CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMAP-P0-100, MMAP-P0-200, MMAP-P0-300, MMAP-P0-400, MMAP-P0-Q00
Termin egzaminu:	4 czerwca 2024 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] potęgowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje […] prawa działań na potęgach […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. 2022, poz.1246).

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.9) […] posługuje się wzorem na logarytm iloczynu […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.3) stosuje własności pierwiastków […]; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych z kapitalizacją roczną i zysków z lokat.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $5n^3 - 5n$ do postaci $5n(n-1)(n+1)$ **oraz** zapisanie, że wśród trzech kolejnych liczb całkowitych $n-1$, n, $n+1$ co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna jest podzielna przez 3.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $5n^3 - 5n$ do postaci $5n(n-1)(n+1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość tezy tylko dla wybranych wartości n, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $5n^3 - 5n$ do postaci iloczynu

$$5n^3 - 5n = 5n(n^2 - 1) = 5n(n-1)(n+1)$$

Jeden z czynników w rozkładzie jest równy 5, więc liczba $5n(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 5. Wśród każdych trzech kolejnych liczb całkowitych $n-1$, n, $n+1$ co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna jest podzielna przez 3.
Zatem liczba $5n(n-1)(n+1)$ dzieli się przez 5 oraz przez 2 oraz przez 3.
Ponadto liczby 2, 3, 5 są parami względnie pierwsze.
Zatem liczba $5n^3 - 5n = 5n(n^2-1) = 5n(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 30.
To kończy dowód.

Zadanie 6. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 7. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 8. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2; II.5) mnoży […] wyrażenia wymierne.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 9. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.2) […] mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych. V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
1

Zadanie 10. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i obliczenie wszystkich rozwiązań równania: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3

ALBO

– wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3, **oraz** stwierdzenie, że są to jedyne rozwiązania równania.

2 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego **oraz** rozwiązanie jednego z równań wynikającego z tego rozkładu, np.:

$(x-3)(4x^2-1) = 0$ i $x = 3$,

$(x-3)(4x^2-1) = 0$ i $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{2}$

ALBO

– przekształcenie równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań: kwadratowego i liniowego **oraz** rozwiązanie jednego z nich, np.:

$(x - 3 = 0,\ 4x^2 - 1 = 0)$ oraz $x = 3$,

$(x - 3 = 0,\ 4x^2 - 1 = 0)$ oraz $\left(x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}\right)$,

ALBO

– rozłożenie wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$ na czynniki liniowe, np.

$W(x) = (x-3)(2x-1)(2x+1)$,

ALBO

– przekształcenie równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ do postaci alternatywy trzech równań liniowych: $(x - 3 = 0,\ 2x - 1 = 0,\ 2x + 1 = 0)$,

ALBO

– obliczenie jednego z pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$ **oraz** poprawne podzielenie wielomianu W przez odpowiedni dwumian, np.

$x = 3$ i $(4x^3 - 12x^2 - x + 3) : (x - 3) = 4x^2 - 1$,

1 pkt – zapisanie wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, np. $W(x) = (x-3)(4x^2-1)$

ALBO

– przekształcenie równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ do postaci alternatywy dwóch równań: $(x - 3 = 0,\ 4x^2 - 1 = 0)$,
ALBO
– przekształcenie równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ do postaci $4x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$ lub do postaci $4x^2(x - 3) = x - 3$ **oraz** zapisanie rozwiązania $x = 3$,
ALBO
– zapisanie jednego z rozwiązań równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ **oraz** zapisanie sprawdzenia, że ta liczba spełnia to równanie.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze tylko trzy poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający uzyska trzy poprawne pierwiastki wielomianu, lecz traktuje równanie jako nierówność (podaje zbiór rozwiązań w postaci przedziału / sumy przedziałów), to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli przy przekształcaniu lewej strony równania do postaci iloczynu zdający zapisuje czynnik $(x - 3)$ z wykładnikiem 2, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $(x - 3)^2 = 0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $4x^2 - 1 = 0$).

