

AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA IM. STANISŁAWA
STASZICA



WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I
INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KIERUNEK: AUTOMATYKA I ROBOTYKA

Laboratorium Problemowe 2

Wahadło odwrócone

Wykonali:

Piotr Merynda

Maciej Podsiadło

Piotr Zielonka

Prowadzący:

mgr inż. Dawid Knapik

1 Wstęp

Celem projektu była synteza układu regulacji dla systemu wahadła odwróconego na wózku. Wyszczególniono następujące zadania sterowania: doprowadzenie wahadła do górnego, niestabilnego punku równowagi za pomocą algorytmu *swing-up* oraz stabilizację wahadła w niestabilnym punkcie równowagi.

Stanowisko laboratoryjne składa się z wahadła znajdującego się na wózku napędzanym przez silnik DC, enkoderów inkrementalnych ścztujących położenie kątowe wahadła oraz wału silnika. Silnik DC sterowany jest sygnałem PWM. Układ połączony jest z komputerem klasy PC na którym zainstalowany jest system operacyjny Windows, MATLAB R2015b z toolboxami umożliwiającymi automatyczną generację kodu z bloków Simulinka, a także oprogramowanie umożliwiające uruchomienie wygenerowanego kodu w czasie rzeczywistym.

2 Identyfikacja parametrów systemu

Punktem wyjściowym do rozpoczęcia prac był laboratoryjny model wahadła zbudowany w Simulinku mający następujące sygnały:

Wejściowe: sygnał sterujący podawany na silnik (zakres: -0.5 do 0.5), reset enkoderów.

Wyjściowe: odczytane z enkoderów położenie kątowe wahadła oraz położenia wózka na szynie, prędkość kątowa wahadła oraz prędkość wózka na szynie (obliczone jako iloraz różnicowy położenia w czasie).

Przyjęto, że punkt nieciężkości położenia wahadła będzie znajdował się w dolnym, stabilnym położeniu równowagi, natomiast enkodery resetowane będą w lewym (patrząc od strony komputera) skrajnym położeniu wózka na szynie.

2.1 Obliczenie momentu bezwładności wahadła

Wahadło składa się z rurki oraz ciężarka znajdującego się na jej końcu. Rozkręcając wahadło zważono oraz zmierzono niezbędne wielkości potrzebne do analitycznego wyliczenia momentu bezwładności wahadła.

Masa rurki $m_r = 0.02[kg]$

Masa ciężarka $m_c = 0.011[kg]$

Całkowita długość wahadła $d_w = 0.495[m]$

Odległość od początku rurki do osi obrotu $d_1 = 0.085[m]$

Odległość od osi obrotu do środka masy wahadła $l = 0.252[m]$.

Rozważając rurkę jako nieskończenie cienki pręt oraz ciężarek jak masę punktową obliczono moment bezwładności wahadła względem osi obrotu:

$$J_{os} = 2\left(\frac{m_r}{3}\left(\frac{d_w - d_1}{d_w}(d_w - d_1)^2 + \frac{d_1}{d_w}d_1^2\right) + m_c(d_w - d_1)^2\right) \quad (1)$$

Na stanowisku wahadło składa się z dwóch identycznych części, stąd współczynnik 2. Po podstawieniu wartości $J_{os} = 0.00557[kg \cdot m^2]$.

Uzyskany wynik postanowiono porównać z wynikiem eksperymentalnym. Unieruchomivszy wózek nieznacznie wychylono wahadło i zarejestrowano drgania w czasie. Zmierzono średni okres drgań $T = 1.207s$. Traktując obiekt jako wahadło fizyczne wyliczono moment bezwładności J_{eksp} według znanej zależności:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{eksp}}{2(m_c + m_r)gl}} \quad (2)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Otrzymano wynik $J_{eksp} = 0.00565[kg \cdot m^2]$ zadowalająco bliski analitycznemu.

Aby uprościć model matematyczny systemu policzono moment bezwładności J_{sm} wahadła względem jego środka masy. Wykorzystano twierdzenie Steinera:

$$J_{os} = J_{sm} + 2 \cdot (m_c + m_r) \cdot l^2 \quad (3)$$

Skąd ostatecznie $J_{sm} = 0.00167[kg \cdot m^2]$.

