Solution for Time Series Analysis (Hamilton, 1994)

Lucca Simeoni Pavan *

27 de outubro de 2016

*Doutorando em Desenvolvimento Econômico, PPDGE/UFPR - warrenjax@gmail.com

Capítulo 3

Processos ARMA estacionários

$\boxed{3.1}$

$$E(Y_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = E(Y_t)^2 &= \mathrm{Var}(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}) \\ &= (1 + 5.76 + 0.64)\sigma^2 = 7.4 \end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo é estacionário em covariância.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + 2.4\varepsilon_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-3}) \\ &= (2.4 + 1.92)\sigma^2 = 4.32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + 2.4\varepsilon_{t-3} + 0.8\varepsilon_{t-4}) \\ &= 0.8E(\varepsilon_{t-2}^2) = 0.8\sigma^2 = 0.8 \end{aligned}$$

$\boxed{3.2}$

$$\begin{aligned} Y_t &= 1.1Y_{t-1} - 0.18Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ (1 - 1.1L + 0.18L^2)Y_t &= \varepsilon_t \\ Y_t &= (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}\varepsilon_t \end{aligned}$$

$$E(Y_t) = (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}E(\varepsilon_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{Encontrando a variância } : \gamma_0 \\ Y_t^2 &= 1.1Y_tY_{t-1} - 0.18Y_tY_{t-2} + Y_t\varepsilon_t \\ E(Y_t^2) &= 1.1E(Y_tY_{t-1}) - 0.18E(Y_tY_{t-2}) + E(Y_t\varepsilon_t) \\ \gamma_0 &= 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Encontrando a autocovariância γ_j :

$$\begin{aligned} Y_t Y_{t-j} &= 1.1 Y_{t-1} Y_{t-j} - 0.18 Y_{t-2} Y_{t-j} + Y_{t-j}\varepsilon_t \\ E(Y_t Y_{t-j}) &= 1.1 E(Y_{t-1} Y_{t-j}) - 0.18 E(Y_{t-j} Y_{t-2}) + E(Y_{t-j}\varepsilon_t) \\ \gamma_j &= 1.1\gamma_{j-1} - 0.18\gamma_{j-2} \end{aligned}$$

Dado que $\rho_j = \gamma_j/\gamma_0$ dividindo ambos os lados de γ_j por γ_0 temos:

$$\rho_j = 1.1\rho_{j-1} - 0.18\rho_{j-2}$$

Para $j = 1$, $\rho_1 = 1.1\rho_0 - 0.18\rho_1$, então:

$$\rho_1 = \frac{1.1}{(1 + 0.18)} = 0.9322$$

Para $j = 2$, $\rho_2 = 1.1\rho_1 - 0.18$, então:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1.1(0.9322) - 0.18 \\ &= 0.8454 \end{aligned}$$

Como $\gamma_j = \rho_j\gamma_0$, podemos escrever a variância γ_0 como:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1.1\rho_1\gamma_0 - 0.18\rho_2\gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.1(0.9322)\gamma_0 - 0.18(0.8454)\gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.02542\gamma_0 - 0.152176\gamma_0 + \sigma^2 \\ (1 - 1.02542 + 0.152176)\gamma_0 &= \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{(1 - 1.02542 + 0.152176)} \approx 7.9\sigma^2 \end{aligned}$$

Podemos verificar pela fórmula geral:

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2)\sigma^2}{(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2^2)^2 - \phi_1^2]}$$

Dado que $\phi_1 = 1.1$ e $\phi_2 = -0.18$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1 + 0.18)\sigma^2}{(1 - 0.18)[(1 + 0.18)^2 - 1.1^2]} \\ &= \frac{(1.18)\sigma^2}{(0.82)[0.182]} \approx 7.9 \end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo $\{Y_t\}$ é estacionário em covariância.

