

problema dos três corpos

Allison Eduardo de Sousa Bonfim
mackhyuuga@hotmail.com

20/02/2020

Contents

1	descrição do código	2
1.1	resumo	2
1.2	descrição do problema físico	2
1.3	métodos e análise numérica	3
1.4	runge kutta de quarta ordem	3
1.5	explicação do código	3
2	resultados e análise de dados	4
2.1	resultados	4
2.2	análise de dados	7
	referência	8

1 descrição do código

1.1 resumo

O problema de três corpos trata de objetos puntiformes, dimensões desprezíveis, interagindo mutuamente através da força gravitacional de Newton. Ao longo de mais de três séculos, o estudo deste tipo de sistema levou ao desenvolvimento e ao aprimoramento de diversas técnicas matemáticas, tanto analíticas quanto numéricas, para a compreensão de problemas que envolvem sistemas dinâmicos. Este trabalho tem como objetivo desenvolver e discutir alguns desses resultados aplicados ao problema de três corpos restrito, formulado a partir da segunda lei de Newton.

1.2 descrição do problema físico

O problema consiste em descrever o movimento de três partículas que interagem por força gravitacional. Sejam três massas m_1 , m_2 e m_3 no \mathbb{R}^3 indexadas pelos vetores \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 . Pelas leis de Newton e pelo princípio da superposição, podemos chegar nas seguintes equações diferenciais de segunda ordem.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_1 m_3}{|\vec{r}_{13}|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{Gm_2 m_3}{|\vec{r}_{23}|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \frac{Gm_2 m_1}{|\vec{r}_{21}|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2} = \frac{Gm_3 m_2}{|\vec{r}_{32}|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) + \frac{Gm_3 m_1}{|\vec{r}_{31}|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \quad (3)$$

Sendo G a constante da gravitação universal, ao longo desse trabalho assumirei que $G = 1 \frac{Nm^2}{kg^2}$, e $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

Ao invés de se trabalhar com essas três equações diferenciais de segunda ordem, pode-se fazer $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ e consequentemente $\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$. Obtendo, assim, seis equações vetoriais diferenciais de primeira ordem ou doze equações escalares. As equações referentes a m_1 se encontram abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dv_{1x}}{dt} = \frac{m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} (x_2 - x_1) + \frac{m_3}{|\vec{r}_{13}|^3} (x_3 - x_1) \\ \frac{dr_{1x}}{dt} = v_{1x} \\ \frac{dv_{1y}}{dt} = \frac{m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} (y_2 - y_1) + \frac{m_3}{|\vec{r}_{13}|^3} (y_3 - y_1) \\ \frac{dr_{1y}}{dt} = v_{1y} \end{cases} \quad (4)$$

As definições apresentadas também podem ser usadas, com algumas mudanças, para corpos cujas dimensões não sejam desprezíveis. Para o caso de uma distribuição esfericamente simétrica, pode-se aplicar as equações apresentadas supondo que toda a massa está concentrada em seu centro. Esse resultado foi obtido por newton em 1685 e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

1.3 métodos e análise numérica

Foi provado por poincaré em 1980 que este problema é insolúvel por quadratura, assim sendo, são somente possíveis séries de aproximações e não uma solução analítica para o mesmo. O método numérico escolhido para resolver as equações diferenciais foi o runge kutta 4 ordem.

A minha intenção inicial é fazer um programa que, a partir das condições iniciais, calcule a força na partícula 1 devido a 2 e 3, assim descobrindo a sua aceleração e a sua trajetória durante um intervalo pequeno de tempo, o mesmo será feito para 2 e 3. Então, tendo a posição de $\vec{r}_1(t+dt)$, $\vec{r}_2(t+dt)$, $\vec{r}_3(t+dt)$; o procedimento se repetirá. O objetivo é que após n interações tenhamos a descrição da orbital em um intervalo de tempo significativo.

1.4 runge kutta de quarta ordem

Seja um sistema de equações diferenciais com valor inicial

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) = y_{n,0} \end{cases} \quad (5)$$

podemos encontrar uma aproximação numérica para o mesmo através de

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2 \frac{h}{2}\right)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3 h)$$

1.5 explicação do código

O código é composto por três partes. A parte da resolução numérica, feita em fortran 95, tem como objetivo pegar as condições iniciais de um arquivo "entrada.txt" calcular as orbitas dos objetos e escrever os resultados em "resultados.txt". O segundo programa, este em python, tem como função usar os dados gerados pelo programa em fortran para produzir os gráficos. Já o terceiro feito em JavaScript foi usado para produzir algumas animações referentes ao movimento dos objetos.

