

# Solution for Time Series Analysis (Hamilton, 1994)

Lucca Simeoni Pavan \*

20 de outubro de 2016

---

\*Doutorando em Desenvolvimento Econômico, PPDGE/UFPR - warrenjax@gmail.com

## Capítulo 3

# Processos ARMA estacionários

3.1

$$E(Y_t) = 0 \because \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= E(Y_t - \mu)^2 = E(Y_t)^2 = \text{Var}(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}) \\ &= (1 + 5.76 + 0.64)\sigma^2 = 7.4 \end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo é estacionário em covariância.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) = E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + 2.4\varepsilon_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-3}) \\ &= (2.4 + 1.92)\sigma^2 = 4.32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) &= E(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu) = E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + 2.4\varepsilon_{t-3} + 0.8\varepsilon_{t-4}) \\ &= 0.8E(\varepsilon_{t-2}^2) = 0.8\sigma^2 = 0.8 \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} Y_t &= 1.1Y_{t-1} - 0.18Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ (1 - 1.1L + 0.18L^2)Y_t &= \varepsilon_t \\ Y_t &= (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}\varepsilon_t \end{aligned}$$

$$E(Y_t) = (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}E(\varepsilon_t) = 0 \because \mu = 0$$

Encontrando a variância :  $\gamma_0$

$$\begin{aligned} Y_t^2 &= 1.1Y_tY_{t-1} - 0.18Y_tY_{t-2} + Y_t\varepsilon_t \\ E(Y_t^2) &= 1.1E(Y_tY_{t-1}) - 0.18E(Y_tY_{t-2}) + E(Y_t\varepsilon_t) \\ \gamma_0 &= 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Encontrando a autocovariância  $\gamma_j$  :

$$\begin{aligned} Y_t Y_{t-j} &= 1.1 Y_{t-1} Y_{t-j} - 0.18 Y_{t-2} Y_{t-j} + Y_{t-j} \varepsilon_t \\ E(Y_t Y_{t-j}) &= 1.1 E(Y_{t-1} Y_{t-j}) - 0.18 E(Y_{t-2} Y_{t-j}) + E(Y_{t-j} \varepsilon_t) \\ \gamma_j &= 1.1 \gamma_{j-1} - 0.18 \gamma_{j-2} \end{aligned}$$

Dado que  $\rho_j = \gamma_j / \gamma_0$  dividindo ambos os lados de  $\gamma_j$  por  $\gamma_0$  temos:

$$\rho_j = 1.1 \rho_{j-1} - 0.18 \rho_{j-2}$$

Para  $j = 1$ ,  $\rho_1 = 1.1 \rho_0 - 0.18 \rho_1$ , então:

$$\rho_1 = \frac{1.1}{(1 + 0.18)} = 0.9322$$

Para  $j = 2$ ,  $\rho_2 = 1.1 \rho_1 - 0.18$ , então:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1.1(0.9322) - 0.18 \\ &= 0.8454 \end{aligned}$$

Como  $\gamma_j = \rho_j \gamma_0$ , podemos escrever a variância  $\gamma_0$  como:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1.1 \rho_1 \gamma_0 - 0.18 \rho_2 \gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.1(0.9322) \gamma_0 - 0.18(0.8454) \gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.02542 \gamma_0 - 0.152176 \gamma_0 + \sigma^2 \\ (1 - 1.02542 + 0.152176) \gamma_0 &= \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{(1 - 1.02542 + 0.152176)} \approx 7.9 \sigma^2 \end{aligned}$$

Podemos verificar pela fórmula geral:

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2) \sigma^2}{(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2^2)^2 - \phi_1^2]}$$

Dado que  $\phi_1 = 1.1$  e  $\phi_2 = -0.18$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1 + 0.18) \sigma^2}{(1 - 0.18)[(1 + 0.18)^2 - 1.1^2]} \\ &= \frac{(1.18) \sigma^2}{(0.82)[0.182]} \approx 7.9 \end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo  $\{Y_t\}$  é estacionário em covariância.

