



Kandidaatintutkielma
Teoreettinen fysiikka

T-kvarkkien sidotuista tiloista

Matias Paloranta
2016

Ohjaaja: Kimmo Tuominen
Tarkastaja: Kimmo Tuominen

HELSINGIN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

PL 64 (Gustaf Hällströmin katu 2)
00014 Helsingin yliopisto

Sisältö

1	Johdanto	1
2	T-kvarkkien väliset vuorovaikutukset	2
2.1	Sidottu tila $6t + 6\bar{t}$	2
2.2	Arvio sidosenergialle	2
3	Variaatiomenetelmä	4
3.1	Määritelmä	4
3.2	Sidosenergia variaatiomenetelmällä	5
4	Hartree-Fock	9
5	Tulokset	11
5.1	Raskaampien fermionien sidotut tilat	12
6	Johtopäätökset	14

1 Johdanto

Nykyfysiikan suuri haaste on löytää perustavanlaatuinen teoria standardimallin laajennukseksi, nk. ”kaiken teoria”. Hiukkasfysiikan standardimalli selittää kuitenkin hyvin suuren osan kokeellisista havainnoista, eikä toistaiseksi ole havaittu vakuuttavia viittauksia standardimallin ulkopuolisista hiukkasista tai niistä koostuvista tiloista. Motivaatio uudesta fysiikasta onkin suureksi osin peräisin kosmologiasta ja tähtitieteestä. Tiedetään, että standardimalli ennustaa liian pienen baryoniluvun alkuräjähdyksestä. Niin sanottu ”see-saw”-malli voisi luonnollisella tavalla selittää tämän baryoniasymmetrian ja samalla ottaa huomioon neutriinon massat ja sekoittumisen. Baryoniasymmetrian lisäksi toinen tutkijoita askarruttava ongelma on pimeä aine, joka vuorovaikuttaa tavallisen aineen kanssa vain gravitaation välityksellä. Eräs esitetty ratkaisu näihin ongelmiin on supersymmetristen hiukkasten olemassaolo.

Standardimallissa on muutamia hienosäätöongelmia: kosmologisen vakion Λ ja vahvaa CP-rikkoo kuvaavan parametrin θ_{QCD} pienet arvot, Yukawa-kytkentöjen pieni hierarkiaongelma, sekä sähköheikon skaalan ja Planckin skaalan suuri hierarkiaongelma. Nämä ongelmat eivät kuitenkaan sinänsä vaadi muutoksia standardimalliin. *A priori* ne voitaisiin ratkaista yleisellä hienosäätöperiaatteella. Postuloidaan siis ns. MPP-periaate (engl. *Multiple Point Principle*, ks. artikkeli [4]): on olemassa monta vakuumia, joilla on sama kosmologinen vakio. Tämä kosmologinen vakio on lisäksi lähellä nollaa. Vaatimalla, että vakuumien energiatiheys on (lähes) yhtäsuuri, MPP-periaate antaa ratkaisun, miksi sähköheikko energiaskaala on niin pieni verrattuna Planckin skaalaan [4].

Tässä tutkielmassa tutkitaan yhtä näistä degeneroituneista vakuumeista, joka syntyy 6 t -kvarkin ja 6 t -antikvarkin muodostaman eksoottisen mesonin kondensaatiosta. Sidosvoimat kvarkkien välille syntyvät virtuaalisista Higgsin bosoneista, joita kvarkit vaihtavat keskenään. Tällaista fermionikentän (kvarkkien) ja skalaarikentän (Higgsin bosonin) kytkeytymistä kuvaa Yukawa-vuorovaikutus ja Yukawan potentiaali. Coulombin potentiaali on erikoistapaus Yukawan potentiaalista, jossa vuorovaikutuksen välittäjähiukkanen on massaton. Massiivisen välittäjähiukkasen tapauksessa vuorovaikutuksella on äärellinen kantama, joka on kääntäen verrannollinen hiukkasen massaan. Standardimallissa Yukawa-vuorovaikutusta käytetään kuvaamaan Higgsin kentän kytkeytymistä fermionikenttiin, jotka *spontaanin symmetriarikon* kautta saavat massan, joka on verrannollinen Higgsin kentän tyhjiöodotusarvoon. Tätä kutsutaan Higgsin mekanismiksi.

Jotta edellä mainittu kondensaatio voisi tapahtua, on kvarkkien sidosenergian oltava riittävän suuri. Sidosenergiaa tutkitaan ensiksi hyvin karkealla vetyatomiapproksimaatiolla, jossa Yukawan potentiaali on korvattu efektiivisesti Coulombin potentiaalilla. Tästä siirrytään monihiukkasongelmiin paremmin soveltuviin menetelmiin, jotka antavat tarkemman arvion perustilan energialle. Ensiksi variaatiomenetelmään ja tämän jälkeen Hartree-Fock-teoriaan. Lopuksi tutkitaan lyhyesti hypoteettisia raskaampia fermioneja, joiden kytkentä Higgsin kenttään olisi vielä vahvempi ja sidosvoimat suuremmat.

2 T-kvarkkien väliset vuorovaikutukset

T -kvarkit ovat fermioneja, joten ne saavat massansa Higgsin mekanismin avulla. Vuorovaikutusta Higgsin bosonin kanssa voidaan kuvata Yukawan potentiaalilla, joka redusoituu efektiivisesti Coulombin potentiaaliksi, kun välittäjähiukkanen on massaton. Seuraavaksi tutkitaan t -kvarkeista koostuvaa systeemiä erityisesti jälkimmäisessä tapauksessa. Tässä tutkielmassa käytetään luonnollisia yksiköitä $\hbar = c = 1$.

