Solution for Time Series Analysis (Hamilton, 1994)

Lucca Simeoni Pavan *

28 de novembro de 2016

*Doutorando em Desenvolvimento Econômico, PPDGE/UFPR - warrenjax@gmail.com

Capítulo 3

Processos ARMA estacionários

$\boxed{3.1}$

$$E(Y_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = E(Y_t)^2 &= \mathrm{Var}(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}) \\ &= (1 + 5.76 + 0.64)\sigma^2 = 7.4\end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo é estacionário em covariância.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + 2.4\varepsilon_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-3}) \\ &= (2.4 + 1.92)\sigma^2 = 4.32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + 2.4\varepsilon_{t-3} + 0.8\varepsilon_{t-4}) \\ &= 0.8E(\varepsilon_{t-2}^2) = 0.8\sigma^2 = 0.8\end{aligned}$$

$\boxed{3.2}$

$$\begin{aligned}Y_t &= 1.1Y_{t-1} - 0.18Y_{t-2} + \varepsilon_t \\ (1 - 1.1L + 0.18L^2)Y_t &= \varepsilon_t \\ Y_t &= (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}\varepsilon_t\end{aligned}$$

$$E(Y_t) = (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}E(\varepsilon_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

Encontrando a variância $: \gamma_0$

$$\begin{aligned}Y_t^2 &= 1.1Y_tY_{t-1} - 0.18Y_tY_{t-2} + Y_t\varepsilon_t \\ E(Y_t^2) &= 1.1E(Y_tY_{t-1}) - 0.18E(Y_tY_{t-2}) + E(Y_t\varepsilon_t) \\ \gamma_0 &= 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_2 + \sigma^2\end{aligned}$$

Encontrando a autocovariância γ_j :

$$\begin{aligned}Y_tY_{t-j} &= 1.1Y_{t-1}Y_{t-j} - 0.18Y_{t-2}Y_{t-j} + Y_{t-j}\varepsilon_t \\ E(Y_tY_{t-j}) &= 1.1E(Y_{t-1}Y_{t-j}) - 0.18E(Y_{t-j}Y_{t-2}) + E(Y_{t-j}\varepsilon_t) \\ \gamma_j &= 1.1\gamma_{j-1} - 0.18\gamma_{j-2}\end{aligned}$$

Dado que $\rho_j = \gamma_j/\gamma_0$ dividindo ambos os lados de γ_j por γ_0 temos:

$$\rho_j = 1.1\rho_{j-1} - 0.18\rho_{j-2}$$

Para $j = 1$, $\rho_1 = 1.1\rho_0 - 0.18\rho_1$, então:

$$\rho_1 = \frac{1.1}{(1+0.18)} = 0.9322$$

Para $j = 2$, $\rho_2 = 1.1\rho_1 - 0.18$, então:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 1.1(0.9322) - 0.18 \\ &= 0.8454\end{aligned}$$

Como $\gamma_j = \rho_j\gamma_0$, podemos escrever a variância γ_0 como:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1.1\rho_1\gamma_0 - 0.18\rho_2\gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.1(0.9322)\gamma_0 - 0.18(0.8454)\gamma_0 + \sigma^2 \\ &= 1.02542\gamma_0 - 0.152176\gamma_0 + \sigma^2 \\ (1 - 1.02542 + 0.152176)\gamma_0 &= \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{(1 - 1.02542 + 0.152176)} \approx 7.9\sigma^2\end{aligned}$$

Podemos verificar pela fórmula geral:

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2^2)^2 - \phi_1^2]}$$

Dado que $\phi_1 = 1.1$ e $\phi_2 = -0.18$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{(1+0.18)\sigma^2}{(1-0.18)[(1+0.18)^2 - 1.1^2]} \\ &= \frac{(1.18)\sigma^2}{(0.82)[0.182]} \approx 7.9\end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo $\{Y_t\}$ é estacionário em covariância. Para encontra as autocovariâncias usamos $\gamma_j = \rho_j\gamma_0$:

$$\gamma_1 = \rho_1\gamma_0 = 0.9322 \times 7.9\sigma^2 \approx 7.364$$

$$\gamma_2 = \rho_2\gamma_0 = 0.8545 \times 7.9\sigma^2 \approx 6.75$$

$\boxed{3.3}$

$$\begin{aligned}&\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ... - \phi_1\psi_0 L - \phi_1\psi_1 L^2 - \phi_1\psi_2 L^3 - ... - \phi_2\psi_0 L^2 - \phi_2\psi_1 L^3 - \phi_2\psi_2 L^4 - ... \\ &- \phi_p\psi_0 L^p - \phi_p\psi_1 L^{p+1} - \phi_p\psi_2 L^{p+2} - ... = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\psi_0 + [\psi_1 - \phi_1\psi_0]L + [\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0]L^2 + [\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0]L^3 \\ &+ [\psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0]L^4 + ... + [\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0]L^p = 1\end{aligned}$$

Para $j = p, p+1, ...$

Com isso temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - \phi_1\psi_0 &= 0 \\ \psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 &= 0 \\ \psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 &= 0 \\ \psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_{j-p} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a partir de ψ_0:

$$\begin{gathered} \psi_0 = 1 \\ \psi_1 - \phi_1\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1 \\ \psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2 \\ \psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3\psi_0 \\ \vdots \\ \psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + ... + \phi_{p-1}\psi_1 + \phi_p\psi_{j-p} \end{gathered}$$

