

Laboratorium problemowe

Suwnica 3-D

Maciej Cebula
Maciej Talar

Spis treści

1	Laboratorium nr 1	2
1.1	Cel zajęć	2
1.2	Plan działania	3
2	Laboratorium nr 2	4
2.1	Identyfikacja parametrów	4
2.1.1	Wyznaczenie parametrów silników elektrycznych.	4
2.1.2	Wyznaczenie tarcia statycznego.	7
2.1.3	Badanie wpływu ruchu ciężarka na ruch wózka.	8
2.1.4	Wyznaczenie modelu oscylacyjnego dla podwieszonego ciężarka	9
2.1.5	Porównanie pełnego modelu z obiektem	11
2.1.6	Układ bez tłumienia drgań	12
2.1.7	Optymalizacja nastaw regulatorów	15
2.2	Obserwator Luenbergera	15
2.3	Regulator LQR	19

Laboratorium nr 1

1.1 Cel zajęć

Celem zajęć jest zaproponowanie sposobu sterowania suwnicą 3D, które umożliwi przetransportowanie podwieszonego ładunku pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni. Zadanie to polega na przeprowadzeniu szeregu badań, na bazie których to zaprojektowany zostanie regulator realizujący postawione zadanie. Wartości sterowania w tym przypadku będą podawane na trzy silniki prądu stałego odpowiedzialne za przemieszczanie wózka z podwieszonym ładunkiem wzdłuż trzech osi. Przebieg całego zadania można wstępnie podzielić na następujące etapy:

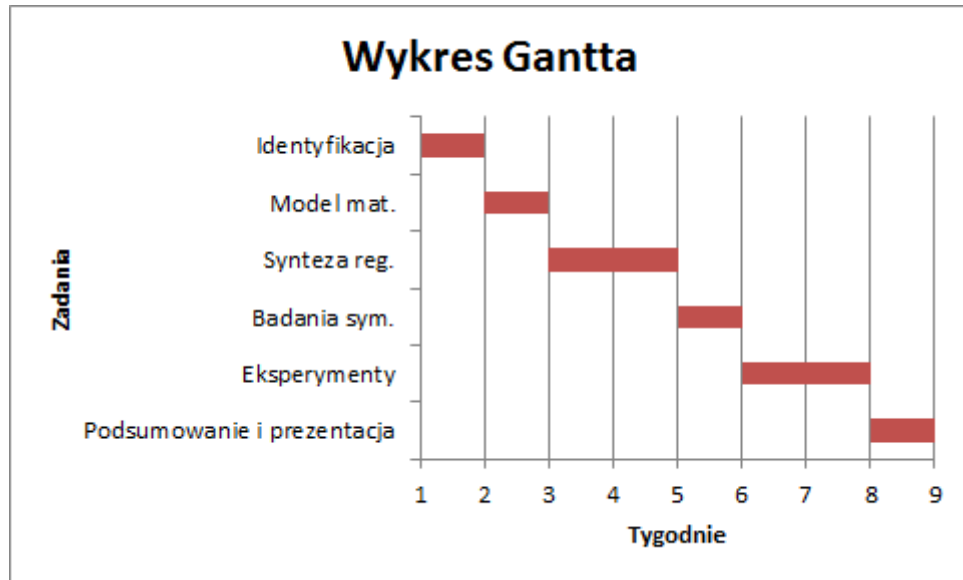
1. Identyfikacja parametrów obiektu
2. Stworzenie modelu matematycznego
3. Zaproponowanie struktury regulatora w formie ciągłej odpowiedzialnego za realizację postawionego zadania
4. Przeprowadzenie badań symulacyjnych w środowisku MATLAB/SIMULINK
5. Przeprowadzeniu eksperymentów i porównaniu ich wyników z wynikami symulacji
6. Realizacja wybranego regulatora w formie dyskretniej i porównaniu efektów jego działania z wersją ciągłą
7. Prezentacja i omówienie otrzymanych wyników

Aby móc porównać poszczególne wyniki sterowania uzyskane dla różnych struktur regulatora konieczne będzie zdefiniowanie wskaźników jakości. Na tym etapie najbardziej odpowiednio wydają się być:

1. czas regulacji
2. maksymalne odchylenie od położenia pionowego podwieszonego ładunku

1.2 Plan działania

Z racji na dość napięty grafik na poniższym wykresie Gantta przedstawiającym szacunkowy czas potrzebny na realizację poszczególnych etapów laboratorium nie uwzględniono syntezy regulatora dyskretnego. Przedstawiony podział może ulegać korektom w wyniku wystąpienia trudności w realizacji poszczególnych zadań.



Rys. 1.1: Wykres Gantta poszczególnych etapów laboratorium.

Laboratorium nr 2

2.1 Identyfikacja parametrów

Proces identyfikacji polegał na wyznaczeniu parametrów silników napędzających wózek wzdłuż osi X i Y. Z racji na to, że w układzie występuje racie statyczne przyjęto model o następującej transmitancji:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (2.1)$$

gdzie:

$X(s)$ - położenie wózka

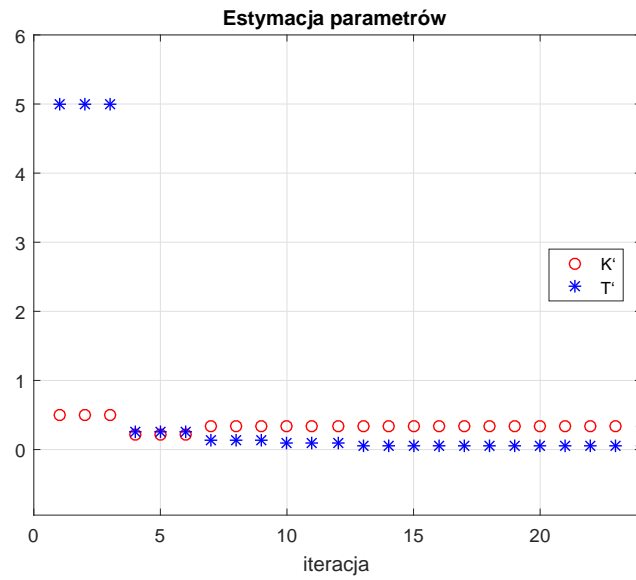
$u(s)$ - sterowanie w postaci współczynnika wypełnienia sygnału PWM

Dla każdej z osi X i Y przeprowadzano eksperyment polegający na rejestrowaniu położenia wózka w reakcji na zadane sterowanie. Na podstawie otrzymanych danych otrzymano przybliżone wartości parametrów K , T , $I\tau$ z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. W tabeli 2.1 zamieszczono wyniki całej procedury.

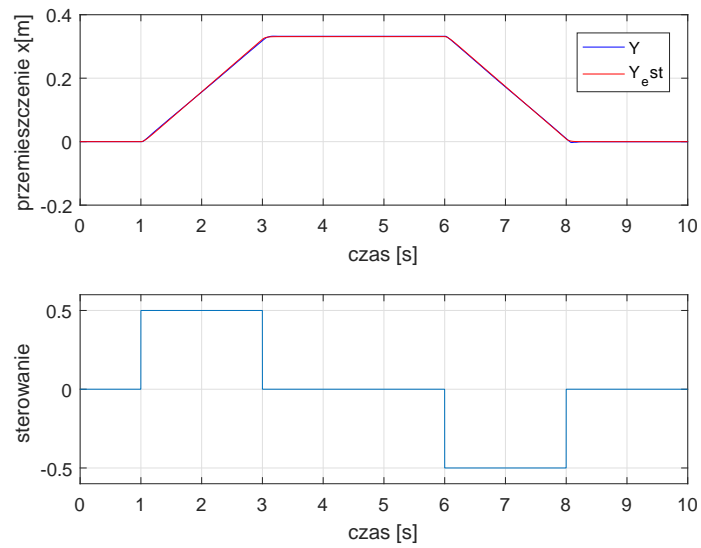
Tabela 2.1: Parametry przyjętego modelu silników.