2.1 Sidottu tila $6t + 6\bar{t}$

Tutkitaan nyt 6 t -kvarkin sekä 6 t -antikvarkin muodostamaa systeemiä. Virtuaalisen Higgsin bosonin vaihto kahden kvarkin qq , kahden antikvarkin $\bar{q}\bar{q}$ tai kvarkin ja antikvarkin $q\bar{q}$ välillä muodostaa attraktiivisen vuorovaikutuksen kaikissa tapauksissa [4]. Higgsin kentän välityksellä tapahtuvaa t -kvarkin ja t -antikvarkin vuorovaikutusta voidaan efektiivisesti kuvata Yukawan potentiaalin avulla. Tällöin parin välistä sidosenergiaa voidaan karkeasti arvioida Bohrin kaavalla atomin energiatasolle [4]. Systeemin kokonaissidosenergia saadaan summaamalla kaikkien kvarkki- tai antikvarkkiparien yli.

T -kvarkin vuorovaikutukset Higgsin bosonin kanssa ovat verrannollisia t -kvarkin suureen massaansa $m_t = 172,6 \pm 1,4$ GeV ja Yukawa-kytkentään $g_t \simeq 0,989 \pm 0,008$ [1]. Koska parien sidosenergia kasvaa hiukkasten lukumäärän N mukaan kuten $\frac{N(N-1)}{2}$, kun taas kvarkkien kokonaislepomassa Nm_t kasvaa kuten N [4], lisäämällä yhteen enemmän $t\bar{t}$ -pareja voisi kokonaissidosenergia jopa ylittää kvarkkien lepomassan ja muodostaa takyonisen sidotun tilan ($(m_t^{kok})^2 < 0$). Tällöin näistä hiukkasista voisi muodostua Bose-Einstein-kondensaatti ja kokonaan uusi faasi. Paulin kieltoäännön mukaan kuitenkin vain rajoitettu määrä t - ja \bar{t} -kvarkkeja voi muodostaa perustilan 1s-orbitaalin, jolle sidosenergia kvarkkia kohden on suurin [2]. Yhdellä t -kvarkilla on kaksi mahdollista spintilaa ja kolme mahdollista väritilaa. Tämä tarkoittaa, että $2 \times 3 = 6$ t -kvarkkia voi muodostaa 1s-orbitaalin yhdessä 6 \bar{t} -kvarkin kanssa. Kokonaisuudessaan 1s-orbitaalin muodostaa siis $6 + 6 = 12$ hiukkasta. Mikäli $t\bar{t}$ -pareja lisätään, joutuu osa kvarkeista eri orbitaalille ja sidosenergia kvarkki kohden pienenee [4].

2.2 Arvio sidosenergialle

Arvioidaan aluksi yhden kvarkin sidosenergiaa suhteessa muiden 11 kvarkin muodostamaan yksittäiseen hiukkaseen ("ytimeen"). Oletetaan, että systeemin säde on riittävän pieni verrattuna Higgsin bosonin Comptonin aallonpituuteen, jolloin voidaan käyttää Bohrin kaavaa yksielektronisen atomin sidosenergialle. Nyt tarvitsee korvata sähkövakaus e t -kvarkin Yukawa-kytkennällä $\frac{g_t}{\sqrt{2}}$. Tässä käytetään normalisaatiota, jossa Higgsin kentän kineettisen termin ϕ_H ja t -kvarkin Yukawa-vuorovaikutuksen antaa seuraava Lagrangen tiheys [2]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \phi_H D^\mu \phi_H + \frac{g_t}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_{tL} \Psi_{tR} \phi_H + h.c.$$

Tässä tapauksessa kahden kvarkin välistä attraktiivista vuorovaikutusta kuvaa potentiaali [2]:

$$V(r) = -\frac{g_t^2/2}{4\pi r} \quad (1)$$

Helposti nähdään, että attraktiota parien tt , $t\bar{t}$ ja $\bar{t}t$ välillä kuvaa sama potentiaali (1). Tästä huomataan konkreettisesti, että Yukawan potentiaaliin $\propto e^{-mr}/r$ kuuluva eksponenttikerroin puuttuu, mikä implikoi massatonta välittäjähiukkasta. Siis tässä approksimaatiossa Higgsin bosonin massa on $m_H = 0$.

Nyt voidaan arvioida yhden kvarkin sidosenergiaa jäljelle jäävien $Z = 11$ kvarkin muodostamaan “yttimeen” käyttäen Bohrin kaavaa

$$\begin{aligned} E_n &= -\left(\frac{Zg_t^2/2}{4\pi}\right)^2 \frac{m_t^{red}}{2n^2} \\ &= -\left(\frac{Zg_t^2/2}{4\pi}\right)^2 \frac{Zm_t}{2(Z+1)n^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

missä $m_t^{red} = \frac{Zm_t}{Z+1}$ on t -kvarkin redusoitu massa. Sijoittamalla $Z = 11$ sekä perustilalle $n = 1$, saadaan

$$E_1 = -\left(\frac{11g_t^2/2}{4\pi}\right)^2 \frac{11m_t}{24}. \quad (3)$$

Karkeasti arvioituna systeemin kokonaissidosenergia saadaan kertomalla yhtälö (3) kvarkkien lukumäärällä ja jakamalla tulos kahdella, jotta parien kontribuutiota ei otettaisi huomioon kahta kertaa:

$$\begin{aligned} E_{sidos} &= 12 \times \frac{1}{2} \times E_1 \\ &= 6 \left(\frac{11g_t^2/2}{4\pi}\right)^2 \frac{11m_t}{24}. \end{aligned} \quad (4)$$