Para $j = p, p+1, ...$

Portanto os valores de ψ_j são a solução para a equação de diferenças de $n^{\text{ésima}}$ ordem com valor inicial $\psi_0 = 1$ e $\psi{-1} = \psi_{-2} = ... = \psi_{-p+1} = 0$. Então, dos resultados das equações em diferença:

$$\begin{bmatrix} \psi_j \\ \psi_{j-1} \\ \vdots \\ \psi_{-p+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\psi_j = f_{11}^{(j)}$$

$\boxed{3.4}$

$$\begin{gathered} \psi(L)c = \psi_0 c + \psi_1 Lc + \psi_2 L^2 c + \psi_3 L^3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2} \\ \text{como } L^j c = c \ \ \forall \ \ j \\ \psi(L)c \equiv \psi(1)c = \psi_0 c + \psi_1 c + \psi_2 c + \psi_3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} \end{gathered}$$

$\boxed{3.5}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

Deixe λ_1 e λ_2 satisfazerem $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$, note que λ_1 e λ_2 ambos estão dentro do círculo unitário em um processo $AR(2)$ estacionário em covariância.

Considere primeiro o caso em que as duas raízes λ_1 e λ_2 sejam reais e distintas. Dado que $\psi_j = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty}|c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j| \\ &< \sum_{j=0}^{\infty}|c_1\lambda_1^j| + |c_2\lambda_2^j| \\ &= \frac{|c_1|}{(1-|\lambda_1|)} + \frac{|c_2|}{(1-|\lambda_2|)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

Considere o caso em que λ_1 e λ_2 sejam raízes complexas conjugadas distintas. Deixe $R - |\lambda_i|$ representar o modulo de λ_1 ou λ_2. Então $0 \leqslant R < 1$. Dado que no caso de raízes complexas conjugadas distintas,

$$c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j = 2\alpha R^j\cos(\theta j) + 2\beta R^j \text{sen}(\theta j).$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty}|c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}|2\alpha R^j\cos(\theta j) - 2\beta R^j\text{sen}(\theta j)| \\ &\leqslant |2\alpha|\sum_{j=0}^{\infty}R^j|\cos(\theta j)| + |2\beta|\sum_{j=0}^{\infty}R^j|\text{sen}(\theta j)| \\ &\leqslant |2\alpha|\sum_{j=0}^{\infty}|R^j| + |2\beta|\sum_{j=0}^{\infty}|R^j \\ &= 2\frac{(|\alpha|+|\beta|)}{(1-R)}\end{aligned}$$

Por fim, para o caso de raízes reais repetidas $|\lambda| < 1$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| = \sum_{j=0}^{\infty}|k_1\lambda^j + k_2 j\lambda^{j-1}| \leqslant |k_1|\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda^j| + |k_2|\sum_{j=0}^{\infty}|j\lambda^{j-1}|.$$

Mas

$$|k_1|\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda|^j = \frac{|k_1|}{(1-|\lambda|)} < \infty$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}|j\lambda^{j-1}| &= 1 + 2|\lambda| + 3|\lambda|^2 + 4\lambda|^3 + \cdots \\ &= 1 + (|\lambda| + |\lambda|) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^2 + |\lambda|^2) \\ &\quad + (|\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3) + \cdots \\ &= (1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|^2}{(1-|\lambda|)} + \cdots \\ &= \frac{1}{(1-|\lambda|)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

$\boxed{3.6}$ $AR(\infty)$:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$:

$$(Y_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

Dado que as raízes de $1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q$ são todas reais e distintas e estão fora do círculo unitário e o processo $MA(q)$ é invertível, temos:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) = 1$$

Que ao multiplicarmos, resulta em:

$$\begin{aligned}
1 = 1 &+ \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots \\
&+ \theta_1 L + \theta_1\eta_1 L^2 + \theta_1\eta_2 L^3 + \cdots \\
&+ \theta_2 L^2 + \theta_2\eta_1 L^3 + \theta_2\eta_2 L^4 + \cdots \\
&\vdots \\
&+ \theta_q L^q + \theta_q\eta_1 L^{q+1} + \theta_q\eta_2 L^{q+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. colocando os L^i's em evidência:

$$\begin{aligned}
1 = \ & 1 + (\eta_1 + \theta_1)L \\
&+ (\eta_2 + \theta_1\eta_1 + \theta_2)L^2 \\
&+ (\eta_3 + \theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1 + \theta_3)L^3 \\
&\vdots \\
&+ (\eta_j + \theta_1\eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\eta_1 + \theta_q)L^j
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. Para a igualdade valer, os coeficientes dos L^i's devem ser zero, então:

$$\begin{aligned}
\eta_1 + \theta_1 = 0 &\Rightarrow \eta_1 = -\theta_1 \\
\eta_2 + \theta_1\eta_1 + \theta_2 = 0 &\Rightarrow \eta_2 = -\theta_1\eta_1 - \theta_2 = -\theta_2 + \theta_1^2 \\
\eta_3 + \theta_1\eta_2 + \theta_2\eta_1 + \theta_3 = 0 &\Rightarrow \eta_3 = -\theta_1\eta_2 - \theta_2\eta_1 - \theta_3 = -\theta_1^3 + 2\theta_1\theta_2 - \theta_3 \\
&\vdots \\
\eta_j + \theta_1\eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1}\eta_1 + \theta_q = 0 &\Rightarrow \eta_j = -\theta_1\eta_{j-1} - \cdots - \theta_{q-1}\eta_1 - \theta_q
\end{aligned}$$

