Projekt 2

Marcin Skrzypczak
Modelowanie Matematyczne
Prowadzący: dr inż. Jakub Wagner

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Warszawa
30.01.2022

Oświadczam, że niniejsza praca, stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Modelowanie matematyczne, została wykonana przeze mnie samodzielnie.
Marcin Skrzypczak, 320735

Spis treści

1 Sformułowanie zadania

Równania Lotki-Volterry służą do modelowania liczebności populacji dwóch gatunków, między którymi występuje zależność drapieżnik-ofiara:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r_x x(t) + r_{xy} x(t) y(t) + r_{xx} x^2(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r_y y(t) + r_{yx} x(t) y(t) + r_{yy} y^2(t) \tag{2}$$

gdzie x to liczebność populacji gatunku ofiary, y - liczebność populacji gatunku drapieżnika, t - czas, $r_x, r_y, x_{xy}, r_{yx}, r_{xx}, r_{yy} \in R$ - parametry modelu, $t_1, \ldots, t_N$ - chwile, w których dokonano pomiaru oraz $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N$ i $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_N$ wyniki pomiaru. Zadanie skupia się na numerycznym przybliżeniu parametrów modelu opisującego zadane dane. Obliczenia zostały przeprowadzone przy użyciu następujących metod rozwiązywania RRZ:

1. jawnej metody Eulera:

   $$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + f(t_{n-1}, \hat{x}_{n-1})\Delta t$$

2. jawnej metody Adamsa-Bashfortha trzeciego rzędu:

   $$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + \frac{1}{12}\left[23 f(t_{n-1}, \hat{x}_{n-1}) - 16 f(t_{n-2}, \hat{x}_{n-2}) + 5 f(t_{n-3}, \hat{x}_{n-3})\right]\Delta t$$

3. niejawnej metody Eulera

   $$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + f(t_n, \hat{x}_n)\Delta t$$

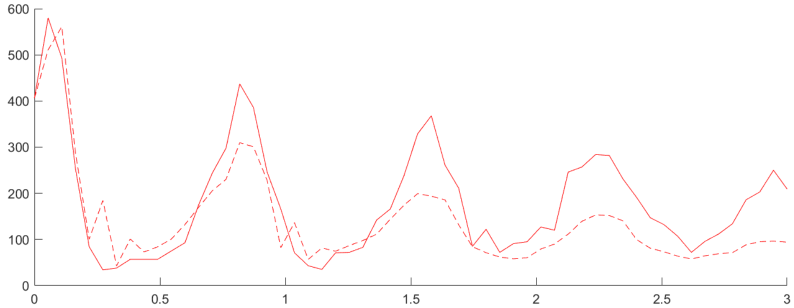
2 Modelowanie populacji ofiar

Początkowym celem będzie wyznaczenie wartości r_x, r_{xy} i r_{xx} minimalizujących wskaźnik dopasowania modelu do danych, określonego wzorem

$$J_x \equiv \sum_{n=2}^{N} (\hat{x}_n - \tilde{x}_n)^2,$$

gdzie $\hat{x}_n$ $(n = 2, \ldots, N)$ oznacza estymatę wartości $x(t_n)$, uzyskaną poprzez rozwiązanie równania (1) po podstawieniu $y(t_1) = \tilde{y}_1, \ldots, y(t_N) = \tilde{(y)}_N$ oraz $x(t_1) = \tilde{x}_1$.

Najdokładniejsze przybliżenie zostało otrzymane przy użyciu metody Adamsa-Bashfortha. Parametrami opisującymi dobrany model są $r_x = 6.14$, $r_{xy} = -0.07$, $r_{xx} = 0.00$.



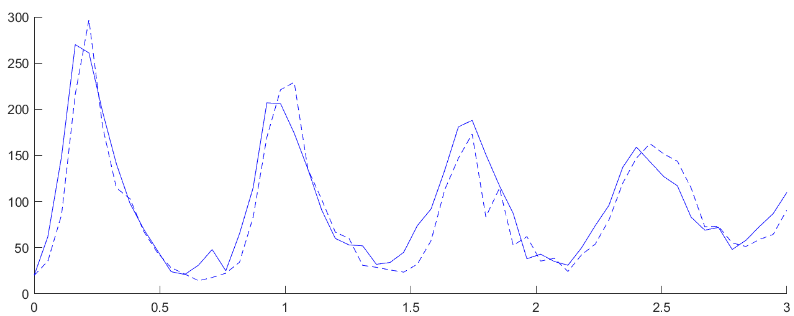
Rysunek 1: Rozmiar populacji ofiar w zależności od czasu. Linią ciągłą przedstawiono pomiary rzeczywiste, przerywaną estymatę.

