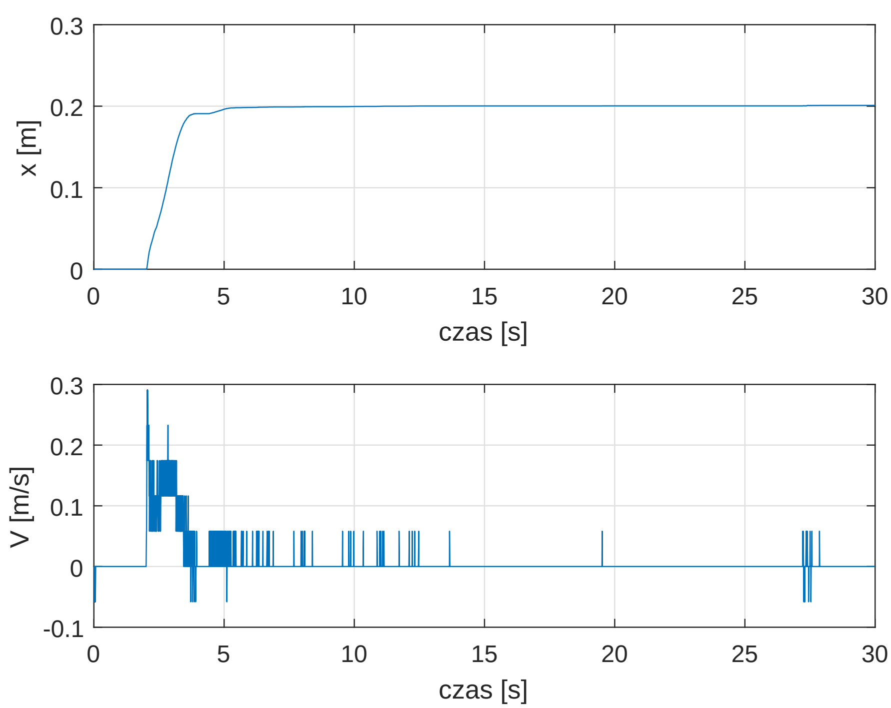
2.2 Obserwator Luenbergera

Do zastosowania regulatora LQR wymagane są przebiegi wszystkich przyjętych w modelu zmiennych stanu - w tym przypadku położenie i prędkość wózka oraz kąt i prędkość kątowa ładunku. Dwa z tych sanów - położenie i kąt są rejestrowane w układzie za pomocą enkoderów. Prędkość liniową wózka jak i również prędkości kątową ładunku można było uzyskać poprzez liczenie ilorazu różnicowego sygnałów położenia i kąta wychylenia lub zaprojektować do tego celu obserwator.

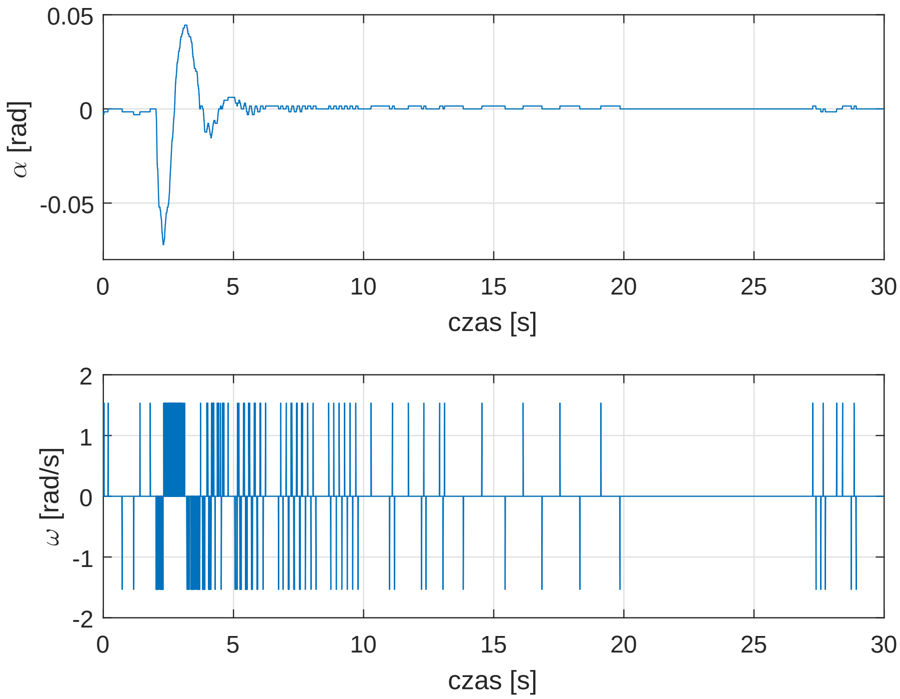
Jak można zaobserwować na wykresach 2.18 i 2.19 prędkości liniowa jak i kątowa otrzymane w wyniku zastosowania ilorazu różnicowego są w znacznym stopniu zaszumione. W celu odfiltrowania właściwego sygnału można by było zastosować odpowiedni zaprojektowany filtr dolnoprzepustowy. Jednak z racji na brak odpowiedniego doświadczenia w projektowaniu tego typu układów zdecydowano się zaprojektować obserwator Luenbergera do odtworzenia brakujących przebiegów.

Do stworzenia pełnego modelu rozpatrywanego systemu przyjęto następujące zmienne stanu:

$x_1 = x$ - położenie wózka wzdłuż kolejnych osi,
$x_2 = \dot{x_1}$ - prędkość wózka,
$x_3 = \alpha$ - kąt wychylenia wahadła
$x_4 = \dot{\alpha}$ - pochodna kąta wychylenia wahadła



Rys. 2.18: Wyznaczenie prędkości wózka za pomocą ilorazu różnicowego.