$\boxed{3.7}$ $AR(\infty)$:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$:

$$Y_t - \mu = \left\{\prod_{j=0}^{n}(1 - \lambda_j L)\right\}\left\{\prod_{j=n+1}^{q}(1 - \lambda_j^{-1} L)\right\}\varepsilon_t$$

Então:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)\left\{\prod_{j=0}^{n}(1 - \lambda_j L)\right\}\left\{\prod_{j=n+1}^{q}(1 - \lambda_j^{-1} L)\right\} = 1$$

Efetuando a multiplicação, temos:

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{ \prod_{j=0}^{n} (1-\lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1-\lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1-\lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1-\lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1-\lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1-\lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n - \frac{\left[1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right. \\
&\left. - \frac{\left[\eta_1 L 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right. \\
&\left. - \frac{\left[\eta_2 L^2 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_n L^n \right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q} \lambda_j} \left[\theta_{n+1} L + \theta_{n+2} L^2 + \cdots + \theta_q L^q \right] \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Como no exercício 6, devemos realizar as multiplicações e isolar os L^i's para derivar o algoritmo dos coeficientes.

$\boxed{3.8}$

$$Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z) = 1 + 2.4z + 0.8z^2$$
$$\lambda_1 = -0.4, \;\; \lambda_2 = -2$$

Então $1 + 2.4z + 0.8z^2 = (1 + 0.4z)(1_2 z)$ como uma raiz, λ_2 está está fora do círculo unitário, o termo $(1 + 0.4z)(1 + 2z)$ não é invertível. O operador invertível é

$$(1 + 0.4z)(1 + 0.5z) = (1 + 0.9z + 0.2z^2).$$

Função geradora de autocovariância e invertibilidade para um processo $MA(2)$:

$$\begin{aligned}
g_Y(z) &= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2)(1 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2(1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_1 z^{-1} + \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 z + \theta_1 z^{-2} + \theta_1\theta_2 z^{-1} + \theta_2^2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2[1 + \theta_2 z^2 + (\theta_1 + \theta_1\theta_2)z + (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)z^0 + \theta_2 z^{-2} + (\theta_1 + \theta_1\theta_2)z^{-1}] \\
&\equiv \sigma^2[(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2 z^{-1})]
\end{aligned}$$

Como $\lambda_2 = -2$ está fora do círculo unitário, substituímos por seu inverso $\lambda_2^{-1} = -0.5$. Devemos também substituir σ^2 por $\sigma^2\lambda_2^2$.Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero:

$$\begin{aligned}
g_Y &= \sigma^2\lambda_2^2[(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2^{-1} z)(1 - \lambda_1 z^{-1})(1 - \lambda_2^{-1} z^{-1})] \\
&= (1)4[(1 + 0.4z)(1 + 0.5z)(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})] \\
&= 4[(1 + 0.9z + 0.2z^2)(1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2})] \\
&= 4[z^0 + 0.9z + 0.2z^2 + 0.9z^{-1} + 0.18z^0 + 0.18z + 0.2z^{-2} + 0.018z^{-1} + 0.2z^0]
\end{aligned}$$

As autocovariâncias podem ser encontradas derivando a função geradora de autocovariâncias com respeito a z^j em que j é a ordem de defasagem desejada para a autocovariância.

Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero. Então:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^0} = 4[1 + 0.81 + 0.4] = 7.4 \\
\gamma_1 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^1} = 4[0.9 + 0.18] = 4.32 \\
\gamma_2 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^2} = 4[0.2] = 0.8
\end{aligned}$$

Que são as mesmas autocovariâncias do processo $Y_t = (1 + 2.4L + 0.8L^2)\varepsilon_t$ do exercício 1.

Podemos concluir que o processo gerado pelo operador invertível

$$(1 + 0.4z)(1 + 0.5z) = (1 + 0.9z + 0.2z^2),$$

têm a variância $\lambda_2^2 = 4$ vezes menor que o processo gerado pelo operador não invertível $1 + 2.4L + 0.8L^2$. Para verificação, vamos gerar as autocovariâncias do processo invertível, conforme a fórmula padrão. Como $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = 0.2$ e $\sigma^2 = 1$, as autocovariâncias são:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma_0} &= [1 + \theta_1^2 + \theta_2^2]\sigma^2 = 1 + 0.81 + 0.04 = 1.85 \\
\bar{\gamma_1} &= [\theta_1 + \theta_1\theta_2]\sigma^2 = 0.9 + 0.18 = 1.08 \\
\bar{\gamma_2} &= \theta_2\sigma^2 = 0.2
\end{aligned}$$

Isto ocorre pois a variância, σ^2 das $\bar{\gamma}_s$'s deveria ter sido substituída por $\sigma^2\lambda_2^2$. Conclui-se que quando existe uma raiz λ_i fora do círculo unitário, as autocovariâncias do proceso invertível associado devem ser infladas por um fator de

$$\prod_{i=n+1}^{m} \lambda_i^2.$$

em que $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_m$ são as raízes fora do círculo unitário, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são as raízes dentro do círculo unitário e m o número total de raízes.