Para encontra as autocovariâncias usamos  $\gamma_j = \rho_j \gamma_0$ :

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 = 0.9322 \times 7.9 \sigma^2 \approx 7.364$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 = 0.8454 \times 7.9 \sigma^2 \approx 6.75$$

3.3

$$\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots - \phi_1 \psi_0 L - \phi_1 \psi_1 L^2 - \phi_1 \psi_2 L^3 - \dots - \phi_2 \psi_0 L^2 - \phi_2 \psi_1 L^3 - \phi_2 \psi_2 L^4 - \dots - \phi_p \psi_0 L^p - \phi_p \psi_1 L^{p+1} - \phi_p \psi_2 L^{p+2} - \dots = 1$$

$$\begin{aligned} & \psi_0 + [\psi_1 - \phi_1 \psi_0]L + [\psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0]L^2 + [\psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1 - \phi_3 \psi_0]L^3 \\ & + [\psi_4 - \phi_1 \psi_3 - \phi_2 \psi_2 - \phi_3 \psi_1 - \phi_4 \psi_0]L^4 + \dots + [\psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2} - \dots - \phi_{p-1} \psi_1 - \phi_p \psi_0]L^p = 1 \end{aligned}$$

Para  $j = p, p+1, \dots$

Com isso temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - \phi_1 \psi_0 &= 0 \\ \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0 &= 0 \\ \psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1 - \phi_3 \psi_0 &= 0 \\ \psi_4 - \phi_1 \psi_3 - \phi_2 \psi_2 - \phi_3 \psi_1 - \phi_4 \psi_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2} - \dots - \phi_{p-1} \psi_1 - \phi_p \psi_0 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a partir de  $\psi_0$ :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - \phi_1 \psi_0 &= 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1 \\ \psi_2 - \phi_1 \psi_1 - \phi_2 \psi_0 &= 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 \\ \psi_3 - \phi_1 \psi_2 - \phi_2 \psi_1 - \phi_3 \psi_0 &= 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1 \psi_2 + \phi_2 \psi_1 + \phi_3 \psi_0 \\ &\vdots \\ \psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2} - \dots - \phi_{p-1} \psi_1 - \phi_p \psi_0 &= 0 \Rightarrow \psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \dots + \phi_{p-1} \psi_1 + \phi_p \psi_0 \end{aligned}$$

Para  $j = p, p+1, \dots$

Portanto os valores de  $\psi_j$  são a solução para a equação de diferenças de  $n^{\text{ésima}}$  ordem com valor inicial  $\psi_0 = 1$  e  $\psi_{-1} = \psi_{-2} = \dots = \psi_{-p+1} = 0$ . Então, dos resultados das equações em diferença:

$$\begin{bmatrix} \psi_j \\ \psi_{j-1} \\ \vdots \\ \psi_{-p+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\psi_j = f_{11}^{(j)}$$

3.4

$$\psi(L)c = \psi_0 c + \psi_1 Lc + \psi_2 L^2 c + \psi_3 L^3 c + \dots = \frac{c}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2}$$

$$\text{como } L^j c = c \quad \forall \quad j$$

$$\psi(L)c \equiv \psi(1)c = \psi_0 c + \psi_1 c + \psi_2 c + \psi_3 c + \dots = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

3.5

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

Deixe  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  satisfazerem  $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$ , note que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ambos estão dentro do círculo unitário em um processo  $AR(2)$  estacionário em covariância.

Considere primeiro o caso em que as duas raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sejam reais e distintas. Dado que  $\psi_j = c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j| \\ &< \sum_{j=0}^{\infty} |c_1 \lambda_1^j| + |c_2 \lambda_2^j| \\ &= \frac{|c_1|}{(1 - |\lambda_1|)} + \frac{|c_2|}{(1 - |\lambda_2|)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Considere o caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sejam raízes complexas conjugadas distintas. Deixe  $R = |\lambda_i|$  representar o modulo de  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ . Então  $0 \leq R < 1$ . Dado que no caso de raízes complexas conjugadas distintas,

$$c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j = 2\alpha R^j \cos(\theta j) + 2\beta R^j \sin(\theta j).$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} |2\alpha R^j \cos(\theta j) + 2\beta R^j \sin(\theta j)| \\ &\leq |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\cos(\theta j)| + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\sin(\theta j)| \\ &\leq |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} R^j + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} R^j \\ &= 2 \frac{(|\alpha| + |\beta|)}{(1 - R)} \end{aligned}$$