Oś	K	T
X	0.3224	0.0471
Y	0.3184	0.057

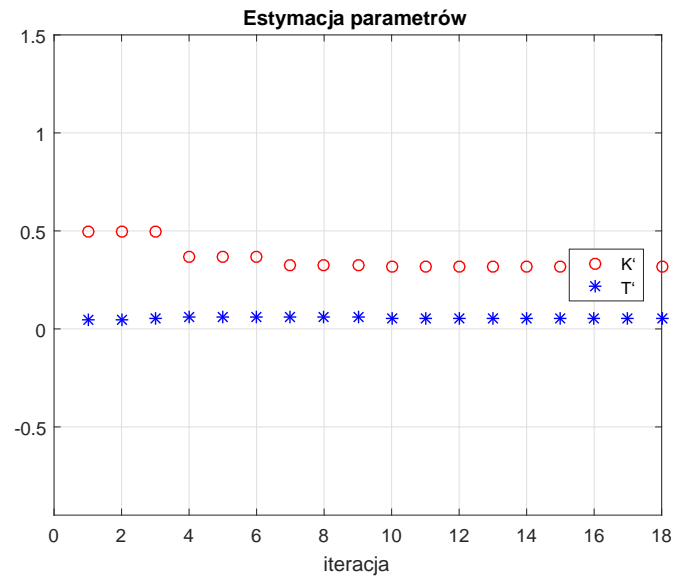
2.1.1 Wyznaczenie parametrów silników elektrycznych.



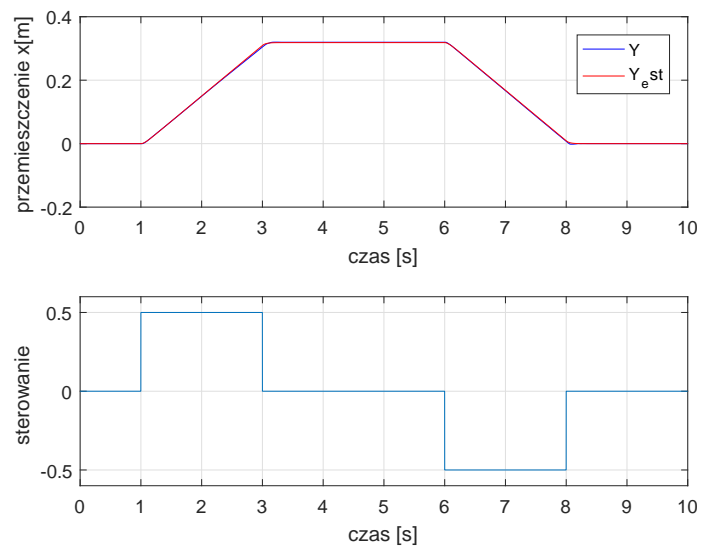
Rys. 2.1: Przebieg estymacji parametrów . Ruch wzdłuż osi X. Metoda najmniejszych kwadratów.



Rys. 2.2: Porównanie odpowiedzi obiektu z modelem.

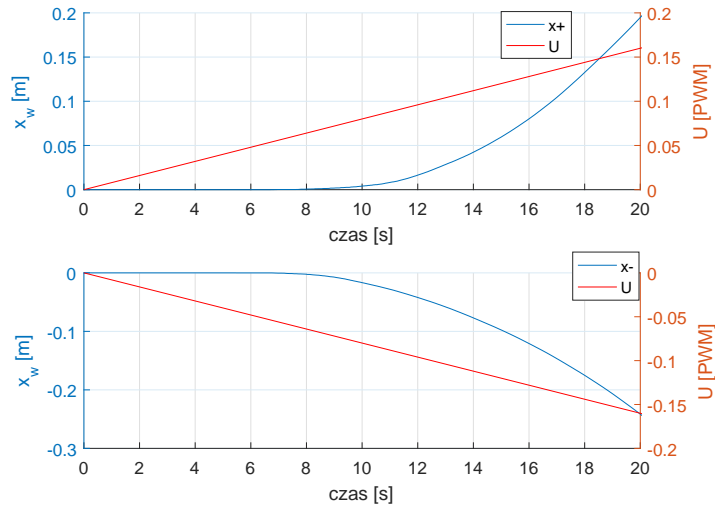


Rys. 2.3: Przebieg estymacji parametrów . Ruch wzdłuż osi Y. Metoda najmniejszych kwadratów.



Rys. 2.4: Porównanie odpowiedzi obiektu z modelem.

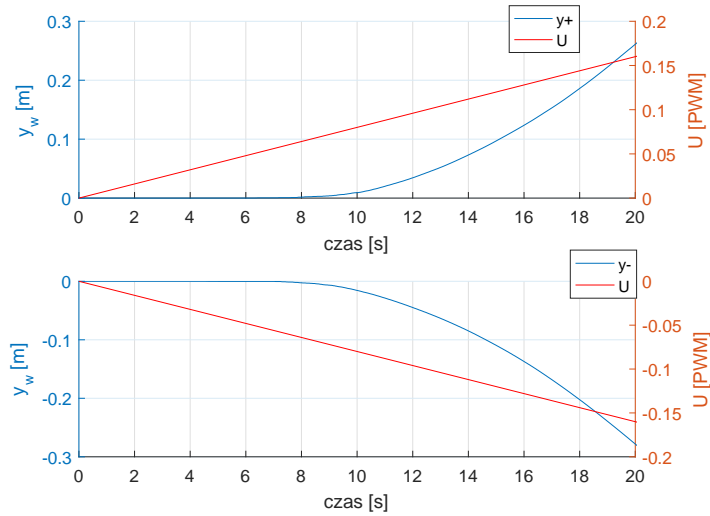
2.1.2 Wyznaczenie tarcia statycznego.



Rys. 2.5: Wyznaczenie tarcia statycznego oś X .

$$U_- = 0.056648$$

$$U_+ = 0.05782$$

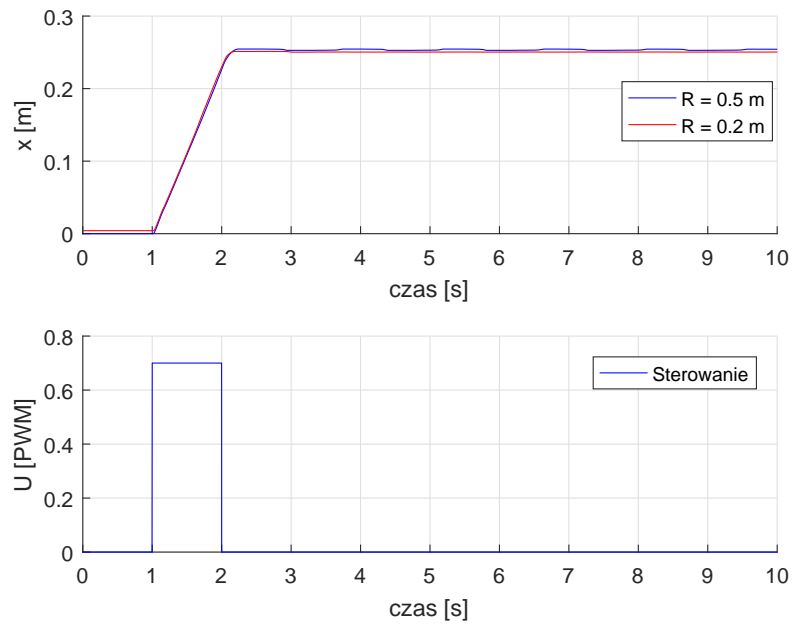


Rys. 2.6: Wyznaczenie tarcia statycznego oś Y.

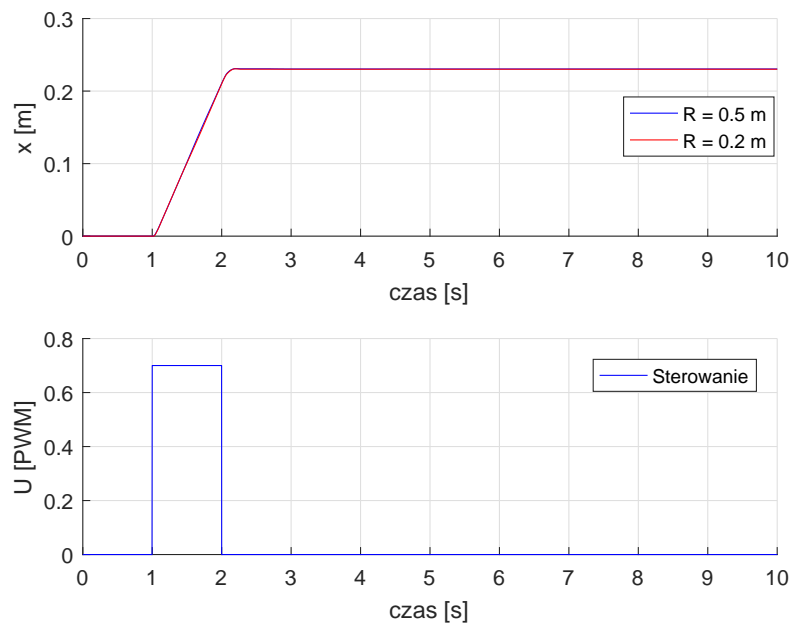
$$U_- = 0.06738$$

$$U_+ = 0.06692$$

2.1.3 Badanie wpływu ruchu ciężarka na ruch wózka.



Rys. 2.7: Porównanie położenia wózka dla różnych długości linki - R , oś Y.