Rys. 2.19: Wyznaczenie prędkości kątowej ładunku za pomocą ilorazu różnicowego.

$$G_m(s) = \frac{K_m}{s(Ts+1)} \tag{2.5}$$

$$G_w(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{2.6}$$

Korzystając z przyjętych transmitancji opisujących silnik elektryczny 2.5 oraz wychylenie wahadła 2.6, otrzymano następujące równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-K\omega_0^2}{T} & -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{T} \\ 0 \\ \frac{KK_m\omega_0^2}{T} \end{bmatrix} u \tag{2.7}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Następnie sprawdzono obserwowalność pary macierzy (A, C)

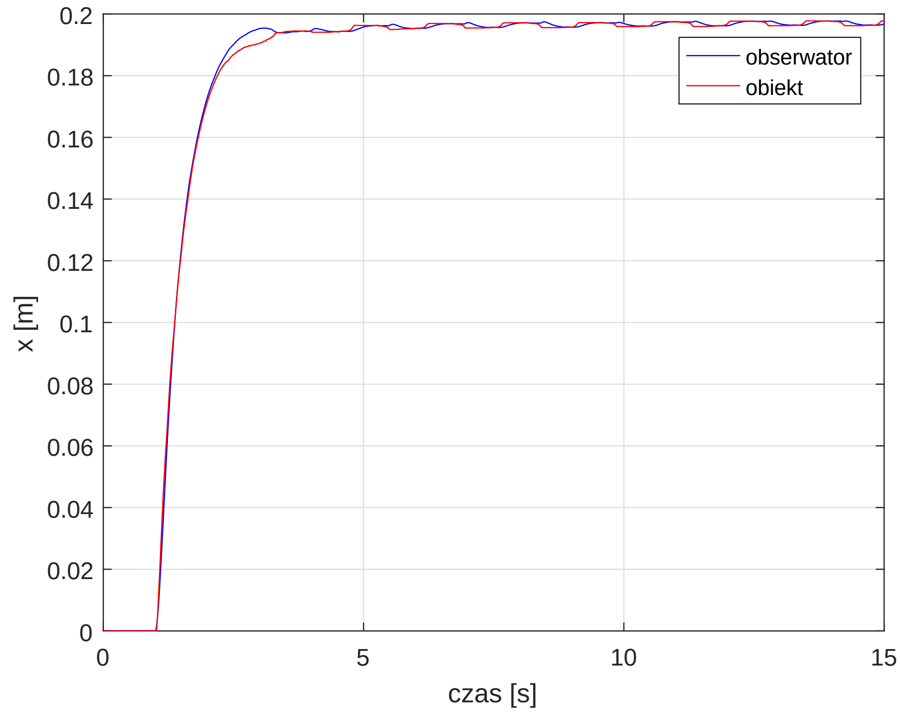
$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ ... \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \; gdzie \; dim(X) = n$$

Ponieważ $rank(O) = 4 = dim(X)$ to układ jest obserwowalny i można było przystąpić do projektowania obserwatora.
Na podstawie równań 2.7 i 2.8 zaprojektowano obserwator pełnego rzędu, który opisany jest wzorem:

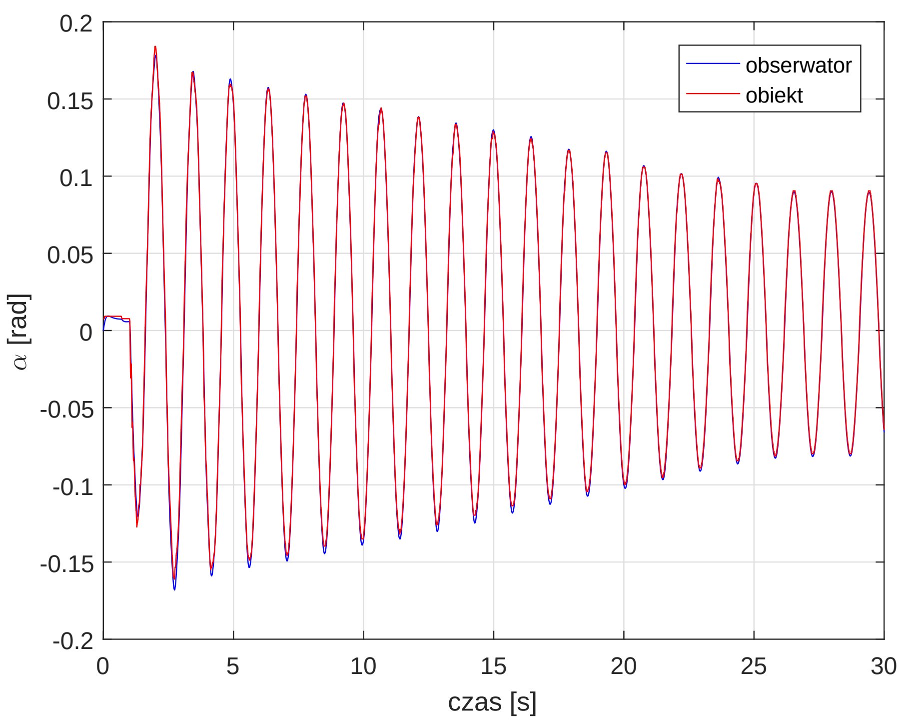
$$\dot{w}(t) = Fw(t) + G(y(t) + Bu(t) \tag{2.9}$$

gdzie: $w(t)$ - estymata stanu systemu,
Wartości własne macierzy $f = A - GC$ przyjmowały wartości :
$\lambda_1 = -11$
$\lambda_2 = -10$
$\lambda_3 = -9$
$\lambda_4 = -11$