Por fim, para o caso de raízes reais repetidas  $|\lambda| < 1$ ,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |k_1 \lambda^j + k_2 j \lambda^{j-1}| \leq |k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^j| + |k_2| \sum_{j=0}^{\infty} |j \lambda^{j-1}|.$$

Mas

$$|k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j = \frac{|k_1|}{(1 - |\lambda|)} < \infty$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |j\lambda^{j-1}| &= 1 + 2|\lambda| + 3|\lambda|^2 + 4|\lambda|^3 + \dots \\
&= 1 + (|\lambda| + |\lambda|) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^2 + |\lambda|^2) \\
&\quad + (|\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3) + \dots \\
&= (1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \dots) + (|\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \dots) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \dots) + \dots \\
&= \frac{1}{(1 - |\lambda|)} + \frac{|\lambda|}{(1 - |\lambda|)} + \frac{|\lambda|^2}{(1 - |\lambda|)} + \dots \\
&= \frac{1}{(1 - |\lambda|)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

**3.6**  $AR(\infty)$ :

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \dots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$ :

$$(Y_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

Dado que as raízes de  $1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$  são todas reais e distintas e estão fora do círculo unitário e o processo  $MA(q)$  é invertível, temos:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \dots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) = 1$$

Que ao multiplicarmos, resulta em:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \dots \\
&\quad + \theta_1 L + \theta_1 \eta_1 L^2 + \theta_1 \eta_2 L^3 + \dots \\
&\quad + \theta_2 L^2 + \theta_2 \eta_1 L^3 + \theta_2 \eta_2 L^4 + \dots \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \theta_q L^q + \theta_q \eta_1 L^{q+1} + \theta_q \eta_2 L^{q+1} + \dots
\end{aligned}$$

Para  $j = q, q + 1, \dots$  colocando os  $L^i$ 's em evidência:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + (\eta_1 + \theta_1)L \\
&\quad + (\eta_2 + \theta_1 \eta_1 + \theta_2)L^2 \\
&\quad + (\eta_3 + \theta_1 \eta_2 + \theta_2 \eta_1 + \theta_3)L^3 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\eta_j + \theta_1 \eta_{j-1} + \dots + \theta_{q-1} \eta_1 + \theta_q)L^j
\end{aligned}$$

Para  $j = q, q + 1, \dots$ . Para a igualdade valer, os coeficientes dos  $L^i$ 's devem ser zero, então:

$$\begin{aligned}
\eta_1 + \theta_1 &= 0 \Rightarrow \eta_1 = -\theta_1 \\
\eta_2 + \theta_1\eta_1 + \theta_2 &= 0 \Rightarrow \eta_2 = -\theta_1\eta_1 - \theta_2 = -\theta_2 + \theta_1^2 \\
\eta_3 + \theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1 + \theta_3 &= 0 \Rightarrow \eta_3 = -\theta_1\eta_2 - \theta_2\eta_1 - \theta_3 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_3 \\
&\vdots \\
\eta_j + \theta_1\eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\eta_1 + \theta_q &= 0 \Rightarrow \eta_j = -\theta_1\eta_{j-1} - \cdots - \theta_{q-1}\eta_1 - \theta_q
\end{aligned}$$

**3.7**  $AR(\infty)$ :

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$ :

$$Y_t - \mu = \left\{ \prod_{j=0}^n (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^q (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \varepsilon_t$$

Então:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots) \left\{ \prod_{j=0}^n (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^q (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} = 1$$

Efetuada a multiplicação, temos:

$$\begin{aligned}
1 &= \left\{ \prod_{j=0}^n (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^q (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ \prod_{j=0}^n (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^q (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ \prod_{j=0}^n (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^q (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 = & \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n - \frac{\left[ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n \right]}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \dots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
& + \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n \right. \\
& \left. - \frac{\left[ \eta_1 L + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n \right]}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \dots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
& + \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n \right. \\
& \left. - \frac{\left[ \eta_2 L^2 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_n L^n \right]}{\prod_{j=n+1}^q \lambda_j} \left[ \theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \dots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Como no exercício 6, devemos realizar as multiplicações e isolar os  $L^i$ 's para derivar o algoritmo dos coeficientes.