Para encontra as autocovariâncias usamos $\gamma_j = \rho_j\gamma_0$:

$$\gamma_1 = \rho_1\gamma_0 = 0.9322 \times 7.9\sigma^2 \approx 7.364$$

$$\gamma_2 = \rho_2\gamma_0 = 0.8545 \times 7.9\sigma^2 \approx 6.75$$

$\boxed{3.3}$

$$\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ... - \phi_1\psi_0 L - \phi_1\psi_1 L^2 - \phi_1\psi_2 L^3 - ... - \phi_2\psi_0 L^2 - \phi_2\psi_1 L^3 - \phi_2\psi_2 L^4 - ...$$
$$- \phi_p\psi_0 L^p - \phi_p\psi_1 L^{p+1} - \phi_p\psi_2 L^{p+2} - ... = 1$$

$$\psi_0 + [\psi_1 - \phi_1\psi_0]L + [\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0]L^2 + [\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0]L^3$$
$$+ [\psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0]L^4 + ... + [\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0]L^p = 1$$

Para $j = p, p+1, ...$

Com isso temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 1\\
\psi_1 - \phi_1\psi_0 &= 0\\
\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 &= 0\\
\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 &= 0\\
\psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0 &= 0\\
&\vdots\\
\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_{j-p} &= 0
\end{aligned}$$

Resolvendo a partir de ψ_0:

$$\begin{gathered}
\psi_0 = 1\\
\psi_1 - \phi_1\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1\\
\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2\\
\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3\psi_0\\
\vdots\\
\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + ... + \phi_{p-1}\psi_1 + \phi_p\psi_{j-p}
\end{gathered}$$

Para $j = p, p+1, ...$

Portanto os valores de ψ_j são a solução para a equação de diferenças de $n^{\text{ésima}}$ ordem com valor inicial $\psi_0 = 1$ e $\psi{-1} = \psi_{-2} = ... = \psi_{-p+1} = 0$. Então, dos resultados das equações em diferença:

$$\begin{bmatrix} \psi_j \\ \psi_{j-1} \\ \vdots \\ \psi_{-p+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é
$$\psi_j = f_{11}^{(j)}$$

$\boxed{3.4}$

$$\psi(L)c = \psi_0 c + \psi_1 Lc + \psi_2 L^2 c + \psi_3 L^3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2}$$
$$\text{como } L^j c = c \ \ \forall \ \ j$$
$$\psi(L)c \equiv \psi(1)c = \psi_0 c + \psi_1 c + \psi_2 c + \psi_3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

$\boxed{3.5}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

Deixe λ_1 e λ_2 satisfazerem $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$, note que λ_1 e λ_2 ambos estão dentro do círculo unitário em um processo $AR(2)$ estacionário em covariância.

Considere primeiro o caso em que as duas raízes λ_1 e λ_2 sejam reais e distintas. Dado que $\psi_j = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j| \\
&< \sum_{j=0}^{\infty} |c_1\lambda_1^j| + |c_2\lambda_2^j| \\
&= \frac{|c_1|}{(1 - |\lambda_1|)} + \frac{|c_2|}{(1 - |\lambda_2|)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Considere o caso em que λ_1 e λ_2 sejam raízes complexas conjugadas distintas. Deixe $R - |\lambda_i|$ representar o modulo de λ_1 ou λ_2. Então $0 \leqslant R < 1$. Dado que no caso de raízes complexas conjugadas distintas,

$$c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j = 2\alpha R^j \cos(\theta j) + 2\beta R^j \text{sen}(\theta j).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} |2\alpha R^j \cos(\theta j) - 2\beta R^j \text{sen}(\theta j)| \\
&\leqslant |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\cos(\theta j)| + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\text{sen}(\theta j)| \\
&\leqslant |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} |R^j| + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} |R^j \\
&= 2\frac{(|\alpha| + |\beta|)}{(1 - R)}
\end{aligned}$$

Por fim, para o caso de raízes reais repetidas $|\lambda| < 1$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |k_1\lambda^j + k_2 j\lambda^{j-1}| \leqslant |k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^j| + |k_2| \sum_{j=0}^{\infty} |j\lambda^{j-1}|.$$

Mas

$$|k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j = \frac{|k_1|}{(1 - |\lambda|)} < \infty$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |j\lambda^{j-1}| &= 1 + 2|\lambda| + 3|\lambda|^2 + 4\lambda|^3 + \cdots \\
&= 1 + (|\lambda| + |\lambda|) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^2 + |\lambda|^2) \\
&\quad + (|\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3) + \cdots \\
&= (1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + \cdots \\
&= \frac{1}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|^2}{(1-|\lambda|)} + \cdots \\
&= \frac{1}{(1-|\lambda|)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