3 Modelowanie populacji drapieżników

Następnie wyznaczono wartości r_y, r_{yx} i r_{yy} minimalizujące wskaźnik dopasowania modelu do danych, określonego wzorem

$$J_y \equiv \sum_{n=2}^{N} (\hat{y}_n - \tilde{y}_n)^2,$$

gdzie $\hat{y}_n$ $(n = 2, \dots, N)$ oznacza estymatę wartości $y(t_n)$, uzyskaną poprzez rozwiązanie równania (2) po podstawieniu $x(t_1) = \tilde{x}_1, \dots, x(t_N) = \tilde{(x)}_N$ oraz $y(t_1) = \tilde{y}_1$. Najdokładniejsze przybliżenie zostało otrzymane przy użyciu metody Adamsa-Bashfortha. Parametrami opisującymi dobrany model są r_y=-12.79, r_{yx}=0.07, r_{yy}=0.02.



Rysunek 2: Rozmiar populacji drapieżników w zależności od czasu. Linią ciągłą przedstawiono pomiary rzeczywiste, przerywaną estymatę.

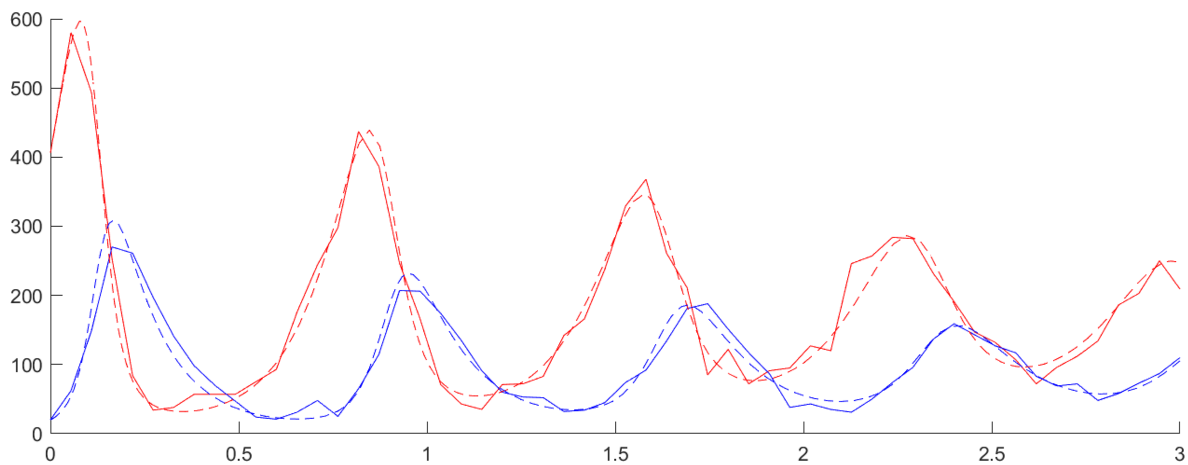
4 Dopasowanie modelu

Poprzednio wyznaczone wartości parametry posłużyły do dopasowania modelu, minimalizującego wskaźnik dopasowania, określony wzorem

$$J \equiv \sum_{n=2}^{N} (\hat{x}_n - \tilde{x}_n)^2 + \sum_{n=2}^{N} (\hat{y}_n - \tilde{y}_n)^2,$$

gdzie $\hat{x}_n, \hat{y}_n (n = 2, \ldots N)$ oznaczają estymat wartości $x(t_n), y(t_n)$, uzyskane poprzez rozwiązanie równań (1), (2) dla warunków początkowych $x(t_1) = \tilde{x}_1, y(t_1) = \tilde{y}_1$. Jako wartości początkowe zostały użyte wartości wyznaczone przy pomocy metody Eulera, ponieważ zapewniały one dokładniejszy wynik końcowy ($r_x = 6.136346, r_{xy} = -0.069893, r_{xx} = 0; r_y = -5.884900, r_{yx} = 0.059108, r_{yy} = -0.033141$). Do wyznaczenia wartości parametrów została użyta funkcja ***fminsearch***, a do rozwiązywania układu równań funkcja ***ode45***. Następujące parametry określają najlepszy model:

r_x	r_{xy}	r_{xx}	r_y	r_{yx}	r_{yy}
9.2205	-0.0977	0.0001	-8.1276	0.0545	-0.0098



Rysunek 3: Rozmiar populacji drapieżników i ofiar w zależności od czas. Linią ciągłą przedstawiono pomiary rzeczywiste, przerywaną estymatę. Kolorem czerwonym oznaczono populację ofiar, niebieskim drapieżników.

5 Stan równowagi

Dla wyznaczonych wartości parametrów możliwe jest wyznaczenie wartości $x(t), y(t)$ dla których układ osiąga stan równowagi, są one rozwiązaniem układu równań (3).

$$\begin{aligned} 0 &= r_x x + r_{xy} xy + r_{xx} x^2 \\ 0 &= r_y y + r_{yx} xy + r_{yy} y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Którego rozwiązaniem jest para $x = 166.1312, y = 94.5457$.

6 Modelowanie populacji Chromistów

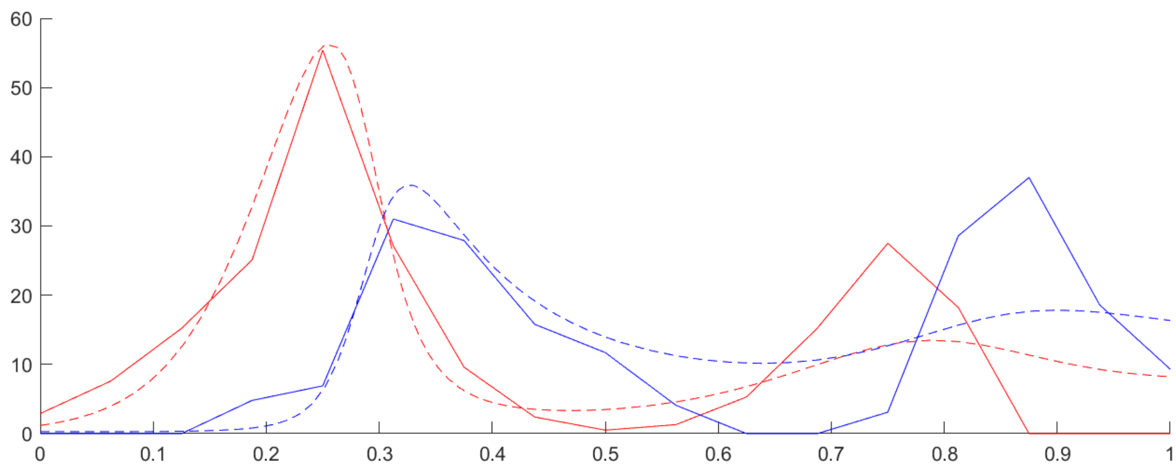
Parametry r_x i r_y opisują naturalne tempo wzrostu populacji w optymalnych warunkach, skutkujące eksponencjalnym przyrostem. Uwzględnienie r_{xx} oraz r_{yy} pozwala wyznaczyć maksymalny rozmiar populacji, spowodowany przykładowo pełnym wykorzystaniem zasobów.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r_x x(t) \implies x(t) = x_1 e^{r_x t}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r_x x(t) + r_{xx} x^2(t) \implies x(t) = x_1 \frac{1 - r_{xx}}{r_x} \frac{r_x e^{r_x t}}{1 - r_{xx} e^{r_x t}}$$

Parametry r_{xy}, r_{yx} opisują relację międzygatunkową. Spodziewany jest negatywny wpływ drapieżników na populację ofiar ($r_{xy} < 0$) oraz pozytywny ofiar na populację drapieżników ($r_{yx} > 0$).