3.8

$$Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) &= 1 + 2.4z + 0.8z^2 \\
\lambda_1 &= -0.4, \quad \lambda_2 = -2
\end{aligned}$$

Então  $1 + 2.4z + 0.8z^2 = (1 + 0.4z)(1 + 2z)$  como uma raiz,  $\lambda_2$  está fora do círculo unitário, o termo  $(1 + 0.4z)(1 + 2z)$  não é invertível. O operador invertível é

$$(1 + 0.4z)(1 + 0.5z) = (1 + 0.9z + 0.2z^2).$$

Função geradora de autocovariância e invertibilidade para um processo  $MA(2)$  :

$$\begin{aligned}
g_Y(z) &= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2)(1 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_1 z^{-1} + \theta_1^2 + \theta_1 \theta_2 z + \theta_1 z^{-2} + \theta_1 \theta_2 z^{-1} + \theta_2^2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2[1 + \theta_2 z^2 + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2)z + (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)z^0 + \theta_2 z^{-2} + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2)z^{-1}] \\
&\equiv \sigma^2[(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1})]
\end{aligned}$$

Como  $\lambda_2 = -2$  está fora do círculo unitário, substituímos por seu inverso  $\lambda_2^{-1} = -0.5$ . Devemos também substituir  $\sigma^2$  por  $\sigma^2 \lambda_2^2$ . Lembrando que  $z^0 = 1$  para encontrarmos a autocovariância de ordem zero:



$$\begin{aligned}
g_Y &= \sigma^2 \lambda_2^2 [(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2^{-1} z)(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2^{-1} z^{-1})] \\
&= (1)4[(1 + 0.4z)(1 + 0.5z)(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})] \\
&= 4[(1 + 0.9z + 0.2z^2)(1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2})] \\
&= 4[z^0 + 0.9z + 0.2z^2 + 0.9z^{-1} + 0.18z^0 + 0.18z + 0.2z^{-2} + 0.018z^{-1} + 0.2z^0]
\end{aligned}$$

As autocovariâncias podem ser encontradas derivando a função geradora de autocovariâncias com respeito a  $z^j$  em que  $j$  é a ordem de defasagem desejada para a autocovariância.

Lembrando que  $z^0 = 1$  para encontrarmos a autocovariância de ordem zero. Então:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\partial g_Y}{\partial z^0} = 4[1 + 0.81 + 0.4] = 7.4 \\
\gamma_1 &= \frac{\partial g_Y}{\partial z^1} = 4[0.9 + 0.18] = 4.32 \\
\gamma_2 &= \frac{\partial g_Y}{\partial z^2} = 4[0.2] = 0.8
\end{aligned}$$

Que são as mesmas autocovariâncias do processo  $Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$  do exercício 1. Podemos concluir que o processo gerado pelo operador invertível

$$(1 + 0.4z)(1 + 0.5z) = (1 + 0.9z + 0.2z^2),$$

têm a variância  $\lambda_2^2 = 4$  vezes menor que o processo gerado pelo operador não invertível  $1 + 2.4L + 0.8L^2$ . Para verificação, vamos gerar as autocovariâncias do processo invertível, conforme a fórmula padrão. Como  $\theta_1 = 0.9$ ,  $\theta_2 = 0.2$  e  $\sigma^2 = 1$ , as autocovariâncias são:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_0 &= [1 + \theta_1^2 + \theta_2^2]\sigma^2 = 1 + 0.81 + 0.04 = 1.85 \\
\bar{\gamma}_1 &= [\theta_1 + \theta_1\theta_2]\sigma^2 = 0.9 + 0.18 = 1.08 \\
\bar{\gamma}_2 &= \theta_2\sigma^2 = 0.2
\end{aligned}$$

Isto ocorre pois a variância,  $\sigma^2$  das  $\bar{\gamma}_s$ 's deveria ter sido substituída por  $\sigma^2\lambda_2^2$ . Conclui-se que quando existe uma raiz  $\lambda_i$  fora do círculo unitário, as autocovariâncias do processo invertível associado devem ser infladas por um fator de

$$\prod_{i=n+1}^m \lambda_i^2.$$

em que  $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m$  são as raízes fora do círculo unitário,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são as raízes dentro do círculo unitário e  $m$  o número total de raízes.