2.2 Identyfikacja modelu dynamiki wózka

Przyjmując uproszczony model silnika DC zapisano następujący układ równań:

$$u = Ri + k_e \omega \quad (4)$$

$$J_{DC} \dot{\omega} = k_m i - \mu \omega \quad (5)$$

gdzie:

u - napięcie podane na silnik,

R - rezystancja wirnika,

i - natężenie prądu,

ω - prędkość kątowna wirnika,

k_e - stała elektryczna silnika,

k_m - stała mechaniczna silnika,

J_{DC} - moment bezwładności układu względem osi obrotu silnika.

μ - wypadkowy współczynnik tarcia układu

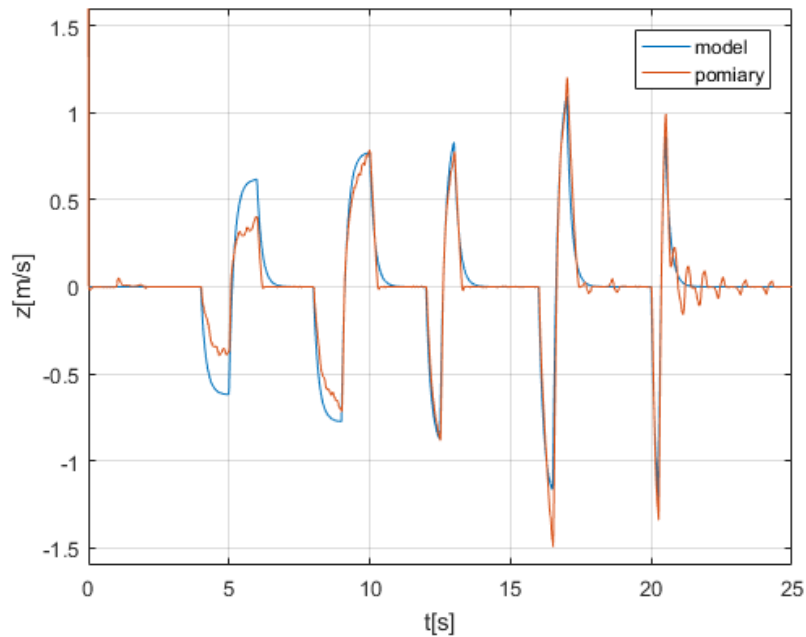
Eliminując i :

$$\dot{\omega} = -\frac{k_e k_m + \mu R}{J_{DC} R} \omega + \frac{k_m}{J_{DC} R} u \quad (6)$$

Aby uniknąć konieczności wyznaczania wszystkich wielkości występujących w równaniu 6 postanowiono zidentyfikować dwie stałe c_1 oraz c_2 . Mając na uwadze, że prędkość wózka na szynie \dot{z} jest proporcjonalna do prędkości obrotowej wirnika:

$$\dot{z} = -c_1 \dot{z} + c_2 u \quad (7)$$

Minimalizując całkę z kwadratu różnicy pomiędzy rzeczywistym przebiegiem a modelem opartym o wyżej wymienione stałe otrzymano rezultat:



Rys. 1: Porównanie modelu dynamiki wózka z pomiarami

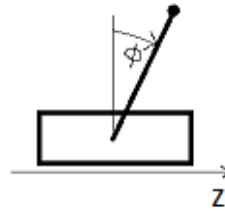
dla $c_1 = 5.8$, $c_2 = -18$.

Pominięto wpływ wahadła na ruch wózka. Uproszczenie to jest szczególnie uzasadnione w momencie kiedy wahadło znajdować się będzie w niestabilnym punkcie równowagi. Na rysunku 2.2 widać, że przy mniejszych prędkościach występują większe rozbieżności pomiędzy modelem a pomiarami, co spowodowane jest bardziej znaczącym wpływem tarcia statycznego, którego nie uwzględniono do tej pory w modelu.

2.3 Tarcie statyczne

3 Model matematyczny

Przyjmując zerowy kąt wychylenia ϕ w górnym położeniu równowagi wahadła założono, że wartości rosną w kierunku matematycznie ujemnym (zgodnie z ruchem wskazówek zegara).