W zadaniu zostały wykorzystane dane reprezentujące pomiary liczebności populacji chromistów *Paramecium Caudatum* i *Didinium Nasutum* w pewnym doświadczeniu z 1934 r. Dodatkowo wartości początkowe $\hat{x}_1$ i $\hat{y}_1$ zostały dobrane, aby minimalizować błąd estymacji. Aby zwiększyć dokładność modelowania dane zostały przeskalowane liniowo w czasie pomiędzy pomiarami. Dzięki temu możliwe było otrzymanie dokładnego modelu, określonego parametrami:

x_1	r_x	r_{xy}	r_{xx}	y_1	r_y	r_{yx}	r_{yy}
1.1855	20.0975	-1.2041	-0.1876	0.2924	-2.6962	0.7880	-0.3097



Rysunek 4: Rozmiar populacji drapieżników i ofiar w zależności od czas. Linią ciągłą przedstawiono pomiary rzeczywiste, przerywaną estymatę. Kolorem czerwonym oznaczono populację ofiar, niebieskim drapieżników.

7 Wykorzystane programy

Listing 1: Zadanie 1a

```
data = readtable('dane21.csv');
N1 = 20; N2 = 20; N3 = 20;
J = zeros(N1,N2,N3);
RX = linspace(-100,100,N2);
RXY = linspace(-1,1,N2);
RXX = linspace(-1,1,N3);
dt = mean(diff(data.t));
T = 0 :  dt : 3;

for it1 = 1 : N1
    for it2 = 1 : N2
        for it3 = 1 : N3
            rx = RX(it1);
            rxy = RXY(it2);
            rxx = RXX(it3);
            x = zeros(size(T));
            x(1) = data.x(1);
            f = @(x,y) rx*x+rxy*x*y+rxx*x*x;
%              Metoda Eulera
%              for i = 2 : length(T)
%                  x(i) = x(i-1) + dt * f(x(i-1), data.y(i-1));
%              end

%              Adams-Bashforth
            x(2) = x(1) + dt * f(x(1), data.y(1));
            x(3) = x(2) + dt * f(x(2), data.y(2));
            for i = 4 : length(T)
                x(i) = x(i-1) + dt/12 * (23*f(x(i-1), data.y(i-1))...
                    -16*f(x(i-2), data.y(i-2)) +5*f(x(i-3), data.y(i-3)));
            end

%              Niejawna metoda Eulera
%              for i = 2 : length(T)
%                  x1 = -(dt*rx - (dt^2*rx^2 + 2*dt^2*rx*rxy*data.y(i) + dt^2*rxy^2*data.y(i)^2 - 2*dt*rx - 2*dt*rxy*data.y(i) - 4*rxx*x(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*rxy*data.y(i) - 1)/(2*dt*rxx);
%                  x2 = -(dt*rx + (dt^2*rx^2 + 2*dt^2*rx*rxy*data.y(i) + dt^2*rxy^2*data.y(i)^2 - 2*dt*rx - 2*dt*rxy*data.y(i) - 4*rxx*x(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*rxy*data.y(i) - 1)/(2*dt*rxx);
%                  if isreal(x1) && isreal(x2) && (x1>0 || x2>0)
%                      x(i) = max(x1, x2);
%                  else
%                      x(i) = Inf;
%                      break
%                  end
%              end

            J(it1, it2, it3) = sum((data.x'-x).*(data.x'-x));
        end
    end
end
[v, ind] = min(J(:));
[it1, it2, it3] = ind2sub(size(J), ind);
A = fminsearch(@(X) ApproxX(X(1), X(2), X(3)), [RX(it1), RXY(it2), RXX(it3)]);
fprintf("r_x=%f; r_xy=%f; r_xx=%f;\n", A(1), A(2), A(3));

function [J] = ApproxX(rx ,rxy, rxx)
data = readtable('dane21.csv');
dt = mean(diff(data.t));
T = 0 :  dt : 3;
x = zeros(1, length(T));
x(1) = data.x(1);

for i = 2 : length(T)
    x1 = -(dt*rx - (dt^2*rx^2 + 2*dt^2*rx*rxy*data.y(i) + dt^2*rxy^2*data.y(i)^2 - 2*dt*rx - 2*dt*rxy*data.y(i) - 4*rxx*x(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*rxy*data.y(i) - 1)/(2*dt*rxx);
    x2 = -(dt*rx + (dt^2*rx^2 + 2*dt^2*rx*rxy*data.y(i) + dt^2*rxy^2*data.y(i)^2 - 2*dt*rx - 2*dt*rxy*data.y(i) - 4*rxx*x(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*rxy*data.y(i) - 1)/(2*dt*rxx);
    if isreal(x1) && isreal(x2) && (x1>0 || x2>0)
        x(i) = max(x1, x2);
    else
        x(i) = Inf;
        break
    end
end
J = sum((data.x'-x(1,:)).*(data.x'-x(1, :)));
end % function
```

