

Lewitacja magnetyczna

Marcin Kowalczyk
Maciej Cebula
Daniel Rubak

26 listopad, 2017

Data wykonania: 21 listopad, 2017
Przedmiot: Laboratorium Problemowe 2
Prowadzący: Dawid Knapik

1 Wstęp

Celem projektu było zaprojektowanie systemu sterowania dla układu dwóch rotorów w osiach prostopadłych (model helikoptera). Działanie układu opiera się na generowaniu momentów sił przez obracające się śmigła zamontowane na silnikach prądu stałego. Momenty sił generowane przez grawitację mają być równoważone przez wytworzony moment siły. Moment siły wytwarzany przez silnik jest zależny od współczynnika wypełnienia sygnału PWM podawanego na silnik. Układ umożliwia pomiar orientacji obiektu i prędkości obrotowych silników prądu stałego, sterowanie napięciem podawanym na silniki oraz umożliwia współpracę z urządzeniami sterującymi. Do pomiaru orientacji służą enkodery przyrostowe, natomiast do pomiaru prędkości służą prądnice tachometryczne, w których wytworzone napięcie jest proporcjonalne do mierzonej prędkości obrotowej. Na początku postanowiono wykonać układ sterowania dla helikoptera z zablokowaną osią pionową. Do symulacji, obliczeń numerycznych i generowania kodu wykorzystano programy *Matlab* i *Simulink*. Wygenerowany kod jest wykonywany w czasie rzeczywistym. Możliwa jest również zmiana parametrów układu sterowania (np. pozycji zadanej) w czasie pracy układu. Mierzone wielkości są również wyświetlane na bieżąco w programie *Simulink*.

2 Model matematyczny

Wykorzystano następujący model matematyczny układu dla osi poziomej:

$$\begin{aligned} J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} &= -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \\ I_v \frac{d\omega_v}{dt} &= u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

J_v jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie pionowej,

f_v jest współczynnikiem tarcia lepkiego,

a jest momentem sił grawitacji,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

I_v jest momentem bezwładności dużego śmigła,

$H_v^{-1}(\omega_v)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika głównego,
 ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,
 $M_v(\omega_v)$ jest momentem sił generowanym przez silnik główny,
 u_v jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika głównego.

Dla osi pionowej wykorzystano następujący model matematyczny układu:

$$\begin{aligned} J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} &= -f_h \frac{d\alpha_h}{dt} + M_h(\omega_h) \\ I_h \frac{d\omega_h}{dt} &= u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

α_h jest kątem obrotu w płaszczyźnie poziomej,
 J_h jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie poziomej,
 f_h jest współczynnikiem tarcia lepkiego,
 I_h jest momentem bezwładności małego śmigła,
 $H_h^{-1}(\omega_h)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika bocznego,
 ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,
 $M_h(\omega_h)$ jest momentem sił generowanym przez silnik boczny,
 u_h jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika bocznego.

Przyjęto, że wielkości $M_v(\omega_v)$, $M_h(\omega_h)$, $H_v^{-1}(\omega_v)$ i $H_h^{-1}(\omega_h)$ są wielomianami piątego stopnia. Równania różniczkowe (2.1) i (2.2) są więc równaniami nieliniowymi. Równania (2.1) i (2.2) przekształcono do postaci równań stanu. Dla równań (2.1) mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{f_v}{J_v} x_2 + \frac{a}{J_v} \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + \frac{M_v(\omega_v)}{J_v} \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_v}{I_v} - \frac{H_v^{-1}(\omega_v)}{I_v} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Natomiast dla równań (2.2) mają następującą postać:

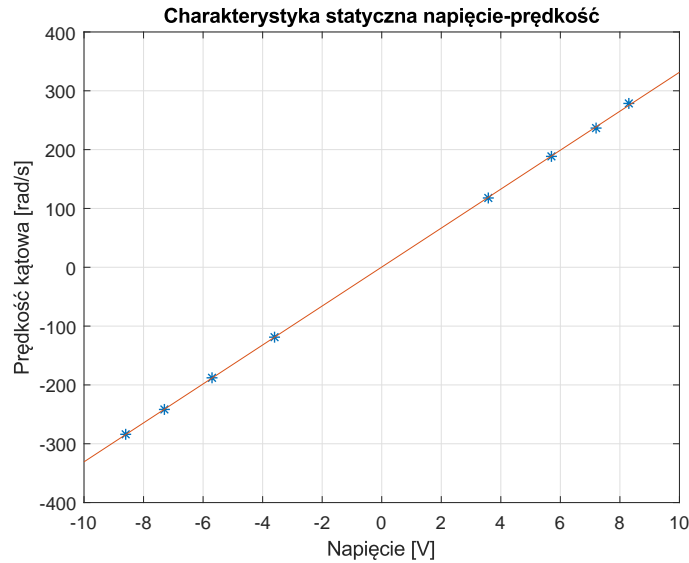
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{f_h}{J_h} x_2 + \frac{M_h(\omega_h)}{J_h} \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_h}{I_h} - \frac{H_h^{-1}(\omega_h)}{I_h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