4. Jeżeli zdający zamiast równania $(x - 3)(4x^2 - 1) = 0$ zapisze $(x - 3) \pm (4x^2 - 1) = 0$, ale z dalszego rozwiązania wynika, że traktuje lewą stronę równania jak iloczyn i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $x - 3 = 0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $4x^2 - 1 = 0$).

5. Jeżeli zdający przy przekształcaniu równania do postaci $(x - 3)(4x^2 - 1) = 0$ popełni błąd i zapisze:
$4x^2(x + 3) - (x - 3) = 0$
lub
$4x^2(x - 3) + (x - 3) = 0$
lub
$4x^2(x - 3) - (x + 3) = 0$
lub
$x(4x^2 + 1) - 3(4x^2 - 1) = 0$
lub
$x(4x^2 - 1) + 3(4x^2 - 1) = 0$
lub
$x(4x^2 - 1) - 3(4x^2 + 1) = 0$
a następnie

5.1. zapisze równanie $(x - 3)(4x^2 - 1) = 0$ lub poprawną alternatywę $(x - 3 = 0$ lub $4x^2 - 1 = 0)$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (**1 punkt** za rozwiązanie równania $x - 3 = 0$ i **1 punkt** za rozwiązanie równania $4x^2 - 1 = 0$).

5.2. zapisze równanie $(x - 3)(4x^2 + 1) = 0$ lub błędną alternatywę

$(x - 3 = 0$ lub $4x^2 + 1 = 0)$ i zapisze rozwiązanie $x = 3$,
to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

5.3. zapisze równanie $(x + 3)(4x^2 - 1) = 0$ lub błędną alternatywę $(x + 3 = 0$ lub $4x^2 - 1 = 0)$ i zapisze oba rozwiązania równania $4x^2 - 1 = 0$: $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{2}$ to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

5.4. zapisze błędne równanie (w którym jedna ze stron jest równa 0, a druga jest iloczynem wielomianów stopni dodatnich), inne niż w uwagach 5.2 oraz 5.3, np. $(x - 3)(x + 3)(4x^2 \pm 1) = 0$ lub błędną alternatywę inną niż w uwagach 5.2 oraz 5.3, np. $(x - 3 = 0$ lub $x + 3 = 0$ lub $4x^2 \pm 1 = 0)$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający, przekształcając równanie $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$, popełni jeden błąd (który nie jest błędem znaku) albo dwa błędy znaku i otrzyma równanie trzeciego stopnia, które ma trzy rozwiązania rzeczywiste, oraz konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

7. Jeżeli zdający dzieli obustronnie równanie $4x^2(x - 3) = x - 3$ przez dwumian $(x - 3)$ z podaniem odpowiedniego założenia i uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{2}$, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie, a jeżeli uzyska tylko jedno z tych rozwiązań, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

8. Jeżeli zdający dzieli obustronnie równanie $4x^2(x - 3) = x - 3$ przez dwumian $(x - 3)$ bez podania odpowiedniego założenia i uzyska tylko dwa poprawne rozwiązania $x = -\frac{1}{2}$ oraz $x = \frac{1}{2}$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli uzyska tylko jedno z tych rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

$$4x^2(x - 3) - (x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(4x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 3)(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3.

Sposób II

Przekształcamy równanie równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$$

$$x(4x^2 - 1) - 3(4x^2 - 1) = 0$$

$$(4x^2 - 1)(x - 3) = 0$$

$$(2x - 1)(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3.

Sposób III

Obliczamy $W(3) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $(x - 3)$. Dzielimy wielomian W przez dwumian $(x - 3)$ i otrzymujemy

$$(4x^3 - 12x^2 - x + 3) : (x - 3) = 4x^2 - 1$$

Zatem $W(x) = (x - 3)(4x^2 - 1) = (x - 3)(2x - 1)(2x + 1)$.

