

AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA IM. STANISŁAWA  
STASZICA



WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI I  
INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

KIERUNEK: AUTOMATYKA I ROBOTYKA

---

## Laboratorium Problemowe 2

### Wahadło odwrócone

---

*Wykonali:*

Piotr Merynda

Maciej Podsiadło

Piotr Zielonka

*Prowadzący:*

mgr inż. Dawid Knapik

## 1 Wstęp

Celem projektu była synteza układu regulacji dla systemu wahadła odwróconego na wózku. Wyszczególniono następujące zadania sterowania: doprowadzenie wahadła do górnego, niestabilnego punku równowagi za pomocą algorytmu *swing-up* oraz stabilizację wahadła w niestabilnym punkcie równowagi.

Stanowisko laboratoryjne składa się z wahadła znajdującego się na wózku napędzanym przez silnik DC, enkoderów inkrementalnych szczytujących położenie kątowe wahadła oraz wału silnika. Silnik DC sterowany jest sygnałem PWM. Układ połączony jest z komputerem klasy PC na którym zainstalowany jest system operacyjny Windows, MATLAB R2015b z toolboxami umożliwiającymi automatyczną generację kodu z bloków Simulinka, a także oprogramowanie umożliwiające uruchomienie wygenerowanego kodu w czasie rzeczywistym.

## 2 Identyfikacja parametrów systemu

Punktem wyjściowym do rozpoczęcia prac był laboratoryjny model wahadła zbudowany w Simulinku mający następujące sygnały:

Wejściowe: sygnał sterujący podawany na silnik (zakres: -0.5 do 0.5), reset enkoderów.

Wyjściowe: odczytane z enkoderów położenie kątowe wahadła oraz położenia wózka na szynie, prędkość kątowa wahadła oraz prędkość wózka na szynie (obliczone jako iloraz różnicowy położenia w czasie).

Przyjęto, że punkt nieciągłości położenia wahadła będzie znajdował się w dolnym, stabilnym położeniu równowagi, natomiast enkodery resetowane będą w lewym (patrząc od strony komputera) skrajnym położeniu wózka na szynie.

### 2.1 Obliczenie momentu bezwładności wahadła

Wahadło składa się z rurki oraz ciężarka znajdującego się na jej końcu. Rozkręcając wahadło zważono oraz zmierzono niezbędne wielkości potrzebne do analitycznego wyliczenia momentu bezwładności wahadła.

---

Masa rurki  $m_r = 0.02[kg]$

Masa ciężarka  $m_c = 0.011[kg]$

Całkowita długość wahadła  $d_w = 0.495[m]$

Odległość od początku rurki do osi obrotu  $d_1 = 0.085[m]$

Odległość od osi obrotu do środka masy wahadła  $l = 0.252[m]$ .

---

Rozważając rurkę jako nieskończenie cienki pręt oraz ciężarek jak masę punktową obliczono moment bezwładności wahadła względem osi obrotu:

$$J_{os} = 2\left(\frac{m_r}{3}\left(\frac{d_w - d_1}{d_w}(d_w - d_1)^2 + \frac{d_1}{d_w}d_1^2\right) + m_c(d_w - d_1)^2\right) \quad (1)$$

Na stanowisku wahadło składa się z dwóch identycznych części, stąd współczynnik 2. Po podstawieniu wartości  $J_{os} = 0.00557[kg \cdot m^2]$ .

Uzyskany wynik postanowiono porównać z wynikiem eksperymentalnym. Unieruchomivszy wózek nieznacznie wychylono wahadło i zarejestrowano drgania w czasie. Zmierzono średni okres drgań  $T = 1.207s$ . Traktując obiekt jako wahadło fizyczne wyliczono moment bezwładności  $J_{eksp}$  według znanej zależności:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{eksp}}{2(m_c + m_r)gl}} \quad (2)$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie. Otrzymano wynik  $J_{eksp} = 0.00565[kg \cdot m^2]$  zadowalająco bliski analitycznemu.

Aby uprościć model matematyczny systemu policzono moment bezwładności  $J_{sm}$  wahadła względem jego środka masy. Wykorzystano twierdzenie Steinera:

$$J_{os} = J_{sm} + 2 \cdot (m_c + m_r) \cdot l^2 \quad (3)$$

Skąd ostatecznie  $J_{sm} = 0.00167[kg \cdot m^2]$ .

## 2.2 Identyfikacja modelu dynamiki wózka

Przyjmując uproszczony model silnika DC zapisano następujący układ równań:

$$u = Ri + k_e \omega \quad (4)$$

$$J_{DC} \dot{\omega} = k_m i - \mu \omega \quad (5)$$

gdzie:

$u$  - napięcie podane na silnik,

$R$  - rezystancja wirnika,

$i$  - natężenie prądu,

$\omega$  - prędkość kątowna wirnika,

$k_e$  - stała elektryczna silnika,

$k_m$  - stała mechaniczna silnika,

$J_{DC}$  - moment bezwładności układu względem osi obrotu silnika.