Edellä on otettu huomioon vain t -kanavan kautta tapahtuva Higgsin vaihto kvarkkien välillä. Ottamalla huomioon myös u -kanavan kautta tapahtuva vaihto [4], kasvaa kokonaissidosenergia kertoimella $(16/11)^2$, jolloin saadaan

$$E_{sidos} = \left(\frac{11g_t^4}{\pi^2}\right) m_t. \quad (5)$$

Gluonien vaihto kvarkkien välillä kasvattaa kokonaissidosenergiaa [3] vielä kertoimella $(3/2)^2$ ja lopulliseksi tulokseksi saadaan:

$$E_{sidos} = \left(\frac{99g_t^4}{4\pi^2}\right) m_t. \quad (6)$$

On huomioitava, että edellä tehty tarkastelu on *epärelativistinen*. Myös s -kanavan mukainen Higgsin vaihto sekä kvarkkien vuorovaikutukset W - ja Z -bosonien kanssa on jätetty

huomiotta. Saatu sidosenergia on $\simeq 20\%$ kvarkkien massasta $12m_t$. Edellä käytetty approksimaatio pätee hyvin vetyatomin kaltaiselle atomille, jolla on attraktiivinen ydin, mutta tutkitun systeemin varaus on todellisuudessa levittäytynyt koko systeemin tilavuudelle. Niinpä seuraavaksi tutkitaan sidosenergiaa tarkemmilla menetelmillä, variaatiomenetelmällä sekä Hartree-Fock-yhtälöillä.

3 Variaatiomenetelmä

Variaatiomenetelmä on kvanttimekaniikassa käytetty keino löytää approksimaatioita tutkitun systeemin perustilalle. Tarkoituksena on arvata yhdestä tai useammasta varioitavasta parametrasta riippuva yritefunktio, ja valita parametrien arvot siten, että energian odotusarvo on mahdollisimman pieni. Tällä tavalla saatu aaltofunktio on approksimaatio perustilan aaltofunktiolle, jonka energian odotusarvo on yläraja perustilan *todelliselle* energialle. Näin voidaan laskea muun muassa molekyyliorbitaaleja.

3.1 Määritelmä

Olkoon H ajasta riippumaton Hamiltonin funktio, jolla on ominaisarvot E_n ja ominaisvektorit $|\psi_n\rangle$, jotka puolestaan toteuttavat *stationäärisen Schrödingerin yhtälön*

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle.$$

Tällöin mille tahansa mielivaltaiselle Hilbertin avaruuden ket-vektorille $|\psi\rangle$ pätee

$$\langle H \rangle \equiv \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \geq E_0, \quad (7)$$

missä E_0 on perustilan energia. Yhtäsuuruus on voimassa, mikäli $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle$.

Todistus on melko yksinkertainen. $|\psi\rangle$ ilmaistuna H :n ominaistilojen $|\psi_n\rangle$ avulla on

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle,$$

missä $|\psi_n\rangle$ ovat *ortonormaaleja* eli pätee $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$. Nyt

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \sum_{n,m} c_n^* c_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle \\ &= \sum_{n,m} c_n^* c_m \delta_{nm} \\ &= \sum_n |c_n|^2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\langle \psi | H | \psi \rangle &= \sum_{n,m} c_n^* c_m \langle \psi_n | H | \psi_m \rangle \\
&= \sum_{n,m} c_n^* c_m E_n \delta_{nm} \\
&= \sum_n E_n |c_n|^2.
\end{aligned}$$

Koska $|c_n|^2 \geq 0$ ja $E_n \geq E_0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} &= \frac{\sum_n E_n |c_n|^2}{\sum_n |c_n|^2} \\
&\geq \frac{E_0 \sum_n |c_n|^2}{\sum_n |c_n|^2} = E_0.
\end{aligned}$$

Tästä myös huomataan, että yhtäsuuruus on voimassa vain, jos $c_0 = 1$ ja $c_n = 0, n > 0$, jolloin $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle$.

E_0 on siis $\langle H \rangle$:n alaraja ja E_0 :aa voidaan approksimoida minimoimalla $\langle H \rangle$ niiden parametrien suhteen, joista $|\psi\rangle$ riippuu. Käytetään tätä tietoa hyväksi seuraavissa laskuissa.

3.2 Sidosenergia variaatiomenetelmällä

Oletetaan, että moneen kappaleeseen ja hiukkasten repulsioon liittyvät korjaukset ovat pieniä, $\sim 1/N$, missä $N = 12$ on t -kvarkkien lukumäärä. Tästä saadaan sidosenergian tarkkuudeksi $\sim 10\%$ [1]. Heikolle kytkennälle epärelativistinen approksimaatio on pätevä. T -kvarkkien vuorovaikutusta Higgsin bosonin välityksellä kuvaa seuraava Hamiltonin funktio [1]:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_t} + \sum_{1 \leq i < k}^N V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|), \quad (8)$$

missä

$$V(r) = -\frac{\alpha_H}{r} e^{-m_H r}. \quad (9)$$

Tässä m_H on Higgsin bosonin massa ja kerroin α_H kuvaa vuorovaikutuksen voimakkuutta. Kappaleessa 2 saatiin efektiiviseksi Coulombin kytkennäksi (1) t -kvarkkien välillä $\alpha_H = g_t^2/(8\pi)$. Ottamalla s - ja u -kanavat huomioon, kasvaa vuorovaikutuksen voimakkuus kaksinkertaiseksi¹ [1]. Oletetaan siis, että

$$\alpha_H \simeq \frac{g_t^2}{4\pi} \approx \frac{1}{4\pi}, \quad (10)$$

¹Tehdään tämä oletus yksinkertaisuuden vuoksi. Kuten kappaleessa 2 todettiin, vuorovaikutus ei todellisuudessa kasva aivan kaksinkertaiseksi. Tästä huolimatta käy ilmi, että näinkään suurella kertoimella systeemi ei ole sidottu.

missä käytettiin jo mainittua arvoa $g_t \simeq 0,989$.