3 Identyfikacja

Zagadnienie identyfikacji modeli nieliniowych jest bardzo często zagadnieniem problematycznym. Dla modeli liniowych wystarczy zazwyczaj wykorzystać metodę najmniejszych kwadratów. Dla modelu nieliniowego metoda ta daje na ogół obciążoną estymację parametrów, a rozwiązanie zadania może być niejednoznaczne. Oprócz tego zadanie to jest skomplikowane pod względem numerycznym, gdyż rozwiązywanie nieliniowych równań różniczkowych jest złożone obliczeniowo. Aby ułatwić identyfikację należy zdekomponować ją na znacznie prostsze zadania. Dzięki temu identyfikacja modelu nieliniowego sprowadza się do wykonania kilkudziesięciu pomiarów oraz odpowiednich przekształceń algebraicznych.

3.1 Prędkość kątowa z prądnicy tachometrycznej

W pierwszej kolejności konieczne było przeliczenie napięcia z prądnicy tachometrycznej na prędkość kątową w radianach na sekundę. W tym celu wykorzystano dostępną dokumentację oraz zmierzone dane. Dla danej wartości współczynnika wypełnienia PWM odczytywano multimetrem napięcie na wyprowadzeniach z prądnicy tachometrycznej oraz wartość wyświetlaną w *Simulink*. W dokumentacji sprawdzono jak należy przeliczyć napięcie prądnicy tachometrycznej na prędkość kątową. Punkty pomiarowe następnie aproksymowano wielomianem pierwszego stopnia. Wyniki zostały zaprezentowane na rysunku 3.1.



Rys. 3.1: Charakterystyka statyczna prędkości kątowej od odczytu z czujnika.

Otrzymano wzór (3.1) opisujący przeliczenie wielkości odczytanej w *Simulink* na prędkość kątową w radianach na sekundę.

$$V = \frac{2000\pi}{0.52 \cdot 60} (0.1644V_S + 0.0019) \quad (3.1)$$

gdzie:

V_S jest wartością odczytaną w *Simulink*,

V jest prędkością kątową w radianach na sekundę.

3.2 Moment niewyważenia

Wykonano badanie momentu niewyważenia, który powodował, że kiedy na układ nie działały żadne dodatkowe siły, to nie znajdował się on w pozycji poziomej. Rozpoczęto od zgrubnego wyznaczenia kąta równowagi w płaszczyźnie pionowej. W tym celu użyto elektronicznej "poziomicy" w postaci telefonu komórkowego. Wyznaczony kąt miał wartość:

$$\alpha_{v0} = -0.491 \quad (3.2)$$

Następnie wykorzystano równanie (3.3) do wyznaczenia zależności momentu niewyważenia od kąta nachylenia (parametru a).

$$J_v \frac{d^2\alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \quad (3.3)$$

W pewnej odległości l od osi obrotu przyłożono siłę (pochodzącą od zawieszonych ciężarków), której moment był przeciwny do momentu niewyważenia. Wagę ciężarków dobrano tak, by powstały moment równoważył niewyważenie dla kąta $\alpha_v = 0$. Kąt ten nie zmienia się, a więc jego pochodne są równe 0. Można więc zapisać równania (3.4) opisujące równowagę sił w tej sytuacji.

$$\begin{aligned} M_{zew} &= -a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) \\ M_{zew} &= lmg \cos(\alpha_v) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

a jest maksymalnym momentem sił niewyważenia,

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

M_{zew} jest przyłożonym momentem sił,

l jest odległością od osi obrotu do punktu przyłożenia zewnętrznej siły,

m jest łączną masą przyłożonych ciężarków,

g jest przyspieszeniem ziemskim.