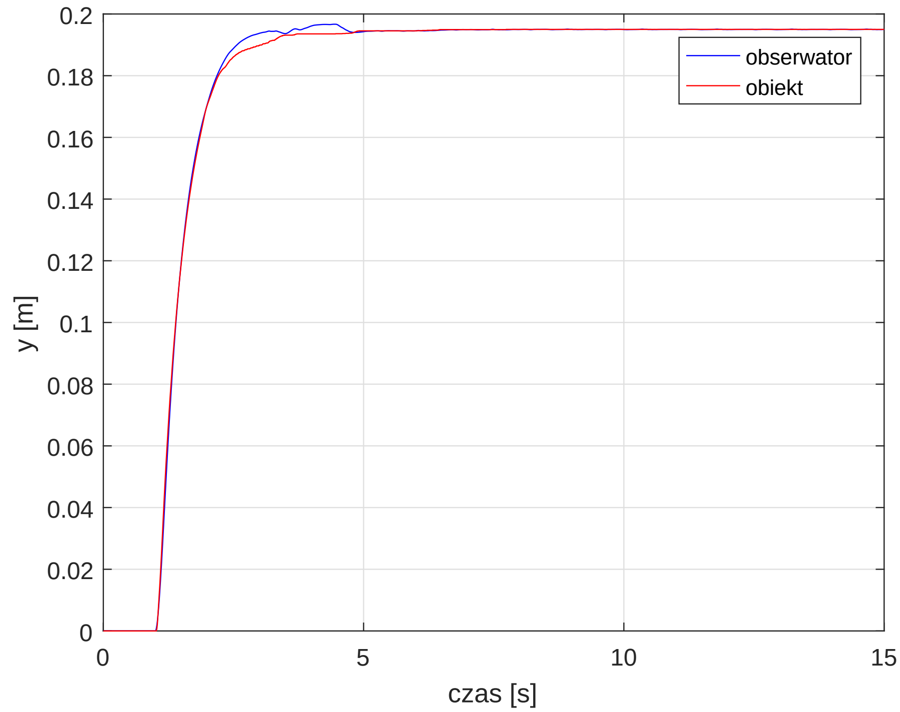
Na poniższych wykresach przedstawiono w jaki sposób obserwator estymuje położenie wózka i kąt wychylenia ładunku. W obu rozpatrywanych przypadkach (os X i Y) estymata kąta niemal idealnie pokrywa się z rzeczywistym pomiarem, natomiast w przypadku estymaty położenia można dostrzec pewne różnice wynikające głównie z występowania niewielkich luzów na przekładniach oraz nieuwzględnieniem w modelu wpływu odchylonego ładunku na położeni wózka.
Dzięki temu że w układzie pomiarowym nie występowały zakłócenia związane z pomiarem położenia i kąta to można było przyjąć wartość własne macierzy $A - GC$ o stosunkowo małych stałych czasowych. Dzięki temu można było osiągnąć zadawalające wyniki estymacji stanu przez obserwator.



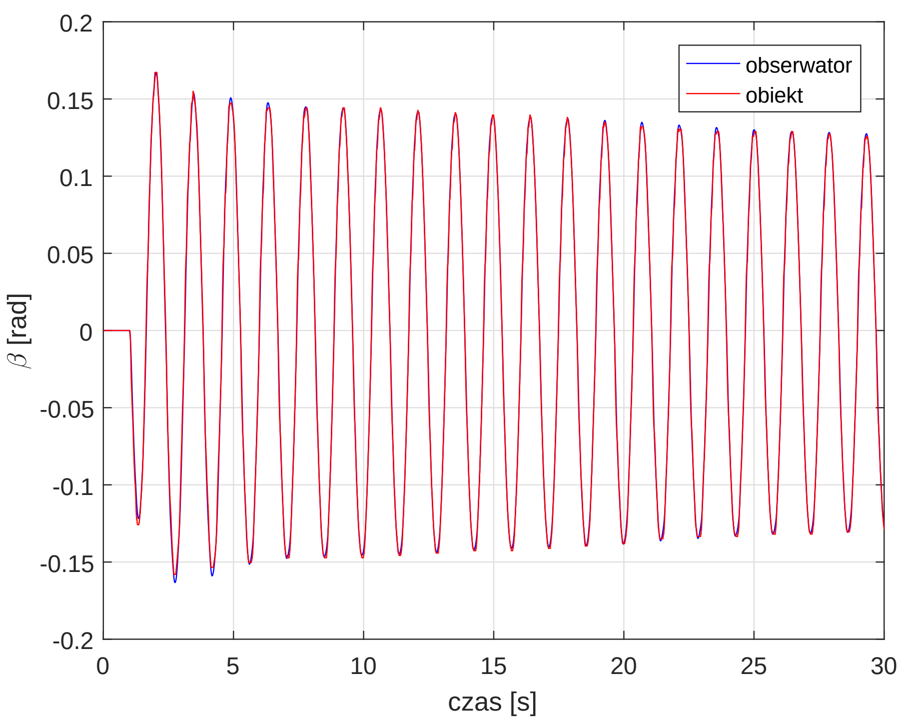
Rys. 2.20: Porównanie obserwatora z obiektem, położenie oś X.



Rys. 2.21: Porównanie obserwatora z obiektem, kąt α.



Rys. 2.22: Porównanie obserwatora z obiektem, położenie oś Y.



Rys. 2.23: Porównanie obserwatora z obiektem, kąt β.