$\boxed{3.6}$ $AR(\infty)$:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$:

$$(Y_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

Dado que as raízes de $1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q$ são todas reais e distintas e estão fora do círculo unitário e o processo $MA(q)$ é invertível, temos:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) = 1$$

Que ao multiplicarmos, resulta em:

$$\begin{aligned}
1 = 1 &+ \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots \\
&+ \theta_1 L + \theta_1\eta_1 L^2 + \theta_1\eta_2 L^3 + \cdots \\
&+ \theta_2 L^2 + \theta_2\eta_1 L^3 + \theta_2\eta_2 L^4 + \cdots \\
&\vdots \\
&+ \theta_q L^q + \theta_q\eta_1 L^{q+1} + \theta_q\eta_2 L^{q+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. colocando os L^i's em evidência:

$$\begin{aligned}
1 = \ & 1 + (\eta_1 + \theta_1)L \\
&+ (\eta_2 + \theta_1\eta_1 + \theta_2)L^2 \\
&+ (\eta_3 + \theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1 + \theta_3)L^3 \\
&\vdots \\
&+ (\eta_j + \theta_1\eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\eta_1 + \theta_q)L^j
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. Para a igualdade valer, os coeficientes dos L^i's devem ser zero, então:

$$
\begin{aligned}
\eta_1 + \theta_1 = 0 &\Rightarrow \eta_1 = -\theta_1 \\
\eta_2 + \theta_1\eta_1 + \theta_2 = 0 &\Rightarrow \eta_2 = -\theta_1\eta_1 - \theta_2 = -\theta_2 + \theta_1^2 \\
\eta_3 + \theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1 + \theta_3 = 0 &\Rightarrow \eta_3 = -\theta_1\eta_2 - \theta_2\eta_1 - \theta_3 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_3 \\
&\vdots \\
\eta_j + \theta_1\eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\eta_1 + \theta_q = 0 &\Rightarrow \eta_j = -\theta_1\eta_{j-1} - \cdots - \theta_{q-1}\eta_1 - \theta_q
\end{aligned}
$$

$\boxed{3.7}$ $AR(\infty)$:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$:

$$Y_t - \mu = \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \varepsilon_t$$

Então:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots) \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} = 1$$

Efetuando a multiplicação, temos:

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$1 = \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n - \frac{\left[1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n\right]}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right] \right\}$$

$$+ \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right.$$

$$\left. - \frac{\left[\eta_1 L 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n\right]}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right] \right\}$$

$$+ \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right.$$

$$\left. - \frac{\left[\eta_2 L^2 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n\right]}{\prod_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q\right] \right\}$$

$$\vdots$$

Como no exercício 6, devemos realizar as multiplicações e isolar os L^i's para derivar o algoritmo dos coeficientes.

$\boxed{3.8}$

$$Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) = 1 + 2.4z + 0.8z^2$$
$$\lambda_1 = -0.4, \;\; \lambda_2 = -2$$

Então $1+2.4z+0.8z^2 = (1+0.4z)(1_2 z)$ como uma raiz, λ_2 está está fora do círculo unitário, o termo $(1 + 0.4z)(1 + 2z)$ não é invertível. O operador invertível é

$$(1 + 0.4z)(1 + 0.5z) = (1 + 0.9z + 0.2z^2).$$

Função geradora de autocovariância e invertibilidade para um processo $MA(2)$:

$$\begin{aligned} g_Y(z) &= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2)(1 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2}) \\ &= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_1 z^{-1} + \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 z + \theta_1 z^{-2} + \theta_1\theta_2 z^{-1} + \theta_2^2 z^{-2}) \\ &= \sigma^2[1 + \theta_2 z^2 + (\theta_1 + \theta_1\theta_2)z + (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)z^0 + \theta_2 z^{-2} + (\theta_1 + \theta_1\theta_2)z^{-1}] \\ &\equiv \sigma^2[(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1})] \end{aligned}$$