Opisane parametry miały następujące wartości:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= 0 \\ \alpha_{v0} &= -0.491 \\ l &= 0.26\text{m} \\ m &= 0.06\text{kg} \\ g &= 9.81\text{m/s}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podstawiając wartości powyższych parametrów do wzorów (3.4) wyznaczono następującą wartość współczynnika momentu niewyważenia:

$$a = -0.3068\text{Nm} \quad (3.6)$$

3.3 Moment siły generowany przez silnik główny

Następnie konieczne było wyznaczenie momentu siły generowanego przez śmigło przymocowane do silnika głównego. W tym celu podawano różne wartości współczynnika wypełnienia PWM na silnik. Po ustaleniu się prędkości obrotowej zawieszano ciężarki w pewnej odległości od osi obrotu tak, aby przyłożony zewnętrzny moment siły równoważył moment siły wygenerowany przez silnik oraz moment niewyważenia dla kąta $\alpha_v = 0$. W tym celu ponownie wykorzystano równanie (3.3). Kąt nachylenia nie zmieniał się, a więc pochodne kąta nachylenia po czasie wynosiły 0. Wzór ten sprowadzał się więc do zależności opisanej wzorem

$$\begin{aligned} M_v(\omega_v) &= -a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) - M_{zew} \\ M_{zew} &= lmg \cos(\alpha_v) \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdzie:

a jest maksymalnym momentem sił niewyważenia,

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

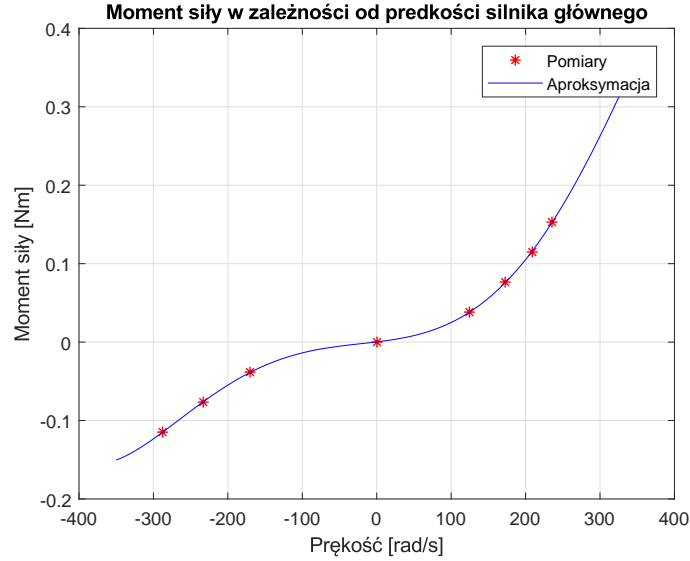
M_{zew} jest przyłożonym momentem sił,

$M_v(\omega_v)$ jest momentem siły generowanym przez silnik główny,

ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,

l jest odległością od osi obrotu do punktu przyłożenia zewnętrznej siły,
 m jest łączną masą przyłożonych ciężarków,
 g jest przyspieszeniem ziemskim.

Zależność momentu siły nośnej od prędkości kątowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.2 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.2: Charakterystyka statyczna momentu siły nośnej od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

$$M_v(\omega_v) = -2.5146 \cdot 10^{-14} \omega_v^5 + 2.9593 \cdot 10^{-12} \omega_v^4 + 8.1312 \cdot 10^{-9} \omega_v^3 + 5.0407 \cdot 10^{-7} \omega_v^2 + 1.1510 \cdot 10^{-4} \omega_v + 2.7833 \cdot 10^{-4} \quad (3.8)$$

3.4 Zależność oporów ruchu od prędkości obrotowej śmigła głównego

Kolejnym krokiem procesu identyfikacji było badanie wpływu prędkości obrotowej silnika na napięcie podawane na silnik. Większa prędkość obrotowa powoduje większe opory, przez co mniejsze napięcie podawane jest na silnik. Opisuje to równanie (3.9).

$$I_v \frac{d\omega_v}{dt} = u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \quad (3.9)$$

gdzie:

I_v jest momentem bezwładności dużego śmigła,

$H_v^{-1}(\omega_v)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika głównego,

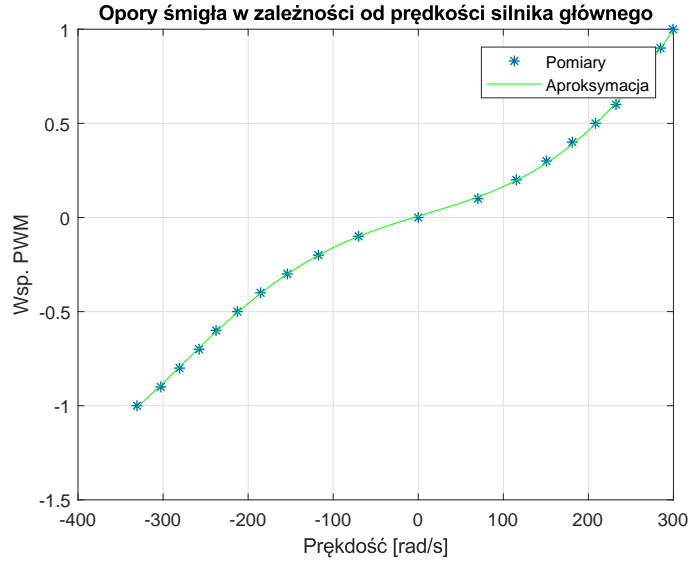
ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,

u_v jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika głównego.