Capítulo 4

Previsão

$\boxed{4.1}$ Fórmula 4.3.6:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(m)\prime} &\equiv \begin{bmatrix} \alpha_0^{(m)} & \alpha_1^{(m)} & \alpha_2^{(m)} & \cdots & \alpha_m^{(m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1+\mu^2 & \gamma_2+\mu^2 & \cdots & \gamma_m+\mu^2 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \gamma_0+\mu^2 & \gamma_1+\mu^2 & \cdots & \gamma_{m-1}+\mu^2 \\ \mu & \gamma_1+\mu^2 & \gamma_0+\mu^2 & \cdots & \gamma_{m-2}+\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \gamma_{m-1}+\mu^2 & \gamma_{m-2}+\mu^2 & \cdots & \gamma_0+\mu^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&\equiv E[Y_{t+1}\mathbf{X}_t']E[\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t']^{-1}
\end{aligned}$$

Para $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & Y_t \end{bmatrix}'$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(1)\prime} &= \begin{bmatrix} E[Y_{t+1}] & E[Y_{t+1}Y_t] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & E[Y_t] \\ E[Y_t] & E[Y_t^2] \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \mu & \gamma_1+\mu^2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \gamma_0+\mu^2 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0+\mu^3-\mu\gamma_1-\mu^3 & -\mu^2+\gamma_1+\mu^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \begin{bmatrix} \mu\gamma_0-\mu\gamma_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-\rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_t \\
&= \begin{bmatrix} (1-\rho_1)\mu & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Y_t \end{bmatrix} \\
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= (1-\rho_1)\mu + \rho_1 Y_t
\end{aligned}$$

Portanto a previsão de Y_{t+1} com base em informações somente do período t é uma média ponderada entre o valor esperado de Y_t (μ) e Y_t, em que o fator de ponderação é o coeficiente de autocorrelação de primeira defasagem, ρ_1.

a) Processo $AR(1)$:

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Equação 4.2.9:

$$\hat{E}[Y_{t+s}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \frac{\psi(L)}{L^s}\varepsilon_t$$

Se o processo $AR(1)$ for invertível ele pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{c}{1-\phi L} + \frac{\varepsilon_t}{1-\phi L} \\ &= \mu + \psi(L)\varepsilon_t, \quad \psi(L) = 1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots \end{aligned}$$

Para Y_{t+1} o processo se torna:

$$Y_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1} + \phi\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

O preditor linear ótimo tem a forma:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \phi\varepsilon_t + \phi^2\varepsilon_{t-1} + \cdots$$

Dividindo $\psi(L)$ por L^s com $s = 1$

$$\frac{\psi(L)}{L} = L^{-1} + \phi + \phi^2 L + \cdots$$

e tratando os L com expoente negativo como zero para derivar o operador de aniquilação, o preditor ótimo para um período à frente pode ser escrito em notação de operador de defasagem:

$$\hat{E}[Y_{t+1}|\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \cdots] = \mu + \left[\frac{\psi(L)}{L}\right]_+ \varepsilon_t$$

Que é idêntico à equação 4.2.9 com $s = 1$.

b) Processo $MA(1)$:

$$Y_n = \mu + \varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}$$

Equação 4.5.20:

$$\hat{E}(Y_n|Y_{n-1}, Y_{n-2}, \cdots, Y_1) = \mu + \frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(n-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(n-1)}]}\left[Y_{n-1} - \hat{E}(Y_{n-1}|Y_{n-2}, Y_{n-3}, \cdots, Y_1)\right]$$

O processo $MA(1)$ pode ser escrito como:

$$Y_n - \mu = \varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}$$

As autocovariâncias são:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(Y_n-\mu)^2] = E(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1}) = E(\varepsilon_n^2 + 2\theta\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + \theta^2\varepsilon_{n-1}^2) = \sigma^2[1+\theta^2] \\ \gamma_1 &= E[(Y_n-\mu)(Y_{n-1}\mu)] = E[(\varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n-1} + \theta\varepsilon_{n-2})] \\ &= E(\varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + \theta\varepsilon_n\varepsilon_{n-2} + \theta\varepsilon_{n-1}^2 + \theta^2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}) = \sigma^2\theta \\ \gamma_j &= 0 \quad j = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

Temos que para $n = 2$

$$\begin{aligned}\hat{E}(Y_2|Y_1) &= \mu + \mathrm{Cov}(Y_2, Y_1)\mathrm{Var}(Y_2^2)^{-1}(Y_1 - \hat{E}(Y_1)) \\ &= \mu + \frac{\theta}{1+\theta^2}(Y_1 - \hat{E}(Y_1))\end{aligned}$$

Que é idêntico à equação 4.5.20 com $n = 2$.

c) Dado que

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = (1-\rho_1)\mu + \rho_1 Y_t$$

Podemos rearranjar a expressão e obter

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \rho_1(Y_t - \mu)$$

Como o coeficiente de correlação de primeira defasagem de um processo $AR(2)$ é

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

O preditor se torna

$$\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] = \mu + \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu)$$

O resíduo desta predição é

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{t+1|t} &= Y_{t+1} - \left[\mu + \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu)\right] \\ &= \mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1} - \mu - \frac{\phi_1}{1-\phi_2}(Y_t - \mu) \\ &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\end{aligned}$$

Verificando correlação entre resíduo e valores defasados:

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t}Y_t) &= E\left\{\left[\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\right]\left[\mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t\right]\right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então, $\hat{Y}_{t+1|t}$ e Y_t são correlacionados.

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_{t+1|t}Y_{-1}) &= E\left\{\left[\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\mu - \left(\frac{\phi_1\phi_2}{1-\phi_2}\right)Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{t+1}\right]\left[\mu + \phi_1 Y_{t-2} + \phi_2 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-1}\right]\right\} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Então, $\hat{Y}_{t+1|t}$ e Y_{t-1} também são correlacionados.

