problema dos três corpos

Allison Eduardo de Sousa Bonfim
mackhyuuga@hotmail.com

20/02/2019

Sumário

1 Descrição do código

1.1 Resumo

O problema dos três corpos consiste na análise da dinâmica de objetos puntiformes interagindo mutuamente através da força gravitacional. Ao longo de mais de três séculos, o estudo deste tipo de sistema levou ao desenvolvimento e aprimoramento de diversas técnicas matemáticas, tanto analíticas quanto numéricas. Este trabalho terá como objetivo desenvolver e discutir este tipo de problema e seus resultados.

1.2 Descrição do problema físico

O problema consiste em descrever o movimento de três partículas interagindo entre si por força gravitacional. Sejam três massas m_1, m_2 e m_3 no $\mathbb{R}^2$ cujas posições serão indexadas pelos vetores $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r_3}$. Pelas leis de Newton e pelo princípio da superposição, podemos chegar nas seguintes equações diferenciais de segunda ordem.

$$m_1\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r_{12}}|^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1}) + \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r_{13}}|^3}(\vec{r_3}-\vec{r_1}) \tag{1}$$

$$m_2\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \frac{Gm_2m_3}{|\vec{r_{23}}|^3}(\vec{r_3}-\vec{r_2}) + \frac{Gm_2m_1}{|\vec{r_{21}}|^3}(\vec{r_1}-\vec{r_2}) \tag{2}$$

$$m_3\frac{d^2\vec{r_3}}{dt^2} = \frac{Gm_3m_2}{|\vec{r_{32}}|^3}(\vec{r_2}-\vec{r_3}) + \frac{Gm_3m_1}{|\vec{r_{31}}|^3}(\vec{r_1}-\vec{r_3}) \tag{3}$$

sendo G a constante da gravitação universal, ao longo desse trabalho assumirei que $G = 1\frac{Nm^2}{kg^2}$, e $\vec{r_{ij}} = \vec{r_i} - \vec{r_j}$.

Ao invés de se trabalhar com essas três equações diferenciais de segunda ordem, é vantajoso fazer $\vec{v_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt}$ e conseguentimente $\frac{d\vec{v_i}}{dt} = \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2}$; obtendo, assim, seis equações vetoriais diferenciais de primeira ordem ou doze equações escalares. As equações referentes a m_1 se encontram abaixo e as outras são para m_2 e m_3 são análogas:

$$\begin{cases} \frac{dv_{1x}}{dt} = \frac{m_2}{|\vec{r_{12}}|^3}(x_2-x_1) + \frac{m_3}{|\vec{r_{13}}|^3}(x_3-x_1) \\ \frac{dr_{1x}}{dt} = v_{1x} \\ \\ \frac{dv_{1y}}{dt} = \frac{m_2}{|\vec{r_{12}}|^3}(y_2-y_1) + \frac{m_3}{|\vec{r_{13}}|^3}(y_3-y_1) \\ \frac{dr_{1y}}{dt} = v_{1y} \\ \end{cases} \tag{4}$$

As definições apresentadas também podem ser usadas, com algumas mudanças, para corpos cujas dimensões não sejam desprezíveis. Para o caso de um distribuição esfericamente simétrica, pode-se aplicar as equações apresentadas supondo que toda a massa está concentrada em seu centro. Essa conclusão foi obtida por Newton em 1685 e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

1.3 Métodos e análise numérica

Foi provado por Poincaré em 1980 que este problema é insolúvel por quadratura, assim sendo, são somente possíveis séries de aproximações. O método numérico escolhido para resolver as equações diferenciais foi o Runge Kutta de quarta ordem.

A minha intenção inicial é fazer um programa que, a partir das condições iniciais, calcule a força na partícula 1 devido a 2 e 3, assim descobrindo a sua aceleração e a sua trajetória durante um intervalo pequeno de tempo; o mesmo será feito, simultaneamente, para 2 e 3. Então, tendo a posição de $\vec{r_1}(t+dt)$, $\vec{r_2}(t+dt)$, $\vec{r_3}(t+dt)$; o procedimento se repetirá de tal forma que após n repetições tenhamos a descrição da orbital no um intervalo de tempo desejado.

