

Lewitacja magnetyczna

Marcin Kowalczyk
Maciej Cebula
Daniel Rubak

26 listopad, 2017

Data wykonania: 21 listopad, 2017
Przedmiot: Laboratorium Problemowe 2
Prowadzący: Dawid Knapik

1 Wstęp

Celem projektu było zaprojektowanie systemu sterowania dla układu dwóch rotorów w osiach prostopadłych (model helikoptera). Działanie układu opiera się na generowaniu momentów sił przez obracające się śmigła zamontowane na silnikach prądu stałego. Momenty sił generowane przez grawitację mają być równoważone przez wytworzony moment siły. Moment siły wytwarzany przez silnik jest zależny od współczynnika wypełnienia sygnału PWM podawanego na silnik. Układ umożliwia pomiar orientacji obiektu i prędkości obrotowych silników prądu stałego, sterowanie napięciem podawanym na silniki oraz umożliwia współpracę z urządzeniami sterującymi. Do pomiaru orientacji służą enkodery przyrostowe, natomiast do pomiaru prędkości służą prądnice tachometryczne, w których wytworzone napięcie jest proporcjonalne do mierzonej prędkości obrotowej. Na początku postanowiono wykonać układ sterowania dla helikoptera z zablokowaną osią pionową. Do symulacji, obliczeń numerycznych i generowania kodu wykorzystano programy *Matlab* i *Simulink*. Wygenerowany kod jest wykonywany w czasie rzeczywistym. Możliwa jest również zmiana parametrów układu sterowania (np. pozycji zadanej) w czasie pracy układu. Mierzone wielkości są również wyświetlane na bieżąco w programie *Simulink*.

2 Model matematyczny

Wykorzystano następujący model matematyczny układu dla osi poziomej:

$$\begin{aligned} J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} &= -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \\ I_v \frac{d\omega_v}{dt} &= u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie:

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

J_v jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie pionowej,

f_v jest współczynnikiem tarcia lepkiego,

a jest momentem sił grawitacji,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

I_v jest momentem bezwładności dużego śmigła,

$H_v^{-1}(\omega_v)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika głównego,
 ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,
 $M_v(\omega_v)$ jest momentem sił generowanym przez silnik główny,
 u_v jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika głównego.

Dla osi pionowej wykorzystano następujący model matematyczny układu:

$$\begin{aligned} J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} &= -f_h \frac{d\alpha_h}{dt} + M_h(\omega_h) \\ I_h \frac{d\omega_h}{dt} &= u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

α_h jest kątem obrotu w płaszczyźnie poziomej,
 J_h jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie poziomej,
 f_h jest współczynnikiem tarcia lepkiego,
 I_h jest momentem bezwładności małego śmigła,
 $H_h^{-1}(\omega_h)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika bocznego,
 ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,
 $M_h(\omega_h)$ jest momentem sił generowanym przez silnik boczny,
 u_h jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika bocznego.

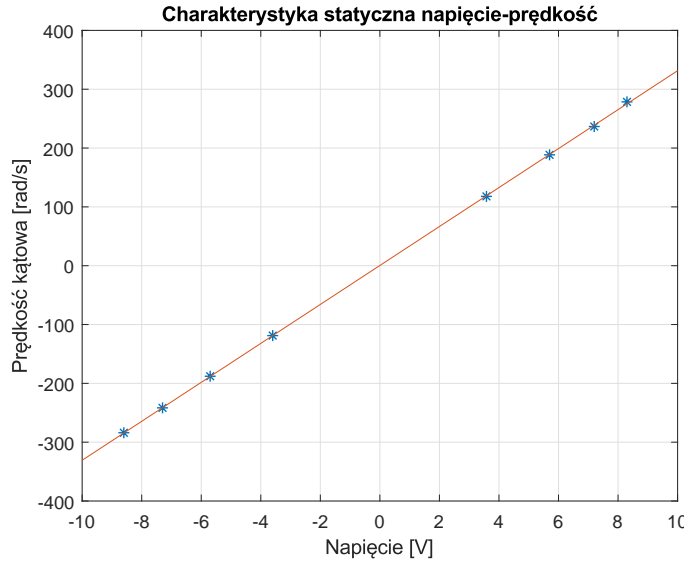
Przyjęto, że wielkości $M_v(\omega_v)$, $M_h(\omega_h)$, $H_v^{-1}(\omega_v)$ i $H_h^{-1}(\omega_h)$ są wielomianami piątego stopnia. Równania różniczkowe (2.1) i (2.2) są więc równaniami nieliniowymi. Równania (2.1) i (2.2) przekształcono do postaci równań stanu. Dla równań (2.1) mają one następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{f_v}{J_v} x_2 + \frac{a}{J_v} \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + \frac{M_v(\omega_v)}{J_v} \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_v}{I_v} - \frac{H_v^{-1}(\omega_v)}{I_v} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Natomiast dla równań (2.2) mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{f_h}{J_h} x_2 + \frac{M_h(\omega_h)}{J_h} \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_h}{I_h} - \frac{H_h^{-1}(\omega_h)}{I_h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Opisany w tym rozdziale model dla osi poziomej został zaimplementowany w programie *Simulink*. Schemat blokowy realizujący ten model przedstawiono na rysunku 2.1.



Rys. 3.1: Charakterystyka statyczna prędkości kątowej od odczytu z czujnika.

Otrzymano wzór (3.1) opisujący przeliczenie wielkości odczytanej w *Simulink* na prędkość kątową w radianach na sekundę.

$$V = \frac{2000\pi}{0.52 \cdot 60} (0.1644V_S + 0.0019) \quad (3.1)$$

gdzie:

V_S jest wartością odczytaną w *Simulink*,

V jest prędkością kątową w radianach na sekundę.

3.2 Moment niewyważenia

Wykonano badanie momentu niewyważenia, który powodował, że kiedy na układ nie działały żadne dodatkowe siły, to nie znajdował się on w pozycji poziomej. Rozpoczęto od zgrubnego wyznaczenia kąta równowagi w płaszczyźnie pionowej. W tym celu użyto elektronicznej "poziomicy" w postaci telefonu komórkowego. Wyznaczony kąt miał wartość:

$$\alpha_{v0} = -0.491 \quad (3.2)$$

Następnie wykorzystano równanie (3.3) do wyznaczenia zależności momentu niewyważenia od kąta nachylenia (parametru a).

$$J_v \frac{d^2\alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \quad (3.3)$$

W pewnej odległości l od osi obrotu przyłożono siłę (pochodzącą od zawieszonych ciężarków), której moment był przeciwny do momentu niewyważenia. Wagę ciężarków dobrano tak, by powstały moment równoważył niewyważenie dla kąta $\alpha_v = 0$. Kąt ten nie zmienia się, a więc jego pochodne są równe 0. Można więc zapisać równania (3.4) opisujące równowagę sił w tej sytuacji.

$$\begin{aligned} M_{zew} &= -a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) \\ M_{zew} &= lmg \cos(\alpha_v) \end{aligned} \quad (3.4)$$

gdzie:

a jest maksymalnym momentem sił niewyważenia,

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

M_{zew} jest przyłożonym momentem sił,

l jest odległością od osi obrotu do punktu przyłożenia zewnętrznej siły,

m jest łączną masą przyłożonych ciężarków,

g jest przyspieszeniem ziemskim.

Opisane parametry miały następujące wartości:

$$\begin{aligned}\alpha_v &= 0 \\ \alpha_{v0} &= -0.491 \\ l &= 0.26\text{m} \\ m &= 0.06\text{kg} \\ g &= 9.81\text{m/s}^2\end{aligned}\tag{3.5}$$

Podstawiając wartości powyższych parametrów do wzorów (3.4) wyznaczono następującą wartość współczynnika momentu niewyważenia:

$$a = -0.3068\text{Nm}\tag{3.6}$$

3.3 Moment siły generowany przez silnik główny

Następnie konieczne było wyznaczenie momentu siły generowanego przez śmigło przymocowane do silnika głównego. W tym celu podawano różne wartości współczynnika wypełnienia PWM na silnik. Po ustaleniu się prędkości obrotowej zawieszano ciężarki w pewnej odległości od osi obrotu tak, aby przyłożony zewnętrzny moment siły równoważył moment siły wygenerowany przez silnik oraz moment niewyważenia dla kąta $\alpha_v = 0$. W tym celu ponownie wykorzystano równanie (3.3). Kąt nachylenia nie zmieniał się, a więc pochodne kąta nachylenia po czasie wynosiły 0. Wzór ten sprowadzał się więc do zależności opisanej wzorem

$$\begin{aligned}M_v(\omega_v) &= -a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) - M_{zew} \\ M_{zew} &= lmg \cos(\alpha_v)\end{aligned}\tag{3.7}$$

gdzie:

a jest maksymalnym momentem sił niewyważenia,

α_v jest kątem obrotu w płaszczyźnie pionowej,

α_{v0} jest kątem równowagi układu w płaszczyźnie pionowej,

M_{zew} jest przyłożonym momentem sił,

$M_v(\omega_v)$ jest momentem siły generowanym przez silnik główny,

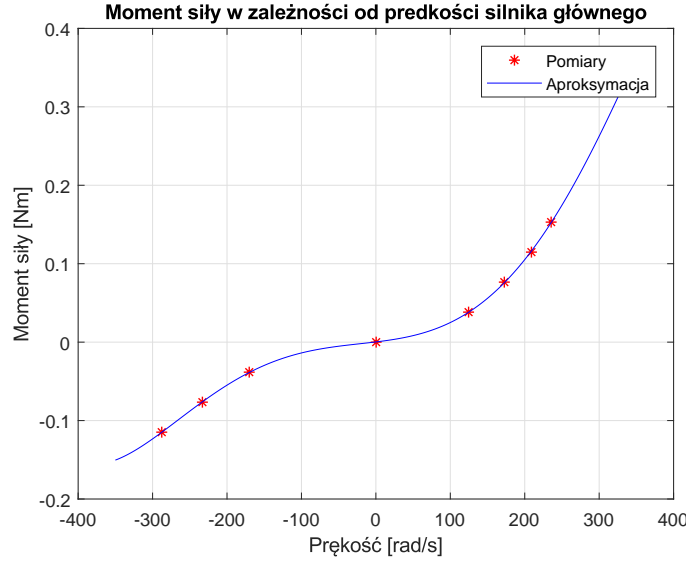
ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,

l jest odległością od osi obrotu do punktu przyłożenia zewnętrznej siły,

m jest łączną masą przyłożonych ciężarków,

g jest przyspieszeniem ziemskim.

Zależność momentu siły nośnej od prędkości kątowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.2 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.2: Charakterystyka statyczna momentu siły nośnej od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

$$M_v(\omega_v) = -2.5146 \cdot 10^{-14} \omega_v^5 + 2.9593 \cdot 10^{-12} \omega_v^4 + 8.1312 \cdot 10^{-9} \omega_v^3 + 5.0407 \cdot 10^{-7} \omega_v^2 + 1.1510 \cdot 10^{-4} \omega_v + 2.7833 \cdot 10^{-4} \quad (3.8)$$

3.4 Zależność oporów ruchu od prędkości obrotowej śmigła głównego

Kolejnym krokiem procesu identyfikacji było badanie wpływu prędkości obrotowej silnika na napięcie podawane na silnik. Większa prędkość obrotowa powoduje większe opory, przez co mniejsze napięcie podawane jest na silnik. Opisuje to równanie (3.9).

$$I_v \frac{d\omega_v}{dt} = u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \quad (3.9)$$

gdzie:

I_v jest momentem bezwładności dużego śmigła,

$H_v^{-1}(\omega_v)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika głównego,

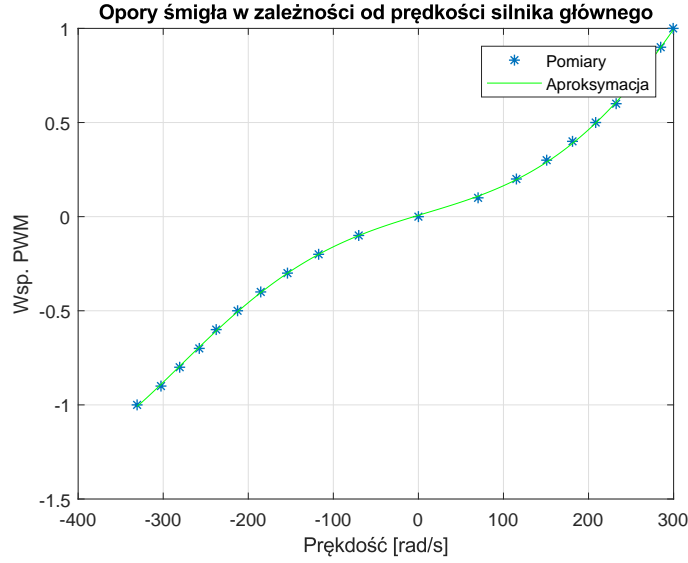
ω_v jest prędkością obrotową silnika głównego,

u_v jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika głównego.

Pomiary wykonywane są dla ustalonej prędkości obrotowej silnika, więc jej pochodne po czasie są równe 0. Stąd powyższe równie przyjmuje następującą postać:

$$H_v^{-1}(\omega_v) = u_v \quad (3.10)$$

Zależność oporów ruchu śmigła od prędkości kątowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.3 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.3: Charakterystyka statyczna oporów ruchu śmigła od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

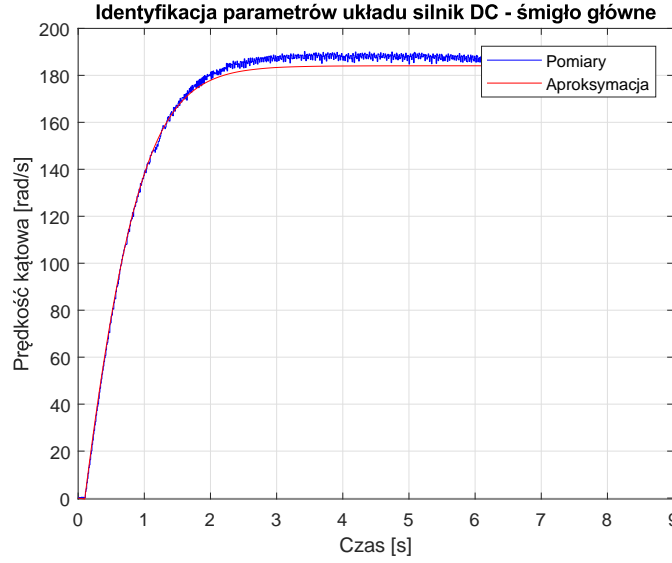
$$H_v^{-1}(\omega_v) = -7.4418 \cdot 10^{-14} \omega_v^5 + 1.3631 \cdot 10^{-11} \omega_v^4 + 2.6232 \cdot 10^{-8} \omega_v^3 - 6.6054 \cdot 10^{-7} \omega_v^2 + 0.0014 \omega_v + 0.0072 \quad (3.11)$$

3.5 Parametry modelu układu silnik DC - śmigło główne

Następnie przeprowadzono identyfikację parametrów równania (3.12).

$$I_v \frac{d\omega_v}{dt} = u_v - H_v^{-1}(\omega_v) \quad (3.12)$$

Funkcja $H_v^{-1}(\omega_v)$ została już zidentyfikowana. Należy więc dobrać tylko wartość momentu bezwładności dużego śmigła (I_v). W tym celu zarejestrowano odpowiedź prędkości obrotowej śmigła na skok wartości współczynnika wypełniania sygnału PWM podawanego na silnik. Następnie z wykorzystaniem funkcji *lsqnonlin* programu *MATLAB* znaleziono taką wartość tego parametru, która minimalizuje błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu względem zarejestrowanego przebiegu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.12) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.4 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.4: Porównanie odpowiedzi zarejestrowanej i aproksymowanego modelu.

Wyznaczony parametr miał następującą wartość:

$$I_v = 0.0017 \text{ kg m}^2 \quad (3.13)$$

3.6 Moment bezwładności układu dla osi poziomej

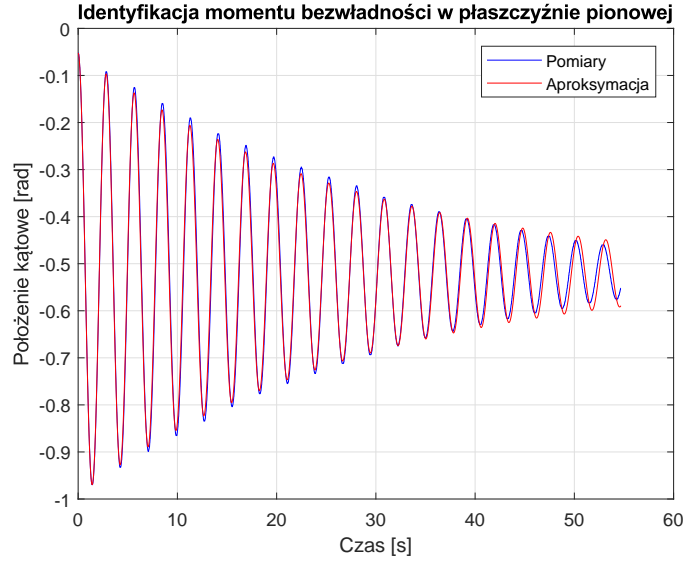
Ostatnimi koniecznymi do zbadania parametrami dla układu w płaszczyźnie pionowej były jego moment bezwładności, współczynnik tarcia lepkiego oraz dokładna wartość kąta równowagi układu. Wielkości te zostały wyznaczone na podstawie równania (3.14).

$$J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + M_v(\omega_v) \quad (3.14)$$

Identyfikację tej części przeprowadzano wprowadzając układ w drgania wokół punktu równowagi. W trakcie eksperymentu silnik był wyłączony. Równanie (3.14) sprowadza się więc do postaci:

$$J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} = -f_v \frac{d\alpha_v}{dt} + a \cdot \sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) \quad (3.15)$$

Zapisano przebieg kąta wychylenia układu podczas eksperymentu. Następnie szukano parametrów J_v , f_v oraz α_{v0} takich, by minimalizowały średniokwadratowy wskaźnik jakości. Wykorzystano do tego funkcję *lsqnonlin* programu *MATLAB*. Na rysunku 3.5 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.5: Porównanie odpowiedzi zarejestrowanej i aproksymowanego modelu.