$\boxed{4.2}$ Como $s = q = 1$, temos um processo $MA(1)$:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

E a predição a ser realizada para um período à frente:

$$E[Y_{t+1}|Y_t].$$

Dado que o processo $MA(1)$ possa ser escrito na forma

$$Y_t - \mu = (1 + \theta L)\varepsilon_t.$$

Sendo a fórmula de predição de *Wiener-Kolmogorov* para $s = 1$:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[\frac{\psi(L)}{L}\right]_+ \varepsilon_t$$

Substituindo o processo

$$MA(1)$$

na fórmula temos:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \left[\frac{1 + \theta L}{L}\right]_+ \frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Para o processo $MA(1)$:

$$\left[\frac{1 + \theta L}{L}\right]_+ = \theta$$

Então podemos escrever a fórmula de *Wiener-Kolmogorov* como

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta\frac{(Y_t - \mu)}{1 + \theta L}$$

Expandindo a soma infinita representada:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + \theta(Y_t - \mu) - \theta^2(Y_{t-1} - \mu) + \theta^3(Y_{t-2} - \mu) - \cdots + (-1)^{m-1}\theta^m(Y_{t-m+1} - \mu)$$

Equivalente à equação 4.3.3.

$\boxed{4.3}$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_1{}' = \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2\mathbf{H}\mathbf{E}_2{}' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\boldsymbol{\Omega}\mathbf{E}_1{}'\mathbf{E}_2{}' = \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)' &= \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}'^{-1} = \mathbf{D} \\
\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}' \\
\mathbf{A} = (\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4.4}$ Não pois o coeficiente de Y_2 da projeção linear de Y_4 contra Y_3, Y_2 e Y_1 é:
Dado que

$$Y_4 = \bar{Y}_4 + k_{43}k_{33}^{-1}\bar{Y}_3 + h_{41}h_{22}^{-1}\bar{Y}_2 + \Omega_{41}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1,$$

temos ainda que:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_1 &= Y, \\
\bar{Y}_2 &= Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1 \\
\bar{Y}_3 &= Y_3 - \Omega_{31}\Omega_{11}^{-1}Y_1 - h_{32}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}\bar{Y}_1)
\end{aligned}$$

Substituindo em Y_4 nos dá:

$$\begin{aligned}
Y_4 = \bar{Y}_4 &+ k_{43}k_{33}^{-1}(Y_3 - \Omega_{31}\Omega_{11}^{-1}Y_1 - h_{32}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1}Y_1)) \\
&+ h_{41}h_{22}^{-1}(Y_2 - \Omega_{21}\Omega_{11}^{-1})Y_1 + \Omega_{41}\Omega_{11}^{-1}Y_1
\end{aligned}$$

Podemos observar que o coeficiente de Y_2 é

$$h_{41}h_{22}^{-1} - k_{43}k_{33}^{-1}h_{32}h_{22}^{-1}$$

Já o elemento $(4,2)$ de $\mathbf{A}$ é

$$h_{41}h_{22}^{-1}$$

Dado que $k_{43}k_{33}^{-1}h_{32}h_{22}^{-1} \neq 0$, os termos são diferentes e a resposta é não.

$\boxed{4.5}$ Se X_t segue um processo $AR(p)$ ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com ε_t sendo um *ruído branco*. Então o processo $Y_t = X_t + \nu_t$ se torna

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + \nu_t.$$

Que por sua vez pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)\nu_t}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)} \\ &= \frac{\varepsilon_t + \nu_t - \phi_1 \nu_{t-1} - \phi_2 \nu_{t-2} - \cdots - \phi_p \nu_{t-p}}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)}. \end{aligned}$$

Que é um processo $ARMA(p,p)$ com $\theta_i = -\phi_i$, $i = 1, 2, \cdots, p$.

$\boxed{4.6}$ Se X_t segue um processo $AR(p)$ ele pode ser representado na forma

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t. \\ X_t &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Com ε_t sendo um *ruído branco*. Se Z_t segue um processo $MA(q)$, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_t &= \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-1} \\ &= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t \end{aligned}$$

Somando os dois processos temos:

$$\begin{aligned} Y_t &= X_t + Z_t \\ &= \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t \\ &= \frac{\varepsilon_t + (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\epsilon_t}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \end{aligned}$$

Expandindo o termo $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)$ temos:

$$
\begin{aligned}
&1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p \\
&+\theta_1 L-\theta_1\phi_1 L^2-\theta_1\phi_2 L^3-\cdots-\theta_1\phi_p L^{p+1} \\
&+\theta_2 L^2-\theta_2\phi_1 L^3-\theta_2\phi_2 L^4-\cdots-\theta_2\phi_p L^{p+2} \\
&+\vdots \\
&+\theta_q L^q-\theta_q\phi_1 L^{1+q}-\theta_q\phi_2 L^{2+q}-\cdots-\theta_q\phi_p L^{p+q}
\end{aligned}
$$

Então a maior ordem de defasagem de ϵ_{t-j} é $p+q$, $j=0,1,2,\cdots,p+q$. Com isso o processo Y_t é um processo $ARMA(p,p+q)$.