# Capítulo 4

## Previsão

4.1 Fórmula 4.3.6:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}^{(m)'} &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_0^{(m)} & \alpha_1^{(m)} & \alpha_2^{(m)} & \cdots & \alpha_m^{(m)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1 + \mu^2 & \gamma_2 + \mu^2 & \cdots & \gamma_m + \mu^2 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \gamma_0 + \mu^2 & \gamma_1 + \mu^2 & \cdots & \gamma_{m-1} + \mu^2 \\ \mu & \gamma_1 + \mu^2 & \gamma_0 + \mu^2 & \cdots & \gamma_{m-2} + \mu^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \gamma_{m-1} + \mu^2 & \gamma_{m-2} + \mu^2 & \cdots & \gamma_0 + \mu^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\equiv E[Y_{t+1}\mathbf{X}_t'] E[\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t']^{-1} \\
 \text{Para } \mathbf{X}_t &= \begin{bmatrix} 1 & Y_t \end{bmatrix}' \\
 \boldsymbol{\alpha}^{(1)'} &= \begin{bmatrix} E[Y_{t+1}] & E[Y_{t+1}Y_t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & E[Y_t] \\ E[Y_t] & E[Y_t^2] \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1 + \mu^2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \gamma_0 + \mu^2 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0 + \mu^3 - \mu\gamma_1 - \mu^3 & -\mu^2 + \gamma_1 + \mu^2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0 - \mu\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 - \rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix} \\
 \hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t \\
 &= \begin{bmatrix} (1 - \rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} \\
 \hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= (1 - \rho_1)\mu + \rho_1 Y_t
 \end{aligned}$$

Portanto a previsão de  $Y_{t+1}$  com base em informações somente do período  $t$  é uma média ponderada entre o valor esperado de  $Y_t$  ( $\mu$ ) e  $Y_t$ , em que o fator de ponderação é o coeficiente de autocorrelação de primeira defasagem,  $\rho_1$ .

a) Processo  $AR(1)$ :

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equação 4.2.9:

$$\hat{E}[Y_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] = \mu + \frac{\psi(L)}{L^s} \varepsilon_t$$

Se o processo  $AR(1)$  for invertível ele pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{c}{1 - \phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L} \\ &= \mu + \psi(L)\varepsilon_t, \quad \psi(L) = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \dots \end{aligned}$$

Para  $Y_{t+1}$  o processo se torna:

$$Y_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1} + \phi \varepsilon_t + \phi^2 \varepsilon_{t-1} + \dots$$

O preditor linear ótimo tem a forma:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] = \mu + \phi \varepsilon_t + \phi^2 \varepsilon_{t-1} + \dots$$

Dividindo  $\psi(L)$  por  $L^s$  com  $s = 1$

$$\frac{\psi(L)}{L} = L^{-1} + \phi + \phi^2 L + \dots$$

e tratando os  $L$  com expoente negativo como zero para derivar o operador de aniquilação, o preditor ótimo para um período à frente pode ser escrito em notação de operador de defasagem:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] = \mu + \left[ \frac{\psi(L)}{L} \right]_+ \varepsilon_t$$

Que é idêntico à equação 4.2.9 com  $s = 1$ .

b) Processo  $MA(1)$ :

$$Y_n = \mu + \varepsilon_n + \theta \varepsilon_{n-1}$$

Equação 4.5.20:

$$\hat{E}(Y_n|Y_{n-1}, Y_{n-2}, \dots, Y_1) = \mu + \frac{\theta[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(n-2)}]}{[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(n-1)}]} \left[ Y_{n-1} - \hat{E}(Y_{n-1}|Y_{n-2}, Y_{n-3}, \dots, Y_1) \right]$$

O processo  $MA(1)$  pode ser escrito como:

$$Y_n - \mu = \varepsilon_n + \theta \varepsilon_{n-1}$$

As autocovariâncias são:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(Y_n - \mu)^2] = E(\varepsilon_n + \theta \varepsilon_{n-1})(\varepsilon_n + \theta \varepsilon_{n-1}) = E(\varepsilon_n^2 + 2\theta \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} + \theta^2 \varepsilon_{n-1}^2) = \sigma^2[1 + \theta^2] \\ \gamma_1 &= E[(Y_n - \mu)(Y_{n-1} - \mu)] = E[(\varepsilon_n + \theta \varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n-1} + \theta \varepsilon_{n-2})] \\ &= E(\varepsilon_n \varepsilon_{n-1} + \theta \varepsilon_n \varepsilon_{n-2} + \theta \varepsilon_{n-1}^2 + \theta^2 \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2}) = \sigma^2 \theta \\ \gamma_j &= 0 \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Temos que para  $n = 2$

$$\begin{aligned}\hat{E}(Y_2|Y_1) &= \mu + \text{Cov}(Y_2, Y_1)\text{Var}(Y_2^2)^{-1}(Y_1 - \hat{E}(Y_1)) \\ &= \mu + \frac{\theta}{1 + \theta^2}(Y_1 - \hat{E}(Y_1))\end{aligned}$$