$\mu$  - wypadkowy współczynnik tarcia układu

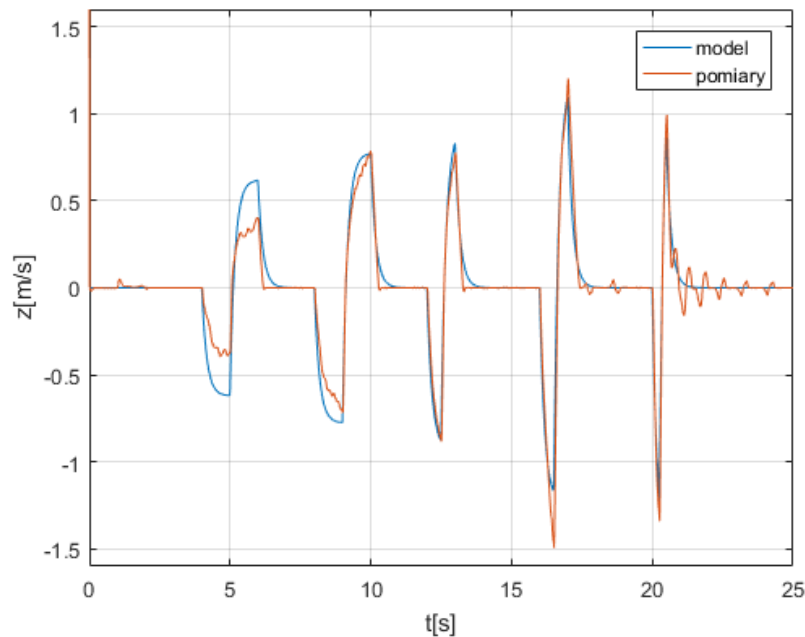
Eliminując  $i$ :

$$\dot{\omega} = -\frac{k_e k_m + \mu R}{J_{DC} R} \omega + \frac{k_m}{J_{DC} R} u \quad (6)$$

Aby uniknąć konieczności wyznaczania wszystkich wielkości występujących w równaniu 6 postanowiono zidentyfikować dwie stałe  $c_1$  oraz  $c_2$ . Mając na uwadze, że prędkość wózka na szynie  $\dot{z}$  jest proporcjonalna do prędkości obrotowej wirnika:

$$\ddot{z} = -c_1 \dot{z} + c_2 u \quad (7)$$

Minimalizując całkę z kwadratu różnicy pomiędzy rzeczywistym przebiegiem a modelem opartym o wyżej wymienione stałe otrzymano rezultat:



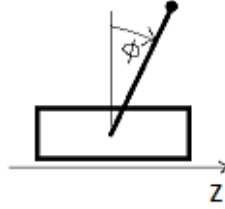
Rys. 1: Porównanie modelu dynamiki wózka z pomiarami

dla  $c_1 = 5.8$ ,  $c_2 = -18$ .

Pominięto wpływ wahadła na ruch wózka. Uproszczenie to jest szczególnie uzasadnione w momencie kiedy wahadło znajdować się będzie w niestabilnym punkcie równowagi. Na rysunku 1 widać, że przy mniejszych prędkościach występują większe rozbieżności pomiędzy modelem a pomiarami, co spowodowane jest bardziej znaczącym wpływem tarcia statycznego, którego nie uwzględniono do tej pory w modelu.

### 3 Model matematyczny

Przyjmując zerowy kąt wychylenia  $\phi$  w górnym położeniu równowagi wahadła założono, że wartości rosną w kierunku matematycznie ujemnym (zgodnie z ruchem wskazówek zegara).



Rys. 2: Schemat wahadła na wózku

Na rysunku 2 zaznaczono kierunki mierzenia kąta wychylenia wahadła oraz położenia wózka.

#### 3.1 Wyprowadzenie modelu

Rozważając wahadło oddzielnie od wózka wprowadzono siły reakcji więzów  $H(t)$  oraz  $V(t)$ . Pierwsza z nich działa w kierunku poziomym wzdłuż szyny, natomiast druga prostopadle do niej.

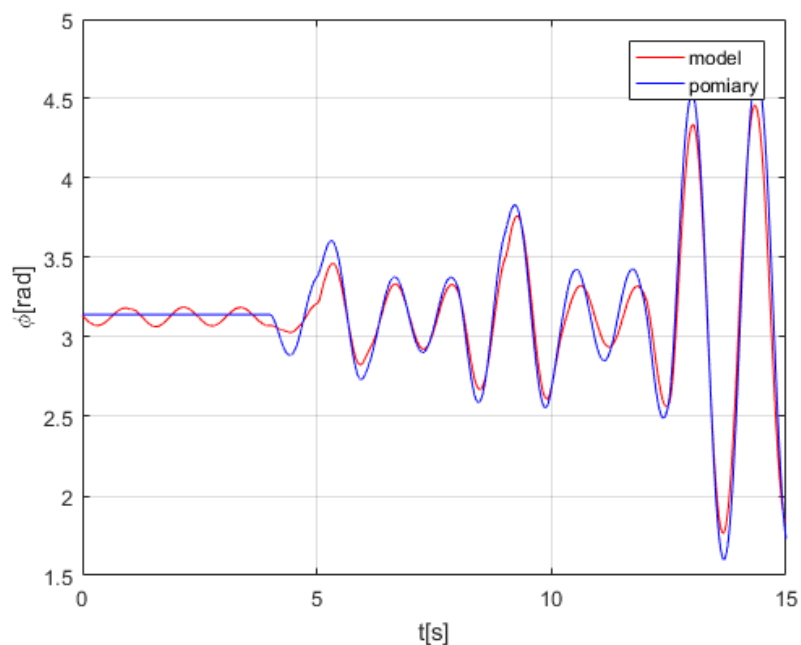
$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2}[z(t) + l \sin \phi(t)] &= H(t) \\ m \frac{d^2}{dt^2}[l \cos \phi(t)] &= V(t) - mg \\ J_{sm} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} &= lV(t) \sin \phi(t) - lH(t) \cos \phi(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Równania 8 są wynikiem zastosowania drugiej zasady dynamiki Newtona dla kolejno: sił działających na wahadło w poziomie, sił pionowych oraz momentów obrotowych względem środka ciężkości wahadła. Symbol  $m$  oznacza całkowitą masę wahadła.