O meu objetivo enquanto escrevia o código era mantê-lo o mais genérico possível, assim caso queira usá-lo para resolver um outro sistema de equações diferenciais, o número de mudanças a serem feitas serão mínimas. Essas alterações consistem basicamente em mudar as funções existentes em subroutine.

2 resultados e análise de dados

2.1 resultados

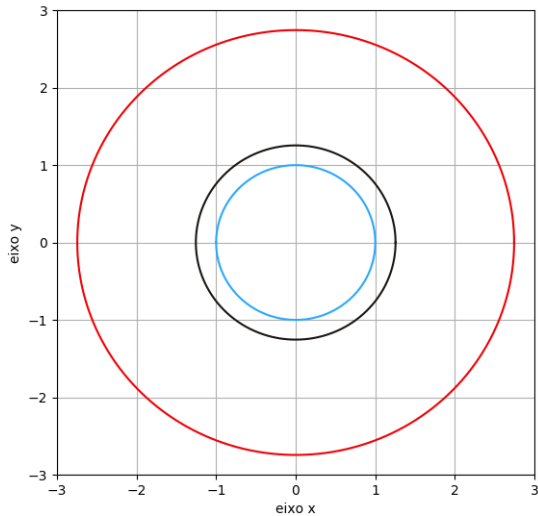


Figure 1: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/bJTuIIqZ>

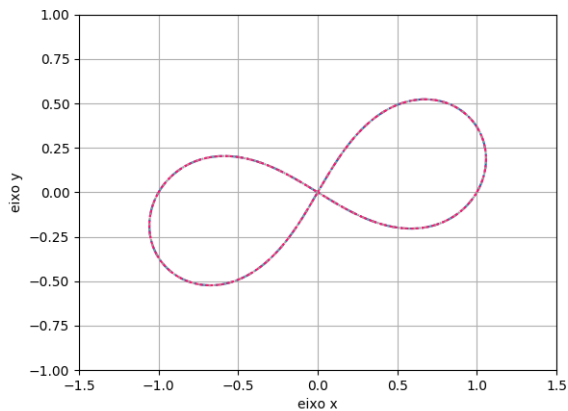
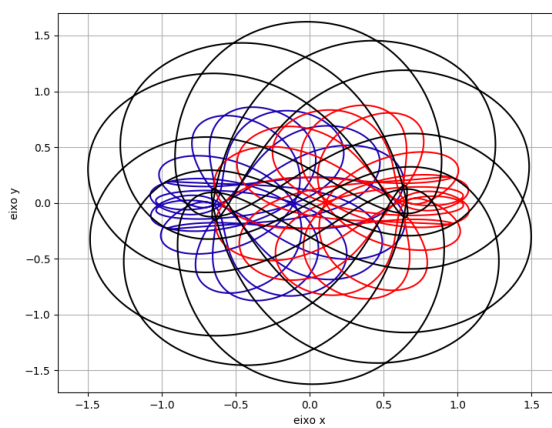
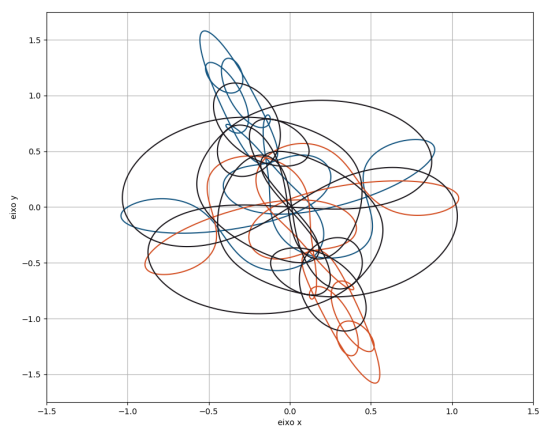