Pomiary wykonywane są dla ustalonej prędkości obrotowej silnika, więc jej pochodne po czasie są równe 0. Stąd powyższe równie przyjmuje następującą postać:

$$H_v^{-1}(\omega_v) = u_v \quad (3.10)$$

Zależność oporów ruchu śmigła od prędkości kątowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.3 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.3: Charakterystyka statyczna oporów ruchu śmigła od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

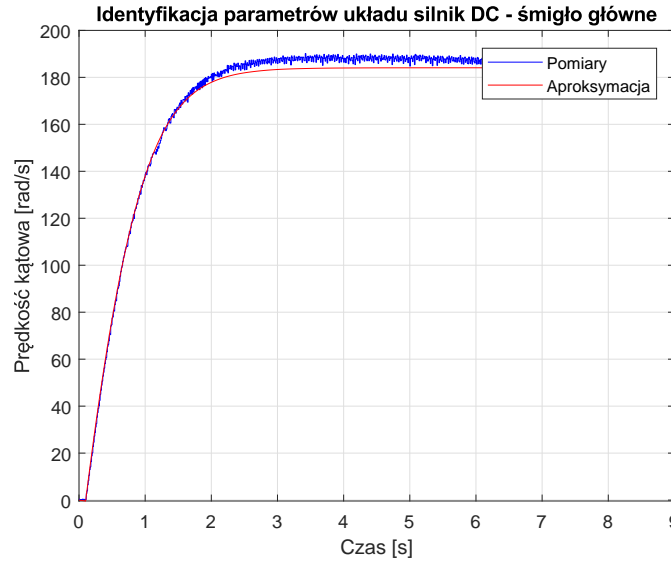
$$H_v^{-1}(\omega_v) = -7.4418 \cdot 10^{-14} \omega_v^5 + 1.3631 \cdot 10^{-11} \omega_v^4 + 2.6232 \cdot 10^{-8} \omega_v^3 - 6.6054 \cdot 10^{-7} \omega_v^2 + 0.0014 \omega_v + 0.0072 \quad (3.11)$$

3.5 Parametry modelu układu silnik DC - śmigło główne

Następnie przeprowadzono identyfikację parametrów równania (3.12).

$$I_v \frac{d\omega_v}{dt} = u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \quad (3.12)$$

Funkcja $H_v^{-1}(\omega_v)$ została już zidentyfikowana. Należy więc dobrać tylko wartość momentu bezwładności dużego śmigła (I_v). W tym celu zarejestrowano odpowiedź prędkości obrotowej śmigła na skok wartości współczynnika wypełniania sygnału PWM podawanego na silnik. Następnie z wykorzystaniem funkcji *lsqnonlin* programu *MATLAB* znaleziono taką wartość tego parametru, która minimalizuje błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu względem zarejestrowanego przebiegu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.12) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.4 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.4: Porównanie odpowiedzi zarejestrowanej i aproksymowanego modelu.

Wyznaczony parametr miał następującą wartość:

$$I_v = 0.0017 \text{ kg m}^2 \quad (3.13)$$

3.6 Moment bezwładności układu dla osi poziomej

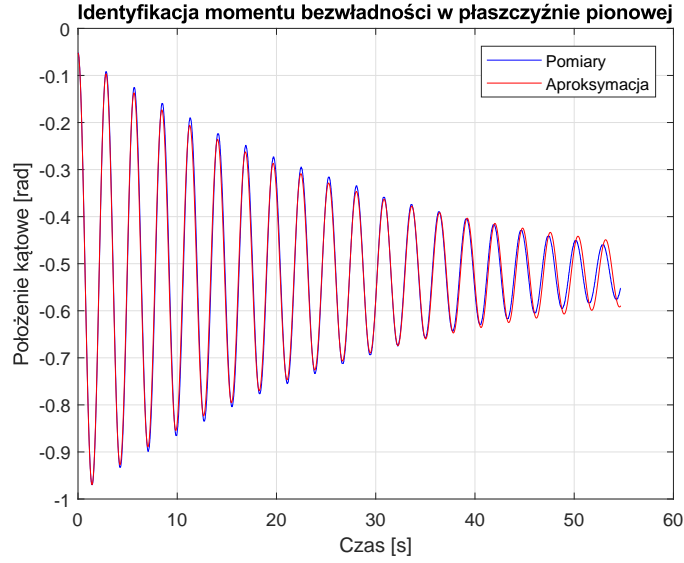
Ostatnimi koniecznymi do zbadania parametrami dla układu w płaszczyźnie pionowej były jego moment bezwładności, współczynnik tarcia lepkiego oraz dokładna wartość kąta równowagi układu. Wielkości te zostały wyznaczone na podstawie równania (3.14).