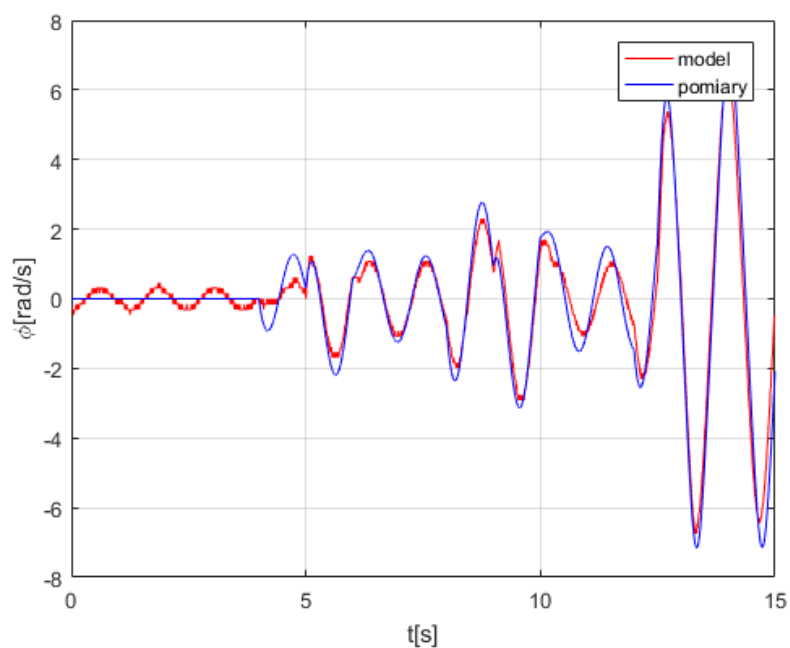
Po przekształceniach układu 8, mając na uwadze równanie dynamiki wózka 7 otrzymano równanie:

$$\ddot{\phi} = \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} \sin \phi + \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} \dot{z} \cos \phi - \frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} u \cos \phi \quad (9)$$

W celu sprawdzenia poprawności wyprowadzonego modelu wygenerowano przykładowe sterowanie oraz porównano zarejestrowane przebiegi z modelowymi:



Rys. 3: Położenie kątowe wahadła



Rys. 4: Prędkość kątowa wahadła

### 3.2 Równania stanu

Zidentyfikowany model dynamiki wózka oraz dynamiki wahadła pozwala na zapis równań stanu systemu w standardowej formie  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$ . Przyjmując następujące zmienne

stanu:

$$\begin{aligned}x_1 &= \phi \\x_2 &= \dot{\phi} \\x_3 &= z \\x_4 &= \dot{z}\end{aligned}\tag{10}$$

nieliniowe równania stanu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} \sin x_1 + \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} x_4 \cos x_1 - \frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} u \cos x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -c_1 x_4 + c_2 u\end{aligned}\tag{11}$$



## 4 Regulator LQR

### 4.1 Linearyzacja

W kolejnym etapie badań podjęto się implementacji regulatora liniowo-kwadratowego. LQR jest regulatorem optymalnym (minimalizuje funkcję kosztu dla systemu zlinearyzowanego) co niezwykle zwiększa jego rangę i wartość w zastosowaniach. Jak sama nazwa wskazuje LQR stosowany jest do systemu opisanego przez liniowe równania różniczkowe (w naszym przypadku równania zlinearyzowane wokół niestabilnego punktu równowagi), a minimalizowana funkcja kosztu ma postać kwadratową. Postawiony problem można zapisać w sposób następujący:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, u_0) \\ x_0 &= [0, 0, 0, 0]^T \\ u_0 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

System zlinearyzowany w otoczeniu przedstawionego punktu równowagi:

$$\dot{x} = A(x - x_0) + B(u - u_0) \quad (13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &= \nabla_x f(x_0, u_0) \\ B &= \nabla_u f(x_0, u_0) \end{aligned} \quad (14)$$

Różniczkując równania stanu 11 zgodnie z 14:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl}{J_{sm} + ml^2} & 0 & 0 & \frac{mlc_1}{J_{sm} + ml^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mlc_2}{J_{sm} + ml^2} \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

a następnie podstawiając wartości do równania 15 otrzymano:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 27.31 & 0 & 0 & 16.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5.8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 50.11 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Funkcja kosztu jest postaci:

$$Q(u) = \int_0^{\infty} (x - x_0)^T W (x - x_0) + R (u - u_0)^2 dt \quad (17)$$

Zdecydowano się rozwiązywać problem LQ z nieskończonym horyzontem czasowym, aby uniknąć obliczania online różniczkowego równania Riccatiego. Dzięki takiemu podejściu wyliczenie wzmocnienia regulatora sprowadza się do rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego. Pakiet MATLAB oferuje funkcję  $lqr(A, B, W, R)$ , która rozwiązuje ten problem zwracając gotową macierz K. Półdefinitnie określoną macierz  $W$  oraz dodatnio określoną macierz (w przypadku układu SIMO - skalar)  $R$  dobierano eksperymentalnie w taki sposób, aby regulator jak najszybciej kompensował odchyłki od położenia

równowagi przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń narzuconych na sterowanie. Sterowanie podawane na obiekt jest postaci:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (18)$$

$$u \in [-0.5, 0.5] \quad (19)$$

Przetestowano różne konfiguracje macierzy  $W$  oraz  $R$ . Subiektywnie stwierdzono, że system zachowuje się najlepiej dla wartości:

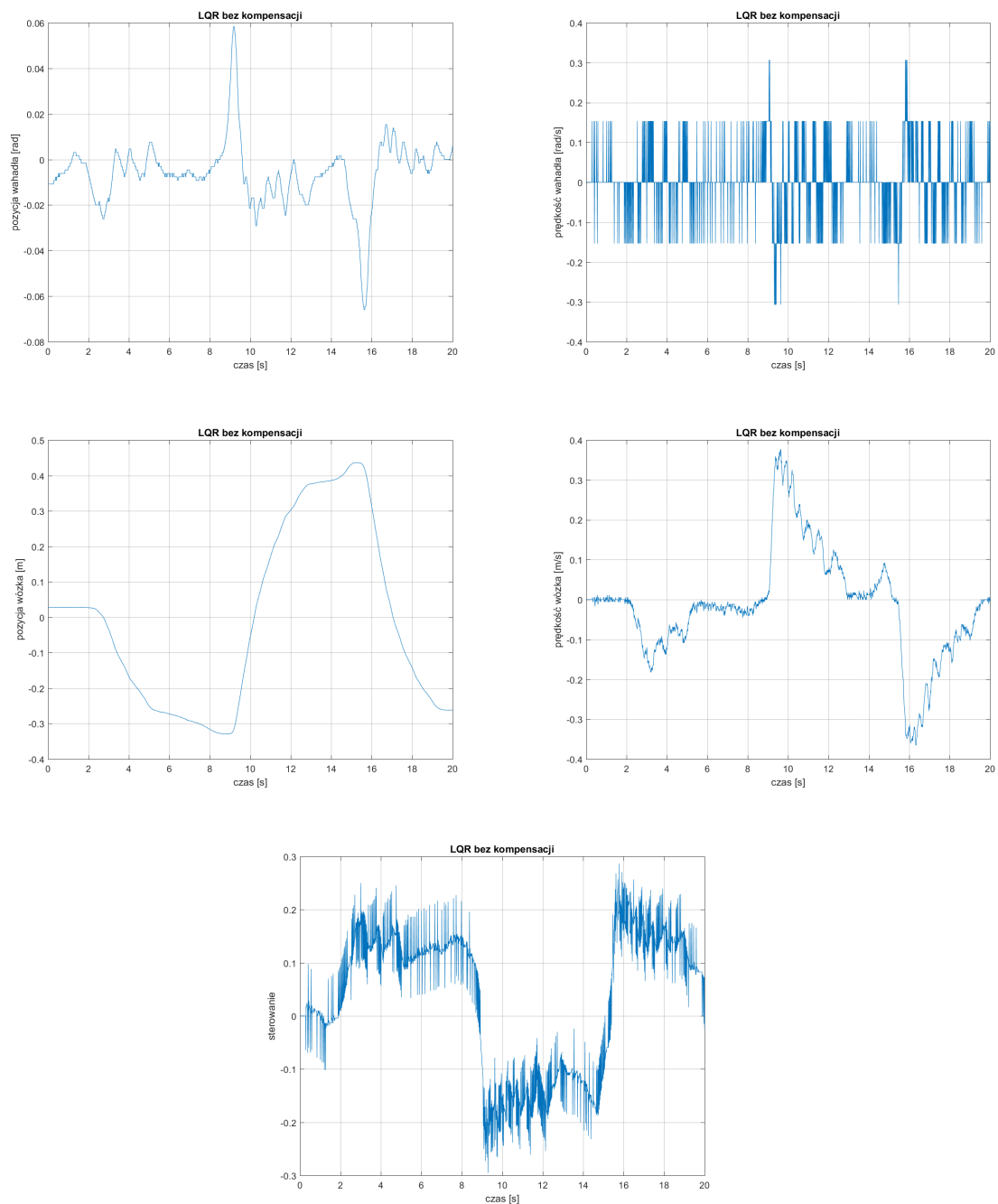
$$W = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$R = 1000$$

$$K = ( 3.01 \quad 0.544 \quad 0.316 \quad 0.836 )$$

## 4.2 Analiza działania

Regulator LQR z sukcesem stabilizował wahadło w niestabilnym punkcie równowagi.



Rys. 5: Zadanie stabilizacji obiektu w niestabilnym punkcie równowagi przy użyciu regulatora LQR bez kompensacji tarcia statycznego.