Rys. 2: Schemat wahadła na wózku

Na rysunku 3.1 zaznaczono kierunki mierzenia kąta wychylenia wahadła oraz położenia wózka.

3.1 Wyprowadzenie modelu

Rozważając wahadło oddzielnie od wózka wprowadzono siły reakcji więzów $H(t)$ oraz $V(t)$. Pierwsza z nich działa w kierunku poziomym wzdłuż szyny, natomiast druga prostopadle do niej.

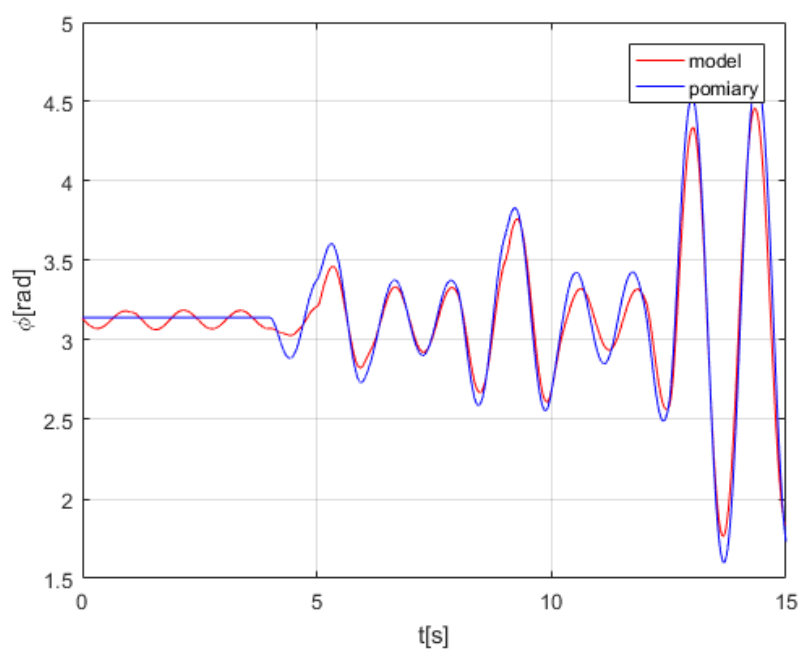
$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} [z(t) + l \sin \phi(t)] &= H(t) \\ m \frac{d^2}{dt^2} [l \cos \phi(t)] &= V(t) - mg \\ J_{sm} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} &= lV(t) \sin \phi(t) - lH(t) \cos \phi(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Równania 8 są wynikiem zastosowania drugiej zasady dynamiki Newtona dla kolejno: sił działających na wahadło w poziomie, sił pionowych oraz momentów obrotowych względem środka ciężkości wahadła. Symbol m oznacza całkowitą masę wahadła.

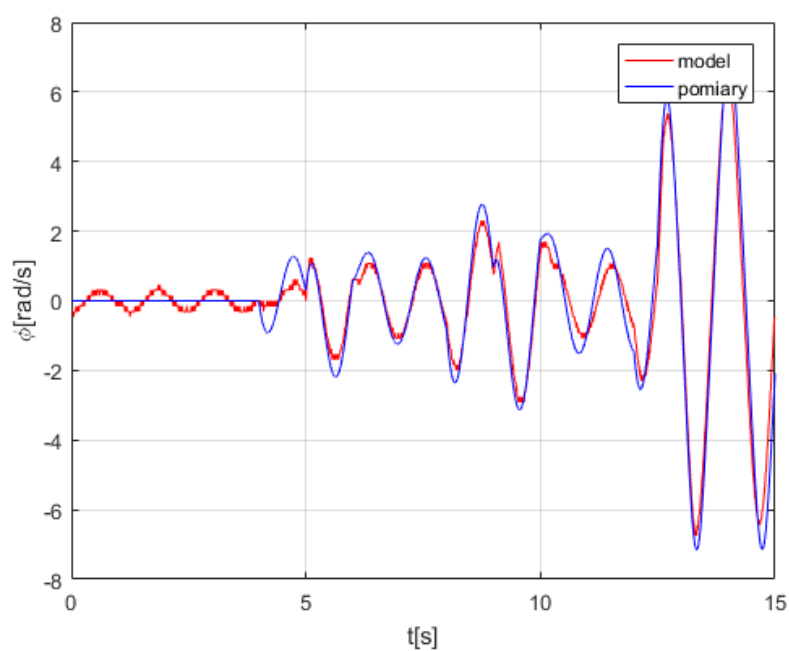
Po przekształceniach układu 8, mając na uwadze równanie dynamiki wózka 7 otrzymano równanie:

$$\ddot{\phi} = \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} \sin \phi + \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} \dot{z} \cos \phi - \frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} u \cos \phi \quad (9)$$