2.3 Regulator LQR

Dla wyznaczonego w sekcji wcześniejszej obserwatora Luenbergera został zaprojektowany regulator LQR. Z racji na to że, zadany stan końcowy nie jest zerowy to na wejście regulatora podawany był uchyb regulacji.
Równania opisujące regulator:

$$\dot{x(t)} = Ax(t) - BKw(t) \tag{2.10}$$

$$K = R^{-1}B^TX \tag{2.11}$$

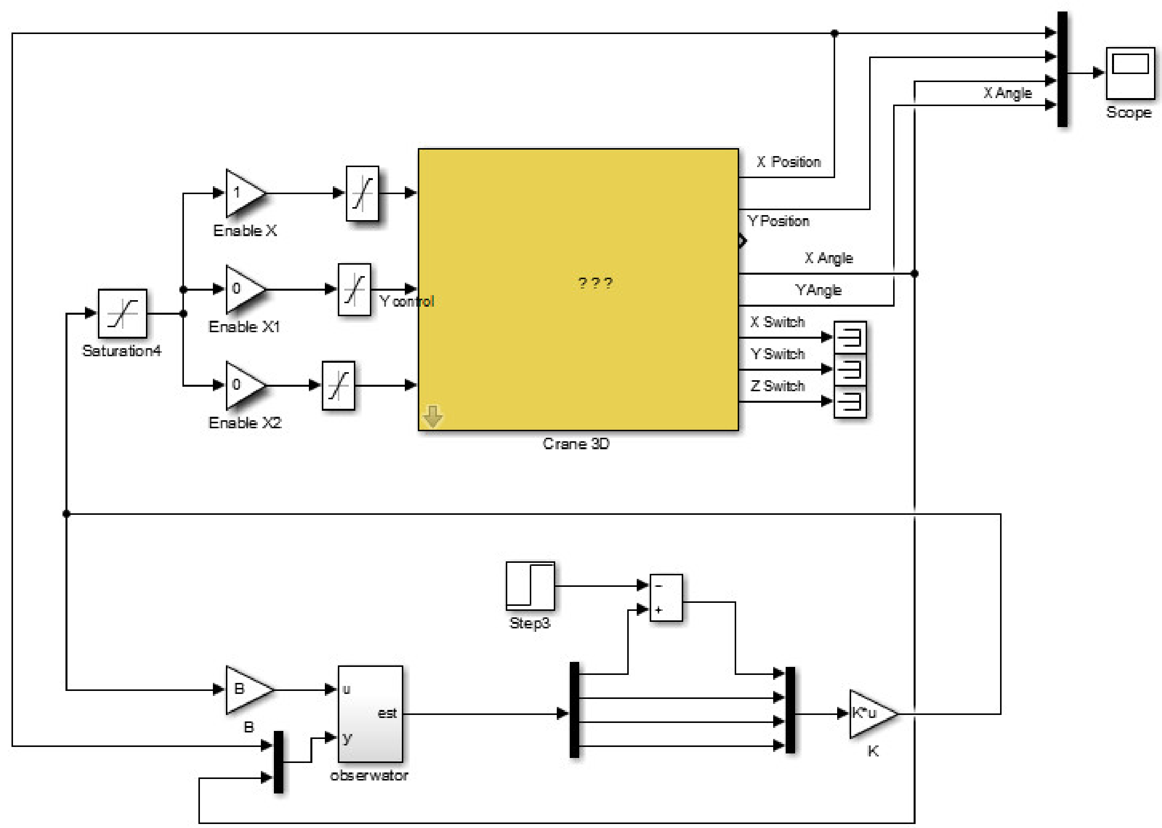
gdzie X jest rozwiązaniem równania Ricatti'ego:

$$A^TX + XA - XBR^{-1}B^TX + Q = 0 \tag{2.12}$$

$$X = X^T,\ Q = Q^T > 0,\ R = R^T > 0$$

Regulator wyznacza takie sterowanie aby zminimalizować następujący wskaźnik jakości:

$$J_{LQR} = \int_0^\infty x(t)^TQx(t) + u(t)^TRu(t) \tag{2.13}$$



Rys. 2.24: Schemat układu regulacji z regulatorem LQR.

W celu sprawdzenie jak różne wartości macierzy $Q,\ R\ i\ K$ wpływają na sposób działania całego układu przetestowano następujące ic postaci:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_1 = 1,\ K_1 = \begin{bmatrix} 3.1623 \\ 0.6667 \\ -4.3374 \\ -0.2316 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_2 = 10,\ K_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.1102 \\ -1.3501 \\ -0.0778 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_3 = 1,\ K_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.3447 \\ -5.0814 \\ -0.3953 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_4 = 10,\ K_4 = \begin{bmatrix} 0.3162 \\ 0.0484 \\ -1.6148 \\ -0.1065 \end{bmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_5 = 1,\ K_5 = \begin{bmatrix} 10.0000 \\ 1.7656 \\ -5.2824 \\ 0.2005 \end{bmatrix}$$

$$Q_6 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R_6 = 10,\ K_6 = \begin{bmatrix} 3.1623 \\ 0.3323 \\ -1.6733 \\ -0.0314 \end{bmatrix}$$

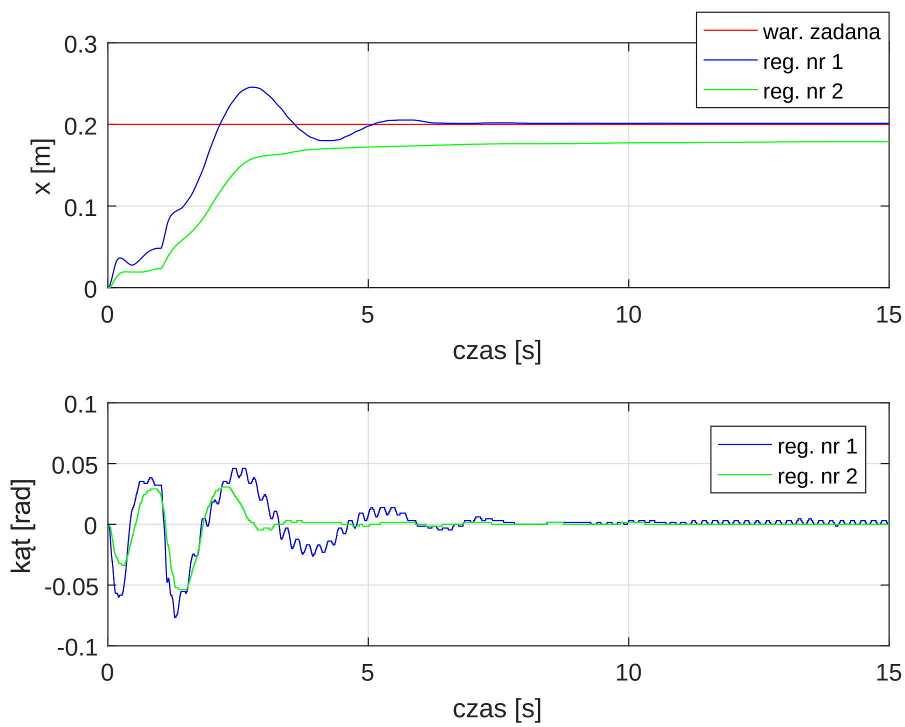
Działanie regulatorów zostało porównane za pomocą następujących wskaźników jakości:

1. $J_1 = \int_0^{tk} e_x(t)^2 dt$ - całka z kwadratu uchybu regulacji położenia wózka $[m^2 \cdot s]$,
2. $J_2 = \int_0^{tk} e_\alpha(t)^2 dt$ - całka z kwadratu uchybu regulacji wychylenia ładunku $[rad^2 \cdot s]$,
3. J_3 - maksymalna odchyłka ładunku od pionu [rad].

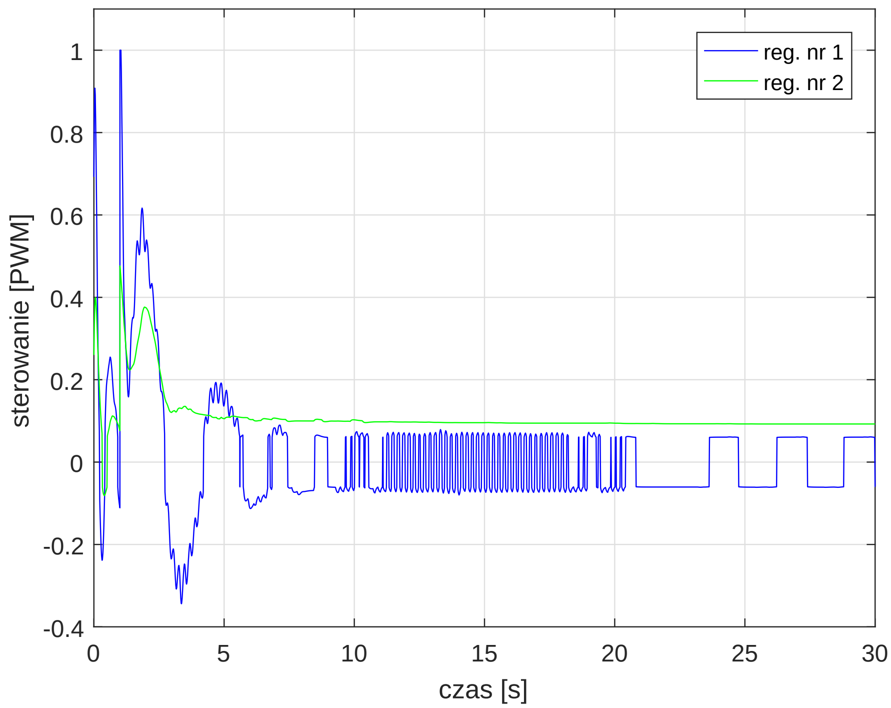
Z tabeli 2.2 można wysnuć wniosek, że najlepszą konfiguracją macierzy $Q,\ R, i\ K$ spośród rozpatrywanych jest zestaw nr 3. otrzymano dla niego najlepszą wartość wskaźnika jakości nr J_1, a także odpowiednio drugi i trzecie wartości w przypadku wskaźników J_2 i J_3 . Na rysunku 2.27 i 2.28 można zauważyć jak zmiana wartości współczynnika R z 1 na 10 ma wpływ na działanie układu. W przypadku $R = 10$ otrzymano co prawda najlepsze wartości wskaźników jakości $J_2\ i\ J_3$ jednak podawanie na obiekt bardzo "ekonomicznego" sterowania skutkowało bardzo powolnym pozycjonowaniem się wózka w zadanym położeniu.

Tabela 2.2: Porównanie poszczególnych regulatorów LQR.

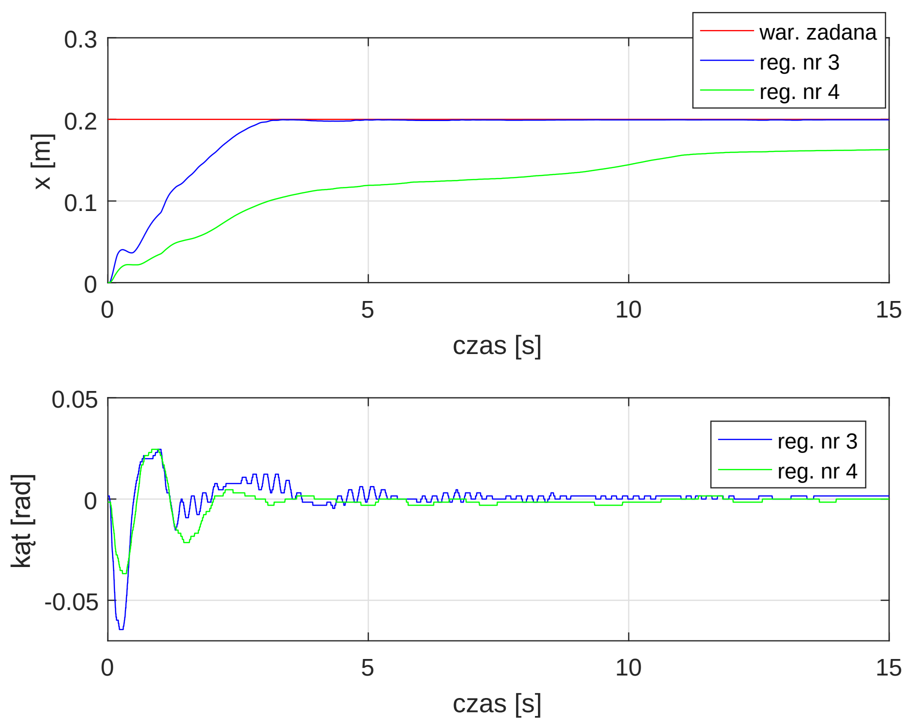
Nr regulatora	$J_1[m^2 \cdot s]$	$J_2[rad^2 \cdot s]$	$J_3[rad]$
1	0.2123	0.0049	0.0767
2	0.1826	0.0022	0.0537
3	0.1011	0.0014	0.0644
4	0.2958	0.0008	0.0368
5	0.2095	0.0206	0.1549
6	0.2010	0.0130	0.1365