Obliczamy pierwiastki wielomianu $W(x)$:

$$(x - 3)(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniami równania są liczby: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3.

Sposób IV

Obliczamy $W(3) = 0$ i stwierdzamy, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Obliczamy $W\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ i stwierdzamy, że liczba $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Obliczamy $W\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ i stwierdzamy, że liczba $\left(-\frac{1}{2}\right)$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Ponieważ W jest wielomianem stopnia trzeciego, więc ma co najwyżej trzy pierwiastki rzeczywiste. Oznacza to, że jedynymi rozwiązaniami równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$ są liczby: $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, 3.

Zadanie 11.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości […] nie większe od danej liczby […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
$[0, 4]$

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $[4, 0]$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości […]; V.12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A2

Zadanie 12. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FF

Zadanie 13. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji […] o jej własnościach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 14. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i zapisanie wzoru funkcji f z poprawnymi wartościami współczynników, np.: $f(x) = 2(x-3)^2$, $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci kanonicznej z uwzględnieniem, że punkt N jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f: $f(x) = a(x-3)^2$

ALBO

– zapisanie wartości wyrazu wolnego funkcji f, np.: $c = 18$, $f(x) = ax^2 + bx + 18$,

ALBO

– zapisanie równania $b^2 - 4ac = 0$,

ALBO

– zapisanie równania $-\frac{b}{2a} = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ punkt $N = (3, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi Ox, więc jest to wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f.

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x-3)^2, \text{ gdzie } a \neq 0$$

Punkt $M = (0, 18)$ leży na wykresie funkcji f, zatem

$$f(0) = 18$$

$$a(0-3)^2 = 18$$

$$9a = 18$$

$$a = 2$$

Zatem $f(x) = 2(x-3)^2$.

Sposób II

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ oraz } b, c \in \mathbb{R}$$

Punkt $M = (0, 18)$ leży na wykresie funkcji f, zatem

$$f(0) = 18$$

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 18$$

$$c = 18$$

Ponieważ punkt $N = (3, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f i osi Ox, więc liczba 3 jest jedynym miejscem zerowym tej funkcji.
Stąd otrzymujemy:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{oraz} \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$$

$$b^2 - 4a \cdot 18 = 0 \quad \text{oraz} \quad b = -6a$$

Zatem

$$(-6a)^2 - 4a \cdot 18 = 0$$

$$36a^2 - 72a = 0$$

$$36a(a - 2) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad a = 2$$

Funkcja f jest kwadratowa, więc $a = 2$ i wówczas $b = -6a = -12$.
Zatem $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$.

Zadanie 15.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym; V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 16.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 16.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; VI.3) sprawdza, czy dany ciąg jest […] geometryczny.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

FF

Zadanie 17. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 18. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 20. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.4) oblicza kąty trójkąta […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 21. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 22. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda i obliczenie długości odcinka BP: $|BP| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$.

1 pkt – obliczenie długości odcinka AS: $|AS| = 6\sqrt{5}$

ALBO

– obliczenie sinusa lub cosinusa jednego z kątów ostrych w trójkącie ABP lub BSP,

ALBO

– zapisanie równości $|AP| = 2|BP|$,

ALBO

– zapisanie równości $|PS| = \frac{1}{2}|BP|$,

ALBO

– obliczenie długości odcinka MB (gdzie M jest rzutem prostokątnym punktu P na odcinek AB): $|MB| = \frac{12}{5}$.