Como $\lambda_2 = -2$ está fora do círculo unitário, substituímos por seu inverso $\lambda_2^{-1} = -0.5$. Devemos também substituir σ^2 por $\sigma^2\lambda_2^2$.Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero:

$$
\begin{aligned}
g_Y &= \sigma^2\lambda_2^2[(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2^{-1}z)(1-\lambda_1 z^{-1})(1-\lambda_2^{-1}z^{-1})] \\
&= (1)4[(1+0.4z)(1+0.5z)(1+0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})] \\
&= 4[(1+0.9z+0.2z^2)(1+0.9z^{-1}+0.2z^{-2})] \\
&= 4[z^0+0.9z+0.2z^2+0.9z^{-1}+0.18z^0+0.18z+0.2z^{-2}+0.018z^{-1}+0.2z^0]
\end{aligned}
$$

As autocovariâncias podem ser encontradas derivando a função geradora de autocovariâncias com respeito a z^j em que j é a ordem de defasagem desejada para a autocovariância. Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero. Então:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^0} = 4[1+0.81+0.4] = 7.4 \\
\gamma_1 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^1} = 4[0.9+0.18] = 4.32 \\
\gamma_2 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^2} = 4[0.2] = 0.8
\end{aligned}
$$

Que são as mesmas autocovariâncias do processo $Y_t = (1+2.4L+0.8L^2)\varepsilon_t$ do exercício 1. Podemos concluir que o processo gerado pelo operador invertível

$$(1+0.4z)(1+0.5z) = (1+0.9z+0.2z^2),$$

têm a variância $\lambda_2^2 = 4$ vezes menor que o processo gerado pelo operador não invertível $1+2.4L+0.8L^2$. Para verificação, vamos gerar as autocovariâncias do processo invertível, conforme a fórmula padrão. Como $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = 0.2$ e $\sigma^2 = 1$, as autocovariâncias são:

$$
\begin{aligned}
\bar{\gamma_0} &= [1+\theta_1^2+\theta_2^2]\sigma^2 = 1+0.81+0.04 = 1.85 \\
\bar{\gamma_1} &= [\theta_1+\theta_1\theta_2]\sigma^2 = 0.9+0.18 = 1.08 \\
\bar{\gamma_2} &= \theta_2\sigma^2 = 0.2
\end{aligned}
$$

Isto ocorre pois a variância, σ^2 das $\bar{\gamma}_s$'s deveria ter sido substituída por $\sigma^2\lambda_2^2$. Conclui-se que quando existe uma raiz λ_i fora do círculo unitário, as autocovariâncias do proceso invertível associado devem ser infladas por um fator de

$$\prod_{i=n+1}^{m} \lambda_i^2.$$

em que $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_m$ são as raízes fora do círculo unitário, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são as raízes dentro do círculo unitário e m o número total de raízes.

Capítulo 4

Previsão

$\boxed{4.1}$ Fórmula 4.3.6:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(m)\prime} &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_0^{(m)} & \alpha_1^{(m)} & \alpha_2^{(m)} & \cdots & \alpha_m^{(m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1 + \mu^2 & \gamma_2 + \mu^2 & \cdots & \gamma_m + \mu^2 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \gamma_0 + \mu^2 & \gamma_1 + \mu^2 & \cdots & \gamma_{m-1} + \mu^2 \\ \mu & \gamma_1 + \mu^2 & \gamma_0 + \mu^2 & \cdots & \gamma_{m-2} + \mu^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \gamma_{m-1} + \mu^2 & \gamma_{m-2} + \mu^2 & \cdots & \gamma_0 + \mu^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&\equiv E[Y_{t+1}\mathbf{X}_t']E[\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t']^{-1}
\end{aligned}
$$

Para $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & Y_t \end{bmatrix}'$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(1)\prime} &= \begin{bmatrix} E[Y_{t+1}] & E[Y_{t+1}Y_t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & E[Y_t] \\ E[Y_t] & E[Y_t^2] \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1 + \mu^2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \gamma_0 + \mu^2 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0 + \mu^3 - \mu\gamma_1 - \mu^3 & -\mu^2 + \gamma_1 + \mu^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0 - \mu\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-\rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t \\
&= \begin{bmatrix} (1-\rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} \\
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= (1-\rho_1)\mu + \rho_1 Y_t
\end{aligned}
$$

Portanto a previsão de Y_{t+1} com base em informações somente do período t é uma média ponderada entre o valor esperado de Y_t (μ) e Y_t, em que o fator de ponderação é o coeficiente de autocorrelação de primeira defasagem, ρ_1.