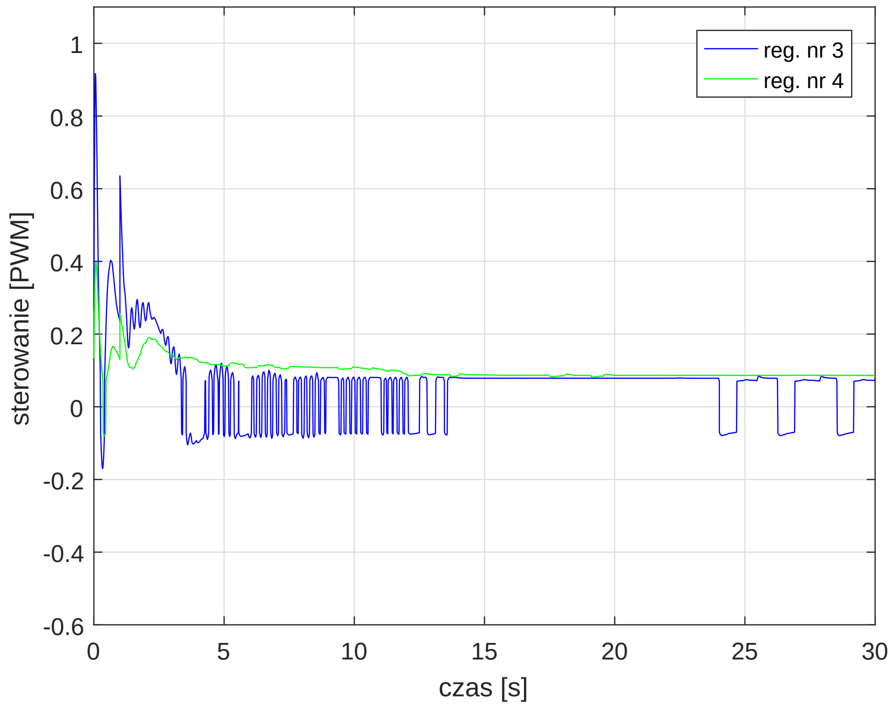
Rys. 2.25: Porównanie działania regulatorów nr 1 i 2.



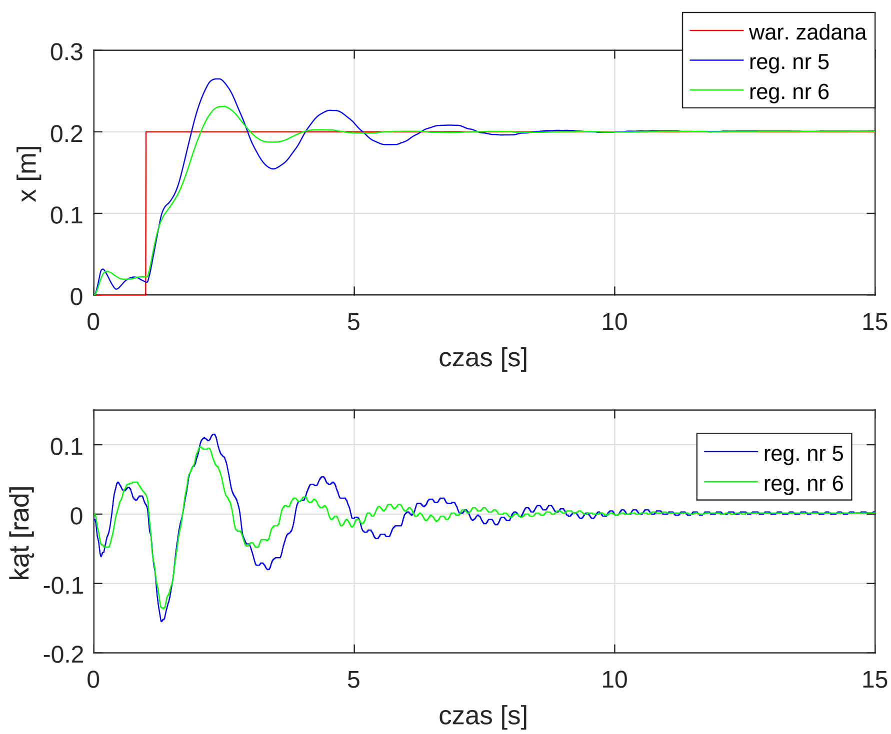
Rys. 2.26: Porównanie sterowania regulatorów nr 1 i 2.