1.4 Runge Kutta de quarta ordem

Seja um sistema de equações diferenciais com valor inicial especificado

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\, y1\,, y2\,, ...,\, yn), & y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2' = f_2(x,\, y1\,, y2\,, ...,\, yn), & y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,\, y1\,, y2\,, ...,\, yn), & y_n(x_0) = y_{n,0} \end{cases} \tag{5}$$

podemos encontrar uma aproximação numérica para o mesmo atráves de

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1\frac{h}{2}) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2\frac{h}{2}) \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3 h) \end{aligned}$$

1.5 Explicação do código

O código é composto por três partes: A parte da resolução numérica feita em fortran 95 tem como objetivo pegar as condições iniciais de um arquivo "entrada.txt" calcular as órbitas dos objetos e escrever os resultados no arquivo "resultados.txt". O segundo programa, este em python, pega os dados gerados pelo programa em fortran para produzir os gráficos. E o terceiro feito em JavaScript será usado para produzir algumas animações referentes ao movimento dos objetos.

O meu objetivo enquanto escrevia o código era mantê-lo o mais genérico possível, assim caso queira usá-lo para resolver um outro sistema de equações diferenciais o número de mudanças a serem feitas serão mínimas. Essas alterações consistem basicamente em mudar as funções existentes em subroutine.

2 Resultados e análise de dados

2.1 Resultados

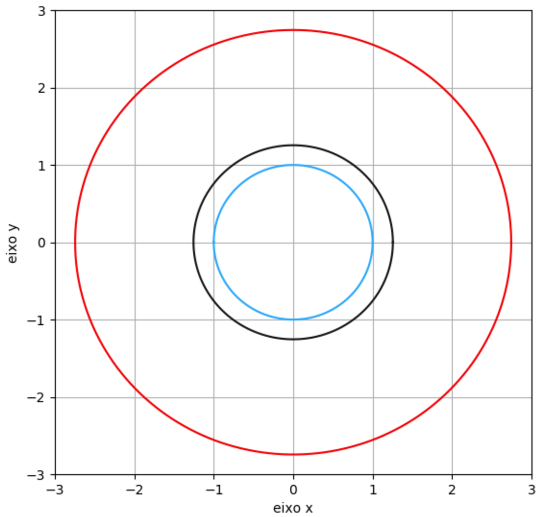


Figura 1: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/bJTuIIqZ`

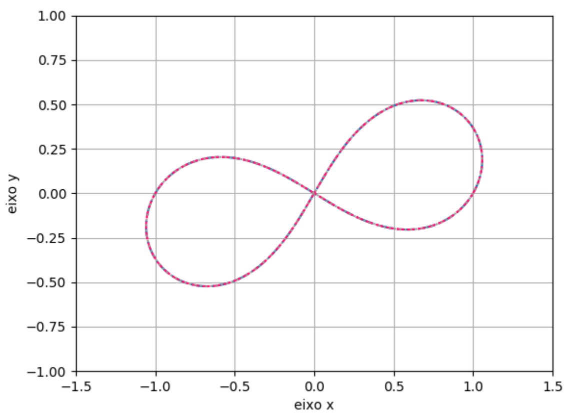
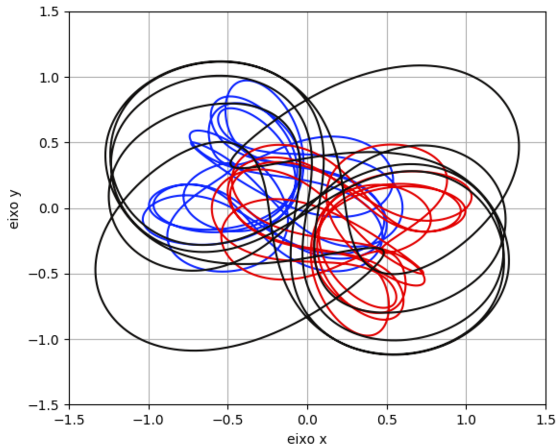
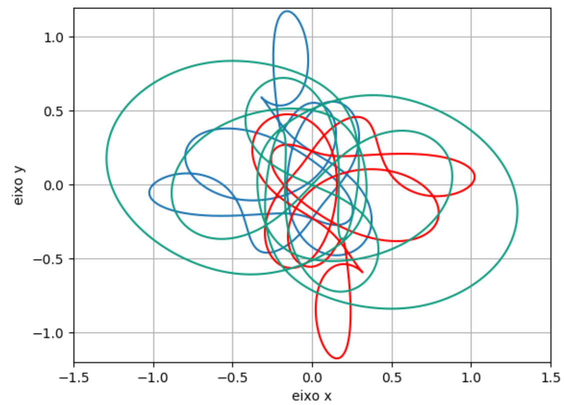


