

# Metoda elementów skończonych

## Projekt zaliczeniowy

Maciej Trątnowiecki

AGH, Styczeń 2020

### Problem obliczeniowy

Przypadł mi problem transportu ciepła.

$$\begin{aligned} -k(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= 0 \\ u(2) &= 0 \\ \frac{du(0)}{dx} + u(0) &= 20 \\ k(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

Szukaną jest funkcja  $u$  spełniająca:

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in R$$

### Postać wariacyjna

Niech  $v(2) = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^2 -k(x) u''(x) v(x) dx &= 0 \\ \int_0^2 -k(x) u''(x) v(x) dx &= - \int_0^1 u''(x) v(x) dx - 2 \int_1^2 u''(x) v(x) dx \\ - \int_0^1 u''(x) v(x) dx - 2 \int_1^2 u''(x) v(x) dx &= -[u'(x) v(x)]_0^1 + \int_0^1 v'(x) u'(x) dx - 2[u'(x) v(x)]_1^2 + 2 \int_1^2 v'(x) u'(x) dx \\ -[u'(x) v(x)]_0^1 - 2[u'(x) v(x)]_1^2 &= -u'(1) v(1) + u'(0) v(0) - 2u'(2) v(2) + 2u'(1) v(1) = u'(1) v(1) + u'(0) v(0) = \\ &= u'(1) v(1) + v(0) (20 - u(0)) \\ \iff u'(1) v(1) + v(0) (20 - u(0)) + \int_0^1 v'(x) u'(x) dx + 2 \int_1^2 v'(x) u'(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Otrzymuje sformułowanie wariacyjne:

$$\begin{cases} B(u, v) = u'(1) v(1) - u(0) v(0) + \int_0^1 v'(x) u'(x) dx + 2 \int_1^2 v'(x) u'(x) dx \\ L(v) = -20 v(0) \\ B(u, v) = L(v) \\ u(2) = 0 \quad \wedge \quad v(2) = 0 \end{cases}$$