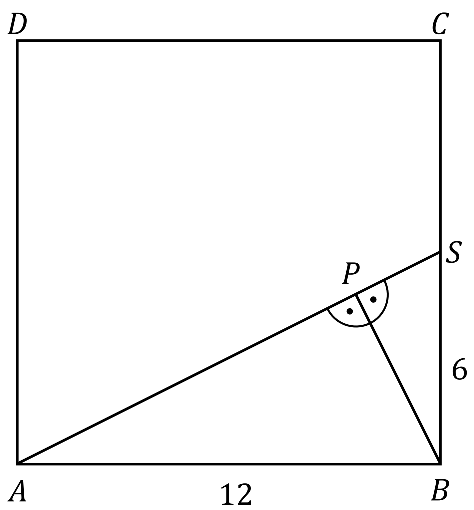
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$

$$|AS|^2 = 180$$

$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Ponieważ odcinek BP jest wysokością trójkąta prostokątnego poprowadzoną na przeciwprostokątną, więc

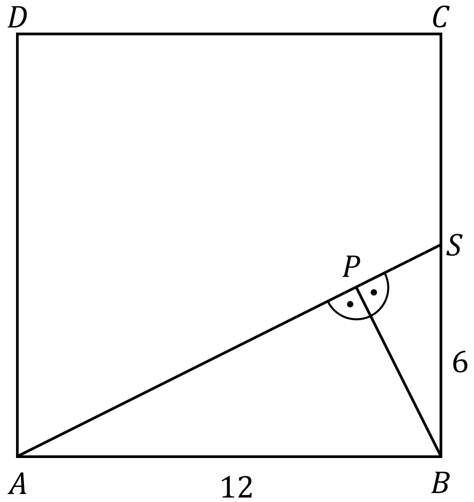
$$|BP| = \frac{|AB| \cdot |BS|}{|AS|} = \frac{12 \cdot 6}{6\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób II

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$

$$|AS|^2 = 180$$

$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Pole trójkąta ABS jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BP|$$

Ponadto pole trójkąta ABS można obliczyć jako połowę iloczynu długości przyprostokątnych

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$$

Zatem

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BP| = 36$$

$$|BP| = \frac{72}{6\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób III

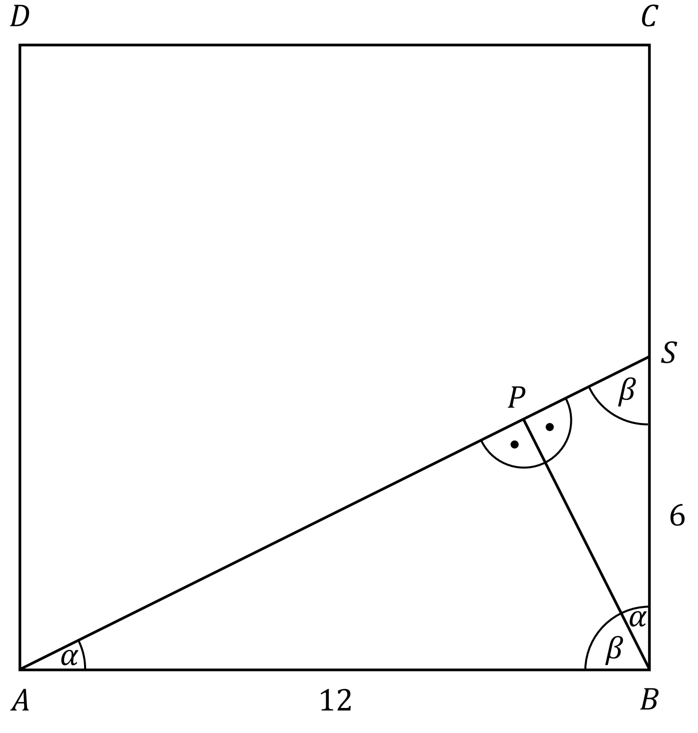
Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$
- $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Zatem trójkąty ABS, APB, BPS są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |PS|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$

$\beta = 90° - \alpha = |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Wtedy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $|BP| = 2x$, $|AP| = 4x$, $|AS| = 5x$.