Rys. 2.8: Porównanie położenia wózka dla różnych długości linki - R , oś X.

Jak można zauważyć na rysunkach 2.7 i 2.8 długość linki na której zawieszony jest ładunek nie ma wpływu na ruch samego wózka. Moment siły generowany przez wahający się ładunek

nek był w każdym z rozważanych przypadków niwelowany przez wykorzystane w układzie przekładnie. Na bazie tych obserwacji w późniejszym modelowaniu całego układu zaniedbano wpływ momentu sił pochodzących od podwieszonego ładunku na położenie wózka.

2.1.4 Wyznaczenie modelu oscylacyjnego dla podwieszonego ciężarka

Z racji na to że podczas laboratorium nie było możliwość zważenie wózka do którego był przymocowany ładunek jak i również szyny po której jeździł wózek to do zamodelowania całego układu nie mogliśmy wykorzystać modelu z pracy [1] lub [2]. Dlatego też zdecydowano się na zamodelowanie podwieszonego ładunku jako obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu z tłumieniem i następnie połączenie go z modelem jeżdżącego wózka (równanie 2.1).

Przyjęty model wahadła z tłumieniem:

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad (2.2)$$

gdzie:

K - współczynnik wzmocnienia,

ξ - współczynnik tłumienia,

ω_w - częstotliwość drgań własnych ciężarka,

$\omega_0 = \frac{\omega_w}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ - częstotliwość drgań swobodnych

Identyfikacja parametrów obiektu opisanego równaniem 2.2 polegała na wychyleniu ładunku o zadany kąt od pionu i rejestrowaniu kąta wychylenia. Na tej podstawie odczytano z wykresów amplitudy potrzebne do wyznaczenia współczynnika tarcia jak i również okres drgań wykorzystany do obliczenia częstotliwości ω .

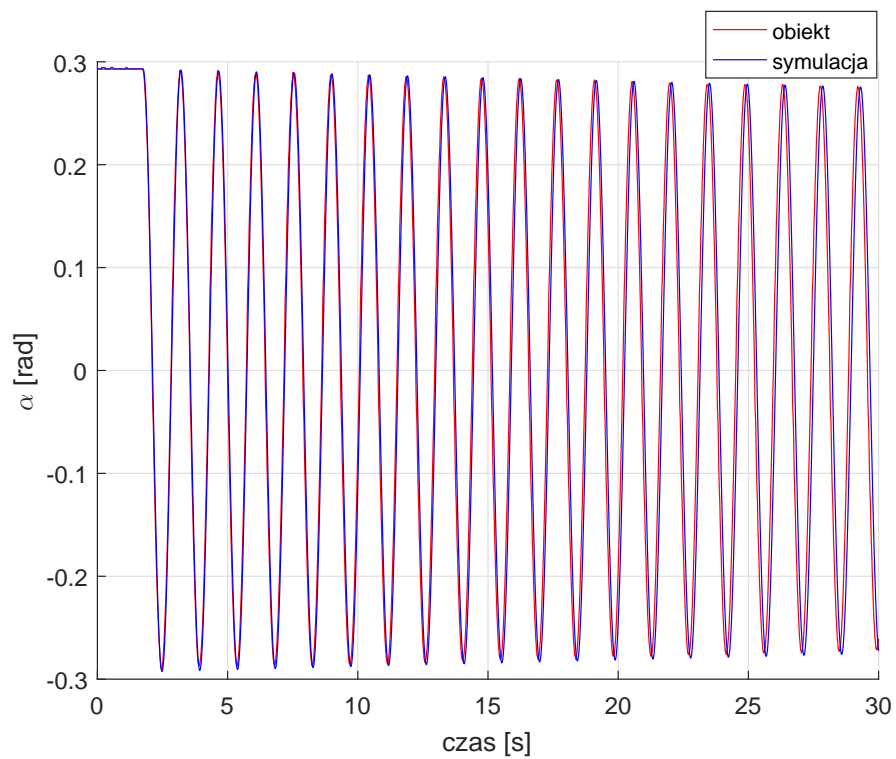
Kąt α - wzdłuż osi X

$$K_x = 0.107$$

$$\omega_w = 4.331 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\xi_x = 5.139 \cdot 10^{-4}$$

$$\omega_{0x} = \frac{\omega_w}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 4.331 \frac{rad}{s}$$



Rys. 2.9: Porównanie kąta wychylenia wahadła wzdłuż osi X.

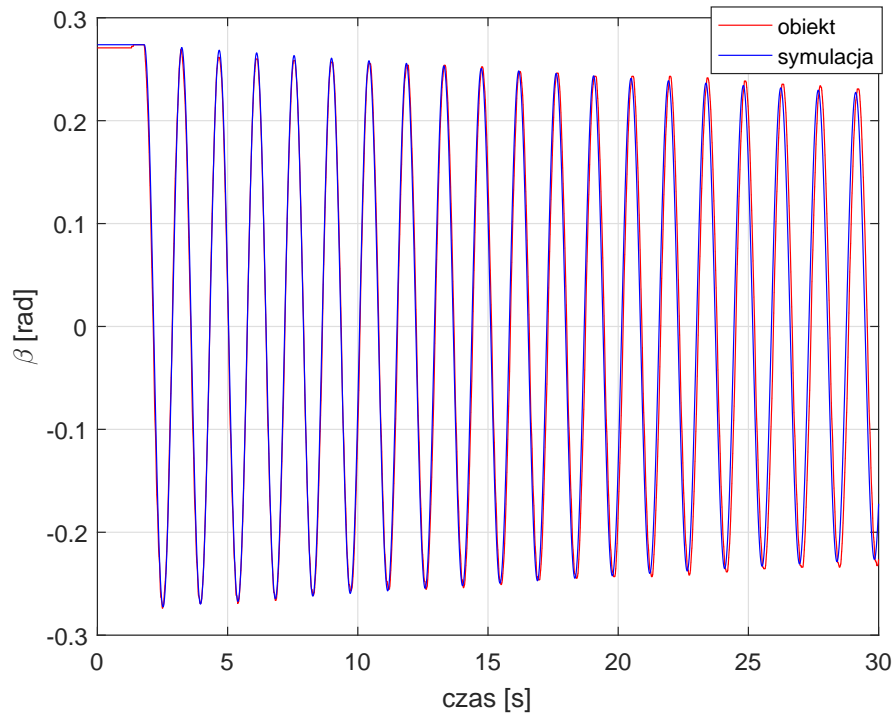
Kąt β - wzdłuż osi Y

$$K_y = 0.09107$$

$$\omega_w = 4.37 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\xi_y = 1.5526 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_{0y} = \frac{\omega_w}{\sqrt{1 - \xi^2}} = 4.371 \frac{rad}{s}$$



Rys. 2.10: Porównanie kąta wychylenia wahadła wzdłuż osi Y.

2.1.5 Porównanie pełnego modelu z obiektem

Kolejnym krokiem były badania eksperymentalne mające na celu sprawdzenie jak wyznaczony model matematyczny sprawdza się w przypadku włączenia do układu regulatorów PID odpowiedzialnych za pozycjonowanie wózka i tłumienie drgań podwieszonego ładunku. W tym celu zaprojektowano dwa regulatory o następujących parametrach:

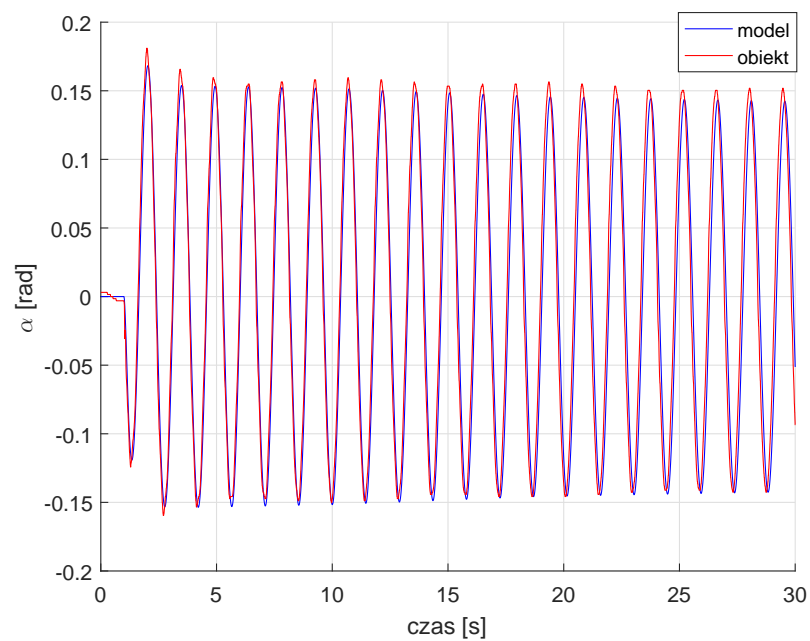
Regulator PID pozycjonujący wózek:

$$K = 10, \quad T_i = 0.005, \quad T_d = 2 \quad (2.3)$$

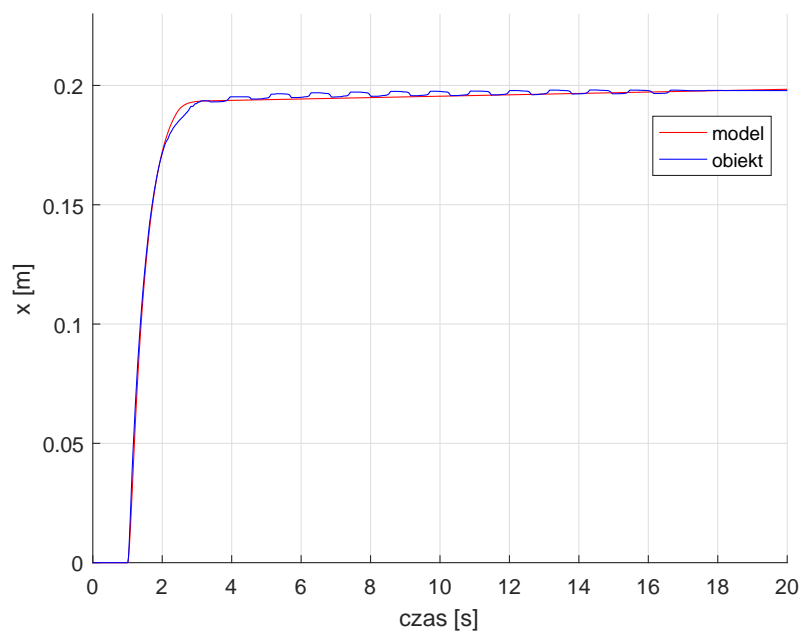
Regulator PD niwelujący kąt odchylenia ciężarka:

$$P = 10, \quad T_d = 0.01 \quad (2.4)$$

2.1.6 Układ bez tłumienia drgań

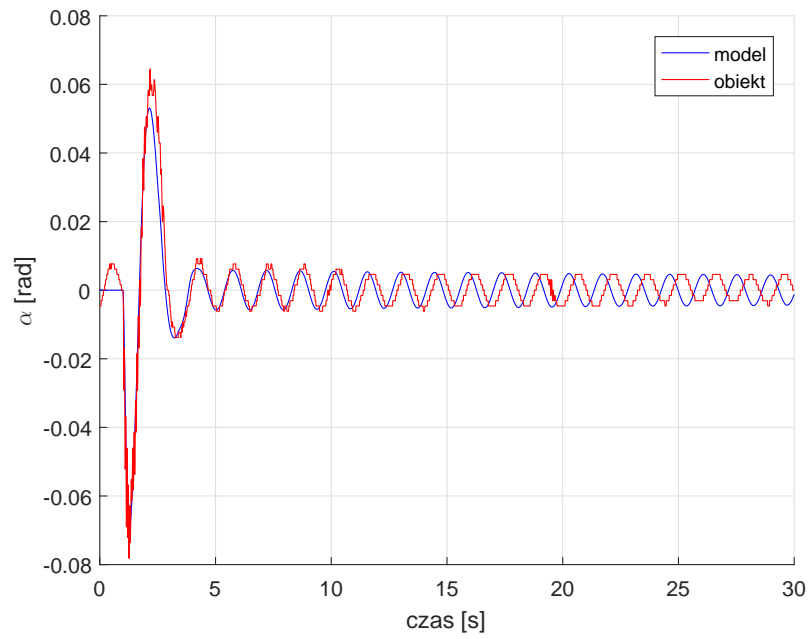


Rys. 2.11: Porównanie kąta wychyleń ładunku modelu z obiektem oś X.

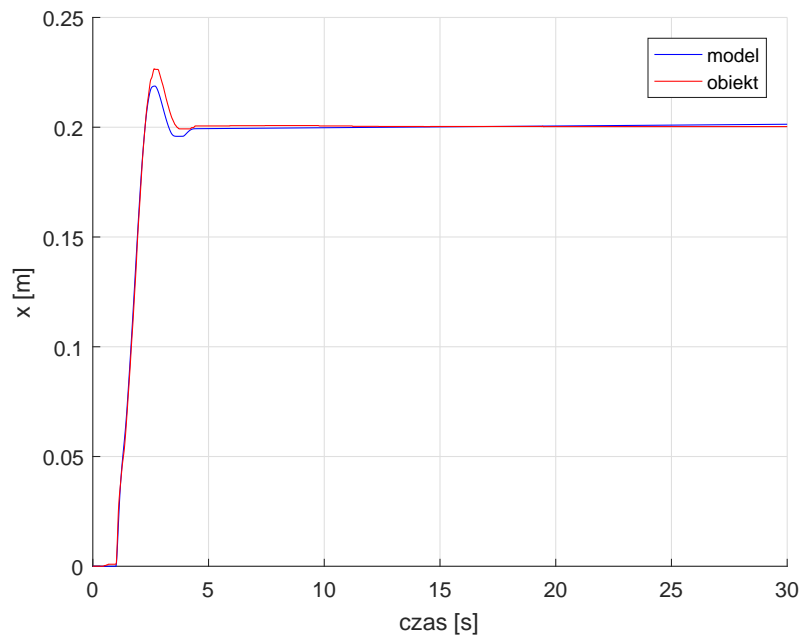


Rys. 2.12: Porównanie położenia wózka modelu z obiektem, oś X.