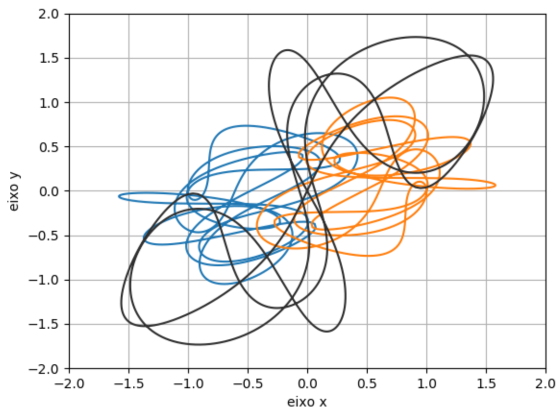
Figura 2: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/9P_W_EO9`

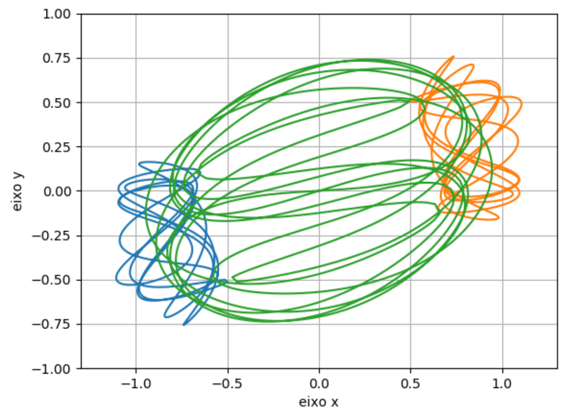
A primeira imagem é a solução do problema de três corpos obtida em 1763, por Leonhard Euler [3]. A outra é a solução em oito, obtida numericamente com o auxílio computacional por Cristopher Moore, em 1993 [4], e comprovada analiticamente pouco tempo depois pelos matemáticos Alain Chenciner e Richard Montgomery [2].

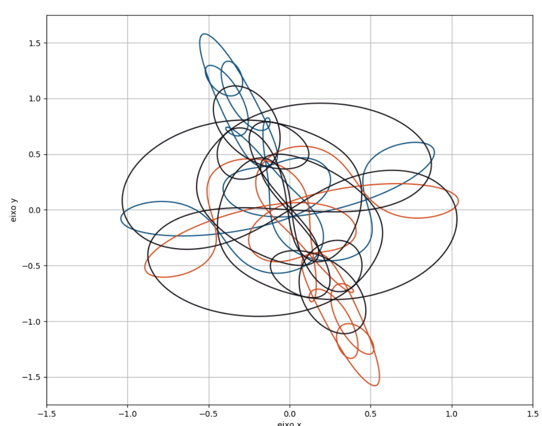
A seguir algumas orbitas cujas condições iniciais foram adquiridas em [1].

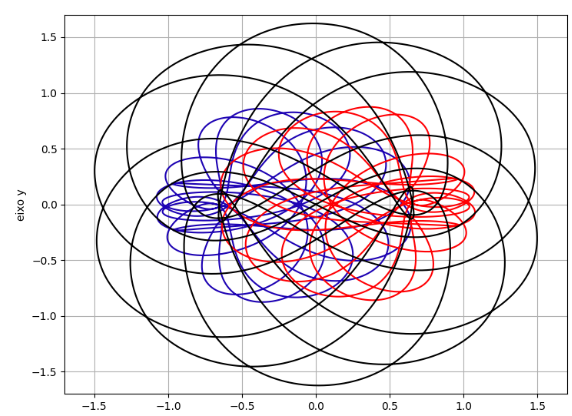

eixo y
eixo x
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5

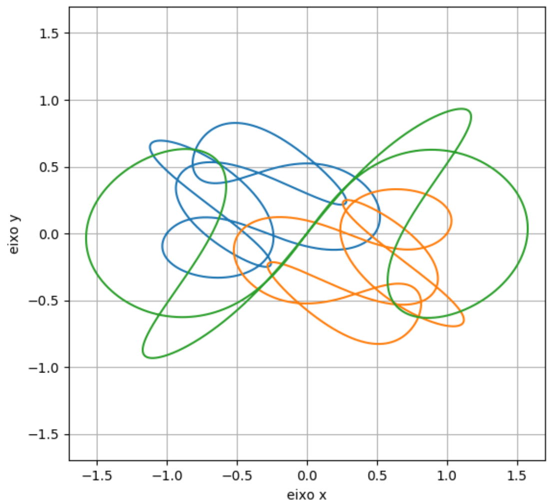

eixo y
eixo x
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5


eixo y
eixo x
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0 −1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0


eixo y
eixo x
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0


eixo y
eixo x


eixo y
eixo x
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5 −1.0 −0.5 0.0 0.5 1.0 1.5