Oletetaan nyt, että systeemin aaltofunktio Ψ voidaan kirjoittaa N t -kvarkin orbitaalien $\psi(r)$ tulona, eli

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \psi_1(r_1)\psi_2(r_2)\dots\psi_N(r_N).$$

Jokainen kvarkki on perustilallaan, joten edellinen sievenee muotoon

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \psi(r_1)\psi(r_2)\dots\psi(r_N),$$

missä $\psi(r_i)$ olkoon perustilan aaltofunktio yksittäiselle t -kvarkille. Tehdään seuraavaksi perustilan aaltofunktioksi yrite

$$\psi(r_i) = Ae^{-qr_i},$$

missä q on varioitava parametri. Kerroin A saadaan ratkaistua normituksesta:

$$\begin{aligned} \int d^3r |\psi(r_i)|^2 &= 1 \\ \Rightarrow A^2 4\pi \underbrace{\int_0^\infty r^2 e^{-2qr_i} dr}_{=\frac{1}{4q^3}} &= 1 \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\frac{q^3}{\pi}} \\ \Rightarrow \psi(r_i) &= \sqrt{\frac{q^3}{\pi}} e^{-qr_i}. \end{aligned} \tag{11}$$

Edellä käytettiin hyväksi tunnettua kaavaa

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}.$$

Nyt energian odotusarvo on

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \langle \Psi | H | \Psi \rangle \\ &= \int d^3r_1 \dots d^3r_N \psi^*(r_N) \dots \psi^*(r_1) \left(\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_t} + \sum_{1 \leq i < k}^N V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) \right) \psi(r_1) \dots \psi(r_N). \end{aligned} \tag{12}$$

Koska p_i operoi hiukkaseen i , antavat integraalit muiden hiukkasten koordinaattien yli tulokseksi yhden. Summat p_i :n ja V :n yli redusoituvat yhden ja kahden hiukkasen odotusarvoiksi, jolloin $\langle H \rangle$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle H \rangle = \sum_{i=1}^N \int d^3r_i \psi^*(r_i) \frac{p_i^2}{2m_t} \psi(r_i) + \sum_{1 \leq i < k}^N \int d^3r_i d^3r_k V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|) |\psi(r_i)|^2 |\psi(r_k)|^2. \tag{13}$$

Jokaisen integraalin kontribuutio sidosenergiaan on yhtä suuri, joten summat voidaan avata. Käyttäen tuloksia

$$\sum_{i=1}^N = N,$$

$$\sum_{1 \leq i < k}^N = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{k-1} = \frac{1}{2} N(N-1),$$

sekä tietoa, että paikka-avaruudessa $p^2 = \nabla^2$, sievenee $\langle H \rangle$ muotoon

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{N}{2m_t} \int d^3r |\nabla \psi(r)|^2 + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3r d^3r' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2 \\ &= NK + \frac{1}{2} N(N-1)U, \end{aligned} \quad (14)$$

missä K ja U kuvaavat kineettistä- sekä potentiaalienergiaa (tässä järjestyksessä):

$$K = \frac{1}{2m_t} \int d^3r |\nabla \psi(r)|^2, \quad (15)$$

$$U = \int d^3r d^3r' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2. \quad (16)$$

Lasketaan ensin K sijoittamalla (11) yhtälöön (15):

$$\begin{aligned} \Rightarrow K &= \frac{1}{2m_t} \int d^3r \frac{q^3}{\pi} e^{-qr} \nabla^2 e^{-qr} \\ &= \frac{q^2}{2m_t} \underbrace{\int d^3r \frac{q^3}{\pi} e^{-2qr}}_{=1, \text{ normitus}} \\ &= \frac{q^2}{2m_t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Lasketaan seuraavaksi huomattavasti työläämpi U . Sijoitetaan yhtälöt (9) ja (11) yhtälöön (16):

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= -\frac{\alpha_H q^6}{\pi^2} \int d^3r d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-m_H(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)} e^{-2q(r+r')} \\ &= -\frac{\alpha_H q^6}{\pi^2} \int d^3r d^3r' \frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} - 2q(r+r') \right]}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Lasketaan integraali ensin r avaruudessa. Tällöin

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\alpha_H q^6}{\pi^2} \int d^3r' e^{-2qr'} I(r') \\ &= -\frac{4\alpha_H q^6}{\pi} \int_0^\infty r'^2 dr' e^{-2qr'} I(r'), \end{aligned} \quad (19)$$

missä

$$I(r') = \int d^3r \frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} - 2qr \right]}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}. \quad (20)$$

Olkoon r, θ_r, ϕ_r polaarikoordinaatit r avaruudessa. Valitaan symmetria-akseli r' :n suuntaan. Nyt $\theta_r = \theta$, jolloin

$$\begin{aligned} I(r') &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 dr \sin \theta_r d\theta_r d\phi_r \frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_r} - 2qr \right]}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_r}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi r^2 dr \sin \theta_r d\theta_r \frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_r} - 2qr \right]}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta_r}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Tehdään muuttujanvaihto $u = \cos \theta_r \Rightarrow du = -\sin \theta_r d\theta_r$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(r') &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr e^{-2qr} \int_{-1}^1 du \frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right]}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr e^{-2qr} \left(\frac{\exp \left[-m_H \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'u} \right]}{m_H r r'} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr e^{-2qr} \left(\frac{e^{-m_H |r-r'|} - e^{-m_H (r+r')}}{m_H r r'} \right) \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{-2qr}}{m_H r r'} \begin{cases} e^{-m_H (r-r')} - e^{-m_H (r+r')} & , r > r' \\ e^{-m_H (r'-r)} - e^{-m_H (r+r')} & , r < r' \end{cases} \\ &= \frac{2\pi}{m_H r'} \left[\int_0^{r'} r dr e^{-2qr} \left(e^{-m_H (r'-r)} - e^{-m_H (r+r')} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{r'}^\infty r dr e^{-2qr} \left(e^{-m_H (r-r')} - e^{-m_H (r+r')} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi e^{-(2q+m_H)r'} \left[4qe^{2qr'} + e^{m_H r'} (-4q - 4q^2 r' + m_H^2 r') \right]}{(m_H^2 - 4q^2)^2 r'}. \end{aligned} \quad (22)$$