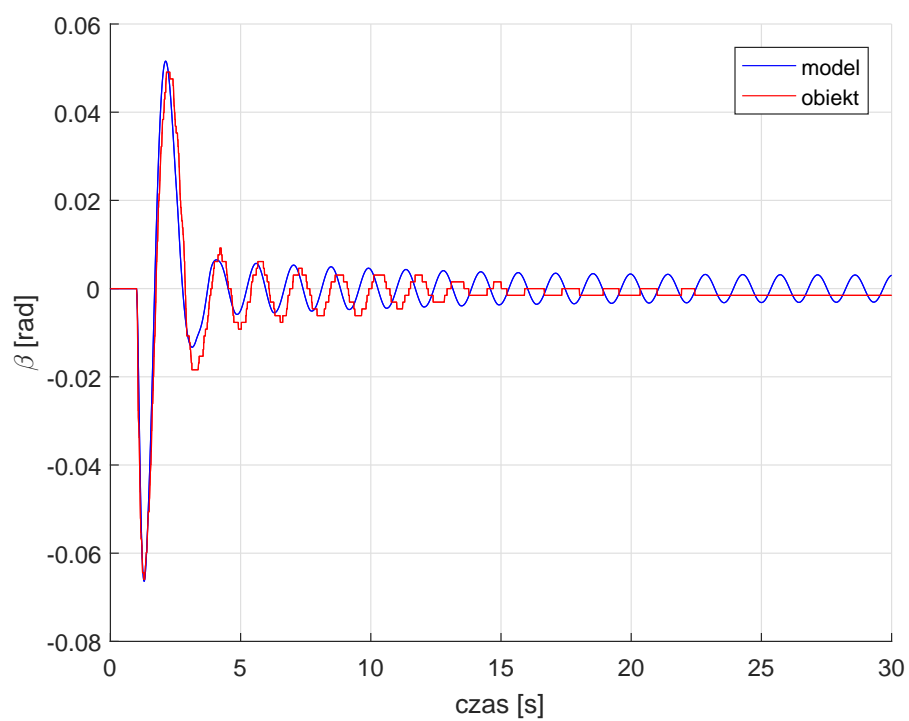
Układ z tłumieniem drgań



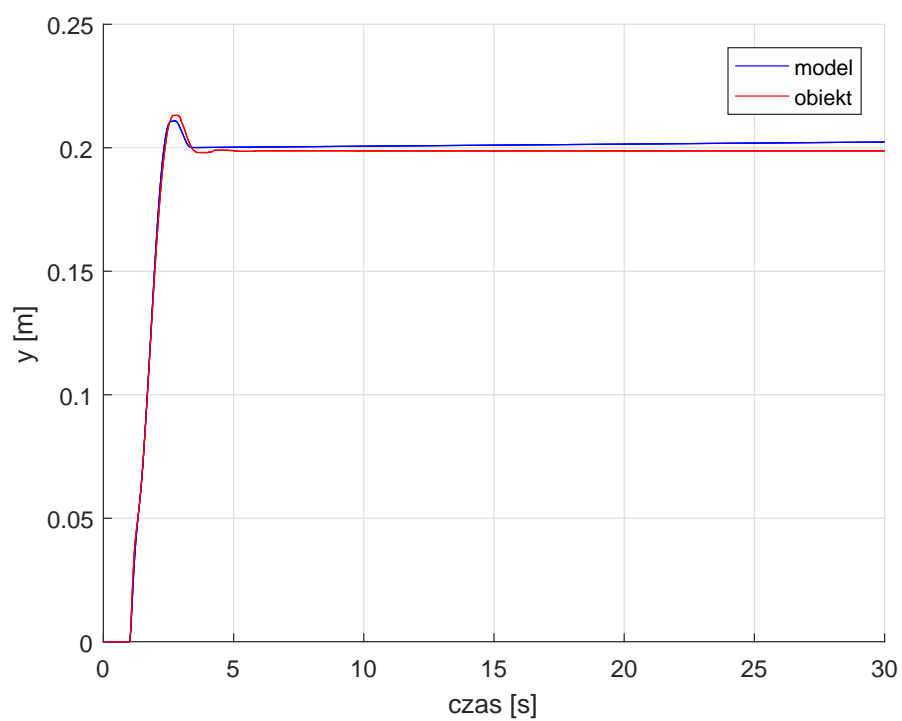
Rys. 2.13: Porównanie kąta wychYLENIA ładunku modelu z obiektem oś X.



Rys. 2.14: Porównanie położenia modelu wózka z obiektem, oś X.



Rys. 2.15: Porównanie kąta wychyleńia ładunku modelu z obiektem oś Y.



Rys. 2.16: Porównanie położenia modelu wózka z obiektem, oś Y.

2.1.7 Optymalizacja nastaw regulatorów

Głównym celem projektowanego układu regulacji jest pozycjonowanie wózka przy wzbudzeniu jak najmniejszych drgań podwieszonego ładunku. Z tego względu do wyznaczenia jak najlepszych nastaw regulatorów wykorzystana została funkcja **fmincon**. Wskaźnik jakości został zdefiniowany następująco:

$$J = 100 \cdot \int_0^T e_\alpha^2 dt + 2000 \cdot \int_0^T e_x^2(t) dt + 500 \cdot A_m \quad (2.5)$$

gdzie:

e_α - uchyb regulacji kąta wychylenia wahadła,

e_x - uchyb regulacji położenia wózka,

A_m - maksymalne wychylenie ładunku od pionu.

W wyniku przeprowadzenia procedury optymalizacji otrzymano następujące nastawy regulatorów:

$$K_x = 8.3209$$

$$T_{ix} = 0.3110$$

$$T_{dx} = 4.1513$$

$$K_\alpha = 23.8693$$

$$T_{d\alpha} = 0.2277$$

Bez przeregulowania:

$$K_x = 19.1565$$

$$T_{ix} = 0.3852$$

$$T_{dx} = 10.6633$$

$$K_\alpha = 16.4288$$

$$T_{d\alpha} = 0.0005$$

2.2 Obserwator Luenbergera

Przyjęte zmienne stanu:

$x_1 = x$ - położenie wózka wzdłuż kolejnych osi,

$x_2 = \dot{x}_1$ - prędkość wózka,

$x_3 = \alpha$ - kąt wychylenia wahadła

$x_4 = \dot{\alpha}$ - pochodna kąta wychylenia wahadła

$$G_m(s) = \frac{K_m}{s(Ts + 1)} \quad (2.6)$$

$$G_w(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.7)$$

Korzystając z przyjętych transmitancji opisujących silnik elektryczny i wychylenie wahadła równania 2.6 i 2.7, otrzymano następujące równania stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-K\omega_0^2}{T} & -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{T} \\ 0 \\ \frac{KK_m\omega_0^2}{T} \end{bmatrix} u \quad (2.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Na podstawie równań 2.8 i 2.9 zaprojektowano obserwator pełnego rzędu, który dany jest wzorem:

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + G(y(t) + Bu(t)) \quad (2.10)$$

gdzie: $w(t)$ - estymata stanu systemu,

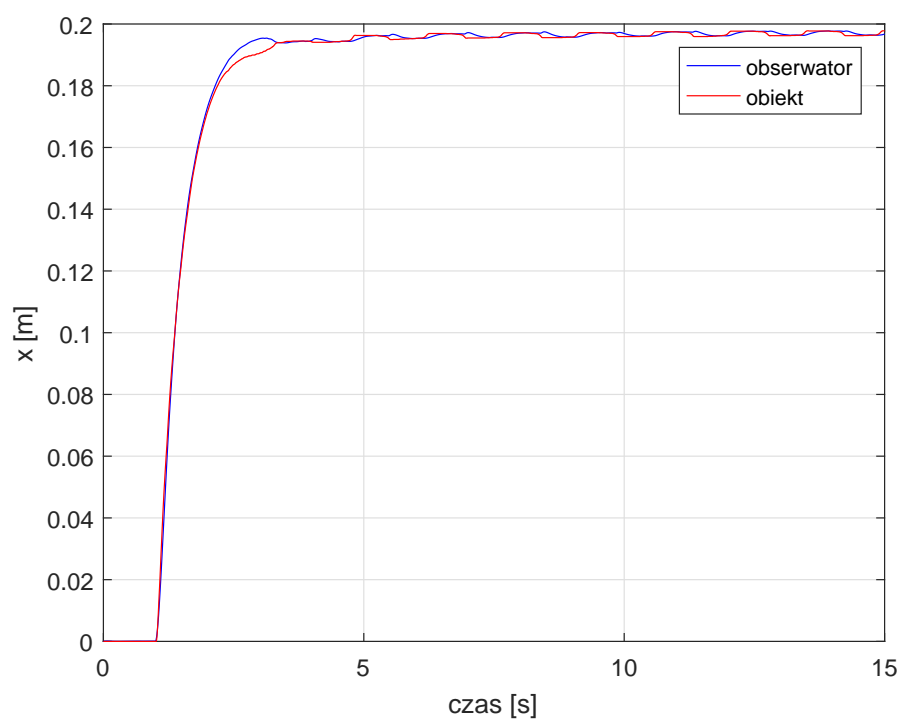
Wartości własne macierzy $f = A - GC$ przyjmowały wartości :