Que é idêntico à equação 4.5.20 com  $n = 2$ .

c) Dado que

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = (1 - \rho_1)\mu + \rho_1 Y_t$$

Podemos rearranjar a expressão e obter

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \rho_1(Y_t - \mu)$$

Como o coeficiente de correlação de primeira defasagem de um processo  $AR(2)$  é

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

O preditor se torna

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}(Y_t - \mu)$$

O resíduo desta predição é

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{t+1|t} &= Y_{t+1} - \left[ \mu + \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}(Y_t - \mu) \right] \\ &= \mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} - \mu - \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}(Y_t - \mu) \\ &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\mu - \left( \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \right) Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

Verificando correlação entre resíduo e valores defasados:

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t} Y_t) &= E \left\{ \left[ \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\mu - \left( \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \right) Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \right] \left[ \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \right] \right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então,  $\hat{Y}_{t+1|t}$  e  $Y_t$  são correlacionados.

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t} Y_{t-1}) &= E \left\{ \left[ \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\mu - \left( \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \right) Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \right] \left[ \mu + \phi_1 Y_{t-2} + \phi_2 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-1} \right] \right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então,  $\hat{Y}_{t+1|t}$  e  $Y_{t-1}$  também são correlacionados.

**4.2** Como  $s = q = 1$ , temos um processo  $MA(1)$ :

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

E a predição a ser realizada para um período à frente:

$$E[Y_{t+1}|Y_t].$$

Dado que o processo  $MA(1)$  possa ser escrito na forma

$$Y_t - \mu = (1 + \theta L)\varepsilon_t.$$

Sendo a fórmula de predição de *Wiener-Kolmogorov* para  $s = 1$ :

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[ \frac{\psi(L)}{L} \right]_+ \varepsilon_t$$

Substituindo o processo

$$MA(1)$$

na fórmula temos:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[ \frac{1 + \theta L}{L} \right]_+ \frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Para o processo  $MA(1)$ :

$$\left[ \frac{1 + \theta L}{L} \right]_+ = \theta$$

Então podemos escrever a fórmula de *Wiener-Kolmogorov* como

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta \frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Expandindo a soma infinita representada:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta(Y_t - \mu) - \theta^2(Y_{t-1} - \mu) + \theta^3(Y_{t-2} - \mu) - \dots + (-1)^{m-1}\theta^m(Y_{t-m+1} - \mu)$$

Equivalente à equação 4.3.3.

4.3

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{E}_1' &= \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{E}_2 \mathbf{H} \mathbf{E}_2' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{E}_1' \mathbf{E}_2' &= \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{\Omega} (\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1)' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{D} \\
\mathbf{\Omega} &= \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} = (\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1)^{-1} &= \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{\Omega} \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[4.4] Não pois o coeficiente de  $Y_2$  da projeção linear de  $Y_4$  contra  $Y_3$ ,  $Y_2$  e  $Y_1$  é:

Dado que

$$Y_4 = \bar{Y}_4 + k_{43} k_{33}^{-1} \bar{Y}_3 + h_{41} h_{22}^{-1} \bar{Y}_2 + \Omega_{41} \Omega_{11}^{-1} \bar{Y}_1,$$

temos ainda que:

$$\bar{Y}_1 = Y,$$

$$\bar{Y}_2 = Y_2 - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \bar{Y}_1$$

$$\bar{Y}_3 = Y_3 - \Omega_{31} \Omega_{11}^{-1} Y_1 - h_{32} h_{22}^{-1} (Y_2 - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} \bar{Y}_1)$$