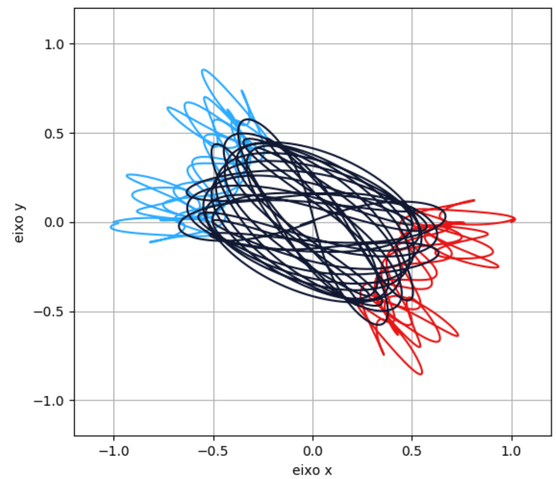


Figura 3: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/mmKXya9x`

Figura 4: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/l_DgLy_i`

Figura 5: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/NlpjJj_x`

Figura 6: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/pz5hbB9v`

Figura 7: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/WXWM16ow`

Figura 8: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/vXuAw84s`

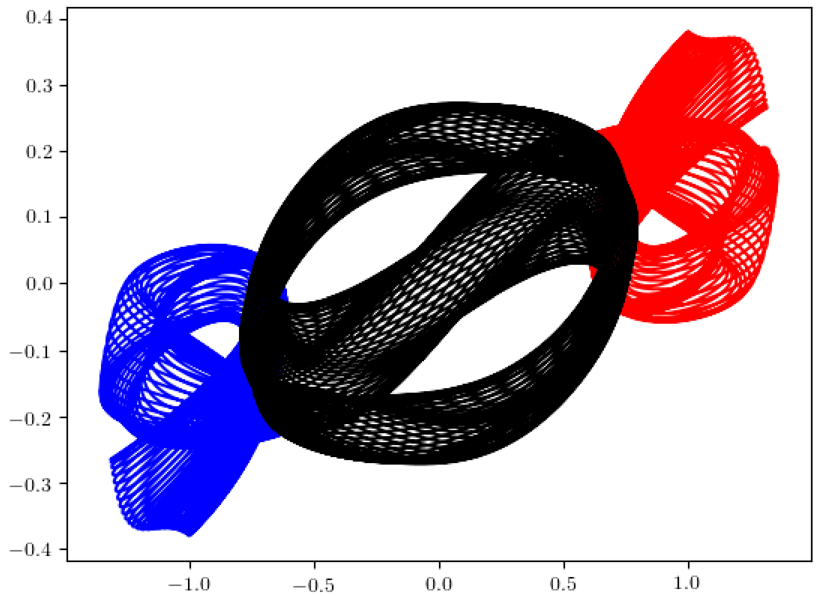
Figura 9: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/j91lxyaY`

Figura 10: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/present/A8qEBvkt`

Segue o código que gerou as animações: `https://editor.p5js.org/mackhyuuga/sketches/cpap5p2Z`

2.2 análise de dados

Os resultados foram bastante satisfatórios, no caso das três orbitas concêntricas 2.1 por exemplo foi facil analisar a incerteza das posições uma vez que os raios dos circulos deveriam se manter constante e de fato se mentiveram com um erro relativo máximo de 2% ao longo de 17.1655 segundo, tempo necessário para que o objeto completasse uma volta. Esse erro pode ser explicado com base nas condições iniciais pois o sistema é bastante sensível à esses valores e sua precisão, esses detalhes são discutidos em maior profundidade no artigo que estou usando como base [6]. Para finalizar deixo essa que foi a imagem mais bela que consegui produzir com o sistema de três corpos.



Referências

[1] Movies of the periodic planar collisionless three-body orbits with unequal mass in real space or on shape sphere. `http://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body-unequal-mass-movies.htm`. 09 fev. 2020.

[2] Alain Chenciner and Richard Montgomery. Mathematics department, princeton university. *Annals of Mathematics*, 152:881–901, 2000.

[3] Leonhard Euler. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 144–151, 1767.

[4] Christopher Moore. Braids in classical gravity. *Phys. Rev. Lett*, 70(24):3675–3679, 1993.

[5] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor: (vol. 2)*, volume 394. Editora Blucher, 2013.

[6] Luciano JB Quaresma and Manuel E Rodrigues. Coreografias no problema de três corpos restrito. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(2), 2019.