Sijoittamalla yhtälö (22) yhtälöön (19), saadaan

$$U = -\frac{\alpha_H q^3 (20q^2 + 8qm_H + m_H^2)}{2(2q + m_H)^4}. \quad (23)$$

Tekemällä muuttujanvaihto $y = \frac{m_H}{2q}$, saadaan yhtälö (23) muotoon

$$U = -\frac{10}{16} \alpha_H q f(y), \quad (24)$$

missä

$$f(y) = \frac{1 + \frac{4y}{5} + \frac{y^2}{5}}{(1+y)^4}.$$

Sijoitetaan nyt yhtälöt (24) ja (17) yhtälöön (14), jolloin saadaan viimein

$$\langle H \rangle = N \frac{q^2}{2m_t} - \frac{5}{16} N(N-1) \alpha_H q f(y). \quad (25)$$

Kuten kappaleessa 2, jätetään Higgsin bosonin massa huomiotta, eli asetetaan $m_H = 0$. Tästä seuraa $y = 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Variaatioperiaatteen mukaisesti minimoidaan nyt $\langle H \rangle$ q :n suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} \left(N \frac{q^2}{2m_t} - \frac{5}{16} N(N-1) \alpha_H q \right) \\ &= N \frac{q}{m_t} - \frac{5}{16} N(N-1) \alpha_H \\ &= 0 \\ \Rightarrow q &= \frac{5}{16} (N-1) m_t \alpha_H, \end{aligned} \quad (26)$$

jolloin sidosnergiaksi saadaan

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \left(\frac{5}{16} (N-1) m_t \alpha_H \right)^2 \left(\frac{N}{2m_t} - \frac{N}{m_t} \right) \\ &= -k N(N-1)^2 \alpha_H^2 m_t, \end{aligned} \quad (27)$$

missä $k = 25/512$.

Systeemissä, jonka muodostavat $N = 12$ t -kvarkkia, sidosenergia on noin 4% kvarkkien massasta, $12m_t$. Saatu tulos on $\simeq 5$ kertaa pienempi kuin kappaleessa 2 käytetyssä vetyatomiapproksimaatiossa. Kvalitatiivisesti voidaan sanoa, että t -kvarkkiin vaikuttava efektiivinen varaus on pienempi kuin vastaava varaus vetyatomimallissa.

4 Hartree-Fock

Siirrytään nyt Hartree-Fock-menetelmään, joka määrää tarkemmin yksittäisen t -kvarkin aaltofunktion $\psi(r)$. Tarkoituksena on löytää sellaiset aaltofunktiot, jotka minimoivat systeemin sidosenergian. Periaate on sama kuin edellisessä kappaleessa tehdyssä laskussa, mutta nyt “varioitava parametri” on koko aaltofunktio $\psi(r)$.

Yleisesti Hartree-Fock-teoriassa systeemin aaltofunktion $\Psi(r_1, \dots, r_N)$ yritteenä toimii nk. *Slaterin determinantti*, joka ottaa huomioon fermionien antisymmetriset tilat. Tällöin energian odotusarvoon $\langle H \rangle$ tulee ylimääräinen vuorovaikutustermi. Tässä tapauksessa riittää kuitenkin kuvata systeemiä samalla tavalla kuin edellisessä kappaleessa [1], eli yritteenä toimii

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \psi(r_1) \psi(r_2) \dots \psi(r_N),$$

jolloin ongelma on huomattavasti yksinkertaisempi. Käyttämällä hyödyksi kappaleessa 3 johdettuja tuloksia (yhtälöt (14), (15) ja (16)), saadaan $\langle H \rangle$ muotoon

$$\langle H \rangle = \frac{N}{2m_t} \int d^3r |\nabla \psi(r)|^2 + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3r d^3r' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2.$$

Minimoidaan nyt systeemin sidosenergia. Variaatioperiaatteen mukaisesti

$$\begin{aligned}\delta(\langle \Psi | H | \Psi \rangle - E \langle \Psi | \Psi \rangle) &= \delta \left(\frac{N}{2m_t} \int d^3r |\nabla \psi(r)|^2 + \frac{1}{2} N(N-1) \int d^3r d^3r' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\psi(r)|^2 |\psi(r')|^2 \right. \\ &\quad \left. - E \int d^3r |\psi(r)|^2 \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

vastaa Schrödingerin yhtälöä. Varioimalla funktion $\psi^*(r)$ suhteen, saadaan yhtälö yksittäisen hiukkasen aaltofunktiolle $\psi(r)$ ja vastaavalle energialle E :

$$E\psi(r) = \left(-\frac{\nabla^2}{2m_t} + (N-1)W(r) \right) \psi(r), \quad (28)$$

missä

$$W(r) = \int d^3r' V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\psi(r')|^2. \quad (29)$$

Yhtälö (28) on *Hartree-Fock-yhtälö*² ja yhtälöä (29) kutsutaan *Hartreen potentiaaliksi*. Hartree-Fock-yhtälön ratkaiseminen analyyttisesti on usein mahdotonta, ja numeerisen ratkaisun löytäminen on nykyaikaisillekin tietokoneille haasteellinen tehtävä. Numeerinen ratkaisu koostuu pääosin seuraavista askelista:

1. Arvataan yksittäisen hiukkasen aaltofunktio $\psi(r)$.
2. Lasketaan Hartreen potentiaali hiukkaselle käyttäen kohdassa 1. arvattua aaltofunktiota.
3. Ratkaistaan Hartree-Fock-yhtälö käyttäen kohdassa 2. laskettua Hartreen potentiaalia.
4. Jos kohdasta 3. saadut aaltofunktiot eroavat kohdassa 1. arvatuista aaltofunktioista, käytetään uusia aaltofunktioina yrittäenä kohdassa 1.
5. Toistetaan kohdat 1.-4. kunnes aaltofunktiot ovat halutulla tarkkuudella yhtäsuuret.