a) Processo $AR(1)$:

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equação 4.2.9:

$$\hat{E}[Y_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \frac{\psi(L)}{L^s}\varepsilon_t$$

Se o processo $AR(1)$ for invertível ele pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{c}{1-\phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L} \\ &= \mu + \psi(L)\varepsilon_t, \quad \psi(L) = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots \end{aligned}$$

Para Y_{t+1} o processo se torna:

$$Y_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1} + \phi\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

O preditor linear ótimo tem a forma:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \phi\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

Dividindo $\psi(L)$ por L^s com $s = 1$

$$\frac{\psi(L)}{L} = L^{-1} + \phi + \phi^2 L + \cdots$$

e tratando os L com expoente negativo como zero para derivar o operador de aniquilação, o preditor ótimo para um período à frente pode ser escrito em notação de operador de defasagem:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \left[\frac{\psi(L)}{L}\right]_+ \varepsilon_t$$

Que é idêntico à equação 4.2.9 com $s = 1$.

b) Processo $MA(1)$:

$$Y_n = \mu + \varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}$$

Equação 4.5.20:

$$\hat{E}(Y_n|Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1) = \mu + \frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(n-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(n-1)}]}\left[Y_{n-1} - \hat{E}(Y_{n-1}|Y_{n-2}, Y_{n-3}, \cdots, Y_1)\right]$$

O processo $MA(1)$ pode ser escrito como:

$$Y_n - \mu = \varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}$$

As autocovariâncias são:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(Y_n-\mu)^2] = E(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}) = E(\varepsilon_n^2 + 2\theta\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + \theta^2\varepsilon_{n-1}^2) = \sigma^2[1+\theta^2] \\ \gamma_1 &= E[(Y_n-\mu)(Y_{n-1}\mu)] = E[(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n-1} + \theta\varepsilon_{n-2})] \\ &= E(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + \theta\varepsilon_n\varepsilon_{n-2} + \theta\varepsilon_{n-1}^2 + \theta^2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}) = \sigma^2\theta \\ \gamma_j &= 0 \quad j = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

Temos que para $n = 2$

$$\begin{aligned}\hat{E}(Y_2|Y_1) &= \mu + \text{Cov}(Y_2, Y_1)\text{Var}(Y_2^2)^{-1}(Y_1 - \hat{E}(Y_1)) \\ &= \mu + \frac{\theta}{1+\theta^2}(Y_1 - \hat{E}(Y_1))\end{aligned}$$

Que é idêntico à equação 4.5.20 com $n = 2$.

c) Dado que

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = (1-\rho_1)\mu + \rho_1 Y_t$$

Podemos rearranjar a expressão e obter

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \rho_1(Y_t - \mu)$$

Como o coeficiente de correlação de primeira defasagem de um processo $AR(2)$ é

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

O preditor se torna

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu)$$

O resíduo desta predição é

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{t+1|t} &= Y_{t+1} - \left[\mu + \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu)\right] \\ &= \mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} - \mu - \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu) \\ &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

Verificando correlação entre resíduo e valores defasados:

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t}Y_t) &= E\left\{\left[\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\right]\left[\mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t\right]\right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então, $\hat{Y}_{t+1|t}$ e Y_t são correlacionados.

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t}Y_{-1}) &= E\left\{\left[\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\right]\left[\mu + \phi_1 Y_{t-2} + \phi_2 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-1}\right]\right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então, $\hat{Y}_{t+1|t}$ e Y_{t-1} também são correlacionados.

$\boxed{4.2}$ Como $s = q = 1$, temos um processo $MA(1)$:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

E a predição a ser realizada para um período à frente:

$$E[Y_{t+1}|Y_t].$$

Dado que o processo $MA(1)$ possa ser escrito na forma

$$Y_t - \mu = (1 + \theta L)\varepsilon_t.$$

Sendo a fórmula de predição de *Wiener-Kolmogorov* para $s = 1$:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[\frac{\psi(L)}{L}\right]_+ \varepsilon_t$$

Substituindo o processo

$$MA(1)$$

na fórmula temos:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[\frac{1 + \theta L}{L}\right]_+ \frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Para o processo $MA(1)$:

$$\left[\frac{1 + \theta L}{L}\right]_+ = \theta$$

Então podemos escrever a fórmula de *Wiener-Kolmogorov* como

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta \frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Expandindo a soma infinita representada:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta(Y_t - \mu) - \theta^2(Y_{t-1} - \mu) + \theta^3(Y_{t-2} - \mu) - \cdots + (-1)^{m-1}\theta^m(Y_{t-m+1} - \mu)$$

Equivalente à equação 4.3.3.