Substituindo em  $Y_4$  nos dá:

$$\begin{aligned}
Y_4 &= \bar{Y}_4 + k_{43} k_{33}^{-1} (Y_3 - \Omega_{31} \Omega_{11}^{-1} Y_1 - h_{32} h_{22}^{-1} (Y_2 - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} Y_1)) \\
&\quad + h_{41} h_{22}^{-1} (Y_2 - \Omega_{21} \Omega_{11}^{-1} Y_1) + \Omega_{41} \Omega_{11}^{-1} Y_1
\end{aligned}$$

Podemos observar que o coeficiente de  $Y_2$  é

$$h_{41} h_{22}^{-1} - k_{43} k_{33}^{-1} h_{32} h_{22}^{-1}$$

Já o elemento  $(4, 2)$  de  $\mathbf{A}$  é

$$h_{41}h_{22}^{-1}$$

Dado que  $k_{43}k_{33}^{-1}h_{32}h_{22}^{-1} \neq 0$ , os termos são diferentes e a resposta é não.

**4.5** Se  $X_t$  segue um processo  $AR(p)$  ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com  $\varepsilon_t$  sendo um *ruído branco*. Então o processo  $Y_t = X_t + \nu_t$  se torna

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + \nu_t.$$

Que por sua vez pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)\nu_t}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)} \\ &= \frac{\varepsilon_t + \nu_t - \phi_1 \nu_{t-1} - \phi_2 \nu_{t-2} - \cdots - \phi_p \nu_{t-p}}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)}. \end{aligned}$$

Que é um processo  $ARMA(p, p)$  com  $\theta_i = -\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

**4.6** Se  $X_t$  segue um processo  $AR(p)$  ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com  $\varepsilon_t$  sendo um *ruído branco*. Se  $Z_t$  segue um processo  $MA(q)$ , ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \\ &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) \epsilon_t \end{aligned}$$

Somando os dois processos temos:

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t + Z_t \\ &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) \epsilon_t \\ &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) \epsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Expandindo o termo  $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)$  temos:

$$\begin{aligned}
& 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\
& + \theta_1 L - \theta_1 \phi_1 L^2 - \theta_1 \phi_2 L^3 - \dots - \theta_1 \phi_p L^{p+1} \\
& + \theta_2 L^2 - \theta_2 \phi_1 L^3 - \theta_2 \phi_2 L^4 - \dots - \theta_2 \phi_p L^{p+2} \\
& + \vdots \\
& + \theta_q L^q - \theta_q \phi_1 L^{1+q} - \theta_q \phi_2 L^{2+q} - \dots - \theta_q \phi_p L^{p+q}
\end{aligned}$$

Então a maior ordem de defasagem de  $\epsilon_{t-j}$  é  $p + q$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, p + q$ . Com isso o processo  $Y_t$  é um processo  $ARMA(p, p + q)$ .



## Capítulo 5

# Estimação de Máxima Verossimilhança

5.1 Equação 5.4.16:

$$\mathcal{L}(\theta) = \log f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log(d_{tt}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\bar{y}_t^2}{d_{tt}}.$$

os termos que possuem  $\theta$  e  $\sigma^2$  são as equações 5.4.11

$$\bar{y} = y_t - \mu - \frac{\theta[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-2)}]}{[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-1)}]} \bar{y}_{t-1},$$

e 5.4.12

$$d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) = \sigma^2 \frac{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2t}}{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-1)}}.$$

as duas equações são compostas por uma razão de somas finitas, com isso temos:

$$\begin{aligned} \frac{\theta[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-2)}]}{[1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-1)}]} &= \frac{\theta \left[ \frac{1 - \theta^{2(t-2)}}{1 - \theta^2} \right]}{\frac{1 - \theta^{2(t-1)}}{1 - \theta^2}} \\ &= \theta \frac{[1 - \theta^{2(t-2)}]}{1 - \theta^{2(t-1)}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2t}}{1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2(t-1)}} &= \frac{\frac{1 - \theta^{2t}}{1 - \theta^2}}{\frac{1 - \theta^{2(t-1)}}{1 - \theta^2}} \\ &= \frac{1 - \theta^{2t}}{1 - \theta^{2(t-1)}} \end{aligned}$$