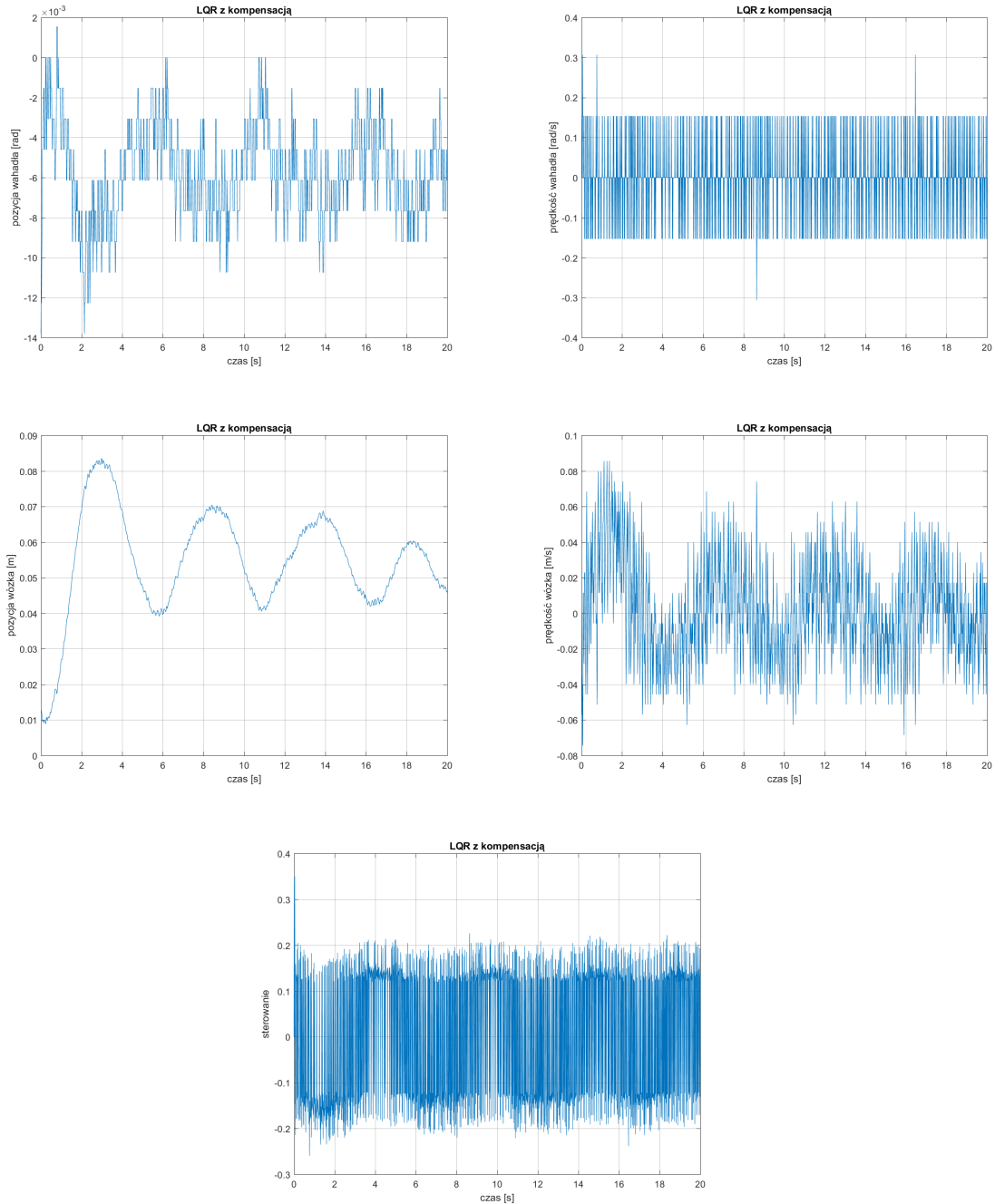
Zauważono wpływ tarcia statycznego objawiający się oscylacjami wokół zadanego położenia wózka na szynie.

### 4.3 Tarcie statyczne

Modelowanie tarcia statycznego nie jest prostym zadaniem. Zaobserwowano, że napięcie podawane na silnik potrzebne do pokonania siły tarcia wózka o szynę nie jest stałe, zależy od położenia wózka. Aby zredukować niekorzystny wpływ tarcia na działanie systemu

postanowiono wykorzystać następujące podejście. Sterowanie 18 wyliczone przez regulator zostanie zwiększone (w sensie wartości bezwzględnej) o stałą wartość kompensującą siłę tarcia  $u_{F_T} = 0.11$ , która wyznaczona została eksperymentalnie:

$$u(t) = -(Kx(t) + u_{F_T} \cdot \text{sgn}(Kx(t))) \quad (21)$$



Rys. 6: Zadanie stabilizacji obiektu w niestabilnym punkcie równowagi przy użyciu regulatora LQR z kompensacją tarcia statycznego.

Problem oscylacji wózka został w znaczącym stopniu zażegnany. Amplituda wychyleń wózka zmalała blisko dziesięciokrotnie co ukazane zostało na rysunkach 5 oraz

6. Zastosowanie regulatora opisanego równaniem 21 wprowadziło nieciągłości funkcji sterującej w punktach:

$$\{x : Kx(t) = 0\} \quad (22)$$

Nieciągłości te objawiały się widocznymi drganiami wózka o wysokiej częstotliwości.