W wyniku optymalizacji otrzymano następujące wartości poszukiwanych parametrów modelu:

$$\begin{aligned} J_v &= 0.0604 \text{ kg m}^2 \\ f_v &= 0.0042 \text{ Nm s} \\ \alpha_{v0} &= -0.5223 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.7 Zależność oporów ruchu od prędkości obrotowej śmigła bocznego

Następnie zbadano wpływ prędkości obrotowej silnika na napięcie podawane na silnik dla osi pionowej. Podobnie jak dla osi poziomej, większa prędkość obrotowa powoduje większe opory, przez co mniejsze napięcie podawane jest na silnik. Opisuje to równanie (3.17).

$$I_h \frac{d\omega_h}{dt} = u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \quad (3.17)$$

gdzie:

I_h jest momentem bezwładności śmigła bocznego,

$H_h^{-1}(\omega_h)$ jest charakterystyką statyczną układu silnik-śmigło dla silnika bocznego,

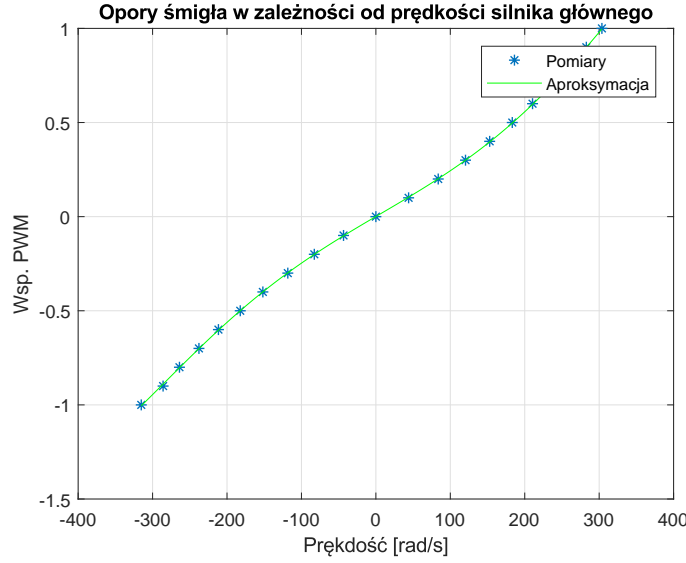
ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,

u_h jest współczynnikiem wypełniania sygnału PWM dla silnika bocznego.

Pomiary wykonano są dla ustalonej prędkości obrotowej silnika, więc jej pochodne po czasie są równe 0. Stąd powyższe (3.17) przyjmuje następującą postać:

$$H_h^{-1}(\omega_h) = u_h \quad (3.18)$$

Zależność oporów ruchu śmigła od prędkości kątowej postanowiono aproksymować wielomianem piątego stopnia. Na wykresie 3.6 kolorem czerwonym zaznaczone zostały wyznaczone punkty pomiarowe, natomiast kolorem niebieskim funkcja aproksymująca (wielomian).



Rys. 3.6: Charakterystyka statyczna oporów ruchu śmigła bocznego od prędkości obrotowej silnika.

Badana zależność wyraża się następującym wzorem:

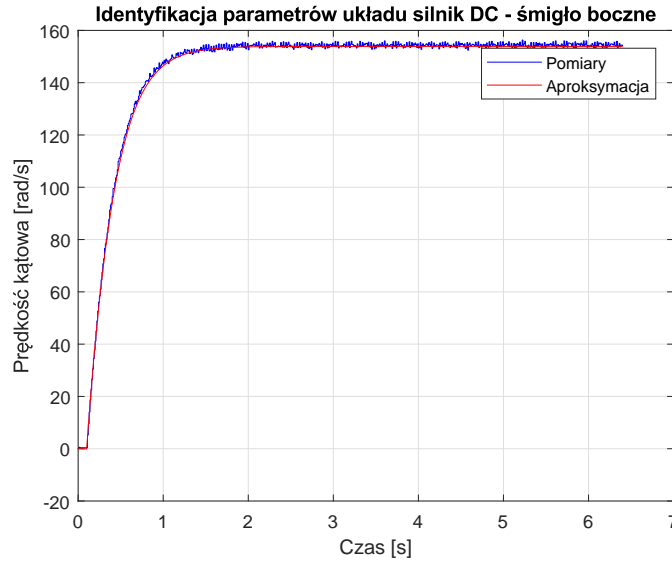
$$H_h^{-1}(\omega_h) = -4.0004 \cdot 10^{-14} \omega_h^5 + 5.1822 \cdot 10^{-12} \omega_h^4 + 1.3426 \cdot 10^{-8} \omega_h^3 - 2.8251 \cdot 10^{-7} \omega_h^2 + 0.0023 \omega_h + 6.8066 \cdot 10^{-4} \quad (3.19)$$

3.8 Parametry modelu układu silnik DC - śmigło boczne

Konieczne było przeprowadzenie identyfikacji parametrów równania (3.20).

$$I_h \frac{d\omega_h}{dt} = u_h - H_h^{-1}(\omega_h) \quad (3.20)$$

Funkcja $H_h^{-1}(\omega_h)$ została zidentyfikowana w poprzednim podrozdziale. Należy więc dobrać wartość momentu bezwładności śmigła bocznego (I_h). W tym celu zarejestrowano odpowiedź prędkości obrotowej śmigła na skok wartości współczynnika wypełniania sygnału PWM podawanego na silnik. Następnie dla zarejestrowanego przebiegu użyto funkcję *lsqnonlin* programu *MATLAB*, by znaleźć taką wartość parametru I_h , która minimalizuje błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.20) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.7 kolorem niebieskim przedstawiono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



Rys. 3.7: Porównanie zapisanego przebiegu i odpowiedzi zidentyfikowanego modelu.

Wyznaczony parametr miał następującą wartość:

$$I_h = 8.7148 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad (3.21)$$

3.9 Moment siły generowany przez silnik boczny

Przeprowadzono również eksperyment w celu wyznaczenia momentu siły generowanego przez śmigło boczne. W tym celu podawano różne wartości współczynnika wypełnienia PWM na silnik przy zablokowanym układzie. Po ustaleniu się prędkości obrotowej układ uwalniano i zapisywano przebiegi położenia kąowego i prędkości obrotowej silnika. W tym celu wykorzystano równanie (3.22).

$$J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} = -f_h \frac{d\alpha_h}{dt} + M_h(\omega_h) \quad (3.22)$$

gdzie:

α_h jest kątem obrotu w płaszczyźnie poziomej,

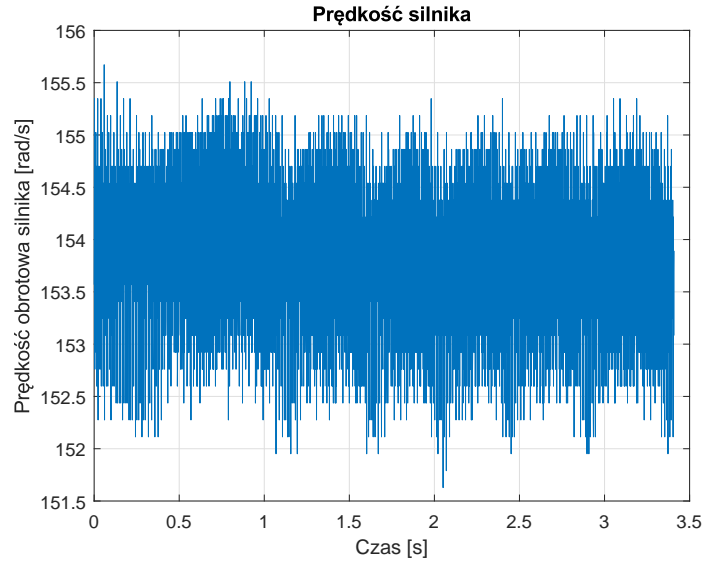
J_h jest momentem bezwładności względem osi obrotu w płaszczyźnie poziomej,

f_h jest współczynnikiem tarcia lepkiego,

ω_h jest prędkością obrotową silnika bocznego,

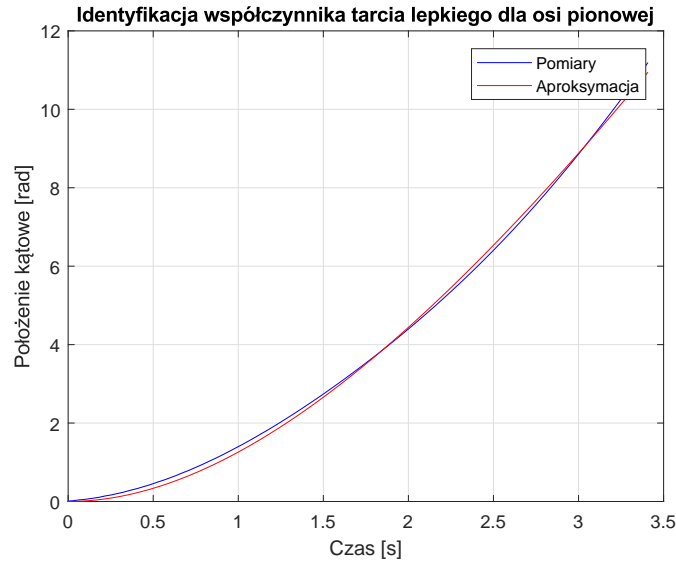
$M_h(\omega_h)$ jest momentem sił generowanym przez silnik boczny.