$$\lambda_1 = -11$$

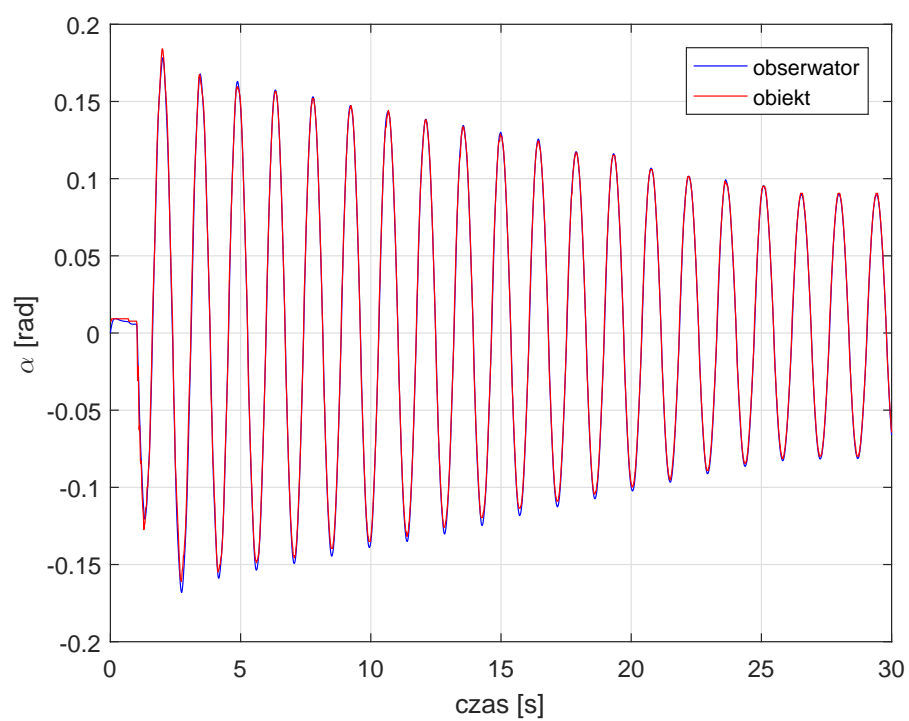
$$\lambda_2 = -10$$

$$\lambda_3 = -9$$

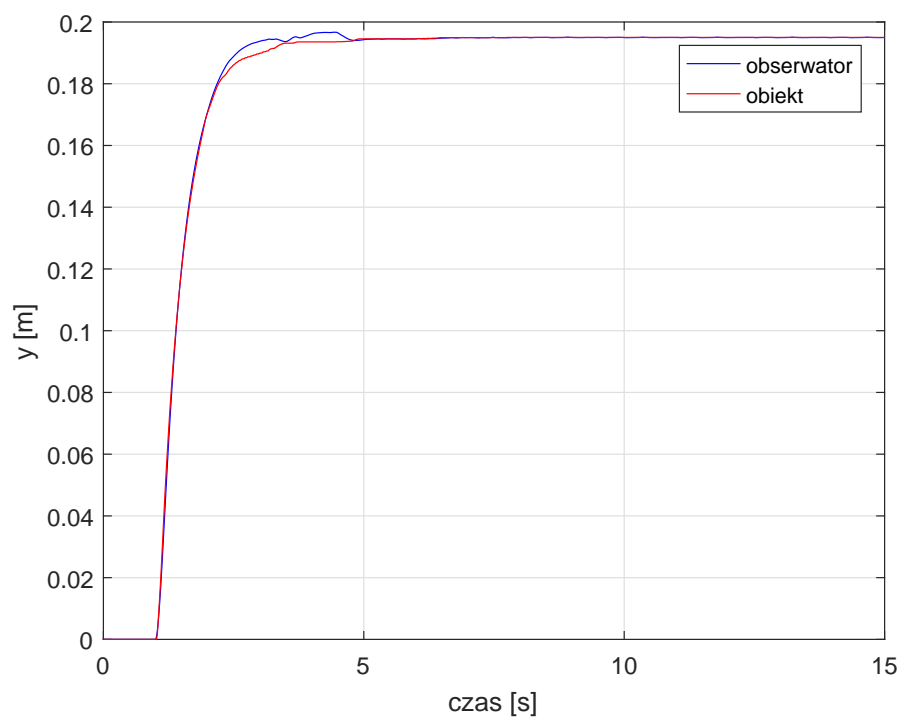
$$\lambda_4 = -11$$



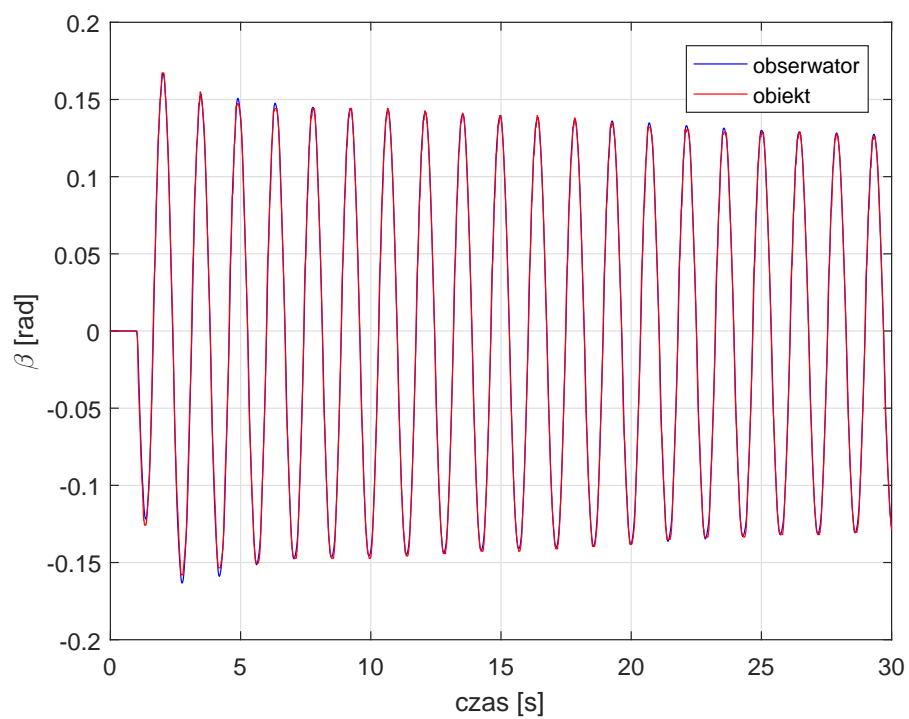
Rys. 2.17: Porównanie obserwatora z obiektem, położenie oś X.



Rys. 2.18: Porównanie obserwatora z obiektem, kąt α .



Rys. 2.19: Porównanie obserwatora z obiektem, położenie oś Y.



Rys. 2.20: Porównanie obserwatora z obiektem, kąt β .

2.3 Regulator LQR

Dla wyznaczonego w sekcji wcześniejszej obserwatora Luenbergera został zaprojektowany regulator LQR. Z racji na to że, zadany stan końcowy nie jest zerowy to na wejście regulatora podawany był uchyb regulacji.

Równania opisujące regulator:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKw(t) \quad (2.11)$$

$$K = R^{-1}B^T X \quad (2.12)$$

gdzie X jest rozwiązaniem równania Ricatti'ego:

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q \quad (2.13)$$

$$X = X^T, \quad Q = Q^T > 0, \quad R = R^T > 0$$

Regulator wyznacza takie sterowanie aby zminimalizować następujący wskaźnik jakości:

$$J_{LQR} = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \quad (2.14)$$

Wartości macierz Q i R zostały wyznaczone na drodze optymalizacji zadanego wskaźnika jakości podanego wzorem:

$$J_1 = 100 \int_0^{tk} e_x(t)^2 dt + 10000 \int_0^{tk} e_\alpha(t)^2 dt \quad (2.15)$$

$$J_2 = 1000 \int_0^{tk} e_x(t)^2 dt + 10000 \int_0^{tk} e_\alpha(t)^2 dt \quad (2.16)$$

gdzie:

tk - czas końcowy symulacji,

$e_x(t)$ - uchyb regulacji położenia wózka,

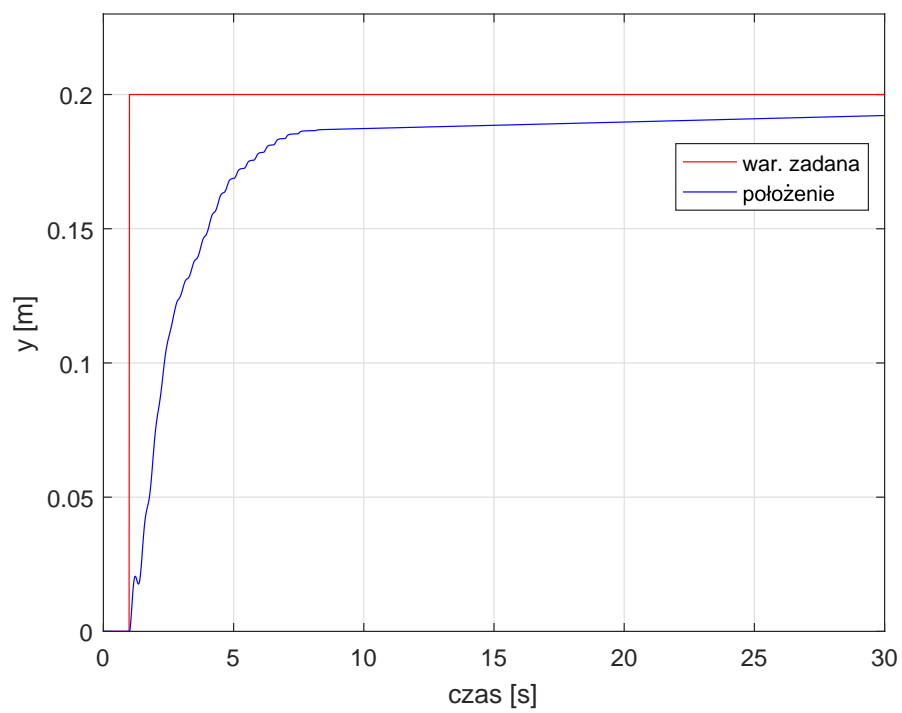
$e_\alpha(t)$ - uchyb wychylenia wahadła

Otrzymane parametry dla J_1 :