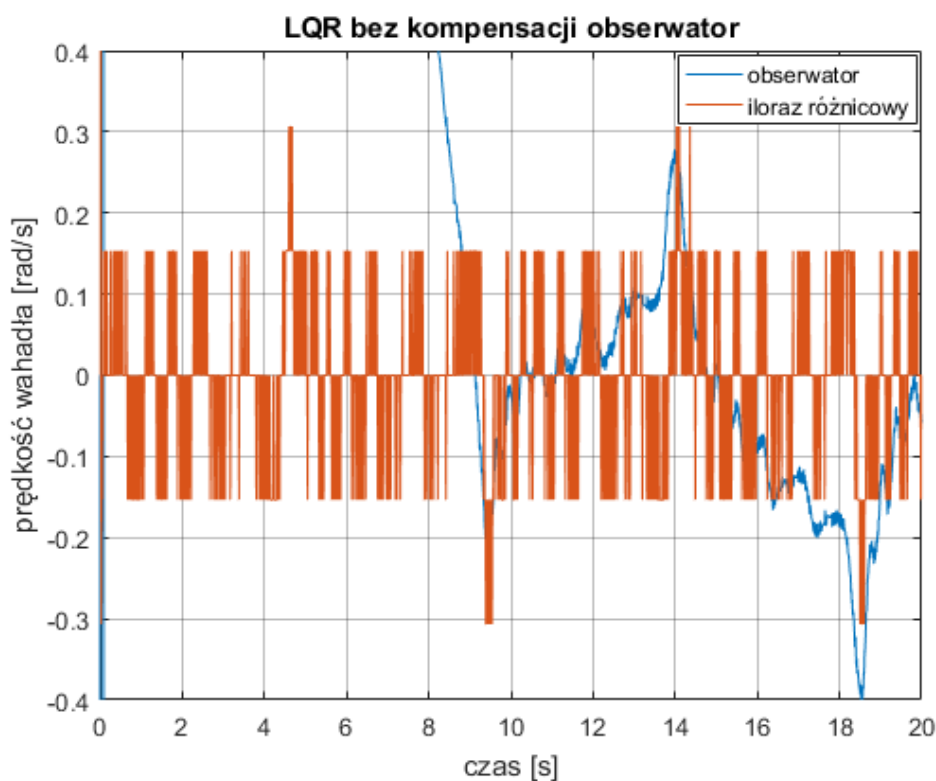
## 5 Obserwator stanu

### 5.1 Obserwator Luenbergera

Po szczegółowej analizie zarejestrowanych przebiegów zauważono duży wpływ szumu kwantyzacji na jakość regulacji, szczególnie w przypadku prędkości kątowej wahadła wyliczanej przez iloraz różnicowy położenia wahadła w kolejnych chwilach czasu. W celu wygładzenia przebiegu prędkości zaprojektowano obserwator Luenbergera dla systemu zlinearyzowanego w taki sposób, aby błąd estymacji prędkości dostatecznie szybko zdążał do zera. Doświadczalnie wyznaczono odpowiednie ujemne wartości własne macierzy:

$$\text{eig}(A - LC) = (-50, -1, -70, -80) \quad (23)$$

Zdecydowano się na obserwator pełnego rzędu, natomiast do regulatora podano jedynie estymacje stanów obciążonych największym błędem pomiarowym, prędkości wahadła i wózka.



Rys. 7: Estymator prędkości kątowej wahadła

Obserwator Luenbergera estymuje prędkość funkcją wyraźnie bardziej gładką niż to ma miejsce w przypadku obliczania ilorazu różnicowego. Niemniej jednak niedokładność modelu, a w największej mierze model tarcia, sprawia, że estymacja obciążona jest błędem, którego efekty są zauważalne w sposobie działania systemu.

Warto odnotować, że stabilizacja wahadła w pętli sprzężenia zwrotnego z sygnałami z obserwatora powiodła się, natomiast system wykazywał mniejszą odporność na zakłócenia.

## 5.2 Filtracja sygnału prędkości wahadła

W celu zmniejszenia skutków niedoskonałości sygnału prędkości wahadła przetestowano szereg różnych podejść i eksperymentów. Wypróbowano filtr cyfrowy dolnoprzepustowy Czebyszewa II typu, którego zaletą jest stosunkowo wąskie pasmo przejściowe, a w odróżnieniu od typu I charakteryzuje się małymi zafalowaniami przebiegu w paśmie przepustowym. Biorąc pod uwagę częstotliwość taktowania algorytmu sterującego (100 Hz) przesuwano pasmo przepustowe w granicach 50-70 Hz, oraz pasmo zaporowe 60-95 Hz. O ile niewielka ingerencja w oryginalny sygnał nie wprowadzała zauważalnych zmian, o tyle duże tłumienia wprowadzały znaczące przesunięcie fazowe, które wpływało na zapasy stabilności systemu.

O wiele lepsze rezultaty dał filtr cyfrowy FIR o transmitancji:

$$G(z) = 0.7 + 0.2z^{-1} + 0.1z^{-2} \quad (24)$$

natomiast jego zastosowania nie można uznać za przełomowe, ze względu na wprowadzane przesunięcie fazowe.

Kolejnym podejściem, które miało na celu zapewnienie mniej szarpanego działania wahadła było wprowadzenie filtru medianowego na sterowanie wychodzące z regulatora LQR. Pomysł okazał się nietrafiony, wahadło nie radziło sobie w przypadku wprowadzania zakłóceń.

Postanowiono wprowadzić predykcje prędkości na bazie dyskretnego modelu AR-MAX, gdzie na podstawie ostatnich trzech próbek położenia wahadła, położenia wózka (sygnały obarczone najmniejszą niepewnością pomiarową) oraz sterowania podawanego na obiekt przewidywana byłaby prędkość wahadła oraz wózka w następnej chwili czasowej. Na tej podstawie możliwa stałaby się precyzyjniejsza rekonstrukcja prędkości.

## 6 Regulator *swing-up*

### 6.1 Algorytm *swing-up*

Zastosowano heurystyczną regułę, która w zależności od położenia i prędkości wahadła pozwala wyznaczyć sterowanie wzbudzające system:

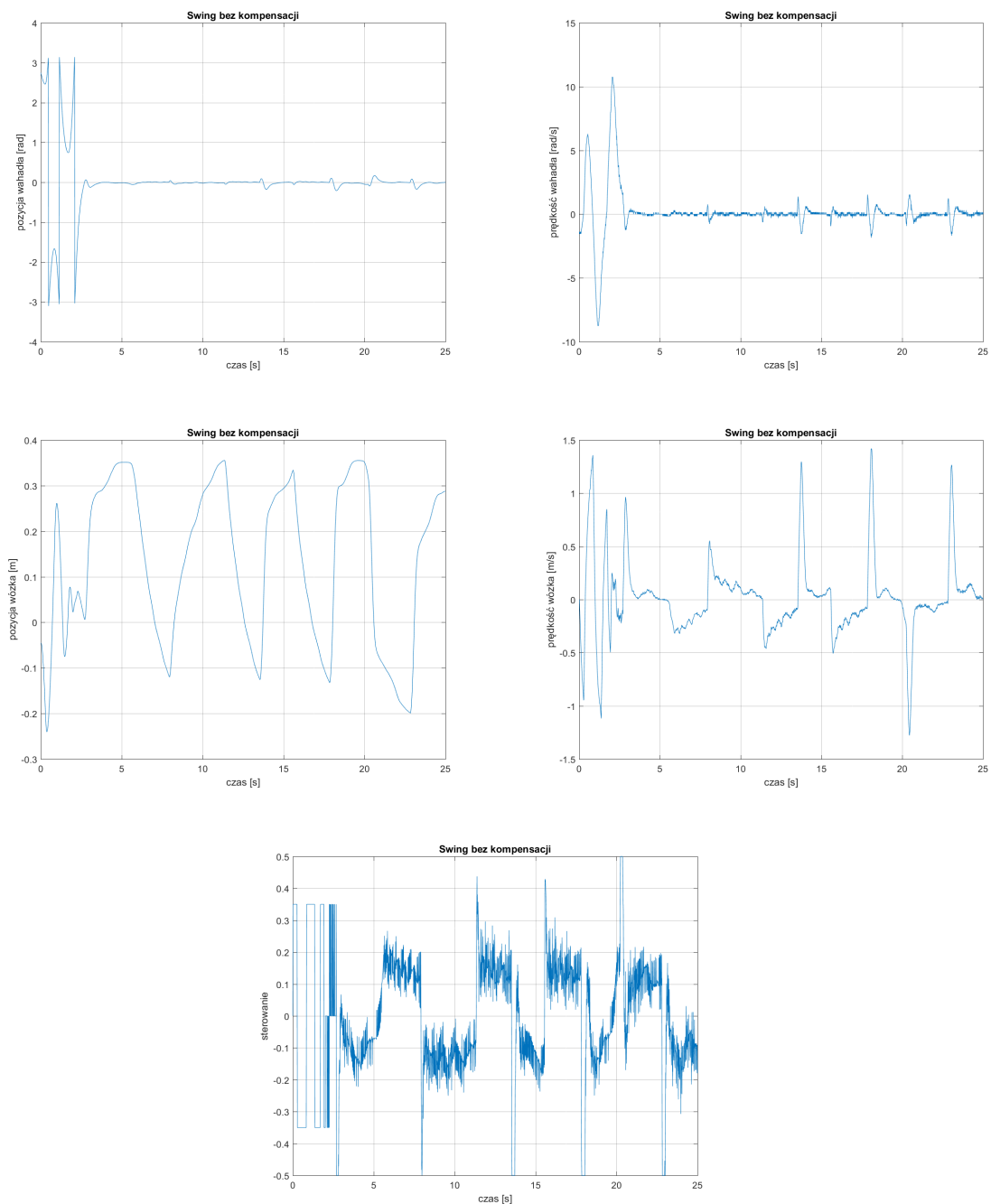
$$u(t) = u_{swing} \cdot \operatorname{sgn}[x_2(|x_1| - \frac{\pi}{2})] \quad (25)$$

gdzie amplituda sygnału sterującego  $u_{swing} = 0.3$  wyznaczona została eksperymentalnie, tak aby położenie wózka podczas rozhuśtywania wahadła nie wykroczyło poza dopuszczalne granice.

### 6.2 Warunek przełączenia

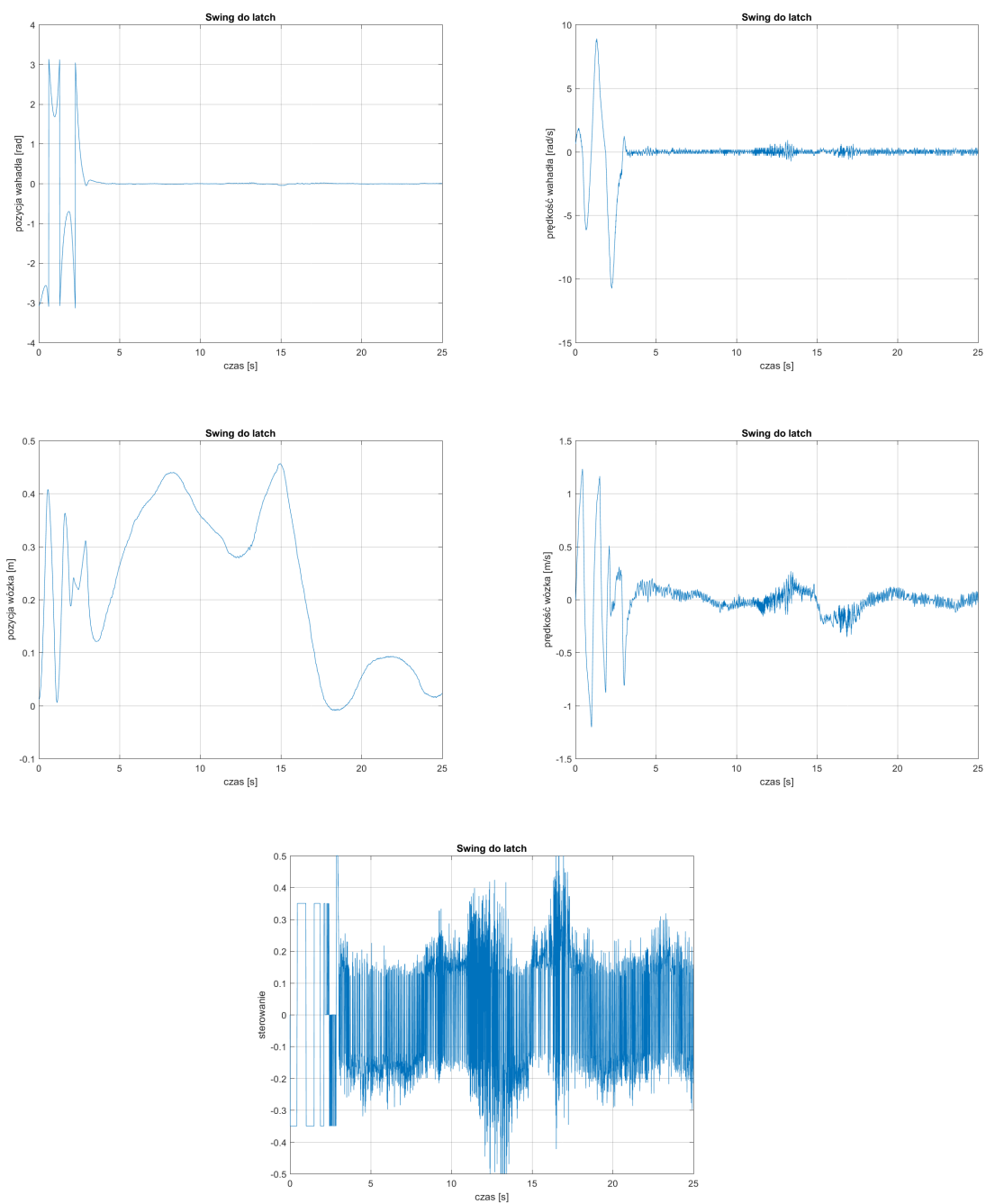
Algorytm *swing-up* realizowany jest do momentu, kiedy do systemu zostanie dostarczona odpowiednia ilość energii, aby doprowadzić wahadło w okolice niestabilnego położenia równowagi. Następnie sterowanie zostaje całkowicie odłączone do momentu, kiedy położenie wahadła znajdzie się w granicach  $(-10^\circ, 10^\circ)$ . Wtedy zostaje aktywowany regulator LQR. W przypadku, kiedy stabilizacja nie powiedzie się, kąt wahadła osiągnie wartość spoza zbioru  $(-30^\circ, 30^\circ)$  aktywowany na nowo zostaje algorytm *swing-up*. Algorytm zrealizowany został na przerzutniku RS.