Listing 2: Zadanie 1b

```
data = readtable('dane21.csv');
N1 = 50;
N2 = 50;
N3 = 50;
J = zeros(N1,N2,N3);
RY = linspace(-100,100,N1);
RYX = linspace(-1,1,N2);
RYY = linspace(-1,1,N3);
dt = mean(diff(data.t));
T = 0 :  dt : 3;
for it1 = 1 : N1
    for it2 = 1 : N2
        for it3 = 1 : N3
            ry = RY(it1);
            ryx = RYX(it2);
            ryy = RYY(it3);
            y = zeros(size(T));
            y(1) = data.y(1);
            f = @(x,y) ry*y+ryx*x*y+ryy*y*y;
%             Metoda Eulera
%             for i = 2 : length(T)
%                 y(i) = y(i-1) + dt*f(data.x(i-1), y(i-1));
%             end

%             Metoda Adamsa-Bashfortha
            y(2) = y(1) + dt * f(data.x(1), y(1));
            y(3) = y(2) + dt * f(data.x(2), y(2));
            for i = 4 : length(T)
                y(i) = y(i-1) + dt/12 * (23*f(data.x(i-1), y(i-1))...
                    -16*f(data.x(i-2), y(i-2)) +5*f(data.x(i-3), y(i-3)));
            end

%             Niejawna metoda Eulera
%             for i = 2 : length(T)
%                 y1 = -(dt*ry - (dt^2*ry^2 + 2*dt^2*ry*ryx*data.x(i) + dt^2*ryx^2*data.x(i)^2 - 2*dt*ry - 2*dt*ryx*data.x(i) - 4*ryy*y(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*ryx*data.x(i) - 1)/(2*dt*ryy);
%                 y2 = -(dt*ry + (dt^2*ry^2 + 2*dt^2*ry*ryx*data.x(i) + dt^2*ryx^2*data.x(i)^2 - 2*dt*ry - 2*dt*ryx*data.x(i) - 4*ryy*y(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*ryx*data.x(i) - 1)/(2*dt*ryy);
%                 if isreal(y1) && isreal(y2) && (y1>0 || y2>0)
%                     y(i) = max(y1, y2);
%                 else
%                     y(i) = Inf;
%                     break
%                 end
%             end

            J(it1, it2, it3) = sum((data.y'-y).*(data.y'-y));
        end
    end
end

[v, ind] = min(J(:));
[it1, it2, it3] = ind2sub(size(J), ind);
A = fminsearch(@(X) ApproxY(X(1), X(2), X(3)), [RY(it1), RYX(it2), RYY(it3)]);
fprintf("r_y=%f; r_yx=%f; r_yy=%f;\n", A(1), A(2), A(3));

function [J] = ApproxY(ry, ryx, ryy)
data = readtable('dane21.csv');
dt = mean(diff(data.t));
T = 0 :  dt : 3;
y = zeros(size(T));
y(1) = data.y(1);
for i = 2 : length(T)
    y1 = -(dt*ry - (dt^2*ry^2 + 2*dt^2*ry*ryx*data.x(i) + dt^2*ryx^2*data.x(i)^2 - 2*dt*ry - 2*dt*ryx*data.x(i) - 4*ryy*y(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*ryx*data.x(i) - 1)/(2*dt*ryy);
    y2 = -(dt*ry + (dt^2*ry^2 + 2*dt^2*ry*ryx*data.x(i) + dt^2*ryx^2*data.x(i)^2 - 2*dt*ry - 2*dt*ryx*data.x(i) - 4*ryy*y(i-1)*dt + 1)^(1/2) + dt*ryx*data.x(i) - 1)/(2*dt*ryy);
    if isreal(y1) && isreal(y2) && (y1>0 || y2>0)
        y(i) = max(y1, y2);
    else
        y(i) = Inf;
        break
    end
end
J= sum((data.y'-y).*(data.y'-y));
end % function
```