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta ABS) obliczamy długość odcinka AS

$$|AS|^2 = 12^2 + 6^2$$

$$|AS| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Zatem

$$5x = 6\sqrt{5}$$

$$x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$|BP| = 2x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób IV

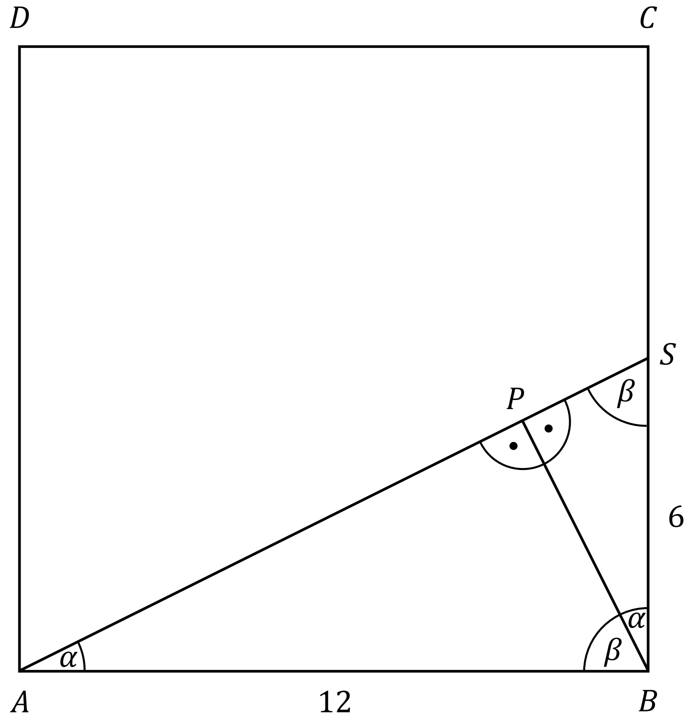
Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.

Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$
- $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Zatem trójkąty ABS i BPS są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |BP|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PBS|$

$\beta = 90° - \alpha = \ |\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BSP|$

Wtedy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$|PS| = \frac{1}{2}x$

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta BPS) obliczamy długość odcinka BP

$$|BP|^2 + |PS|^2 = 6^2$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 36$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{144}{5}$$

$$x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

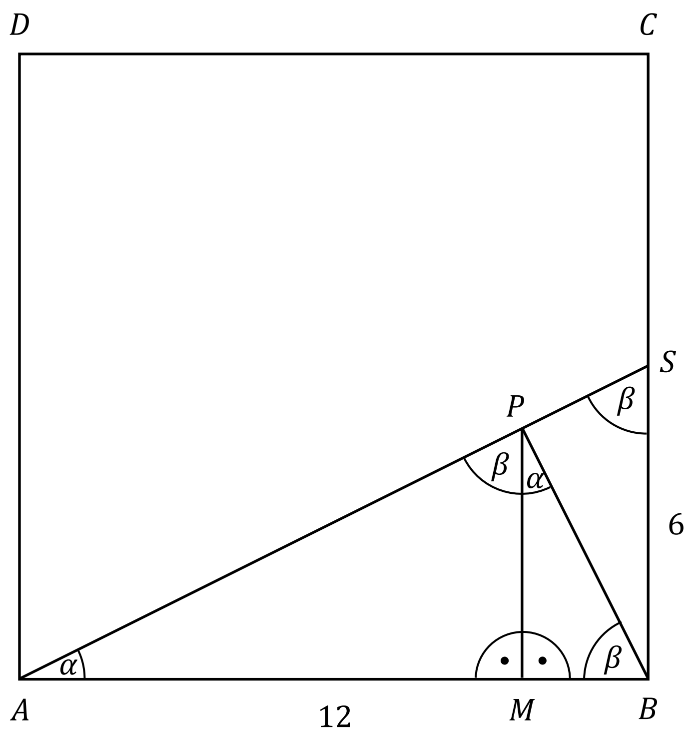
Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób V

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.
Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS.
Poprowadźmy odcinek PM prostopadły do odcinka AB (jak na rysunku).
Z warunków zadania otrzymujemy:

- $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BPM|$
- $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APM| = |\sphericalangle PBM|$

Zatem trójkąty ABS, AMP, PMB są podobne na podstawie cechy kąt-kąt-kąt.