W celu zmniejszenia ilości parametrów koniecznych do optymalizacji postanowiono obie strony równania podzielić przez J_h . Otrzymane równanie poddano procesowi identyfikacji. Na wykresie 3.8 przedstawiono prędkość obrotową silnika. Jest ona w przybliżeniu stała (pomijając szumy pomiarowe). Można więc założyć, że również moment wywołany tą prędkością jest stały. W związku z tym identyfikacja sprowadza się do znalezienia parametru f_v i stałego momentu siły.



Rys. 3.8: Prędkość obrotowa silnika w trakcie eksperymentu.

Dla zarejestrowanych przebiegów użyto funkcji *lsqnonlin* programu *MATLAB*, by znaleźć takie wartości współczynników, które minimalizują błąd średniokwadratowy odpowiedzi modelu. Do rozwiązywania równania różniczkowego (3.22) w procesie optymalizacji użyto funkcji *ode45*. Na rysunku 3.9 kolorem niebieskim przedstawiono jeden z zarejestrowanych przebiegów, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu.



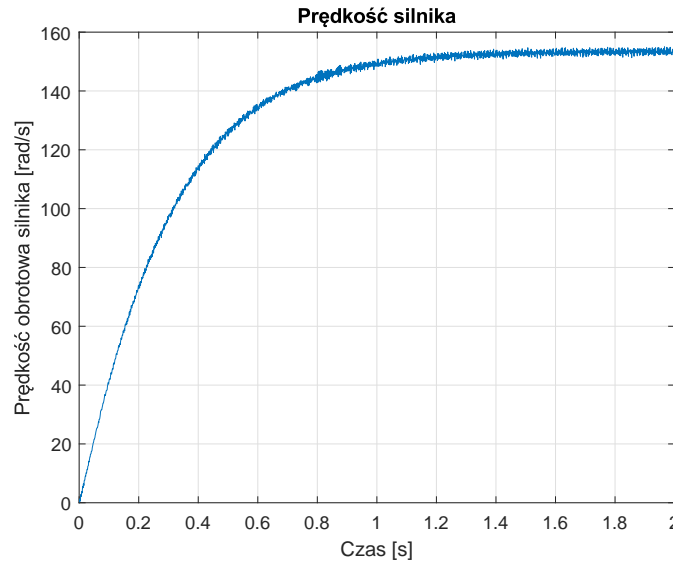
Rys. 3.9: Porównanie zarejestrowanej odpowiedzi z aproksymowanym modelem.

Wyznaczony parametr f_h miał następującą wartość:

$$f_h = 0.0539 \quad (3.23)$$

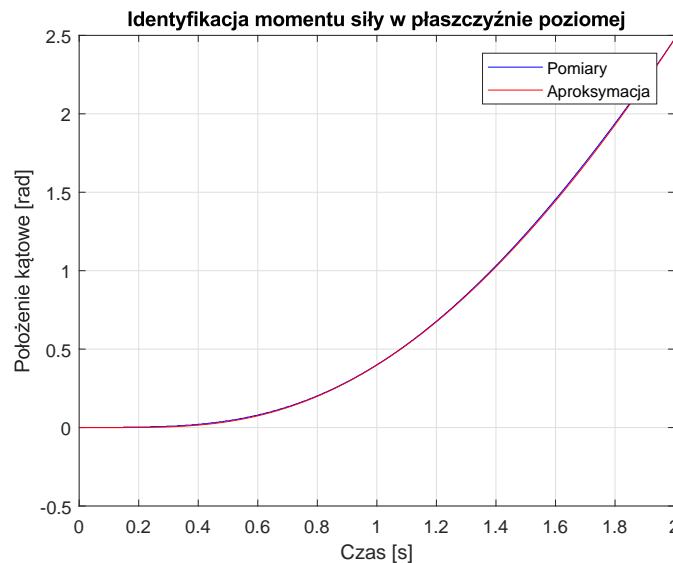
Następnie zarejestrowano dane z eksperymentów, podczas których układ nie był zablokowany po podaniu skoku współczynnika wypełnienia sygnału PWM na silnik. Dane te

znacznie lepiej nadają się do zidentyfikowania współczynników wielomianu $M_h(\omega_h)$. Na wykresie 3.10 przedstawiono przebieg prędkości obrotowej silnika podczas jednego z przeprowadzonych eksperymentów.

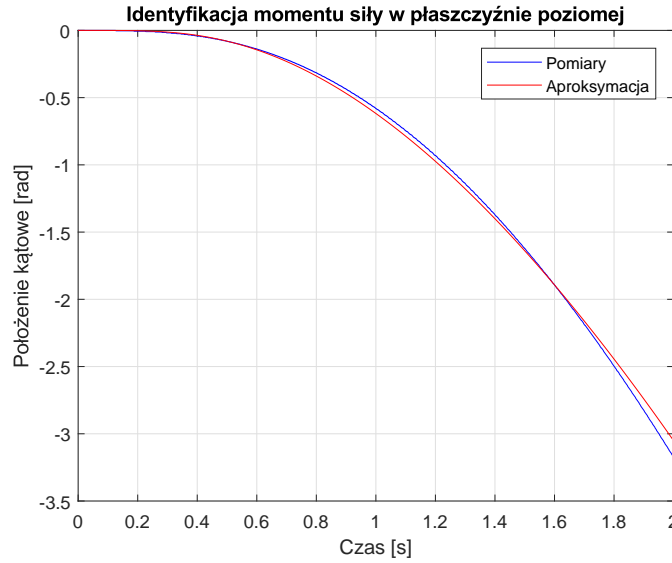


Rys. 3.10: Prędkość obrotowa silnika w trakcie eksperymentu.

Za pomocą funkcji *lsqnonlin* wyznaczono współczynniki wielomianu $M_h(\omega_h)$, które minimalizowały średniokwadratowy wskaźnik jakości dla zarejestrowanych przebiegów. Na wykresach 3.11 i 3.12 kolorem niebieskim oznaczono zarejestrowany przebieg, a kolorem czerwonym odpowiedź aproksymowanego modelu. Pierwszy z wykresów odpowiada skokowi współczynnika wypełnienia do wartości 0.4, natomiast drugi skokowi tej wielkości do -0.6 (silnik obracający się w przeciwną stronę).

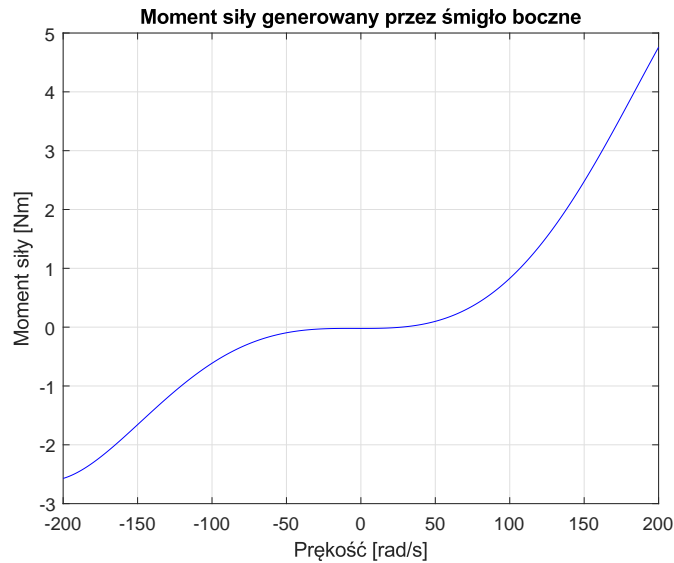


Rys. 3.11: Porównanie odpowiedzi dla współczynnika wypełnienia PWM równego 0.4.



Rys. 3.12: Porównanie odpowiedzi dla współczynnika wypełnienia PWM równego -0.6 .

Na rysunku 3.13 przedstawiono wykres wyznaczonej funkcji momentu siły zależnej od prędkości obrotowej silnika bocznego $M_h(\omega_h)$.



Rys. 3.13: Moment siły w zależności od prędkości obrotowej silnika bocznego.

