Metoda elementów skończonych
Projekt zaliczeniowyN

Maciej Trątnowiecki

AGH, Styczeń 2020

Problem obliczeniowy

Przypadł mi problem transportu ciepła.

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$
$$u(2) = 0$$
$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$
$$k(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in [0,1] \\ 2 & dla \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

Szukaną jest funkcja u spełniająca:

$$[0,2] \ni x \to u(x) \in R$$

Postać wariacyjna

Niech $v(2) = 0$

$$\int_0^2 -k(x)u''(x)v(x)dx = 0$$
$$\int_0^2 -k(x)u''(x)v(x)dx = -\int_0^1 u''(x)v(x)dx - 2\int_1^2 u''(x)v(x)dx$$
$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx - 2\int_1^2 u''(x)v(x)dx = -[u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 v'(x)u'(x)dx - 2[u'(x)v(x)]_1^2 + 2\int_1^2 v'(x)u'(x)dx$$
$$-[u'(x)v(x)]_0^1 - 2[u'(x)v(x)]_1^2 = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) - 2u'(2)v(2) + 2u'(1)v(1) = u'(1)v(1) + u'(0)v(0) =$$
$$= u'(1)v(1) + v(0)(20 - u(0))$$
$$\iff u'(1)v(1) + v(0)(20 - u(0)) + \int_0^1 v'(x)u'(x)dx + 2\int_1^2 v'(x)u'(x)dx = 0$$

Otrzymuje sformułowanie wariacyjne:

$$\begin{cases} B(u,v) = u'(1)v(1) - u(0)v(0) + \int_0^1 v'(x)u'(x)dx + 2\int_1^2 v'(x)u'(x)dx \\ L(v) = -20v(0) \\ B(u,v) = L(v) \\ u(2) = 0 \quad \wedge \quad v(2) = 0 \end{cases}$$

Kwadratura

$$n = 2 \quad x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_i = 1$$

Przesuwamy kwadraturę:

$$\int_x^{\frac{2}{n}+x} fdx = \int_{\frac{2k-2}{n}}^{\frac{2k}{n}} fdx = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n\sqrt{3}} + \frac{2k-1}{n}) + f(\frac{-1}{n\sqrt{3}} + \frac{2k-1}{n}))$$