$$J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \quad (3.14)$$

Identyfikację tej części przeprowadzano wprowadzając układ w drgania wokół punktu równowagi. W trakcie eksperymentu silnik był wyłączony. Równanie (3.14) sprowadza się więc do postaci:

$$J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) \quad (3.15)$$

Zapisano przebieg kąta wychylenia układu podczas eksperymentu. Następnie szukano parametrów J_v , f_v oraz α_{v0} takich, by minimalizowały średniokwadratowy wskaźnik jakości. Wykorzystano do tego funkcję *lsqnonlin* programu *MATLAB*. Na rysunku 3.5 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.5: Porównanie odpowiedzi zarejestrowanej i aproksymowanego modelu.

W wyniku optymalizacji otrzymano następujące wartości poszukiwanych parametrów modelu:

$$\begin{aligned} J_v &= 0.0604 \text{ kg m}^2 \\ f_v &= 0.0042 \text{ Nm s} \\ \alpha_{v0} &= -0.5223 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.7 Zależność oporów ruchu od prędkości obrotowej śmigła bocznego

Następnie zbadano wpływ prędkości obrotowej silnika na napięcie podawane na silnik dla osi pionowej. Podobnie jak dla osi poziomej, większa prędkość obrotowa powoduje większe opory, przez co mniejsze napięcie podawane jest na silnik. Opisuje to równanie (3.17).

$$I_h \frac{d\omega_h}{dt} = u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \quad (3.17)$$

gdzie:

I_h jest momentem bezwładności śmigła bocznego,

$H_h^{-1}(\omega_h)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika bocznego,

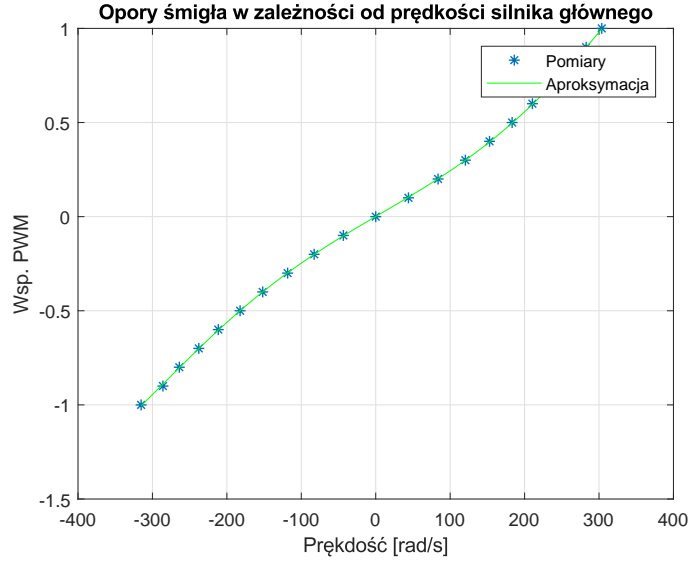
ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,

u_h jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika bocznego.

Pomiary wykonano są dla ustalonej prędkości obrotowej silnika, więc jej pochodne po czasie są równe 0. Stąd powyższe (3.17) przyjmuje następującą postać:

$$H_h^{-1}(\omega_h) = u_h \quad (3.18)$$

Zależność oporów ruchu śmigła od prędkości katowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.6 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.6: Charakterystyka statyczna oporów ruchu śmigła bocznego od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

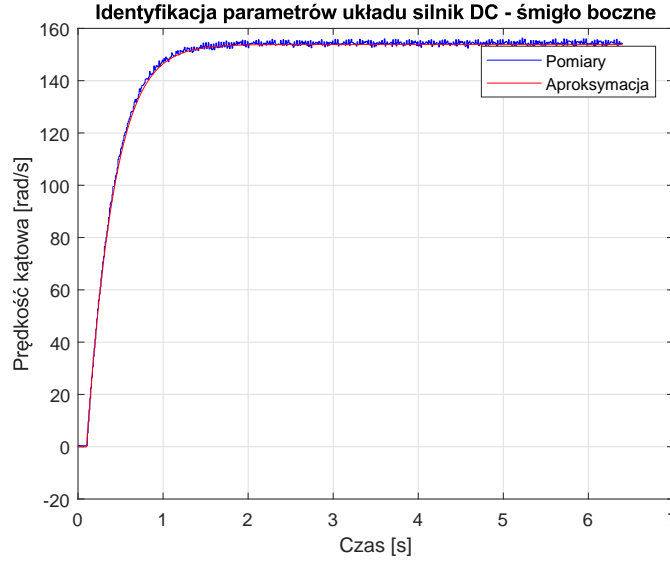
$$H_h^{-1}(\omega_h) = -4.0004 \cdot 10^{-14} \omega_h^5 + 5.1822 \cdot 10^{-12} \omega_h^4 + 1.3426 \cdot 10^{-8} \omega_h^3 - 2.8251 \cdot 10^{-7} \omega_h^2 + 0.0023 \omega_h + 6.8066 \cdot 10^{-4} \quad (3.19)$$