Oznaczmy:

$x = |MB|$

$\alpha = |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BPM|$

$\beta = 90° - \alpha = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APM| = |\sphericalangle PBM|$

Wtedy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $|MP| = 2x$, $|AM| = 4x$, $|AB| = 5x = 12$.

Zatem $x = \frac{12}{5}$

Z twierdzenia Pitagorasa (dla trójkąta MBP) obliczamy długość odcinka BP

$$|BP|^2 = |MB|^2 + |MP|^2$$

$$|BP|^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2$$

$$|BP|^2 = \frac{720}{25}$$

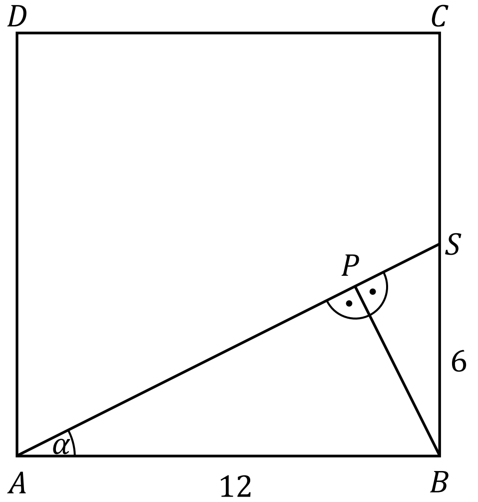
$$|BP| = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Sposób VI

Punkt S jest środkiem odcinka BC, więc $|BS| = 6$.

Trójkąt ABS jest prostokątny. Odcinek BP jest wysokością trójkąta ABS poprowadzoną na przeciwprostokątną AS (jak na rysunku).



Oznaczmy: $\alpha = |\sphericalangle BAS|$. Wtedy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$. Stąd $\cos\alpha = 2\cdot\sin\alpha$.

Wykorzystując tę zależność oraz tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ otrzymujemy

$$\sin^2\alpha + (2\cdot\sin\alpha)^2 = 1$$

$$5\sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$$

Stąd $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ponieważ α jest kątem ostrym.

Zatem

$$\frac{|BP|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{|BP|}{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|BP| = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Długość odcinka BP jest równa $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 23.1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Zadanie 23.2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IX.6) wyznacza obrazy okręgów […] w symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 24. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: IX.1) […] znajduje wspólny punkt dwóch prostych […]; IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach […]; IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda obliczenia współrzędnych punktu P **oraz** długość odcinka AP

oraz poprawne wyniki: $P=\left(\frac{9}{4},0\right)$, $|AP|=\frac{5\sqrt{41}}{4}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu P: $P=\left(\frac{9}{4},0\right)$.

2 pkt – wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y=\frac{4}{3}x-3$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.

$$\sqrt{\left(x_p-2\right)^2+\left(y_p-8\right)^2}=\sqrt{\left(x_p-10\right)^2+\left(y_p-2\right)^2} \quad \text{i} \quad y_p=0$$

ALBO

– zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka P, wynikającego z prostopadłości odpowiednich wektorów, np.

$(-4)\cdot\left(x_p-6\right)+3\cdot(-5)=0$

1 pkt – zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M=(6,5)$

ALBO

– wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB}=-\frac{3}{4}$,

ALBO

– zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $3x+4y-38=0$,

ALBO

– zapisanie drugiej współrzędnej punktu P np.: $y_p=0$, $P=\left(x_p,0\right)$,

ALBO

– zapisanie równości $|AP|=|BP|$ w zależności od współrzędnych punktu $P=\left(x_p,y_p\right)$, np.

$$\sqrt{\left(x_p-2\right)^2+\left(y_p-8\right)^2}=\sqrt{\left(x_p-10\right)^2+\left(y_p-2\right)^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa punkt P leżący na osi Ox i w rozwiązaniu popełnia tylko błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

2. Jeżeli zdający rysuje w układzie współrzędnych symetralną odcinka AB i odczytuje współrzędne punktu P i zapisuje $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$ oraz sprawdzi rachunkowo, że $|AP| = |BP|$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty** (jeżeli tego sprawdzenia nie wykona, to otrzymuje za tę część rozwiązania **2 punkty**, a gdy odczyta błędne współrzędne punktu P, to otrzymuje **0 punktów**).