Capítulo 5

Estimação de Máxima Verossimilhança

$\boxed{5.1}$ Equação 5.4.16:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}) = \log f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(d_{tt}) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\bar{y}_t^2}{d_{tt}}.$$

os termos que possuem θ e σ^2 são as equações 5.4.11

$$\bar{y} = y_t - \mu - \frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1},$$

e 5.4.12

$$d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) = \sigma^2\frac{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2t}}{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}}.$$

as duas equações são compostas por uma razão de somas finitas, com isso temos:

$$\begin{aligned}\frac{\theta[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-2)}]}{[1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}]} &= \frac{\theta[\frac{1-\theta^{2(t-2)}}{1-\theta^2}]}{\frac{1-\theta^{2(t-1)}}{1-\theta^2}}\\ &= \theta\frac{[1-\theta^{2(t-2)}]}{1-\theta^{2(t-1)}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2t}}{1+\theta^2+\theta^4+\cdots+\theta^{2(t-1)}} &= \frac{\frac{1-\theta^{2t}}{1-\theta^2}}{\frac{1-\theta^{2(t-1)}}{1-\theta^2}}\\ &= \frac{1-\theta^{2t}}{1-\theta^{2(t-1)}}\end{aligned}$$

Se $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ e $\theta = \bar{\theta}$, então:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}[1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{[1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1},\\ &= y_t - \mu - \bar{\theta}\frac{[1-\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}}\bar{y}_{t-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) &= \bar{\sigma}^2 \frac{1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2t}}{1+\bar{\theta}^2+\bar{\theta}^4+\cdots+\bar{\theta}^{2(t-1)}} \\ &= \bar{\sigma}^2 \frac{1-\bar{\theta}^{2t}}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}} \end{aligned}$$

Agora se $\sigma^2 = \bar{\theta}^2\bar{\sigma}^2$ e $\theta = \bar{\theta}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_t - \mu - \frac{\bar{\theta}^{-1}[1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{[1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-1)}]}\bar{y}_{t-1}, \\ &= y_t - \mu - \bar{\theta}^{-1}\frac{[1-\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}}\bar{y}_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{tt} = E(\bar{Y}_t^2) &= \bar{\theta}\bar{\sigma}^2 \frac{1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2t}}{1+\bar{\theta}^{-2}+\bar{\theta}^{-4}+\cdots+\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \\ &= \bar{\theta}^2\bar{\sigma}^2 \frac{1-\bar{\theta}^{-2t}}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \end{aligned}$$

As duas formas são equivalentes pois

$$\bar{\theta}^{-1}\frac{[1-\bar{\theta}^{-2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \bar{\theta}\frac{[1-\bar{\theta}^{2(t-2)}]}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}}$$

e

$$\bar{\theta}^2\frac{1-\bar{\theta}^{-2t}}{1-\bar{\theta}^{-2(t-1)}} \equiv \frac{1-\bar{\theta}^{2t}}{1-\bar{\theta}^{2(t-1)}} \quad \blacksquare$$

$\boxed{5.2}$ Equação 5.7.6:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}) = -1.5\theta_1^2 - 2\theta_2^2$$

Equação 5.7.12:

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} = [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}).$$

Dado que $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = [-1, 1]'$.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} -3\theta_1 \\ -4\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(0)} &= [\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}^{(0)})]^{-1}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}^{(0)}) \Rightarrow \\ \boldsymbol{\theta}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\boxed{5.3}$ a)

$$\mathscr{L}(\mu, \sigma^2; y_1, y_2, \cdots, y_T) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{T}\frac{2(y_t-\mu)}{2\sigma^2} = 0,$$
$$\sum_{t=1}^{T} y_t = T\mu \Rightarrow \hat{\mu} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \sigma^2} = 0 \Rightarrow -\frac{T}{2\sigma^2} - \left[-\sum_{t=1}^{T}\frac{2(y_t-\mu)^2}{4\sigma^4}\right] = 0,$$
$$\frac{T}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\mu)^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\hat{\mu})^2 \quad \blacksquare$$

b)

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \mu^2} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{2}{2\sigma^2} = -\frac{T}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{4(y_t-\mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{2T}{4\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{4\sigma^2(y_t-\mu)^2}{4\sigma^8} = \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6}$$

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{4(y_t-\mu)}{4\sigma^4} = -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4}$$

Então a matriz Hessiana fica:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} \\ -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}$$

Se multiplicada por T^{-1} e avaliada em $\theta = \hat{\theta}$:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D} = -T^{-1}\frac{\partial^2 \mathscr{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = E\left\{-T^{-1}\begin{bmatrix} -\frac{T}{\sigma^2} & -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} \\ -\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)}{\sigma^4} & \frac{T}{2\sigma^4} - \sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\mu)^2}{\sigma^6} \end{bmatrix}\right\}$$

Dado que $E[y_t] = \mu$ e $E[(y_t - \mu)^2] = \sigma_2$:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D} = \begin{bmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/2\sigma^4 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

c) A inversa de $\hat{\mathscr{I}}_{2D}$ é:

$$\hat{\mathscr{I}}_{2D}^{-1} = 2\sigma^6 \begin{bmatrix} 1/2\sigma^4 & 0 \\ 0 & 1/\sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por T^{-1}:

$$T^{-1}\hat{\mathscr{I}}_{2D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix}$$

com isso:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} \approx N\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2/T & 0 \\ 0 & 2\sigma^4/T \end{bmatrix}\right) \quad \blacksquare$$

Capítulo 6

Análise Spectral

6.1 Equação 6.1.12:

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)].$$

equação 6.1.6:

$$s_Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{\gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\cos(\omega j)\right\}.$$