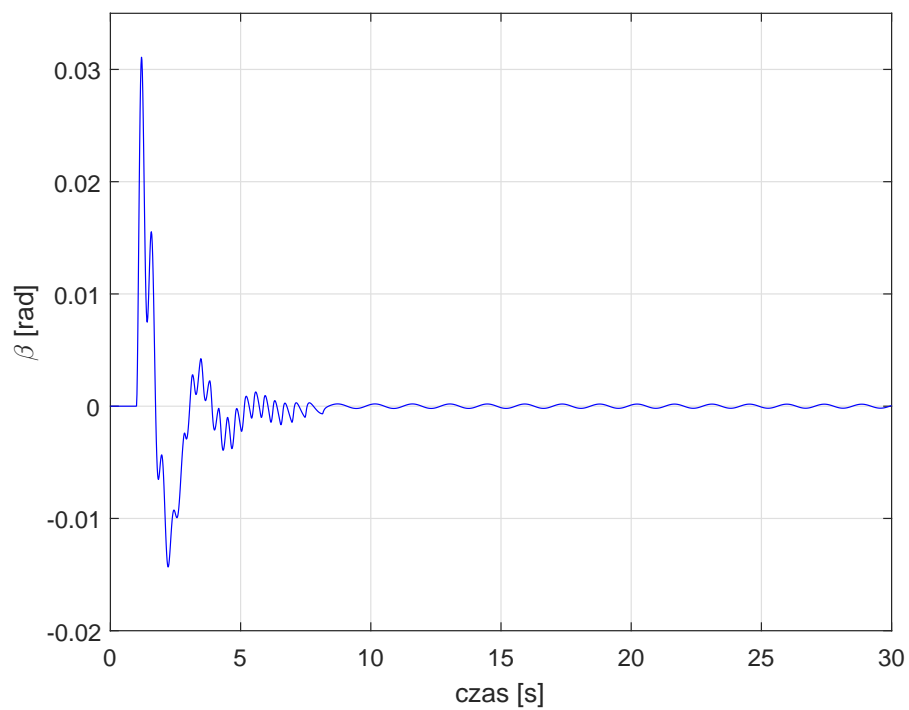
$$Q = \begin{bmatrix} 3.9822 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.014 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100.247 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8633 \end{bmatrix}, \quad R = 11.7425, \quad K = \begin{bmatrix} 0.58232 \\ 0.1233 \\ 3.0552 \\ 0.526 \end{bmatrix}$$

Otrzymane parametry dla J_2 :

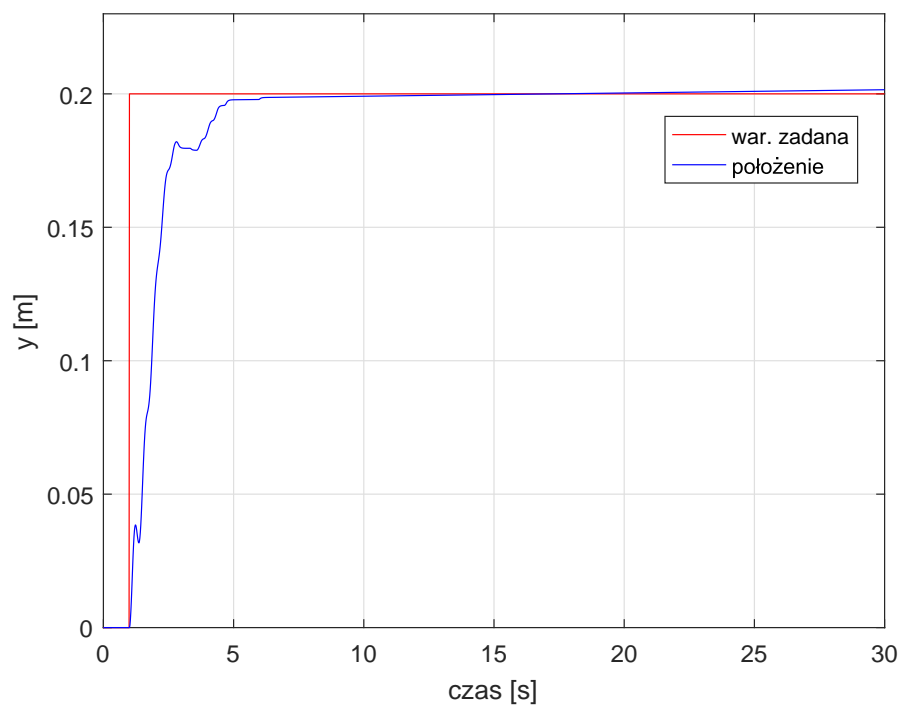
$$Q = \begin{bmatrix} 12.5807 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0872 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99.4095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0601 \end{bmatrix}, \quad R = 8.3558, \quad K = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$



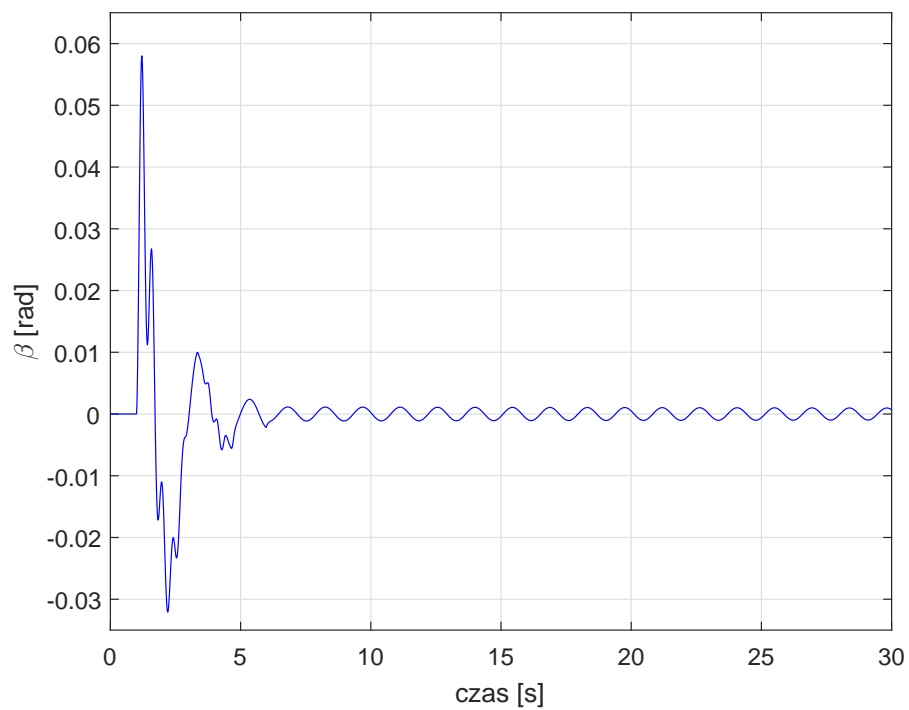
Rys. 2.21: Działanie regulatora LQR - model symulacyjny, położenie oś Y.



Rys. 2.22: Działanie regulatora LQR - model symulacyjny, kąt β .



Rys. 2.23: Działanie regulatora LQR - model symulacyjny, położenie oś Y.



Rys. 2.24: Działanie regulatora LQR - model symulacyjny, kąt β .

Porównanie działania układu regulacji dla różnych wartości macierzy Q i R.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_1 = 10, K_1 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = 1, K_2 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_3 = 1, K_3 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_4 = 1, K_4 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_7 = 1, K_7 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

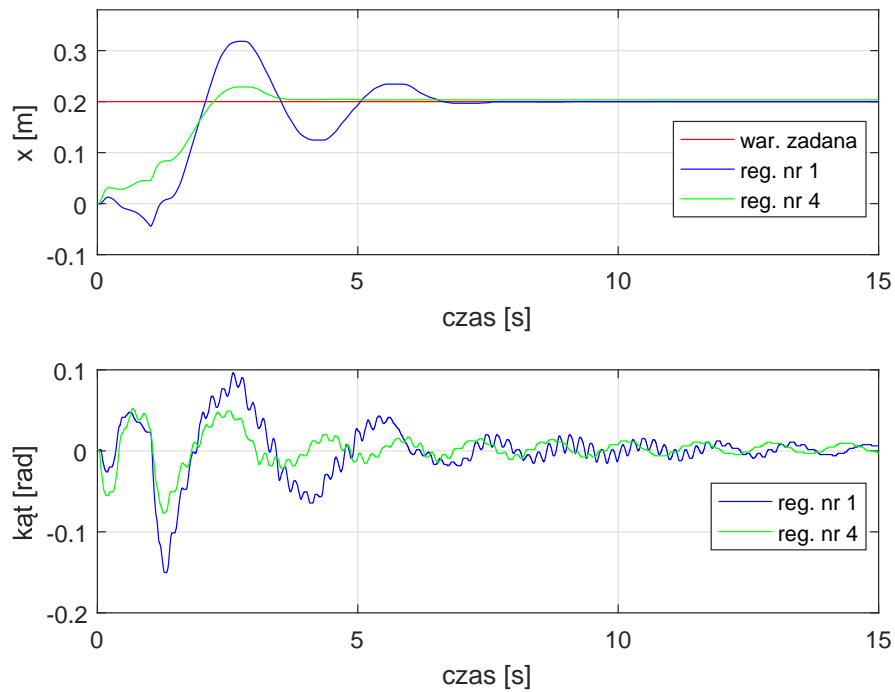
$$Q_8 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_8 = 1, K_8 = \begin{bmatrix} 1.2270 \\ 0.2052 \\ 3.4056 \\ 0.1155 \end{bmatrix}$$