Listing 3: Zadanie 2

```
data = readtable('dane21.csv');
J = @(X) fun(X(1), X(2),X(3),X(4),X(5),X(6));

r_x=6.136346; r_xy=-0.069893; r_xx=-0.000000;
r_y=-5.884900; r_yx=0.059108; r_yy=-0.033141;

[W, val] = fminsearch(J, [r_x, r_y, r_xy, r_yx, r_xx, r_yy]);
disp(W);

f = figure;
hold on
f.Position = [100 100 1000 350];
plot(data.t, data.x,'r');
plot(data.t, data.y,'b');
f = @(t,x) [W(1)*x(1) + W(3)*x(1)*x(2)+ W(5)*x(1)*x(1); ...
    W(2)*x(2) + W(4)*x(1)*x(2) + W(6)*x(2)*x(2)];
[t,y] = ode45(f, [0 3], [data.x(1), data.y(1)]);
plot(t,y(:,1),'r--');
plot(t,y(:,2),'b--');

function J = fun(rx, ry, rxy, ryx, rxx, ryy)
    data = readtable('dane21.csv');

    f = @(t, x) [rx*x(1) + rxy*x(1)*x(2)+rxx*x(1)*x(1); ...
        ry*x(2) + ryx*x(1)*x(2) + ryy*x(2)*x(2)];

    [t, y] = ode45(f, [0 3], [data.x(1), data.y(1)]);
    X = interp1(t, y, data.t);
    J = sum( (X-[data.x, data.y]).*(X-[data.x, data.y]), 'all');
end % function
```