3. Jeżeli zdający nie sporządzi rysunku i zapisze tylko $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli zdający nie sporządzi rysunku, lecz zapisze $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$ i dalej kontynuuje rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

4. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej
b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka
d) zastosowanie niepoprawnego warunku prostopadłości wektorów
e) zastosowanie niepoprawnego wzoru na odległość dwóch punktów w kartezjańskim układzie współrzędnych
f) zastosowanie niepoprawnych własności symetralnej
g) przyjęcie, że wierzchołek P leży poza osią Ox,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.
Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–g), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

5. Jeżeli zdający rozważa dwa różne położenia punktu P na osi Ox i nie odrzuca niewłaściwego rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB}=\frac{2-8}{10-2}=-\frac{3}{4}$$

Zatem współczynnik kierunkowy symetralnej k odcinka AB jest równy

$$a_k=\frac{4}{3}$$

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$M=\left(\frac{2+10}{2},\frac{8+2}{2}\right)=(6,5)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci

$$y=\frac{4}{3}(x-6)+5$$

$$y=\frac{4}{3}x-3$$

Punkt P jest punktem przecięcia symetralnej k z osią Ox, więc współrzędne punktu $P=(x_p,y_p)$ spełniają równania

$$y_p=\frac{4}{3}x_p-3 \quad \text{oraz} \quad y_p=0$$

Stąd otrzymujemy:

$$0=\frac{4}{3}x_p-3 \quad \text{oraz} \quad y_p=0$$

$$x_p=\frac{9}{4} \quad \text{oraz} \quad y_p=0$$

Zatem $P=\left(\frac{9}{4},0\right)$

Obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP|=\sqrt{\left(\frac{9}{4}-2\right)^2+(0-8)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+(-8)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+64}=\sqrt{\frac{1025}{16}}=\frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Sposób II

Ponieważ punkt P leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $P = (x_p, 0)$.

Ponieważ punkt P leży na symetralnej odcinka AB, więc $|AP| = |BP|$.
Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie

$$\sqrt{(x_p - 2)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{(x_p - 10)^2 + (0 - 2)^2}$$

$$(x_p - 2)^2 + (0 - 8)^2 = (x_p - 10)^2 + (0 - 2)^2$$

$$x_p^2 - 4x_p + 4 + 64 = x_p^2 - 20x_p + 100 + 4$$

$$16x_p = 36$$

$$x_p = \frac{9}{4}$$

Zatem $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 64} = \sqrt{\frac{1025}{16}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Sposób III

Ponieważ punkt P leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $P = \left(x_p, 0\right)$.

Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB:

$$M = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (6, 5)$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{MP}$:

$$\overrightarrow{MA} = [2-6, 8-5] = [-4, 3]$$

$$\overrightarrow{MP} = \left[x_p - 6, 0 - 5\right] = \left[x_p - 6, -5\right]$$

Wektor $\overrightarrow{MA}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{MP}$, zatem

$$-4 \cdot \left(x_p - 6\right) + 3 \cdot (-5) = 0$$

$$-4x_p + 24 - 15 = 0$$

$$x_p = \frac{9}{4}$$

Zatem punkt P ma współrzędne $P = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

Obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (-8)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + 64} = \sqrt{\frac{1025}{16}} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 26. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.4) oblicza objętości […] graniastosłupów […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 27. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 28. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 29. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 30. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 31. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia A i uzyskanie poprawnego wyniku: $P(A) = \frac{15}{36}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 6 \cdot 6$ lub sporządzenie tabeli o 36 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, z których co najmniej jedno pole jest wypełnione, lub sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 15$, jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,