Autocovariâncias de um processo $MA(1)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \sigma^2[1 + \theta^2] \\
\gamma_1 &= \sigma^2\theta \\
\gamma_k &= 0 \quad k \geqslant 2
\end{aligned}$$

Substituindo as autocovariâncias na equação 6.1.6, temos:

$$\begin{aligned}
s_Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left\{\sigma^2[1 + \theta^2] + 2\sigma^2\theta\cos(\omega)\right\} \\
&= 2\pi^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.2 Equação 6.1.9:

$$s_Y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

Equação 6.1.12:

$$s_Y(\omega) = (2\pi)^{-1}\sigma^2[1 + \theta^2 + 2\theta\cos(\omega)].$$

Equação 6.1.17:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_Y(\omega)\mathrm{d}\omega = \gamma_0$$

Integrando 6.1.9:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma^2}{2\pi}\mathrm{d}\omega &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big[\omega\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}[\pi - (-\pi)] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}2\pi \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

Integrando 6.1.12:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{-1}\sigma^2[1+\theta^2+2\theta\cos(\omega)]\mathrm{d}\omega &= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[\omega+\theta^2\omega+2\theta\mathrm{sen}(\omega)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[(\pi+\theta^2\pi+2\theta\mathrm{sen}(\pi)) - (-\pi+\theta^2(-\pi)+2\theta\mathrm{sen}(-\pi))\Big] \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[(\pi+\theta^2\pi+2\theta\mathrm{sen}(\pi)) + \pi+\theta^2\pi-2\theta\mathrm{sen}(-\pi))\Big] \\
&= (2\pi)^{-1}\sigma^2\Big[2\pi(1+\theta^2)\Big] \\
&= \sigma^2[1+\theta^2]
\end{aligned}
$$

Já que $\mathrm{sen}(\pi) = \mathrm{sen}(-\pi) = 0$. ■

Capítulo 7

Teoria de distribuição assintótica

$\boxed{7.1}$ Por continuidade, $|g(X_T, c_T) - g(\xi, c)| > \delta$ somente se $|X_T - \xi| + |c_T - c| > \eta$ para algum η. Mas $c_T \to c$ e $X_T \xrightarrow{p} \xi$ significa que existe um N tal que $|c_T - c| < \eta/2$ para todo $T \geq N$, com isso $P\{|c_T - c| > \eta/2\} = 0$, e tal que $P\{|X_T - \xi| > \eta/2\} < \varepsilon$ para todo $T \geq N$. Então $P\{|X_T - \xi| + |c_T - c| > \eta\}$ é menor que ε para todo $T \geq N$, implicando que $P\{g(X_T, c_T) - g(\xi, c)| > \delta\} < \varepsilon$. ■

$\boxed{7.2}$ a)

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \sum_{i=0}^{\infty} 0.8^i \varepsilon_{t-i} = \kappa_t \\
\bar{Y_t} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \kappa_t \\
\text{Var}[\bar{Y_t}] &= E[\bar{Y}_t^2] - E[\bar{Y_t}]^2, \text{ dado que } E[\bar{Y_t}] = 0 \\
\text{Var}[\bar{Y_t}] &= E[\bar{Y}_t^2] = E\left\{\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\kappa_t\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{T^2} E \sum_{t=1}^{T}\Big[(\varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.8^2\varepsilon_{t-2} + \cdots)(\varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.8^2\varepsilon_{t-2} + \cdots)\Big] \\
&= \frac{1}{T^2} E \sum_{t=1}^{T}\Big[\varepsilon_t^2 + 0.8\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + 0.8^2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \cdots + 0.8\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + 0.8^2\varepsilon_{t-1}^2 + 0.8^3\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \cdots\Big] \\
&= \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\Big[1 + 0.8^2 + 0.8^4 + 0.8^6 + \cdots\Big] \\
&= \frac{1}{T^2}\frac{T}{1 - 0.8^2} = \frac{2.77}{T} \\
\lim_{T\to\infty} T \cdot \text{Var}[\bar{Y_t}] &= \lim_{T\to\infty} T \cdot \frac{2.77}{T} = \quad ■
\end{aligned}
$$

b) De uma distribuição normal padronizada, o valor da variável z que possui 95% de confiança é 1.645. Portanto:

$$
1.645 = 0.1\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2.77}} \Rightarrow T = 751,67
$$

Então a amostra deve ter mais de 751 observações. ■

$\boxed{7.3}$ Não, pois uma sequência de diferença *martingale* possui variância que pode depender do tempo.

$\boxed{7.4}$ Sim, pois uma sequência de diferença *martingale* possui média zero, porém, com a adição do fato de que sua variância seja constante (não dependente do tempo), Y_t se torna estacionário em covariância.

$\boxed{7.5}$ Uma sequência $\{Y_t\}$ é *uniformemente integrável* se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $c > 0$ tal que

$$E(|Y_t| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}) < \varepsilon$$

Para todo t, onde $\delta_{[|Y_t| \geq c]} = 1$ se $|Y_t| \geq c$ e 0 caso contrário.