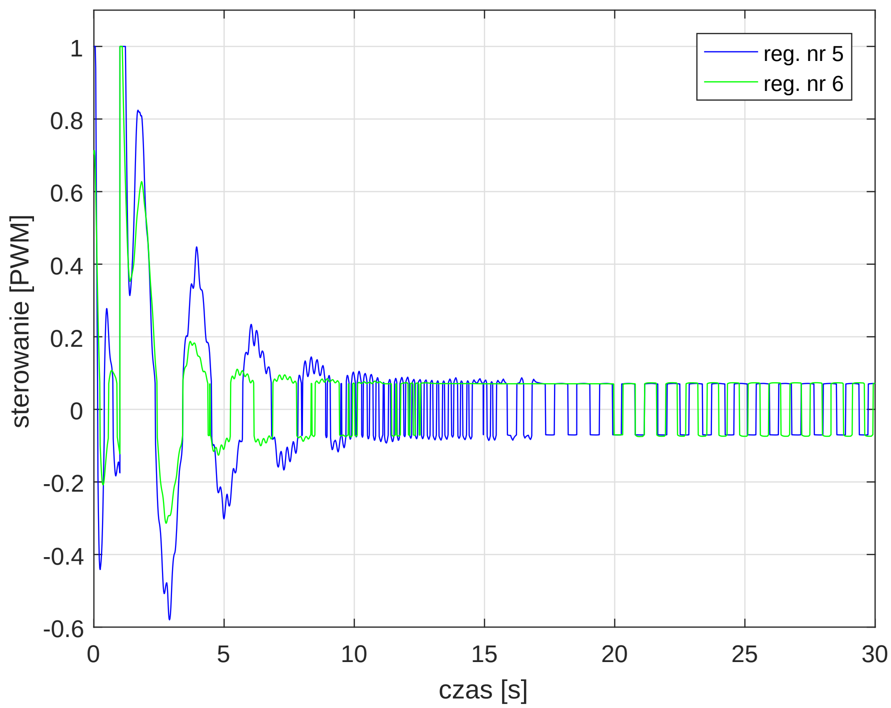
Rys. 2.27: Porównanie działania regulatorów nr 3 i 4.



Rys. 2.28: Porównanie sterowania regulatorów nr 3 i 4.



Rys. 2.29: Porównanie działania regulatorów nr 5 i 6.



Rys. 2.30: Porównanie sterowania regulatorów nr 5 i 6.

2.4 Dyskretny regulator PID

Regulatory dyskretne PID oraz PD zostały otrzymane na drodze dyskretyzacji regulatorów ciągłych zapisanych w postaci 2.14 i 2.15 metodami **Eulera w przód** oraz **Tustina** (metoda trapezowa):

$$G_{PIDx}(s) = K_{px} + I_x \frac{1}{s} + D_x \frac{s}{D_x/Ns + 1} \tag{2.14}$$

$$G_{PID\alpha}(s) = K_{p\alpha} + I_x \alpha \frac{1}{s} + D_\alpha \frac{s}{D_\alpha/Ns + 1} \tag{2.15}$$

gdzie:
$K_{px} = 10$
$I_x = 0.4$
$D_x = 5$
$K_{p\alpha} = 10$
$D_\alpha = 0.01$
$N = 100$

Do porównanie poszczególnych danych zostały wykorzystane następujące wskaźniki jakości:

$$J_1 = \int_0^T e_x(t)dt \tag{2.16}$$

$$J_2 = \int_0^T e_\alpha(t)dt \tag{2.17}$$

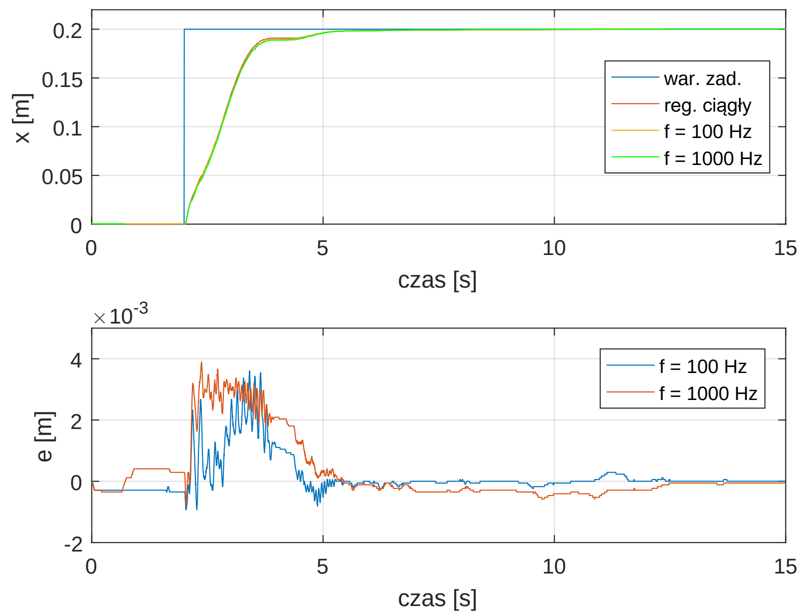
gdzie:
e_x - uchyb położenie wózka $[m]$,
e_α - kąt odchylenia ładunku od pionu $[rad]$.

Tabela 2.3: Porównanie wskaźników jakości dla różnych częstotliwości, metoda Eulera w przód.