W celu sprawdzenia poprawności wyprowadzonego modelu wygenerowano przykładowe sterowanie oraz porównano zarejestrowane przebiegi z modelowymi:



Rys. 3: Położenie kątowe wahadła



Rys. 4: Prędkość kątowa wahadła

3.2 Równania stanu

Zidentyfikowany model dynamiki wózka oraz dynamiki wahadła pozwala na zapis równań stanu systemu w standardowej formie $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$. Przyjmując następujące zmienne

stanu:

$$\begin{aligned}x_1 &= \phi \\x_2 &= \dot{\phi} \\x_3 &= z \\x_4 &= \dot{z}\end{aligned}\tag{10}$$

nieliniowe równania stanu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} \sin x_1 + \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} x_4 \cos x_1 - \frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} u \cos x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -c_1 x_4 + c_2 u\end{aligned}\tag{11}$$

4 Regulator LQR

4.1 Linearyzacja

W kolejnym etapie badań podjęto się implementacji regulatora liniowo-kwadratowego. LQR jest regulatorem optymalnym (minimalizuje funkcję kosztu dla systemu zlinearyzowanego) co niezwykle zwiększa jego rangę i wartość w zastosowaniach. Jak sama nazwa wskazuje LQR stosowany jest do systemu opisanego przez liniowe równania różniczkowe (w naszym przypadku równania zlinearyzowane wokół niestabilnego punktu równowagi), a minimalizowana funkcja kosztu ma postać kwadratową. Postawiony problem można zapisać w sposób następujący:

$$\begin{aligned}0 &= f(x_0, u_0) \\ x_0 &= [0, 0, 0, 0]^T \\ u_0 &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

System zlinearyzowany w otoczeniu przedstawionego punktu równowagi:

$$\dot{x} = A(x - x_0) + B(u - u_0)\tag{13}$$

gdzie

$$\begin{aligned}A &= \nabla_x f(x_0, u_0) \\ B &= \nabla_u f(x_0, u_0)\end{aligned}\tag{14}$$

Różniczkując równania stanu 11 zgodnie z 14:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} & 0 & 0 & \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}\tag{15}$$

a następnie podstawiając wartości do równania 15 otrzymano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 27.31 & 0 & 0 & 16.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50.11 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}\tag{16}$$

Funkcja kosztu jest postaci:

$$Q(u) = \int_0^{\infty} (x - x_0)^T W (x - x_0) + R (u - u_0)^2 dt \quad (17)$$

Zdecydowano się rozwiązywać problem LQ z nieskończonym horyzontem czasowym, aby uniknąć obliczania online różniczkowego równania Riccatiego. Dzięki takiemu podejściu wyliczenie wzmocnienia regulatora sprowadza się do rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego. Pakiet MATLAB oferuje funkcję *lqr*(*A,B,W,R*), która rozwiązuje ten problem zwracając gotową macierz *K*. Półdodatnio określoną macierz *W* oraz dodatnio określoną macierz (w przypadku układu SISO - skalar) *R* dobierano eksperymentalnie w taki sposób, aby regulator jak najszybciej kompensował odchyłki od położenia równowagi przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń narzuconych na sterowanie. Sterowanie podawane na obiekt jest postaci:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (18)$$

$$u \in [-0.5, 0.5] \quad (19)$$

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Identyfikacja parametrów systemu	3
2.1	Obliczenie momentu bezwładności wahadła	3
2.2	Identyfikacja modelu dynamiki wózka	4
2.3	Tarcie statyczne	5
3	Model matematyczny	5
3.1	Wyprowadzenie modelu	5
3.2	Równania stanu	6
4	Regulator LQR	7
4.1	Linearyzacja	7