Tästä iteratiivisesta ratkaisutavasta johtuen Hartree-Fock-teoriaa kutsutaan myös *itse-konsistentiksi keskimääräisen kentän approksimaatioksi*. Yhtälön (28) numeerinen ratkaisu on kohtuullisen suoraviivainen, mutta työläs. Tästä syystä sitä ei tässä tutkielmassa tarkemmin käsitellä.

²Usein kirjallisuudessa Hartree-Fock-yhtälössä on jo edellä mainittu Slaterin determinantista johtuva ylimääräinen vuorovaikutusermi, ja mikäli tämä termi puuttuu, kutsutaan yhtälöä vain *Hartreen yhtälöksi*. Tässä tutkielmassa käytetään kuitenkin nimitystä Hartree-Fock-yhtälö riippumatta siitä, onko aaltofunktion antisymmetrisointi huomioitu vai ei.

5 Tulokset

Laskujen tulokset tapauksessa $m_H = 0$ on esitelty kuvassa 1, joka kuvaa radiaalisia funktioita $\phi(r) = r\psi(r)$. Funktiot on normalisoitu, eli

$$\int_0^\infty \phi^2(r) dr = 1.$$

Kuvasta nähdään, että variaatiomenetelmällä ja Hartree-Fock-yhtälöillä johdetut aaltofunktiot poikkeavat merkittävästi vetyatomimallista. Etäisyys kuvassa 1 on ilmoitettu yksiköissä

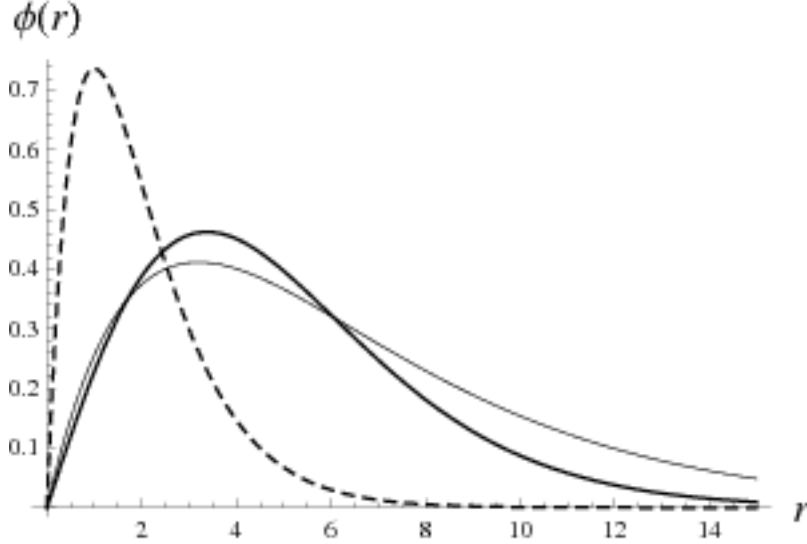
$$a_0 = \frac{1}{(N-1)m_t\alpha_H},$$

joka vastaa efektiivistä Bohrin sädettä systeemissä [1]. Asettamalla $N = 12$ ja ottamalla α_H yhtälöstä (10), saadaan

$$a_0 \simeq \frac{1,14}{m_t}, \quad (30)$$

mikä on lähellä t -kvarkin Comptonin sädettä

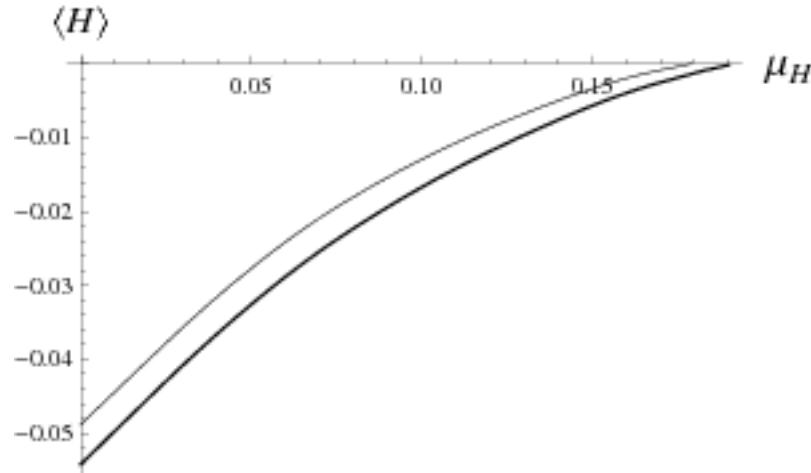
$$\lambda_t = \frac{1}{m_t}.$$



Kuva 1: Radiaaliset yhden hiukkasen aaltofunktiot $\phi(r) = r\psi(r)$ etäisyyden r suhteen systeemin keskustasta tapauksessa $m_H = 0$. Hartree-Fock-yhtälöiden ratkaisu on kuvattu paksulla viivalla, variaatiomenetelmän $\phi(r) \propto re^{-qr}$ ohuella viivalla ja vetyatomimallin 1s-orbitaali katkoviivalla. Yksikkönä $a_0 = \frac{\hbar}{(N-1)m_t c \alpha_H}$. Kuva artikkelista [1].