Powyższa funkcja opisana jest następującym wzorem:

$$M_h(\omega_h) = -8.8567 \cdot 10^{-12} \omega_h^5 + 4.9851 \cdot 10^{-10} \omega_h^4 + 8.1331 \cdot 10^{-7} \omega_h^3 + 7.9455 \cdot 10^{-6} \omega_h^2 - 3.3890 \cdot 10^{-5} \omega_h - 0.0215 \quad (3.24)$$

4 Punkt równowagi

W dalszej części pracy projektowano sterowanie układem z zablokowanym ruchem w płaszczyźnie poziomej. W tym celu konieczne było wyznaczenie zbioru punktów równowagi

systemu. Punkt spełnia następujące równania:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ \dot{x}_3 &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

A więc:

$$\begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{f_v}{J_v}x_2 + \frac{a}{J_v}\sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) + \frac{M_v(\omega_v)}{J_v} \\ 0 &= \frac{u_v}{I_v} - \frac{H_v^{-1}(\omega_v)}{I_v}\end{aligned}\tag{4.2}$$

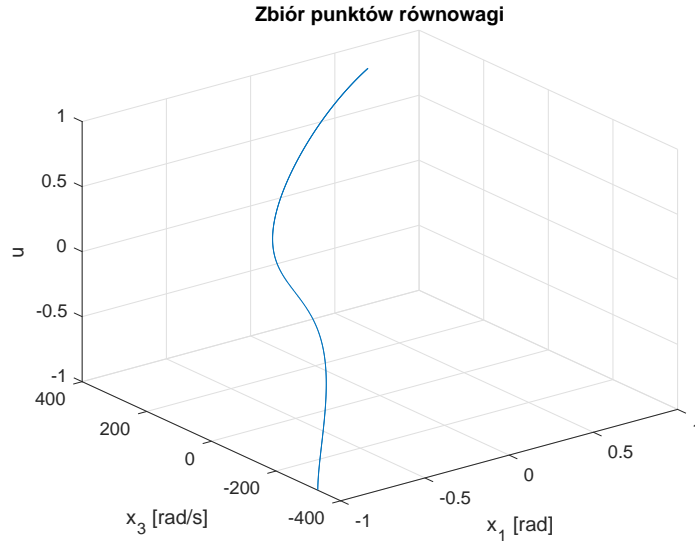
Z powyższych równań wynika, że w każdym punkcie równowagi prędkość kątowna układu x_2 jest równa 0. Natomiast zmienne stanu x_1 i x_2 oraz sterowanie tworzą w przestrzeni trójwymiarowej pewien zbiór punktów równowagi. Dla przyjętych wartości x_1 (położenie kątowne) wyznaczono takie wartości x_3 i u , że układ znajduje się w punkcie równowagi. W tym celu konieczne jest rozwiązanie równania (4.3) ze względu na x_3 .

$$M_v(\omega_v) + a\sin(\alpha_v - \alpha_{v0}) = 0\tag{4.3}$$

Warto zauważyć, że w rozpatrywanym zakresie prędkości kątownej silnika funkcja $M_v(\omega_v)$ jest ściśle monotonicznie rosnąca. Można to zauważyć na wykresie 3.2. W związku z tym równanie (4.3) ma tylko jedno rozwiązanie. Sterowanie u w punkcie równowagi należy wyliczyć ze wzoru (4.4).

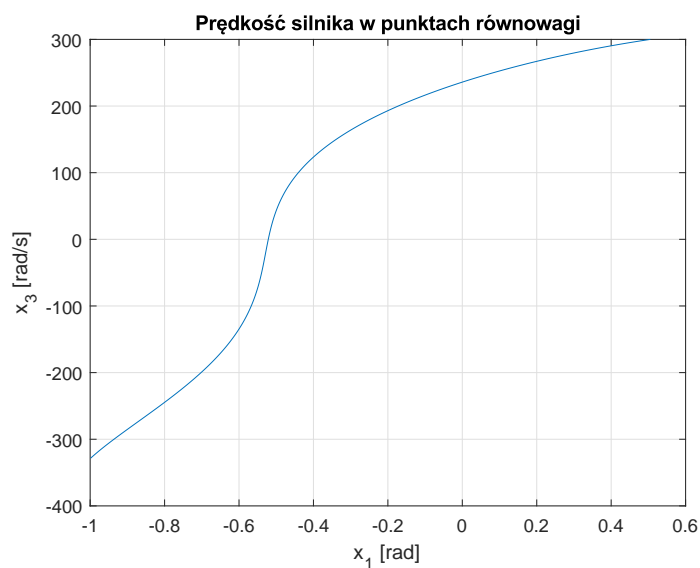
$$u_v = H_v^{-1}(\omega_v)\tag{4.4}$$

Wykres 4.1 przedstawia wyznaczony zbiór punktów równowagi w przestrzeni trójwymiarowej.

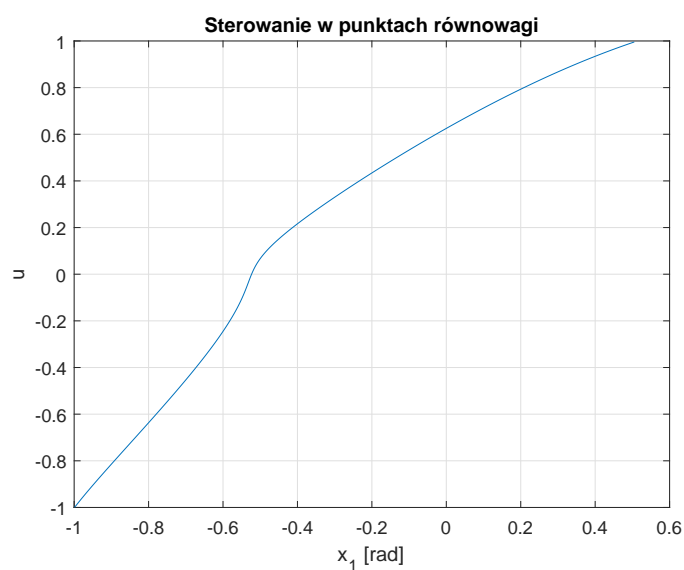


Rys. 4.1: Zbiór punktów równowagi układu.

Rysunek 4.2 wyraża zależność prędkości kątownej silnika od położenia układu w punkcie równowagi, natomiast rysunek 4.3 zależność współczynnika wypełnienia PWM od położenia układu w punkcie równowagi.



Rys. 4.2: Zależność prędkości silnika od położenia układu w punkcie równowagi.



Rys. 4.3: Zależność sterowania od położenia układu w punkcie równowagi.

5 Linearyzacja

W procesie projektowania układu sterowania konieczne było wyznaczenie modelu zlinearyzowanego w punkcie równowagi. Jest to model liniowy, który w otoczeniu punktu równowagi zachowuje się tak samo lub podobnie do modelu nieliniowego. Model liniowy jest opisany równaniem różniczkowym (5.1).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{5.1}$$

gdzie:

x jest wektorem stanu,

y jest wektorem wyjścia,
 u jest wektorem sterowania,
 A jest macierzą stanu,
 B jest macierzą sterowania,
 C jest macierzą wyjścia,
 D jest macierzą transmisyjną.

Aby znaleźć macierze A,B,C,D należy wyliczyć pochodne prawych stron układu równań (2.3) po każdej zmiennej stanu oraz sterowaniu. Należy również zauważyć, że jedyną wielkością, którą można było mierzyć w tym układzie jest nachylenie (α_v). Spowodowane było to awarią prądnicy tachometrycznej, przez co niemożliwy był pomiar prędkości kątowej silnika. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymano model zlinearyzowany opisany macierzami (5.2).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{J_v} \cos(\alpha_{lin} - \alpha_{v0}) & -\frac{f_v}{J_v} & \frac{1}{J_v} \frac{dM_v(\omega_v)}{d\omega_v}(\omega_{lin}) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_v} \frac{dH_v^{-1}(\omega_v)}{d\omega_v}(\omega_{lin}) \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_v} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Należy zauważyć, że dla modelu zlinearyzowanego wektor stanu oraz sterowanie mierzone są względem punktu równowagi, w którym model ten został wyliczony. Postanowiono zlinearyzować układ dla kąta $\alpha_v = 0$. Na podstawie wzorów (4.2) wyliczono pozostałe wielkości w punkcie równowagi. Zostały one zapisane w równaniu (5.3).

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 \\
 x_2 &= 0 \\
 x_3 &= 235.9044 \\
 u &= 0.6252
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wartości macierzy modelu zlinearyzowanego w tym punkcie zapisano w równaniu (5.4).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4.4005 & -0.0695 & 0.0244 \\ 0 & 0 & -2.8870 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 577.5771 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dla równania stanu opisanego powyższymi macierzami postanowiono sprawdzić sterowalność i obserwowalność układu. W tym celu wyliczono macierze sterowalności i obserwo-

walności. Macierze te podane są w równaniu (5.5).

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14.1 \\ 0 & 14.1 & -41.7 \\ 577.6 & -1667.5 & 4814.1 \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4.4005 & -0.0695 & 0.0244 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Rząd obu powyższych macierzy wynosi 3. Stąd wnioskujemy, że układ ten jest sterowalny i obserwowalny. Możliwe jest więc zaprojektowanie obserwatora odtwarzającego stan układu oraz regulatora proporcjonalnego do stanu, który będzie stabilizował ten układ.