3.8 Parametry modelu układu silnik DC - śmigło boczne

Konieczne było przeprowadzenie identyfikacji parametrów równania (3.20).

$$I_h \frac{d\omega_h}{dt} = u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \quad (3.20)$$

Funkcja $H_h^{-1}(\omega_h)$ została zidentyfikowana w poprzednim podrozdziale. Należy więc dobrać wartość momentu bezwładności śmigła bocznego (I_h). W tym celu zarejestrowano odpowiedź prędkości obrotowej śmigła na skok wartości współczynnika wypełniania sygnału PWM podawanego na silnik. Następnie dla zarejestrowanego przebiegu użyto funkcję *lsqnonlin* programu *MATLAB*, by znaleźć taką wartość parametru I_h , która minimalizuje błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.20) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.7 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.7: Porównanie zapisanego przebiegu i odpowiedzi zidentyfikowanego modelu.

Wyznaczony parametr miał następującą wartość:

$$I_h = 8.7148 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (3.21)$$

3.9 Moment siły generowany przez silnik boczny

Przeprowadzono również eksperyment w celu wyznaczenia momentu siły generowanego przez śmigło boczne. W tym celu podawano różne wartości współczynnika wypełnienia PWM na silnik przy zablokowanym układzie. Po ustaleniu się prędkości obrotowej układ uwalniano i zapisywano przebiegi położenia kątownego i prędkości obrotowej silnika. W tym celu wykorzystano równanie (3.22).

$$J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} = -f_h \frac{d\alpha_h}{dt} + M_h(\omega_h) \quad (3.22)$$

gdzie:

α_h jest kątem obrotu w płaszczyźnie poziomej,

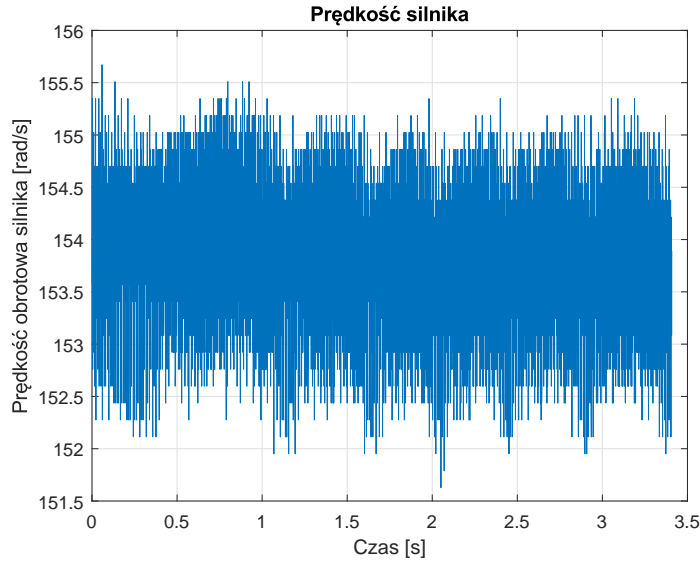
J_h jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie poziomej,

f_h jest współczynnikiem tarcia lepkiego,

ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,

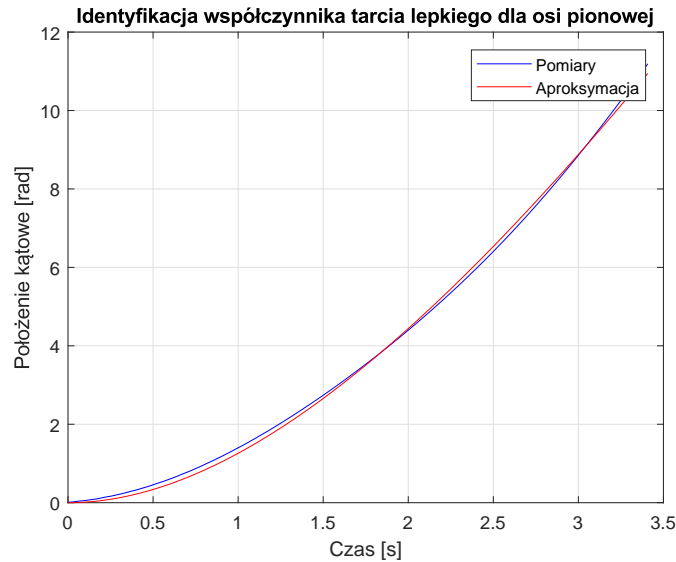
$M_h(\omega_h)$ jest momentem sił generowanym przez silnik boczny.