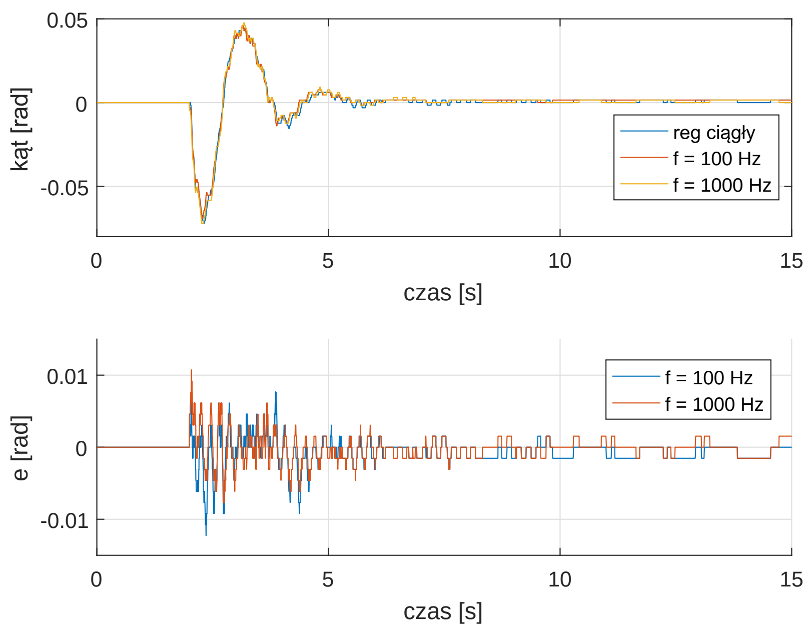
Wsk. jakości	$f = 100Hz$	$f = 1000Hz$
$J_1 \cdot 10^4 [m^2 \cdot s]$	0.0753	0.1810
$J_2 \cdot 10^4 [rad^2 \cdot s]$	0.7894	0.6047

Tabela 2.4: Porównanie wskaźników jakości dla różnych częstotliwości, metoda Tustina.

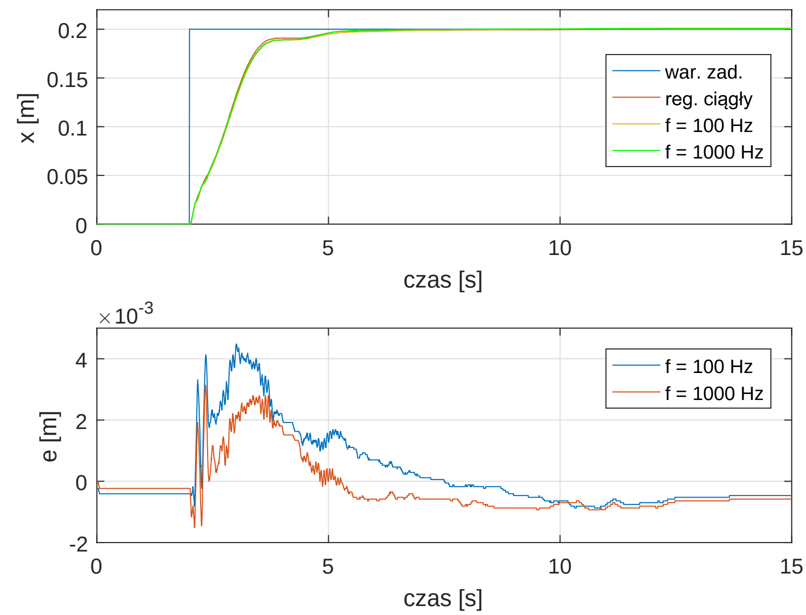
Wsk. jakości	$f = 100Hz$	$f = 1000Hz$
$J_1 \cdot 10^4 [m^2 \cdot s]$	0.2769	0.1664
$J_2 \cdot 10^4 [rad^2 \cdot s]$	0.7079	0.8983



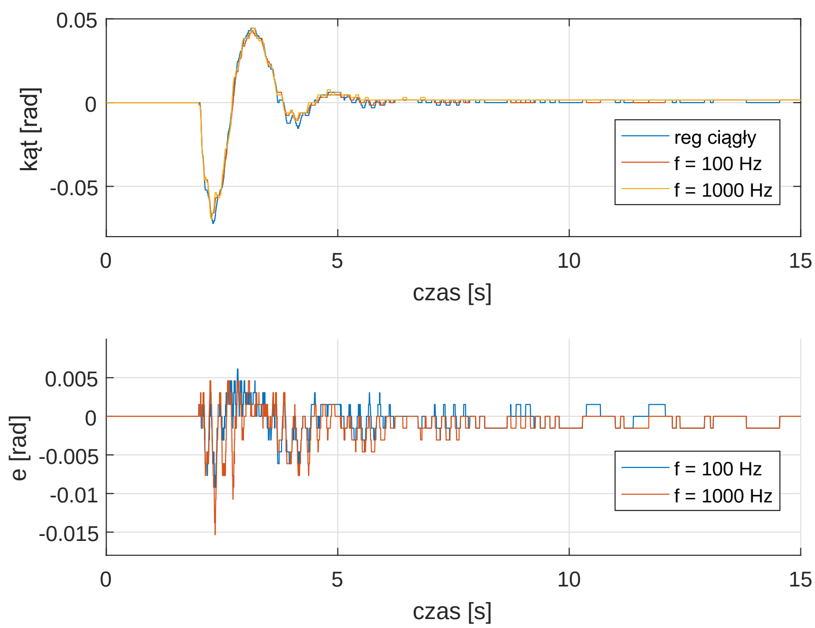
Rys. 2.31: Porównanie położenie wózka. Reg. ciągły - reg. dyskretny - Euler w przód, dla różnych częstotliwości próbkowania.



Rys. 2.32: Porównanie kąt wychylenia ładunku. Reg. ciągły - reg. dyskretny - Euler w przód, dla różnych częstotliwości próbkowania.



Rys. 2.33: Porównanie położenie wózka. Reg. ciągły - reg. dyskretny - Tustin, dla różnych częstotliwości próbkowania.



Rys. 2.34: Porównanie kąt wychylenia ładunku. Reg. ciągły - reg. dyskretny - Tustin, dla różnych częstotliwości próbkowania.

Bibliografia

[1] Pauluk, M.: *Model matematyczny trójwymiarowej suwnicy.* W: **Automatyka** 2002 tom 6 s. 69-102, ISSN: 1429-3447

[2] Pauluk, M.: *Optimal and robust control of 3D crane.* W: **Przegląd Elektrotechniczny**, 2012 vol. 2 pp. 205-212 ISSN: 0033-2097