$\boxed{4.3}$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_1{}' = \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2\mathbf{H}\mathbf{E}_2{}' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{E}_1{}'\mathbf{E}_2{}' = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)' = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{D}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.4}$ Não pois o coeficiente de Y_2 da projeção linear de Y_4 contra Y_3, Y_2 e Y_1 é:
Dado que

$$Y_4 = \bar{Y}_4 + k_{43}k_{33}^{-1}\bar{Y}_3 + h_{41}h_{22}^{-1}\bar{Y}_2 + \Omega_{41}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1,$$

temos ainda que:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= Y, \\ \bar{Y}_2 &= Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_3 &= Y_3 - \Omega_{31}\Omega_{11}^{-1}Y_1 - h_{32}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1) \end{aligned}$$

Substituindo em Y_4 nos dá:

$$\begin{aligned} Y_4 = \bar{Y}_4 &+ k_{43}k_{33}^{-1}(Y_3 - \Omega_{31}\Omega_{11}^{-1}Y_1 - h_{32}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}Y_1)) \\ &+ h_{41}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1})Y_1 + \Omega_{41}\Omega_{11}^{-1}Y_1 \end{aligned}$$

Podemos observar que o coeficiente de Y_2 é

$$h_{41}h_{22}^{-1} - k_{43}k_{33}^{-1}h_{32}h_{22}^{-1}$$

Já o elemento $(4,2)$ de $\mathbf{A}$ é

$$h_{41}h_{22}^{-1}$$

Dado que $k_{43}k_{33}^{-1}h_{32}h_{22}^{-1} \neq 0$, os termos são diferentes e a resposta é não.

$\boxed{4.5}$ Se X_t segue um processo $AR(p)$ ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com ε_t sendo um *ruído branco*. Então o processo $Y_t = X_t + \nu_t$ se torna

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + \nu_t.$$

Que por sua vez pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)\nu_t}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)} \\ &= \frac{\varepsilon_t + \nu_t - \phi_1 \nu_{t-1} - \phi_2 \nu_{t-2} - \cdots - \phi_p \nu_{t-p}}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)}. \end{aligned}$$

Que é um processo $ARMA(p,p)$ com $\theta_i = -\phi_i$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

$\boxed{4.6}$ Se X_t segue um processo $AR(p)$ ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com ε_t sendo um *ruído branco*. Se Z_t segue um processo $MA(q)$, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t \end{aligned}$$

Somando os dois processos temos:

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t + Z_t \\ &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t \\ &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Expandindo o termo $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)$ temos:

$$
\begin{aligned}
&1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p \\
&+ \theta_1 L - \theta_1\phi_1 L^2 - \theta_1\phi_2 L^3 - \cdots - \theta_1\phi_p L^{p+1} \\
&+ \theta_2 L^2 - \theta_2\phi_1 L^3 - \theta_2\phi_2 L^4 - \cdots - \theta_2\phi_p L^{p+2} \\
&+ \vdots \\
&+ \theta_q L^q - \theta_q\phi_1 L^{1+q} - \theta_q\phi_2 L^{2+q} - \cdots - \theta_q\phi_p L^{p+q}
\end{aligned}
$$

Então a maior ordem de defasagem de ϵ_{t-j} é $p+q,\ j = 0, 1, 2, \cdots, p+q$. Com isso o processo Y_t é um processo $ARMA(p, p+q)$.