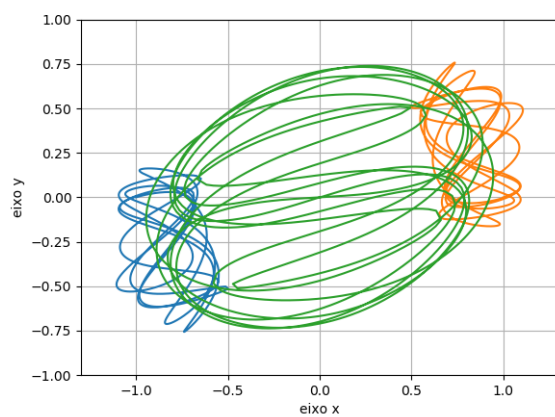
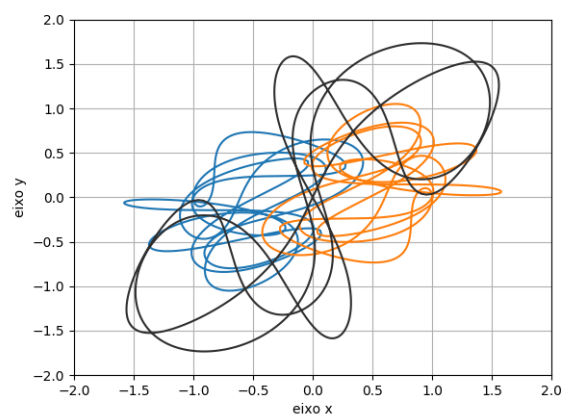
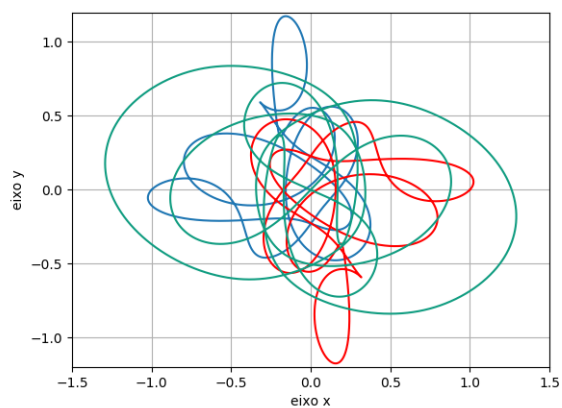
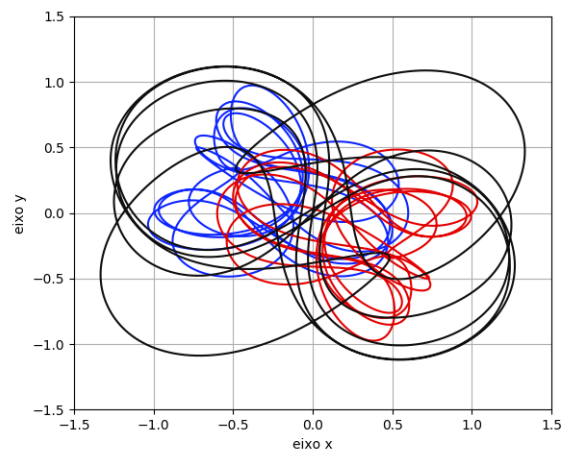


Figure 2: https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/9P_W_E09

A primeira imagem é a solução do problema de três corpos obtida em 1763, por Leonhard Euler [3]. A outra é a solução em oito, obtida numericamente com o auxílio computacional por Cristopher Moore, em 1993 [4], e comprovada pouco tempo depois pelos matemáticos Alain Chenciner e Richard Montgomery [2].

A seguir algumas orbitas cujas condições iniciais foram obtidas em [1].