Laskujen mukaan systeemin sidosenergiaa todellakin kuvaa hyvin yhtälö (27), missä kerroin $k = 0,05426$ on saatu Hartree-Fock-metodilla [1]. Tämä on 10% sisällä aikasemmin variaatiomenetelmällä saadusta arvosta $k = 25/512 \simeq 0,049$. On huomiotava, että k on vain numero, joka ei riipu mistään parametrasta. Siispä riippumatta α_H :n arvosta yhtälössä (10) tai muista yksityiskohdista, on sidosenergia noin 5 kertaa pienempi kuin vetyatomimallissa. Tämän voi huomata myös aaltofunktion suuremmasta säteestä (kuva 1). Hartree-Fock yhtälöiden ratkaisuna saatavan aaltofunktion maksimi [1] on kohdassa $r_{max} = 3,38a_0$. Käyttäen yhtälöä (30), saadaan $r_{max} = 3.86/m_t$. Siispä jopa jättäen Higgsin bosonin massa huomiotta, on systeemin sidosenergia vain $\sim 4\%$ N t -kvarkin massasta.

Systeemin koko on huomattavasti suurempi kuin t -kvarkin Comptonin säde [1]. Tästä syystä on otettava huomioon, että yhtälön (8) kuvaamalla vuorovaikutuksella on äärellinen kantama $1/m_H$. Osoittautuikin (sekä yhtälöstä (25) että Hartree-Fock-yhtälöstä (28)), että systeemi ei ole lainkaan sidottu, kun m_H kasvaa riittävän suureksi [1]. Kuvasta 2 huomataan, että sidosenergia lähestyy nollaa Higgsin bosonin massan kasvaessa. Datasta saatu m_H :n arvo osoittautuu pieneksi verrattuna kokeellisesti havaittuun arvoon $m_H = 125,09 \pm 0,24$ GeV [5]. $N = 12$ t -kvarkille sidottu tila katoaa, kun $m_H \geq 0,157m_t \simeq 27$ GeV, jos käytetään variaatiomenetelmällä saatua yhtälöä (25). Hartree-Fock-yhtälöön (28) perustuva lasku antaa läheisen tuloksen $m_H \geq 0,168m_t \simeq 29$ GeV [1].



Kuva 2: Systeemin sidosenergia $\langle H \rangle$ Higgsin bosonin massan m_H suhteen. Energia on mitattu yksiköissä $E_0 = N(N-1)^2\alpha_H^2m_tc^2$ (vertaa yhtälöön (27)) ja Higgsin bosonin massaa kuvaa $\mu_H = m_Hca_0/\hbar$. Hartree-Fock-yhtälöiden ratkaisu on kuvattu paksulla viivalla ja variaatiomenetelmän $\psi(r) \propto e^{-qr}$ ohuella viivalla. Kuva artikkelista [1].

5.1 Raskaampien fermionien sidotut tilat

Standardimallissa t -kvarkki on raskain (havaittu) alkeishiukkanen. Fermionien massat muodostavat kuitenkin laajan spektrin, joten periaatteessa voisi olettaa, että myös t -

kvarkkeja raskaampia fermioneja olisi olemassa. Esimerkiksi raskaat neljännen sukupolven kvarkit, joilla olisi $m > m_t$, voisivat voimakkaan Higgsin kytkennän kautta muodostaa sidottuja tiloja. Mikäli sidottuja tiloja muodostuisi, olisi niiden massa huomattavasti pienempi kuin yksittäisen raskaan fermionin. Havaitsemalla näitä sidottuja tiloja voitaisiin siis epäsuorasti havaita uusia hiukkasia.

Tutkitaan standardimallin puitteissa N raskasta fermionia, jotka vuorovaikuttavat Higgsin kentän kanssa. Unitaarisessa mitassa Higgsin kenttä Φ on

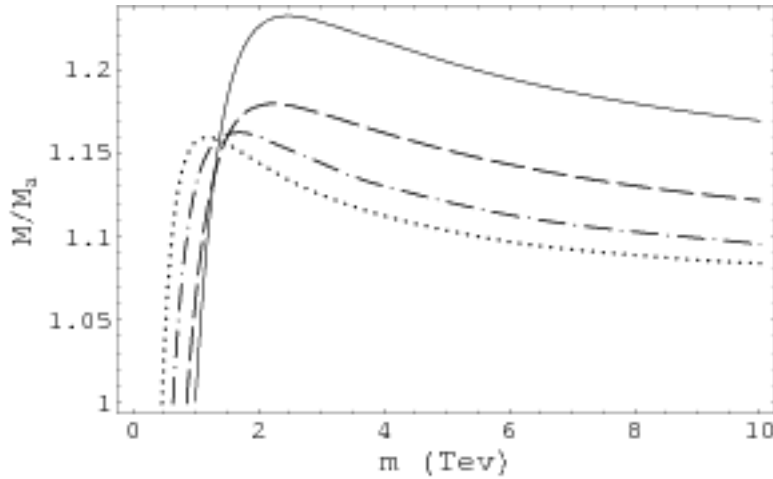
$$\Phi = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix},$$

missä ξ on reaalin kenttä ja v on tyhjiöodotusarvo (VEV, engl. *vacuum expectation value*), joka saavutetaan, kun $\xi = 1$. Systeemin Lagrangen funktio on [6]

$$\mathcal{L} = \frac{v^2}{2} \left(\partial^\mu \xi \partial_\mu \xi - \frac{m_H^2}{4} (\xi^2 - 1)^2 \right) + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\xi) \psi,$$

missä ξ on Higgsin kenttä ja ψ on fermionikenttä. Oletetaan, että joko (i) fermionien massa m , (ii) fermionien lukumäärä N tai (iii) molemmat ovat suuria. Laskut on tehty yksityiskohtaisemmin artikkelissa [6] ja käydäänkin seuraavaksi vain päätulokset hyvin suurpiirteisesti läpi.