Działanie regulatorów zostało porównane za pomocą następujących wskaźników jakości:

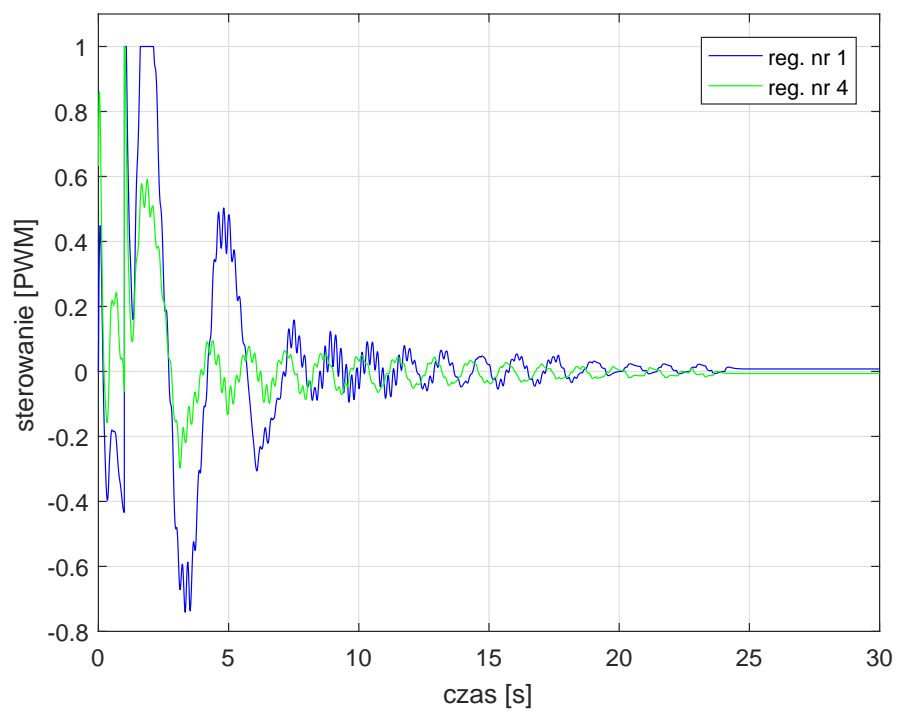
1. $J_1 = \int_0^{tk} e_x(t)^2 dt$ - całka z kwadratu uchybu regulacji położenia wózka,
2. $J_2 = \int_0^{tk} e_\alpha(t)^2 dt$ - całka z kwadratu uchybu regulacji wychylenia ładunku,
3. J_3 - maksymalna odchyłka ładunku od pionu [rad].

Tabela 2.2: Porównanie poszczególnych regulatorów LQR.

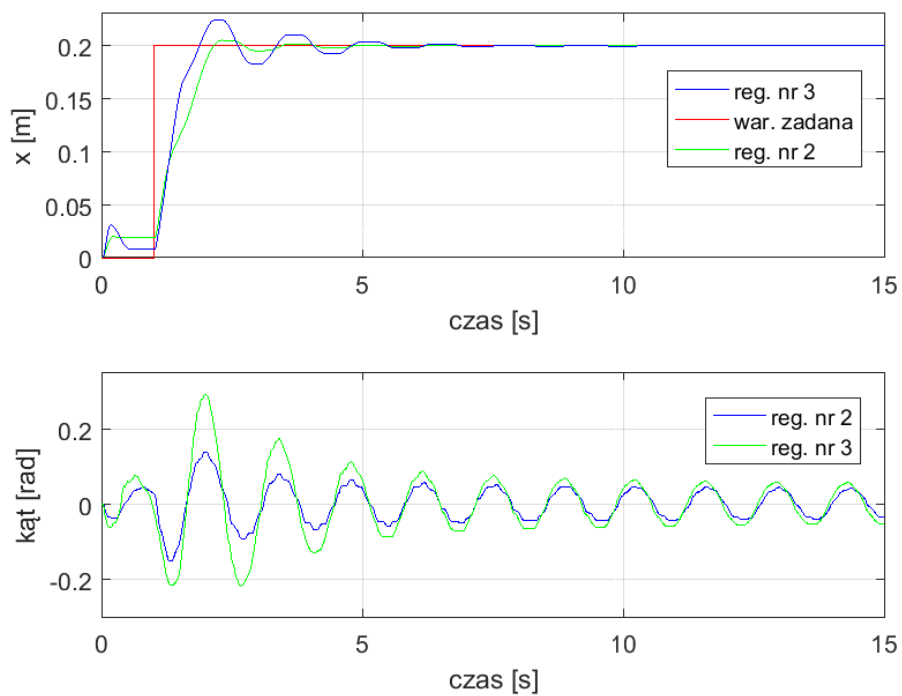
Nr regulatora	$J_1[m^2 \cdot s]$	$J_2[rad^2 \cdot s]$	$J_3[rad]$
1	0.3245	0.0170	0.0966
2	0.2961	0.0420	0.1396
3	0.3006	0.1275	0.2930
4	0.3225	0.0056	0.0522
5	0.1201	0.0015	0.0322
6	0.0923	0.0019	0.0353



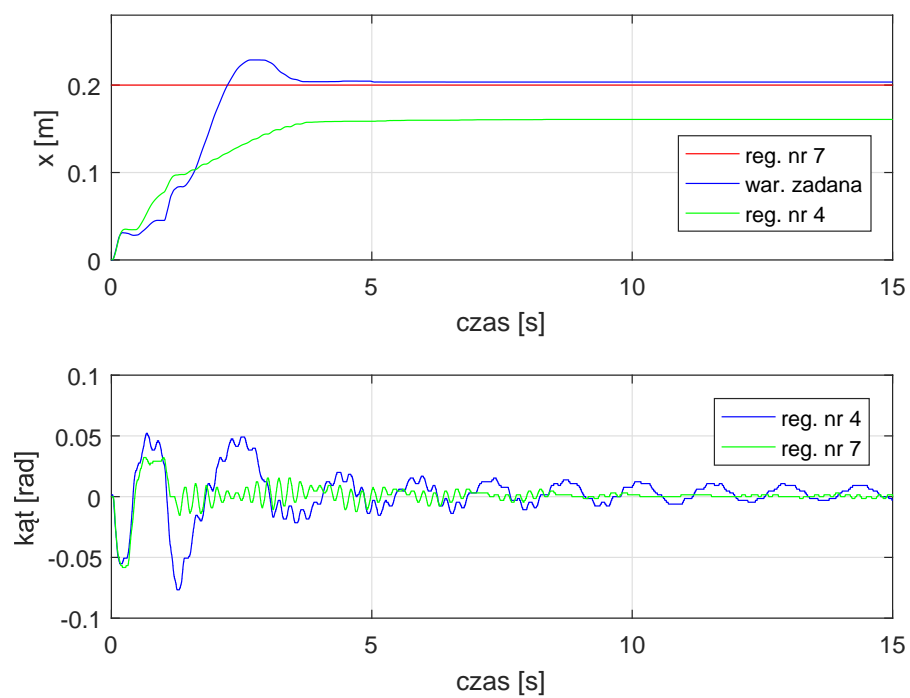
Rys. 2.25: Porównanie działania regulatorów nr 1 i 4.



Rys. 2.26: Porównanie sterowania regulatorów nr 1 i 4.



Rys. 2.27: Porównanie działania regulatorów nr 3 i 2.



Rys. 2.28: Porównanie działania regulatorów nr 4 i 7.

Bibliografia

- [1] Pauluk, M.: *Model matematyczny trójwymiarowej suwnicy*. W: **Automatyka** 2002 tom 6 s. 69-102, ISSN: 1429-3447
- [2] Pauluk, M.: *Optimal and robust control of 3D crane*. W: **Przegląd Elektrotechniczny**, 2012 vol. 2 pp. 205-212 ISSN: 0033-2097