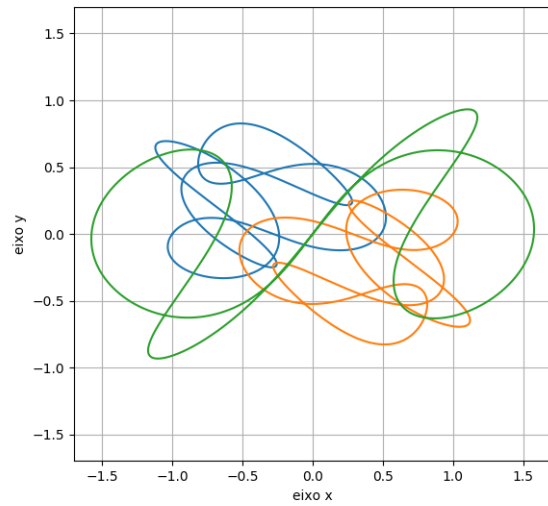


Figure 3: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/mmKXya9x>

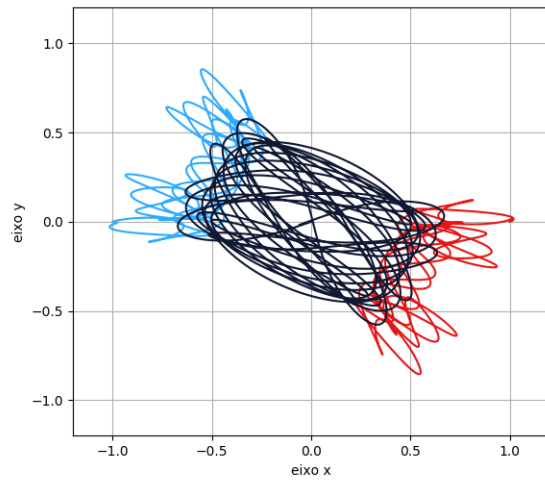


Figure 4: https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/l_DgLy_i

Figure 5: https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/NlpjJj_x

Figure 6: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/pz5hbB9v>

Figure 7: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/WXWM16ow>

Figure 8: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/vXuAw84s>

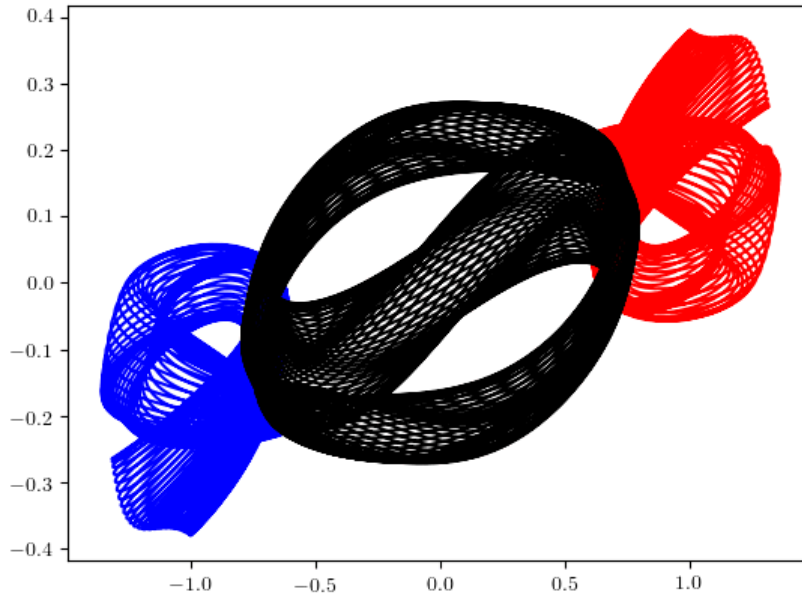
Figure 9: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/j91lxyaY>

Figure 10: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/A8qEBvkt>

Segue o código que gerou as animações: <https://editor.p5js.org/mackhyuuga/sketches/cpap5p2Z>

2.2 análise de dados

Os resultados foram bastante satisfatórios, no caso das três orbitas concêntricas 2.1 por exemplo foi facil analisar a incerteza das posições uma vez que os raios dos circulos deveriam se manter constante e de fato se mentiveram com um erro relativo máximo de 2% ao longo de 17.1655 segundo, tempo necessário para que o objeto completasse uma volta. Esse erro pode ser explicado com base nas condições iniciais pois o sistema é bastante sensível à esses valores e sua precisão, esses detalhes são discutidos em maior profundidade no artigo que estou usando como base [6]. Para finalizar deixo essa que foi a imagem mais bela que consegui produzir com o sistema de três corpos.



References

- [1] Movies of the periodic planar collisionless three-body orbits with unequal mass in real space or on shape sphere. <http://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body-unequal-mass-movies.htm>. 09 fev. 2020.
- [2] Alain Chenciner and Richard Montgomery. Mathematics department, princeton university. *Annals of Mathematics*, 152:881–901, 2000.
- [3] Leonhard Euler. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 144–151, 1767.
- [4] Christopher Moore. Braids in classical gravity. *Phys. Rev. Lett*, 70(24):3675–3679, 1993.
- [5] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor: (vol. 2)*, volume 394. Editora Blucher, 2013.
- [6] Luciano JB Quaresma and Manuel E Rodrigues. Coreografias no problema de três corpos restrito. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(2), 2019.