Numeerinen ratkaisu saadaan Hartree-Fock-yhtälöillä samalla tavalla kuin t -kvarkkien tapauksessa. Ensiksi muodostetaan Lagrangen funktiosta Hamiltonin funktio, josta saadaan varioimalla Hartree-Fock yhtälöt. Näistä voidaan ratkaista sidosenergia ja lopulta systeemin kokonaismassa M .



Kuva 3: Systeemin kokonaismassa M yksittäisen raskaan fermionin massan m suhteen. M on skaalattu analyyttisellä ratkaisulla M_a (yhtälö (31)). Yhtenäinen viiva $N = 2$, katkoviiva $N = 3$, katko/pisteviiva $N = 6$ ja pisteviiva $N = 12$. Käytetyt arvot ovat $j = 1/2$, $l = 0$ ja $m_H = 100$ GeV. Kuva artikkelista [6].

Analyttinen ratkaisu tapaukselle $m \gg v$ on johdettu artikkelissa [6]. Higgsin tyhjiöodotusarvo $v = 246$ GeV antaa tulokseksi

$$\begin{aligned} M_a &\approx 5,01\sqrt{N|\chi|}v \\ &= 1,23\sqrt{N|\chi|} \text{ TeV}, \end{aligned} \tag{31}$$

missä $\chi = \pm(j + 1/2)$. Tässä j on kokonaiskulmaliikemäärä ja $l = j \pm 1/2$ on ratakulmaliikemäärä.

Numeerisiin laskuihin on valittu arvot $m_H = 100$ GeV, $j = 1/2$, $l = 0$, $N = 2, 3, 6, 12$ [6]. Kuvassa 3 on esitetty systeemin kokonaismassa suhteena M/M_a eri arvoilla N ja m . Pienillä m arvoilla systeemin massa M pienenee ja riittävän pienellä m sidottu tila katoaa kokonaan. Massan m kasvaessa kokonaismassa M saavuttaa ensin maksimin lähestyen sen jälkeen analyyttistä tulosta M_a .

6 Johtopäätökset

Edellä tehdyn analyysin perusteella voidaan siis päätellä, että mikäli 12 t -kvarkin muodostama systeemi olisi sidottu, olisi Higgsin bosonin massan oltava $m_H \leq 29$ GeV. Tämä on ristiriidassa kokeellisten havaintojen kanssa. Siispä sidottu tila $2 \leq N \leq 12$ t -kvarkille ei voi olla olemassa vuorovaikutuksen riittämättömän voimakkuuden ja lyhyen kantaman vuoksi.

Raskaampien fermionien tapauksessa huomataan hieman yllättäen, että niistä muodostuvan systeemin kokonaismassa M_a ei riipu yksittäisen fermionin massasta m . Huomataan myös, että fermionien määrän ollessa pieni ($N = 2, 3$), kuuluu systeemin kokonaismassa välille 2-3 TeV [6]. Näin voitaisiin etsiä hyvin raskaita fermioneja löytämällä niistä muodostuva sidottu tila, jonka massa olisi pienempi kuin yksittäisen fermionin. T -kvarkkia raskaammat neljännen sukupolven fermionit ovat kuitenkin poissuljettuja kokeellisten havaintojen myötä. Jos ne saisivat massansa standardimallin Higgsin bosonin kautta, olisi Higgsin bosonin ominaisuudet erilaiset kuin mitä kiihdytinkokeissa on havaittu.

Yhtälöstä (27) huomataan, että sidosenergia on vahvasti verrannollinen hiukkasteen lukumäärään N ($\langle H \rangle \propto N^3$) ja voidaankin spekuloida, mitä tapahtuisi, jos $N > 12$ (esimerkiksi $N = 24$ t -kvarkkia muodostaisi 2s-orbitaalin). Huomataan, että derivaatta dM/dN pienenee N kasvaessa. Tällöin yksittäisen fermionin hajoamisaika sidotun tilan sisällä kasvaa nopeasti, koska vapautuva energia $M(N) - M(N - 1)$ pienenee [6]. Näin syntyy kohtuullisen pitkäikäisiä sidottuja tiloja, joita olisi voinut esiintyä esimerkiksi sähköheikon faasitransition aikaan universumin varhaisessa historiassa [6].

Yksinkertaisten arvioiden mukaan yhtälön (27) mukainen kokonaissidosenergia $\langle H \rangle$ olisi verrattavissa systeemin kokonaislepomassaan, kun $N > 50$ [1]. Ongelman oikea ratkaisu vaatii kuitenkin relativistista käsittelyä ja Higgsin potentiaalin epälineaarisuuden huomioon ottamista.

Viitteet

- [1] M. Y. Kuchiev, V. V. Flambaum ja E. Shuryak, *On bound states of multiple t -quarks due to Higgs exchange*, Phys. Rev. D **78** (2008) 077502, [arXiv:0808.3632 \[hep-ph\]](#).
- [2] C. D. Froggatt, L. V. Laperashvili, R. B. Nevzorov, H. B. Nielsen ja C. R. Das, *New Bound States of Top-anti-Top Quarks and T^- balls Production at Colliders (Tevatron, LHC, etc.)*, [arXiv:0804.4506 \[hep-ph\]](#).
- [3] C. D. Froggatt, H. B. Nielsen ja L. V. Laperashvili, *Hierarchy-problem and a bound state of 6 t and 6 anti- t* , Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005) 1268, [arXiv:\[hep-ph/0406110\]](#).
- [4] C. D. Froggatt ja H. B. Nielsen, *Trying to understand the standard model parameters*, Surveys High Energ. Phys. **18** (2003) 55, [arXiv:\[hep-ph/0308144\]](#).
- [5] K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014) ja 2015 päivitys
- [6] M. Y. Kuchiev, V. V. Flambaum ja E. Shuryak, *Light bound states of heavy fermions*, Phys. Lett. B **693** (2010) 485, [arXiv:0811.1387 \[hep-ph\]](#).