Listing 4: Zadanie 3

```
data = readtable('Chromista.csv');
data = renamevars(data, data.Properties.VariableNames, ["t", "x", "y"]);
data.t = normalize(data.t, 'range');
SCALING = 5;

N1 = 20; N2 = 20; N3 = 20; N4 = 20;
J = zeros(N1,N2,N3, N4);
RX = linspace(0,50,N1);
RXY = linspace(-3,0,N2);
RXX = linspace(-1,1,N3);
X = linspace(min(data.x),max(data.x),N4);
dt = mean(diff(data.t))/SCALING;
T = 0 : dt : 1;
YInterp = interp1(data.t, data.y, T);
XInterp = interp1(data.t, data.x, T);

for it1 = 1 : N1
    for it2 = 1 : N2
        for it3 = 1 : N3
            for it4 = 1 : N4
                rx = RX(it1);
                rxy = RXY(it2);
                rxx = RXX(it3);
                x = zeros(size(T));
                x(1) = X(it4);
                f = @(x,y) rx*x+rxy*x*y+rxx*x*x;
                x(2) = x(1) + dt * f(x(1), YInterp(1));
                x(3) = x(2) + dt * f(x(2), YInterp(2));
                for i = 4 : length(T)
                    x(i) = x(i-1) + dt/12 * (23*f(x(i-1), YInterp(i-1))...
                        -16*f(x(i-2), YInterp(i-2)) +5*f(x(i-3), YInterp(i-3)));
                end
                J(it1, it2, it3, it4) = sum((XInterp-x).*(XInterp-x));
            end
        end
    end
end
[~, ind] = min(J(:));
[it1, it2, it3, it4] = ind2sub(size(J), ind);
A = fminsearch(@(X) ApproxX(X(1), X(2), X(3), X(4)), [RX(it1), RXY(it2), RXX(it3), X(it4)], optimset('Display','off'));
r_x=A(1); r_xy=A(2); r_xx=A(3); x0=A(4);

J = zeros(N1,N2,N3, N4);
RY = linspace(-30,0,N1);
RYX = linspace(0,3,N2);
RYY = linspace(-1,1,N3);
Y = linspace(min(data.y),max(data.y),N4);
for it1 = 1 : N1
    for it2 = 1 : N2
        for it3 = 1 : N3
            for it4 = 1 : N4
                ry = RY(it1);
                ryx = RYX(it2);
                ryy = RYY(it3);
                y = zeros(size(T));
                y(1) = Y(it4);
                f = @(x,y) ry*y+ryx*x*y+ryy*y*y;
                y(2) = y(1) + dt * f(data.x(1), y(1));
                y(3) = y(2) + dt * f(data.x(2), y(2));
```

```
                for i = 4 : length(T)
                    y(i) = y(i-1) + dt/12 * (23*f(XInterp(i-1), y(i-1))...
                        -16*f(XInterp(i-2), y(i-2)) +5*f(XInterp(i-3), y(i-3)));
                end
                J(it1, it2, it3, it4) = sum((YInterp-y).*(YInterp-y));
            end
        end
    end
end
[v, ind] = min(J(:));
[it1, it2, it3, it4] = ind2sub(size(J), ind);
A = fminsearch(@(X) ApproxY(X(1), X(2), X(3), X(4)), [RY(it1), RYX(it2), RYY(it3), Y(it4)], optimset('Display','off'));
r_y=A(1); r_yx=A(2); r_yy=A(3); y0=A(4);

J = @(X) fun3(X(1), X(2), X(3), X(4), X(5), X(6), X(7), X(8));
W = fminsearch(J, [x0, y0, r_x, r_y, r_xy, r_yx, r_xx, r_yy], optimset('Display','off'));
disp(W)

f=figure;
hold on
f.Position = [100 100 1000 350];
plot(data.t, data.x,'r');
plot(data.t, data.y,'b');
f = @(t,x) [W(3)*x(1) + W(5)*x(1)*x(2)+ W(7)*x(1)*x(1); ...
    W(4)*x(2) + W(6)*x(1)*x(2) + W(8)*x(2)*x(2)];
[t,y] = ode45(f, [0 1], [W(1), W(2)]);
plot(t,y(:,1),'r--');
plot(t,y(:,2),'b--');

function [J] = ApproxX(rx ,rxy, rxx, x0)
data = readtable('Chromista.csv');
data = renamevars(data, data.Properties.VariableNames, ["t", "x", "y"]);
SCALING = 5;
dt = mean(diff(data.t))/SCALING;
T = 0:dt:1;
YInterp = interp1(data.t, data.y, T);
XInterp = interp1(data.t, data.x, T);
data.t = normalize(data.t, 'range');

x = zeros(1, length(T));
x(1) = x0;
f = @(x,y) rx*x+rxy*x*y+rxx*x*x;
x(2) = x(1) + dt * f(x(1), YInterp(1));
x(3) = x(2) + dt * f(x(2), YInterp(2));
for i = 4 : length(T)
    x(i) = x(i-1) + dt/12 * (23*f(x(i-1), YInterp(i-1))...
        -16*f(x(i-2), YInterp(i-2)) +5*f(x(i-3), YInterp(i-3)));
end
J = sum((XInterp-x).*(XInterp-x));
end % function

function [J] = ApproxY(ry, ryx, ryy, y0)
data = readtable('Chromista.csv');
data = renamevars(data, data.Properties.VariableNames, ["t", "x", "y"]);
SCALING = 5;
dt = mean(diff(data.t))/SCALING;
T = 0:dt:1;
YInterp = interp1(data.t, data.y, T);
XInterp = interp1(data.t, data.x, T);
data.t = normalize(data.t, 'range');
dt = mean(diff(data.t));
y = zeros(1, length(T));
y(1) = y0;
f = @(x,y) ry*y+ryx*x*y+ryy*y*y;
y(2) = y(1) + dt * f(data.x(1), y(1));
y(3) = y(2) + dt * f(data.x(2), y(2));
for i = 4 : length(T)
    y(i) = y(i-1) + dt/12 * (23*f(XInterp(i-1), y(i-1))...
        -16*f(XInterp(i-2), y(i-2)) +5*f(XInterp(i-3), y(i-3)));
end
J= sum((YInterp-y).*(YInterp-y));
end % function

function J = fun3(x1, y1, rx, ry, rxy, ryx, rxx, ryy)
data = readtable('Chromista.csv');
data = renamevars(data, data.Properties.VariableNames, ["t", "x", "y"]);
data.t = normalize(data.t, 'range');
f = @(t, x) [rx*x(1) + rxy*x(1)*x(2)+rxx*x(1)*x(1); ...
    ry*x(2) + ryx*x(1)*x(2) + ryy*x(2)*x(2)];
[t, y] = ode45(f, [0 1], [x1, y1]);
X = interp1(t, y, data.t);
J = sum( (X-[data.x, data.y]).*(X-[data.x, data.y]), 'all');
end % function
```