W celu zmniejszenia ilości parametrów koniecznych do optymalizacji postanowiono obie strony równania podzielić przez J_h . Otrzymane równanie poddano procesowi identyfikacji. Na wykresie 3.8 przedstawiono prędkość obrotową silnika. Jest ona w przybliżeniu stała (pomijając szumy pomiarowe). Można więc założyć, że również moment wywołany tą prędkością jest stały. W związku z tym identyfikacja sprowadza się do znalezienia parametru f_v i stałego momentu siły.



Rys. 3.8: Prędkość obrotowa silnika w trakcie eksperymentu.

Dla zarejestrowanych przebiegów użyto funkcji *lsqnonlin* programu *MATLAB*, by znaleźć takie wartości współczynników, które minimalizują błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.22) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.9 kolorem niebieskim przedstawiono jeden z zarejestrowanych przebiegów, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



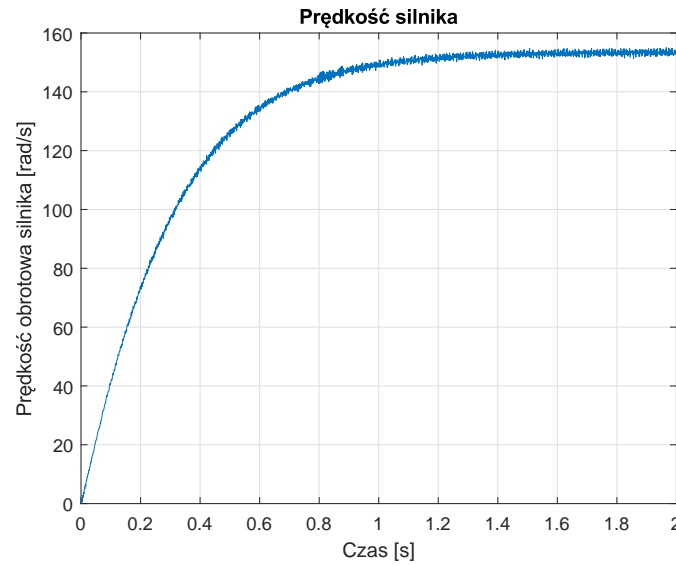
Rys. 3.9: Porównanie zarejestrowanej odpowiedzi z aproksymowanym modelem.

Wyznaczony parametr f_h miał następującą wartość:

$$f_h = 0.0539 \quad (3.23)$$

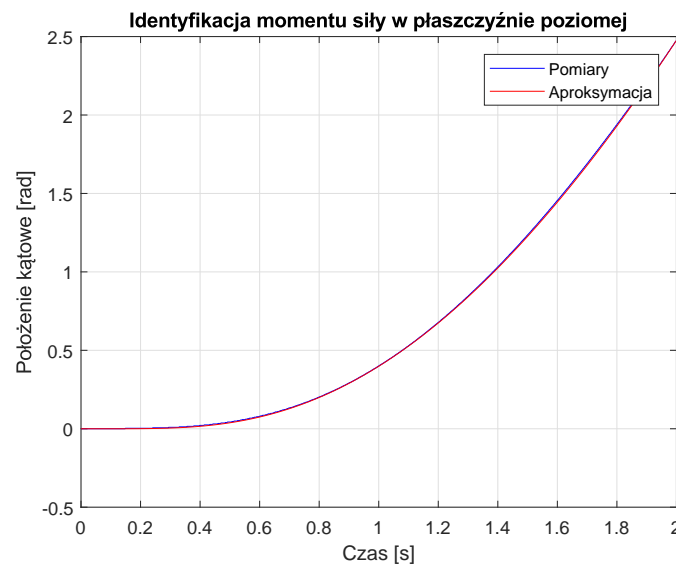
Następnie zarejestrowano dane z eksperymentów, podczas których układ nie był zablokowany po podaniu skoku współczynnika wypełnienia sygnału PWM na silnik. Dane te znacznie lepiej nadają się do zidentyfikowania współczynników wielomianu $M_h(\omega_h)$. Na

wykresie 3.10 przedstawiono przebieg prędkości obrotowej silnika podczas jednego z przeprowadzonych eksperymentów.