Rys. 8: Swing-up wraz ze stabilizacją wahadła.

W celu zwiększenia skuteczności algorytmu, w momencie  $t_p$  przełączania się na regulator LQR ustawiano punkt równowagi  $x_0 = [0, 0, x_3(t_p), 0]^T$ . Po ustabilizowaniu się wahadła powracano do zerowego punktu równowagi. Warto odnotować, że kąt wahadła podczas skokowej zmiany wartości zadanej położenia wózka cały czas pozostawał bardzo blisko zera.



Rys. 9: Swing-up wraz ze stabilizacją wahadła, zmiana referencyjnego położenia wózka.

## 7 Wnioski

Pracę ze środowiskiem MATLAB Simulink uznajemy za niebywale wydajną oraz skuteczną w tworzeniu prototypów układów regulacji. Ze względu na wprowadzenie uzasadnionych uproszczeń w modelu matematycznym wahadła proces identyfikacji systemu przebiegł sprawnie i stosunkowo szybko. Kluczowym elementem było pominięcie wpływu oddziaływanie wahadła na wózek w niestabilnym położeniu równowagi, dzięki czemu mogliśmy zidentyfikować dynamikę wózka zupełnie niezależnie. Uniknęliśmy konieczności czasochłonnych pomiarów rezystancji silnika oraz stałych - elektrycznej i mechanicznej. Uzyskany model zadowalająco dobrze odzwierciedlał dynamikę rzeczywistego obiektu czego dowód przedstawiono na rysunkach 1, 3 i 4. Największe problemy sprawiło nam tarcie statyczne, którego efektów nie udało nam się wyeliminować pomimo różnorodności obranych prób. System ze względu na mocne nieliniowości nie jest prostym obiektem do sterowania. Warto podkreślić, że regulator LQR pomimo tego znakomicie poradził sobie z tym zadaniem. Przy syntezie regulatora kluczowym okazał się właściwy dobór macierzy  $Q$  oraz  $R$  wchodzących w skład wskaźnika jakości. Ważne, aby wartości jakie przyjmuje sterowanie mieściły się w dopuszczalnych granicach, w przypadku wahadła od  $-0.5$  do  $0.5$ . Ze względu na ograniczoną długość szyny, po której może poruszać się wózek istotne staje się ustalenie amplitudy sterowania wzbudzającego system w algorytmie swing-up. Zbyt duże może spowodować wyjechanie wózka poza dopuszczalne granice, natomiast zbyt małe znacznie wydłuży czas działania.

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Identyfikacja parametrów systemu</b>	<b>3</b>
2.1	Obliczenie momentu bezwładności wahadła . . . . .	3
2.2	Identyfikacja modelu dynamiki wózka . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Model matematyczny</b>	<b>6</b>
3.1	Wyprowadzenie modelu . . . . .	6
3.2	Równania stanu . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Regulator LQR</b>	<b>9</b>
4.1	Linearyzacja . . . . .	9
4.2	Analiza działania . . . . .	10
4.3	Tarcie statyczne . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Obserwator stanu</b>	<b>14</b>
5.1	Obserwator Luenbergera . . . . .	14
5.2	Filtracja sygnału prędkości wahadła . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Regulator <i>swing-up</i></b>	<b>16</b>
6.1	Algorytm <i>swing-up</i> . . . . .	16
6.2	Warunek przełączenia . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Wnioski</b>	<b>19</b>

## Bibliografia

- [1] Mitkowski W. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Kraków: Wydawnictwo AGH, 1996.
- [2] *Modelling and Control of a Twin-Rotor MIMO System*. URL: <http://madsogheidi.dk/uni/6sem/report.pdf>.