Capítulo 5

Estimação de Máxima Verossimilhança

$\boxed{5.1}$ Equação 5.4.16:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}) = \log f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(d_{tt}) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\bar{y}_t^2}{d_{tt}}.$$

os termos que possuem θ e σ^2 são as equações 5.4.11

$$\bar{y} = y_t - \mu - \frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1},$$

e 5.4.12

$$d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) = \sigma^2\frac{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2t}}{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}}.$$

as duas equações são compostas por uma razão de somas finitas, com isso temos:

$$\begin{aligned}\frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}]} &= \frac{\theta[\frac{1-\theta^{2(t-2)}}{1-\theta^2}]}{\frac{1-\theta^{2(t-1)}}{1-\theta^2}}\\ &= \theta\frac{[1-\theta^{2(t-2)}]}{1-\theta^{2(t-1)}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2t}}{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}} &= \frac{\frac{1-\theta^{2t}}{1-\theta^2}}{\frac{1-\theta^{2(t-1)}}{1-\theta^2}}\\ &= \frac{1-\theta^{2t}}{1-\theta^{2(t-1)}}\end{aligned}$$

Se $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ e $\theta = \bar{\theta}$, então:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}[1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{[1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1},\\ &= y_t - \mu - \bar{\theta}\frac{[1-\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}}\bar{y}_{t-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) &= \bar{\sigma}^2 \frac{1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2t}}{1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-1)}} \\ &= \bar{\sigma}^2 \frac{1-\bar{\theta}^{2t}}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}} \end{aligned}$$

Agora se $\sigma^2 = \bar{\theta}^2\bar{\sigma}^2$ e $\theta = \bar{\theta}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}^{-1}[1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{[1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1}, \\ &= y_t - \mu - \bar{\theta}^{-1}\frac{[1-\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}}\bar{y}_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) &= \bar{\theta}\bar{\sigma}^2 \frac{1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2t}}{1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \\ &= \bar{\theta}^2\bar{\sigma}^2 \frac{1-\bar{\theta}^{-2t}}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \end{aligned}$$

As duas formas são equivalentes pois

$$\bar{\theta}^{-1}\frac{[1-\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \bar{\theta}\frac{[1-\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}}$$

e

$$\bar{\theta}^2\frac{1-\bar{\theta}^{-2t}}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \frac{1-\bar{\theta}^{2t}}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}} \quad \blacksquare$$

$\boxed{5.2}$ Equação 5.7.6:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}) = -1.5\theta_1^2 - 2\theta_2^2$$

Equação 5.7.12:

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}).$$

Dado que $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [-1, 1]'$.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} -3\theta_1 \\ -4\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} &= [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) \Rightarrow \\ \boldsymbol{\theta}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\boxed{5.3}$ a)

$$\mathscr{L}(\mu, \sigma^2; y_1, y_2, \cdots, y_T) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{T}\frac{2(y_t-\mu)}{2\sigma^2} = 0,$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_t = T\mu \Rightarrow \hat{\mu} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow -\frac{T}{2\sigma^2} - \left[-\sum_{t=1}^{T}\frac{2(y_t-\mu)^2}{4\sigma^4}\right] = 0,$$
$$\frac{T}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\mu)^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\hat{\mu})^2 \quad \blacksquare$$

b)

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \mu^2} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{2}{2\sigma^2} = -\frac{T}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{4(y_t-\mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{2T}{4\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{4\sigma^2(y_t-\mu)^2}{4\sigma^8} = \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{4(y_t-\mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4}$$

Então a matriz Hessiana fica:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} \\ -\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}$$

Se multiplicada por T^{-1} e avaliada em $\theta = \hat{\theta}$:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D} = -T^{-1}\left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = E\left\{-T^{-1}\begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} \\ -\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum\limits_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}\right\}$$

Dado que $E[y_t] = \mu$ e $E[(y_t - \mu)^2] = \sigma_2$:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D} = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/2\sigma^4 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

c) A inversa de $\hat{\mathscr{I}}_{2D}$ é:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D}^{-1} = 2\sigma^6 \begin{bmatrix} 1/2\sigma^4 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por T^{-1}:

$$T^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{2D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix}$$

com isso:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} \approx N\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix} \right) \quad \blacksquare$$

Capítulo 6

Análise Spectral

6.1 Equação 6.1.12:

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)].$$

equação 6.1.6:

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\cos(\omega j)\right\}.$$

Autocovariâncias de um processo $MA(1)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2[1 + \theta^2] \\
\gamma_1 &= \sigma^2\theta \\
\gamma_k &= 0 \quad k \geqslant 2
\end{aligned}$$