6 Obserwator Luenbergera dla modelu zlinearyzowanego

Z powodu awarii prądnicy tachometrycznej konieczne było zaprojektowanie obserwatora stanu przed projektowaniem regulatora proporcjonalnego do stanu. Zdecydowano użyć obserwatora Luenbergera pełnego rzędu. Jest to obserwator asymptotyczny, który na podstawie wejścia i wyjścia obiektu może odtwarzać stan obiektu, jeśli ten jest obserwowalny. Układ jest trzeciego rzędu, więc należy wybrać trzy wartości własne obserwatora tak, by zapewniały one jego asymptotyczną stabilność. Muszę więc się znajdować w lewej półpłaszczyźnie przestrzeni liczb zespolonych. Wybrano następujące wartości:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= -6 \\ \lambda_3 &= -9\end{aligned}\tag{6.1}$$

Obserwator Luenbergera pełnego rzędu opisany jest równaniem różniczkowym

$$\dot{w} = Aw + L(y - Cw) + Bu\tag{6.2}$$

gdzie:

A jest macierzą stanu obserwowanego układu,

B jest macierzą sterowania obserwowanego układu,

C jest macierzą wyjścia obserwowanego układu,

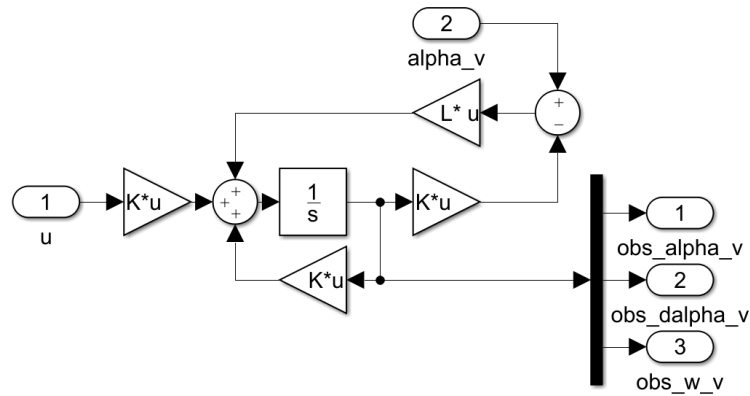
G jest macierzą wybraną tak, by wartości własne macierzy $A - LC$ miały ujemne części rzeczywiste,

w estymuje obserwowany stan.

Wybrana macierz L miała następującą postać:

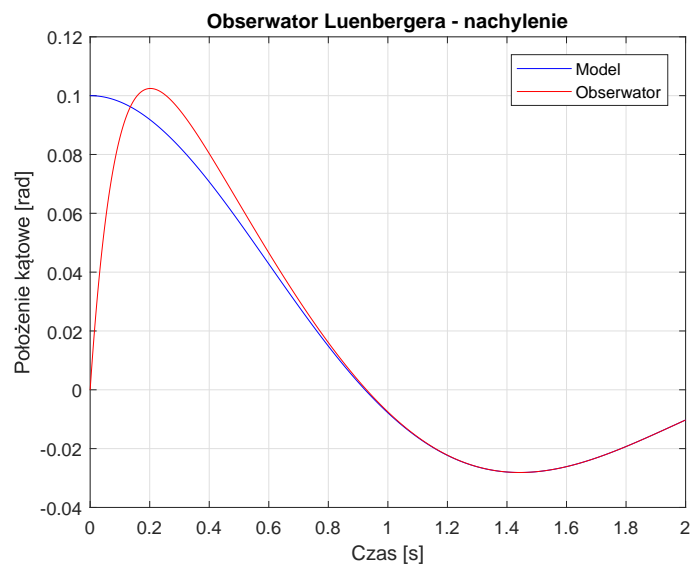
$$L = \begin{bmatrix} 15.0434 \\ 49.9218 \\ 87.9693 \end{bmatrix}\tag{6.3}$$

Zaprojektowany obserwator został następnie zaimplementowany w programie *Simulink*. Schemat blokowy realizujący ten obserwator został przedstawiony na rysunku 6.1.

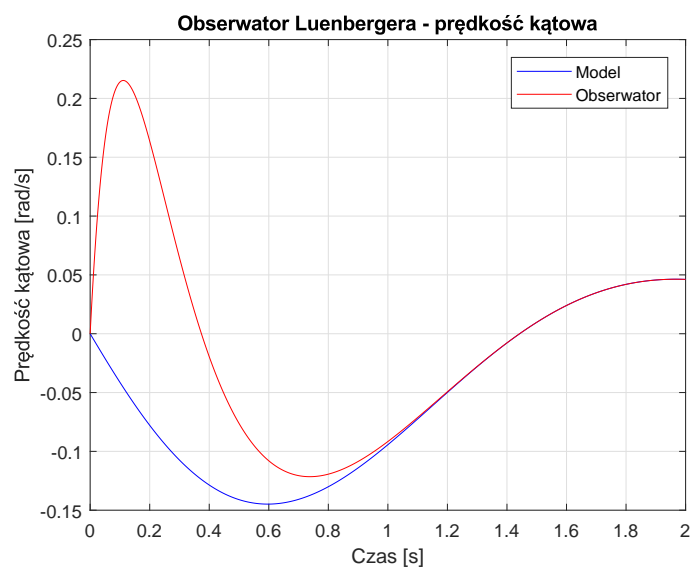


Rys. 6.1: Schemat blokowy realizujący obserwator Luenbergera.

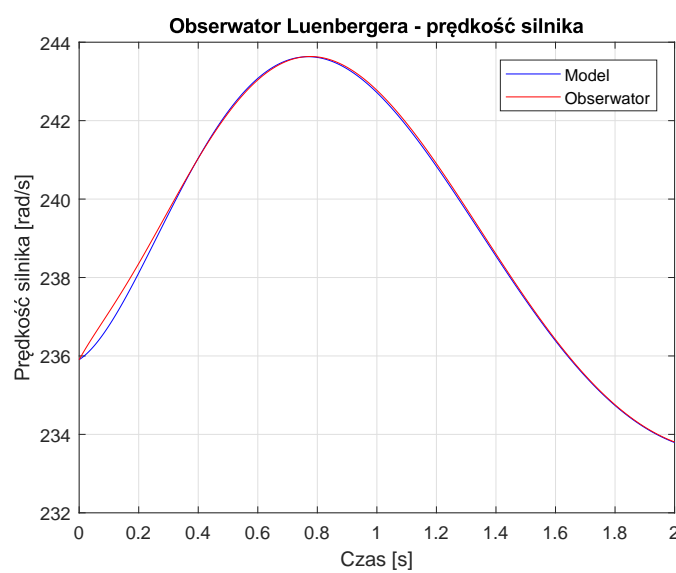
Sprawdzono działanie obserwatora na zaimplementowanym modelu obiektu oraz na rzeczywistym obiekcie. Rysunki od do przedstawiają porównanie wyjścia obserwatora ze stanem modelowanego obiektu.



Rys. 6.2: Schemat blokowy realizujący obserwator Luenbergera.



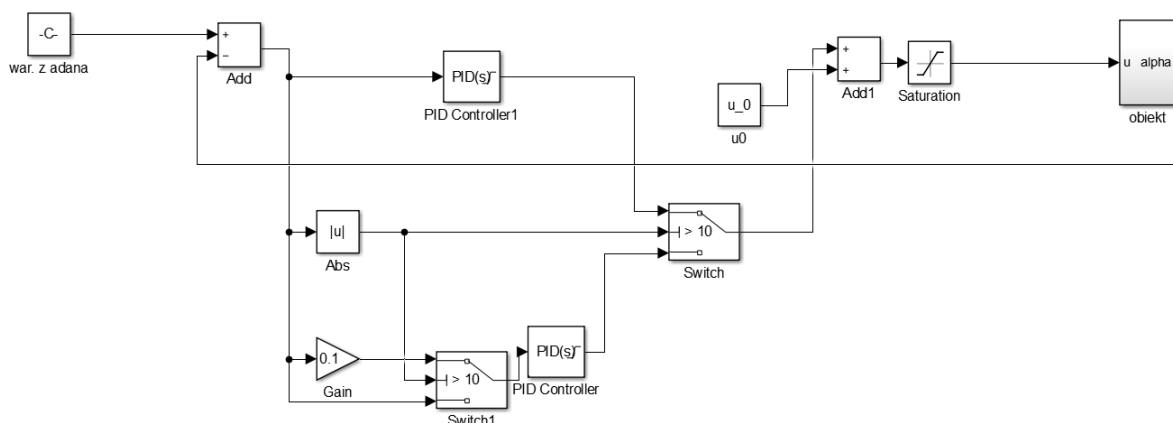
Rys. 6.3: Schemat blokowy realizujący obserwator Luenbergera.



Rys. 6.4: Schemat blokowy realizujący obserwator Luenbergera.