Se  $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$  e  $\theta = \bar{\theta}$ , então:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}[1 + \bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^4 + \dots + \bar{\theta}^{2(t-2)}]}{[1 + \bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^4 + \dots + \bar{\theta}^{2(t-1)}]} \bar{y}_{t-1}, \\ &= y_t - \mu - \bar{\theta} \frac{[1 - \bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1 - \bar{\theta}^{2(t-1)}} \bar{y}_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{tt} &= E(\bar{Y}_t^2) = \bar{\sigma}^2 \frac{1 + \bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^4 + \dots + \bar{\theta}^{2t}}{1 + \bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^4 + \dots + \bar{\theta}^{2(t-1)}} \\
&= \bar{\sigma}^2 \frac{1 - \bar{\theta}^{2t}}{1 - \bar{\theta}^{2(t-1)}}
\end{aligned}$$

Agora se  $\sigma^2 = \bar{\theta}^2 \bar{\sigma}^2$  e  $\theta = \bar{\theta}^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}^{-1}[1 + \bar{\theta}^{-2} + \bar{\theta}^{-4} + \dots + \bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{[1 + \bar{\theta}^{-2} + \bar{\theta}^{-4} + \dots + \bar{\theta}^{-2(t-1)}]} \bar{y}_{t-1}, \\
&= y_t - \mu - \bar{\theta}^{-1} \frac{[1 - \bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1 - \bar{\theta}^{-2(t-1)}} \bar{y}_{t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{tt} &= E(\bar{Y}_t^2) = \bar{\theta} \bar{\sigma}^2 \frac{1 + \bar{\theta}^{-2} + \bar{\theta}^{-4} + \dots + \bar{\theta}^{-2t}}{1 + \bar{\theta}^{-2} + \bar{\theta}^{-4} + \dots + \bar{\theta}^{-2(t-1)}} \\
&= \bar{\theta}^2 \bar{\sigma}^2 \frac{1 - \bar{\theta}^{-2t}}{1 - \bar{\theta}^{-2(t-1)}}
\end{aligned}$$

As duas formas são equivalentes pois

$$\bar{\theta}^{-1} \frac{[1 - \bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1 - \bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \bar{\theta} \frac{[1 - \bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1 - \bar{\theta}^{2(t-1)}}$$

e

$$\bar{\theta}^2 \frac{1 - \bar{\theta}^{-2t}}{1 - \bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \frac{1 - \bar{\theta}^{2t}}{1 - \bar{\theta}^{2(t-1)}} \quad \blacksquare$$

5.2 Equação 5.7.6:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -1.5\theta_1^2 - 2\theta_2^2$$

Equação 5.7.12:

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}).$$

Dado que  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [-1, 1]'$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} -3\theta_1 \\ -4\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} &= [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) \Rightarrow \\
\boldsymbol{\theta}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.3 a)

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2; y_1, y_2, \dots, y_T) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{T}{2} \log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^T \frac{2(y_t - \mu)}{2\sigma^2} = 0,$$

$$\sum_{t=1}^T y_t = T\mu \Rightarrow \hat{\mu} = T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow -\frac{T}{2\sigma^2} - \left[ -\sum_{t=1}^T \frac{2(y_t - \mu)^2}{4\sigma^4} \right] = 0,$$

$$\frac{T}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{t=1}^T (y_t - \mu)^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu})^2 \blacksquare$$

b)

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu^2} = -\sum_{t=1}^T \frac{2}{2\sigma^2} = -\frac{T}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = -\sum_{t=1}^T \frac{4(y_t - \mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{2T}{4\sigma^4} - \sum_{t=1}^T \frac{4\sigma^2(y_t - \mu)^2}{4\sigma^8} = \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)^2}{\sigma^6} =$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\sum_{t=1}^T \frac{4(y_t - \mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4}$$

Então a matriz Hessiana fica:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4} \\ -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}$$

Se avaliada em  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\hat{\mathcal{J}}_{2D} = -T^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}} = E \left\{ -T^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4} \\ -\sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix} \right\}$$

Dado que  $E[y_t] = \mu$  e  $E[(y_t - \mu)^2] = \sigma^2$ :

$$\hat{\mathcal{J}}_{2D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

c) A inversa de  $\hat{\mathcal{J}}_{2D}$  é:

$$\hat{\mathcal{J}}_{2D}^{-1} = 2\sigma^6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sigma^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} \hat{\mathcal{J}}_{2D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix}$$

com isso:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} \approx N \left( \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix} \right) \blacksquare$$