Substituindo as autocovariâncias na equação 6.1.6, temos:

$$\begin{aligned}
s_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left\{\sigma^2[1 + \theta^2] + 2\sigma^2\theta\cos(\omega)\right\} \\
&= 2\pi^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.2 Equação 6.1.9:

$$s_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

Equação 6.1.12:

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)].$$

Equação 6.1.17:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega)\mathrm{d}\omega = \gamma_0$$

Integrando 6.1.9:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma^2}{2\pi}\mathrm{d}\omega &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big[\omega\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}[\pi - (-\pi)] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}2\pi \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

Integrando 6.1.12:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{-1}\sigma^2[1+\theta^2+2\theta\cos(\omega)]\mathrm{d}\omega &= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[\omega+\theta^2\omega+2\theta\mathrm{sen}(\omega)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[(\pi+\theta^2\pi+2\theta\mathrm{sen}(\pi)) - (-\pi+\theta^2(-\pi)+2\theta\mathrm{sen}(-\pi))\Big] \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[(\pi+\theta^2\pi+2\theta\mathrm{sen}(\pi)) + \pi+\theta^2\pi-2\theta\mathrm{sen}(-\pi))\Big] \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[2\pi(1+\theta^2)\Big] \\
&= \sigma^2[1+\theta^2]
\end{aligned}$$

Já que $\mathrm{sen}(\pi) = \mathrm{sen}(-\pi) = 0$. ■

Capítulo 10

Processos Vetoriais Estacionários em Covariância

$\boxed{10.1}$ Equação 10.2.19:

$$\text{vec}\begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{p-1} \\ \Gamma_1' & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{p-1}' & \Gamma_{p-2}' & \cdots & \Gamma_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{r^2} - \mathscr{A}]^{-1}\text{vec}(\mathbf{Q}).$$

Sendo que $r = np$ e

$$\mathscr{A} \equiv \mathbf{F}_{(r\times r)} \otimes \mathbf{F}_{(r\times r)}$$

Um processo escalar $(n = 1)$ $AR(p)$ tem o forma:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ou em forma vetorial:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{v}_t,$$

Avaliando a fórmula 10.2.19 para um processo escalar temos:

$$\text{vec}\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}\text{vec}(\mathbf{Q}).$$

Com

$$\mathscr{A} \equiv \mathbf{F}_{(p\times p)} \otimes \mathbf{F}_{(p\times p)}$$

Temos ainda que $\mathbf{Q}$ para um processo escalar se torna:

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{v}\mathbf{v}'] = E\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_t & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\right\}$$
$$= E\begin{bmatrix}\varepsilon_t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Realizando a operação vec nos dois lados da equação 10.2.19 para o processo escalar:

$$\begin{bmatrix}\gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{p-2} \\ \vdots \\ \gamma_{p-1} \\ \gamma_{p-2} \\ \vdots \\ \gamma_0\end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}\sigma^2 \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

dados que $[\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}$ é uma matriz $p^2 \times p^2$ e o vetor coluna do lado direito tem dimensão $P^2 \times 1$, o produto dos dois termos pode ser feito da seguinte forma. Deixe que $[\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}$ seja igual a uma matriz $\mathbf{H}$ e que ela seja particionada em p^2 vetores coluna $\mathbf{h}_j$ de dimensão $p^2 \times 1$ com $j = 1, 2, \cdots, p^2$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{p^2}\end{bmatrix}$$

Então o produto fica um vetor coluna de dimensão $p^2 \times 1$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{p^2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ \vdots \\ o\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1(1) + \mathbf{h}_2(0) + \cdots + \mathbf{h}_{p^2}(0)\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)}$$

Com isso os p primeiros termos do lado esquerdo do processo escalar empilhado é o vetor coluna

$$\begin{bmatrix}\gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{p-1}\end{bmatrix}$$

e os p primeiros termos do lado direito desta mesma equação é um vetor composto pelos p primeiros elementos do vetor

$$\sigma^2 \left[\mathbf{h}_1\right]_{(p^2 \times 1)},$$

que é equivalente aos p primeiros elementos da primeira coluna de

$$\sigma^2 \mathbf{H} \equiv \sigma^2 [\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1} \quad \blacksquare$$

.