7 Regulator PID

Postanowiono również sprawdzić jak klasyczny regulator PID poradzi sobie z zadaniem regulacji dla danego obiektu. W tym celu, na drodze doświadczalnej zaprojektowano układ regulacji składający się z dwóch regulatorów PID. Pierwszy z nich był odpowiedzialny za doprowadzenie obiektu w pobliże wartości zadanej tzn. $\pm 10^0$, tłumiąc jednocześnie występujące w układzie oscylacje. Drugi natomiast był odpowiedzialny za pozycjonowanie helikoptera w zadanym położeniu. Schemat omawianego układu zaprezentowany jest na rysunku 7.1, natomiast wartości nastaw poszczególnych parametrów znajdują się w tabeli 1



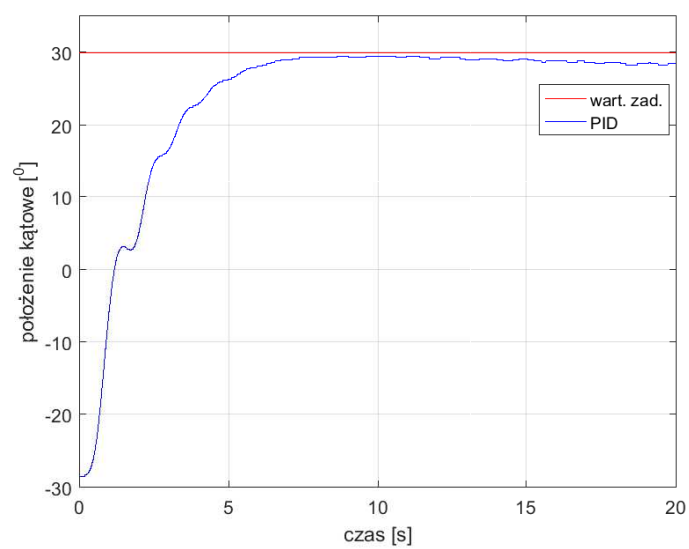
Rys. 7.1: Schemat układu sterowania dla regulatorów PID.

Tabela 1: Wartości nastaw regulatorów PID.

Regulator	P	I	D
Reg. nr 1	0.025	0	0.035
Reg. nr 2	0.2	0.012	0.015

Ze względu na to, że zadaniem pierwszego regulatora było jak najszybsze doprowadzenie obiektu w okolice wartości zadanej i wyeliminowanie oscylacji, to wartość wzmocnienia części różniczkującej jest większa niż w przypadku drugiego regulatora. Analogiczna zależność zachodzi dla regulatora nr 2 i części całkującej, której to wartości jest większa niż w pierwszym przypadku.

Głównym problemem w projektowaniu tego układu było odpowiednie ograniczenie członu całkującego regulatora nr 2, w momencie gdy ten nie był aktywny. Na drodze przeprowadzonych eksperymentów ustalono, że najlepiej będzie podawać na ten regulator 0.1 wartości uchybu gdy jest on nieaktywny. Dzięki temu człon całkujący nie osiągał aż tak dużej wartości, która wprowadziłaby do układu oscylacje i jednocześnie był na tyle duży aby zaraz po aktywacji omawianego regulatora generować sterowanie sprowadzające układ do wartości zadanej. Na rysunku 7.2 zaprezentowano działanie całego układu.



Rys. 7.2: Działanie regulatora PID dla stabilizacji w położeniu $+30^{\circ}$.

8 Porównanie działania regulatorów

Działanie zaprojektowanych regulatorów zostało sprawdzone w następujących przypadkach:

- a. działanie regulatorów LQ i LQI z i bez obserwatora,
- b. pozycjonowanie w pozycji 0^0 ,
- c. pozycjonowanie w pozycji $+10^0$,
- d. pozycjonowanie w pozycji $+20^0$,
- e. stabilizacja układu dla regulatora LQ i sterowania początkowego wyliczonego w innym punkcie niż wartość zadana,
- f. zadanie nadążania.

Aby móc porównać jakość sterowania w każdym z wymienionych powyżej przypadków zdefiniowano całkowity wskaźnik jakości:

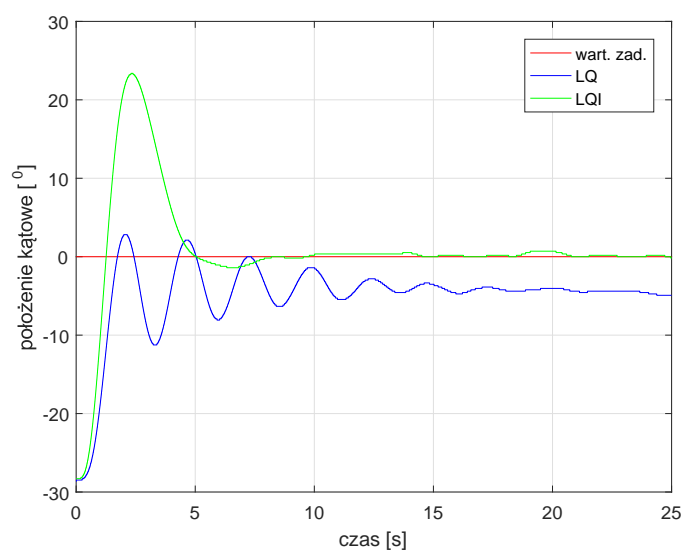
$$J = \int_0^T e^2(t) dt \quad (8.1)$$

8.1 Porównanie działania regulatorów LQ i LQI z i bez obserwatora

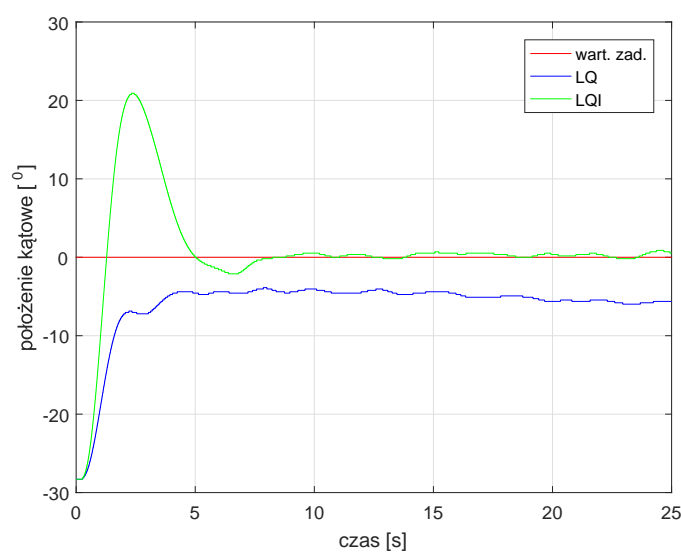
W tym przypadku sprawdzono jak włączenie do układu regulacji obserwatora wpłynęło na jakość regulacji. Jak można zauważyć na rys. ?? po zastosowaniu obserwatora prze-regulowanie dla regulatora LQI zmalało z 23.28^0 do 20.92 , natomiast dla regulatora LQ widać znaczącą redukcję oscylacji. Wartości wskaźnika jakości dla wszystkich czterech przypadków znajdują się w tabeli 2.

Tabela 2: Wskaźniki jakości dla układu z i bez obserwatora.

przypadek	J
Reg. LQ	$5.2031 \cdot 10^3$
Reg. LQ + obserwator	$5.7391 \cdot 10^3$
Reg. LQI	$2.9717 \cdot 10^3$
Reg. LQI + obserwator	$2.9310 \cdot 10^3$



Rys. 8.1: Porównanie działania regulatorów LQI i LQ dla stabilizacji w położeniu 0^0 bez obserwatora.



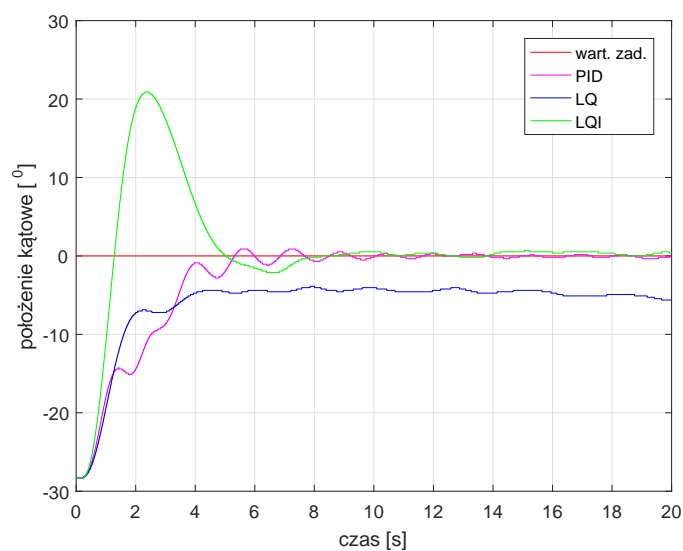
Rys. 8.2: Porównanie działania regulatorów LQI i LQ dla stabilizacji w położeniu 0^0 z obserwatorem.

8.2 Stabilizacja w położeniu 0^0

W przypadku stabilizacji w położeniu 0^0 porównano ze sobą wszystkie trzy typy regulatorów. Wartości wskaźnika jakości dla każdego z przypadków zamieszczone są w tabeli 3. Jak można zauważyć na rys. 8.3 najlepiej z zadaniem stabilizacji poradził sobie regulator PID.