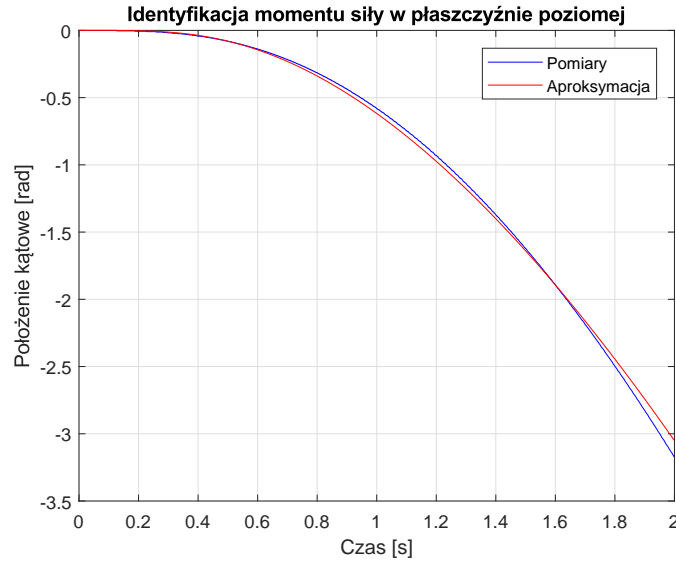


Rys. 3.10: Prędkość obrotowa silnika w trakcie eksperymentu.

Za pomocą funkcji *lsqnonlin* wyznaczono współczynniki wielomianu $M_h(\omega_h)$, które minimalizowały średniokwadratowy wskaźnik jakości dla zarejestrowanych przebiegów. Na wykresach 3.11 i 3.12 kolorem niebieskim oznaczono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu. Pierwszy z wykresów odpowiada skokowi współczynnika wypełnienia do wartości 0.4, natomiast drugi skokowi tej wielkości do -0.6 (silnik obracający się w przeciwną stronę).

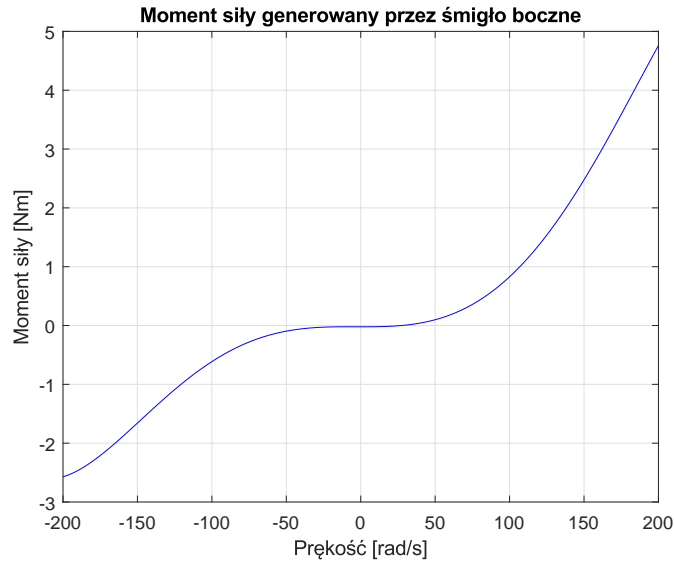


Rys. 3.11: Porównanie odpowiedzi dla współczynnika wypełnienia PWM równego 0.4.



Rys. 3.12: Porównanie odpowiedzi dla współczynnika wypełnienia PWM równego -0.6 .

Na rysunku 3.13 przedstawiono wykres wyznaczonej funkcji momentu siły zależnej od prędkości obrotowej silnika bocznego $M_h(\omega_h)$.



Rys. 3.13: Moment siły w zależności od prędkości obrotowej silnika bocznego.

Powyższa funkcja opisana jest następującym wzorem:

$$M_h(\omega_h) = -8.8567 \cdot 10^{-12} \omega_h^5 + 4.9851 \cdot 10^{-10} \omega_h^4 + 8.1331 \cdot 10^{-7} \omega_h^3 + 7.9455 \cdot 10^{-6} \omega_h^2 - 3.3890 \cdot 10^{-5} \omega_h - 0.0215 \quad (3.24)$$

4 Punkt równowagi

W dalszej części pracy projektowano sterowanie układem z zablokowanym ruchem w płaszczyźnie poziomej. W tym celu konieczne było wyznaczenie zbioru punktów równowagi

systemu. Punkt spełnia następujące równania:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

A więc:

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{f_v}{J_v}x_2 + \frac{a}{J_v}\sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + \frac{M_v(\omega_v)}{J_v} \\ 0 &= \frac{u_v}{I_v} - \frac{H_v^{-1}(\omega_v)}{I_v}\end{aligned}\tag{4.2}$$