ALBO

– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{36}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{5}{12}$,

ALBO

– zapisanie tylko $P(A) = \frac{15}{36}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 5 i 12 lub 15 i 36 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

W tabeli literą A zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1						
2	A					
3	A	A				
4	A	A	A			
5	A	A	A	A		
6	A	A	A	A	A	

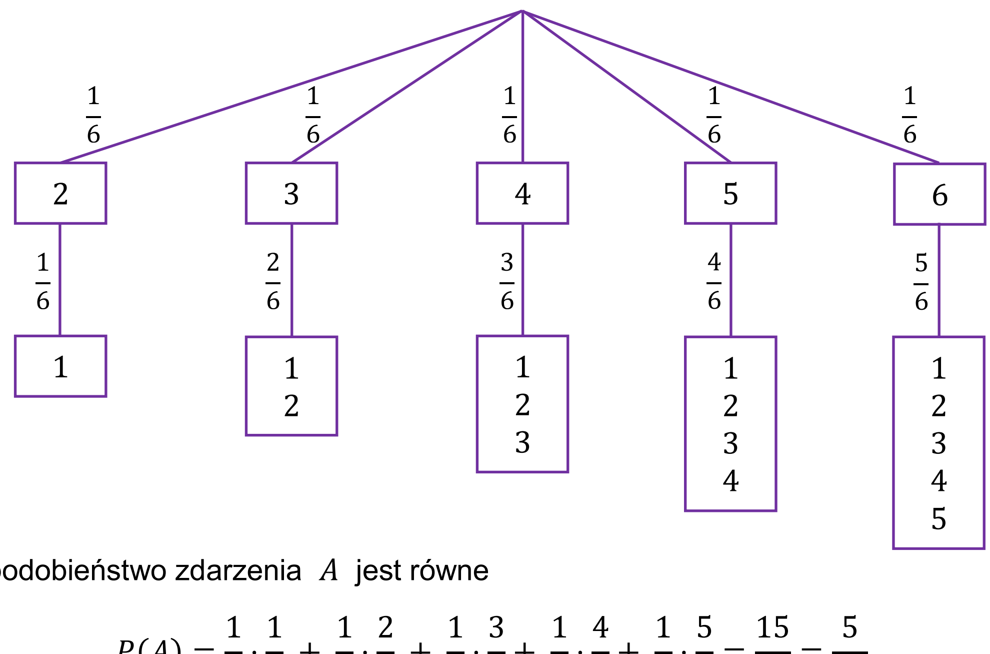
Moc zbioru Ω jest równa 36.

Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 15.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Sposób II (drzewo stochastyczne)

Rysujemy fragment drzewa stochastycznego rozważanego doświadczenia z uwzględnieniem wszystkich istotnych gałęzi.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Zadanie 32. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zasady oceniania
2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi.
1 pkt – wybranie jednej poprawnej odpowiedzi.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
32.1. A
32.2. E

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

II. dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin dodatkowy 2024.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 5.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $5n^3 - 5n$ do postaci $5n(n^2 - 1)$.

Zadanie 9.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 10.

1 pkt – przekształcenie wielomianu $4x^3 - 12x^2 - x + 3$ do postaci

$4x^2(x-3) - (x-3)$ lub $x(4x^2-1) - 3(4x^2-1)$

ALBO

– zapisanie jednego z rozwiązań równania $4x^3 - 12x^2 - x + 3 = 0$.

Zadanie 11.1.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 14.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 22.

1 pkt – zapisanie, że trójkąty ABS oraz APB są podobne
ALBO
– zapisanie, że trójkąty ABS oraz BPS są podobne,
ALBO
– zapisanie, że trójkąty APB oraz BPS są podobne.

Zadanie 24.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi 1. ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 14$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{14}{36}$) , to otrzymuje **2 punkty**.