Tabela 3: Wskaźniki jakości dla stabilizacji w położeniu 0^0 .

Regulator	J
LQ	$1.2540 \cdot 10^3$
LQI	$1.2775 \cdot 10^3$
PID	$1.0293 \cdot 10^3$



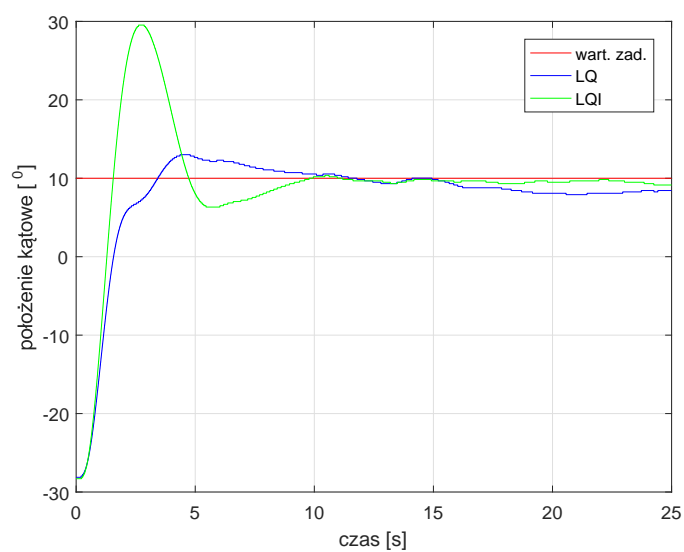
Rys. 8.3: Porównanie działania regulatora PID LQ i LQI dla stabilizacji w położeniu $+0^0$.

8.3 Stabilizacja w położeniu 10^0

Wartości wskaźnika jakości podane są w tabeli 4

Tabela 4: Wskaźniki jakości dla stabilizacji w położeniu 10^0 .

Regulator	J
LQ	$1.4181 \cdot 10^3$
LQI	$1.8473 \cdot 10^3$



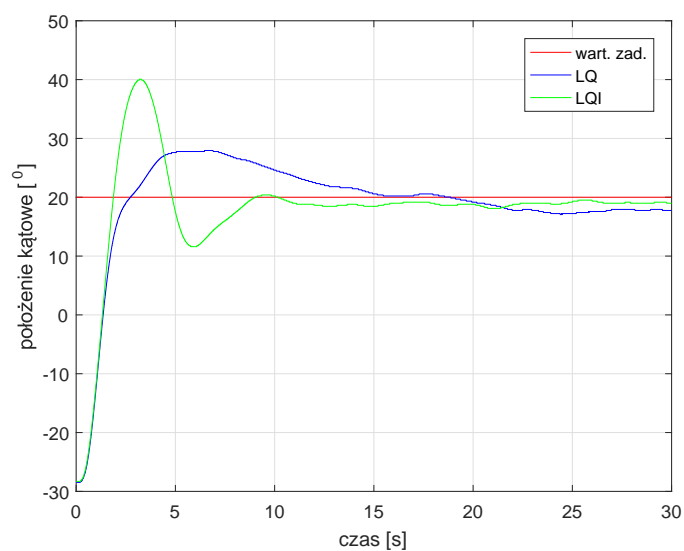
Rys. 8.4: Porównanie działania regulatorów LQI i LQ dla stabilizacji w położeniu $+10^0$.

8.4 Stabilizacja w położeniu 20^0

Wartości wskaźnika jakości podane są w tabeli 5

Tabela 5: Wskaźniki jakości dla stabilizacji w położeniu 20^0 .

Regulator	J
LQ	$2.6635 \cdot 10^3$
LQI	$2.9310 \cdot 10^3$



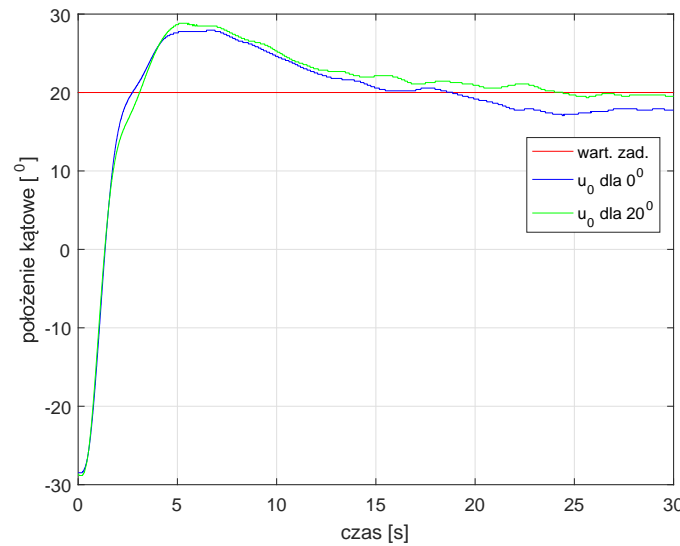
Rys. 8.5: Porównanie działania regulatorów LQI i LQ dla stabilizacji w położeniu $+20^0$.

8.5 Stabilizacja dla sterowania początkowego wyliczonego w innym punkcie niż wartość zadana.

Z tabeli 6 i wykresu 8.6 wynika, że zaniedbanie linearyzacji modelu rozważanego układu, w celu wyliczenia u_0 dla stabilizacji w różnych pozycjach, w znaczący sposób przekłada się na jakość sterowania. Odpowiednio wskaźnik jakości J jak i również przeregulowanie i uchyb ustalony są gorsze dla regulatora zlinearyzowanego w położeniu 0^0 .

Tabela 6: Wskaźniki jakości dla stabilizacji w położeniu 20^0 dla różnych wartości u_0 .

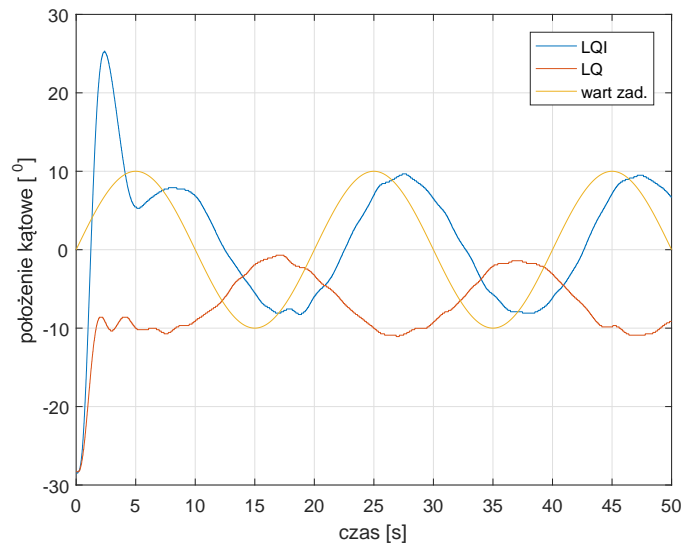
Punkt pracy	J
0^0	$2.7635 \cdot 10^3$
20^0	$2.7306 \cdot 10^3$



Rys. 8.6: Porównanie działania regulatora LQ dla stabilizacji w położeniu $+20^0$ dla sterowania początkowego wyliczonego w punkcie 0^0 i 20^0 .

8.6 Zadanie nadążania

Na podstawie wykresu 8.7 wynika, że regulator LQI poradził sobie zdecydowanie lepiej z zadaniem nadążania niż regulator LQ. Opóźnienie pomiędzy wartością zadaną, a pozycją helikoptera wynosi dla regulatora LQI 2.22 s, natomiast dla regulatora LQ 12.3 s. Amplituda w przypadku LQI odbiega od zadanej maksymalnie o 19.2 %, a w przypadku regulatora LQ nawet o 107 %.



Rys. 8.7: Porównanie działania regulatorów LQI i LQ dla zadania nadążania.

8.7 Wnioski

Podsumowując wszystkie eksperymenty można stwierdzić, że regulator LQI poprzez zastosowanie członu całkującego dobrze niwelował uchyb ustalony. Niestety wykorzystanie całki znacznie zwiększyło przeregulowanie. Prawdopodobnie zastosowanie w strukturze regulatora filtru typu *wind-up* mogło by zmniejszyć wartość tego parametru. Zdecydowanie mniejsze przeregulowanie otrzymano przy wykorzystaniu klasycznego regulatora LQ, jednak wiązało się to występowaniem uchybu w stanie ustalonym.

Regulator PID bardzo dobrze poradził sobie z zadaniem stabilizacji, jednak ze względu na duże nieliniowości występujące w układzie, wymagałby on każdorazowego dostrajania dla różnych wartości zadanego położenia.

Eksperyment stabilizacji w innym punkcie niż została przeprowadzona linearyzacja potwierdził nasze przypuszczenia, że nieliniowość układu będzie pogarszała jakość sterowania wraz z oddalaniem się od punktu linearyzacji.

Dla zadania nadążania zdecydowanie najlepszym regulatorem okazał się być regulator LQI. Wprowadził on co prawda opóźnienie jednak zachował amplitudę sygnału zadanego.