Para a variável aleatória de interesse temos:

$$\begin{aligned}
E(|X_{t,k}| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}) &= E\Bigg(\Bigg|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\psi_u\psi_v[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}\Bigg) \\
&\leq E\Bigg(\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|\Bigg|[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}\Bigg)
\end{aligned}$$

Como $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ é absolutamente somável podemos colocar o operador de esperança dentro do somatório.

$$\begin{aligned}
E(|X_{t,k}| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}) &= \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}E\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|\Bigg|[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]} \\
&\leq \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|\Bigg\{E\Bigg|[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg|^r\Bigg\}^{1/r} \times \Bigg\{\frac{E|Y_{t,k}|}{c}\Bigg\}^{(r-1)/r}
\end{aligned}$$

Em que a última desigualdade segue os mesmo argumentos de $7.A.6$. Portanto

$$E(|X_{t,k}| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}) \leq \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|\Bigg\{M'\Bigg\}^{1/r} \times \Bigg\{\frac{E|X_{t,k}|}{c}\Bigg\}^{(r-1)/r}$$

Dado que $E|X_{t,k}|$ seja limitado:

$$\begin{aligned}
E|X_{t,k}| &= E\Bigg|\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\psi_u\psi_v[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg| \\
&\leq \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|E\Bigg|[\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v} - E(\varepsilon_{t-u}\varepsilon_{t-k-v})]\Bigg| \\
&= K
\end{aligned}$$

Temos que:

$$E(|X_{t,k}| \cdot \delta_{[|Y_t| \geq c]}) \leq \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\Bigg|\psi_u\psi_v\Bigg|\Bigg\{M'\Bigg\}^{1/r} \times \Bigg\{\frac{K}{c}\Bigg\}^{(r-1)/r}$$

Desde que $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ seja absolutamente somável, o lado direito da desigualdade pode ser suficientemente pequeno ($< \varepsilon$) se escolhermos c suficientemente grande. ∎

$\boxed{7.6}$ Pela proposição 7.1, só é preciso mostrar que $\bar{Y}_t \xrightarrow{p} \mu$. Como a variância de $\bar{Y}_t$ converge para zero quando t tende ao infinito ($\sigma^2/T \to 0$) e $\bar{Y}_t \to \mu$, $\bar{Y}_t$ converge em média quadrática para μ e portanto também converge em probabilidade.

$\boxed{7.7}$ a) Podemos mostrar que

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t \xrightarrow{m.s.} \mu.$$

Ou seja, que

$$E\biggl(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t - \mu\biggr)^2 < \varepsilon.$$

Pela lei dos grandes números para observações serialmente correlacionadas (seção 7.2) temos que $E(\bar{Y}_T - \mu)^2 \to 0$. Portanto $\bar{Y}_T \xrightarrow{m.s.} \mu$, o que implica em

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t \xrightarrow{p} \mu. \quad \blacksquare$$

b) Note que $E|\varepsilon_t|^r < \infty$ para $r = 4$, tal que 7.2.14 estabelece

$$\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} \bar{Y}_t\bar{Y}_{t-k} \xrightarrow{p} E(\bar{Y}_t\bar{Y}_{t-k}).$$

Onde $\bar{Y}_t \equiv Y_t - \mu$. Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} Y_tY_{t-k} &= \frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} (\bar{Y}_t + \mu)(\bar{Y}_{t-k} + \mu) \\
&= \frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} \bar{Y}_t\bar{Y}_{t-k} + \mu\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} \bar{Y}_{t-k} + \mu\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T} \bar{Y}_{t-k} + \mu^2 \\
&= E(\bar{Y}_t + \mu)(\bar{Y}_{t-k} + \mu) \\
&= E(Y_tT_{t-k}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Capítulo 10

Processos Vetoriais Estacionários em Covariância

$\boxed{10.1}$ Equação 10.2.19:

$$\text{vec}\begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{p-1} \\ \Gamma_1' & \Gamma_0 & \cdots & \Gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{p-1}' & \Gamma_{p-2}' & \cdots & \Gamma_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{r^2} - \mathscr{A}]^{-1}\text{vec}(\mathbf{Q}).$$

Sendo que $r = np$ e

$$\mathscr{A} \equiv \mathbf{F}_{(r\times r)} \otimes \mathbf{F}_{(r\times r)}$$

Um processo escalar $(n = 1)$ $AR(p)$ tem o forma:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Ou em forma vetorial:

$$\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}_{t-1} + \mathbf{v}_t,$$

Avaliando a fórmula 10.2.19 para um processo escalar temos:

$$\text{vec}\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}\text{vec}(\mathbf{Q}).$$

Com

$$\mathscr{A} \equiv \mathbf{F}_{(p\times p)} \otimes \mathbf{F}_{(p\times p)}$$

Temos ainda que $\mathbf{Q}$ para um processo escalar se torna:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q} = E[\mathbf{v}\mathbf{v}'] &= E\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_t\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_t & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\right\}\\
&= E\begin{bmatrix}\varepsilon_t^2 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} = \sigma^2\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Realizando a operação vec nos dois lados da equação 10.2.19 para o processo escalar:

$$
\begin{bmatrix}\gamma_0\\\gamma_1\\\vdots\\\gamma_{p-1}\\\gamma_1\\\gamma_0\\\vdots\\\gamma_{p-2}\\\vdots\\\gamma_{p-1}\\\gamma_{p-2}\\\vdots\\\gamma_0\end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}\sigma^2\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}
$$

dados que $[\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}$ é uma matriz $p^2 \times p^2$ e o vetor coluna do lado direito tem dimensão $P^2 \times 1$, o produto dos dois termos pode ser feito da seguinte forma. Deixe que $[\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1}$ seja igual a uma matriz $\mathbf{H}$ e que ela seja particionada em p^2 vetores coluna $\mathbf{h}_j$ de dimensão $p^2 \times 1$ com $j = 1, 2, \cdots, p^2$.

$$
\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{p^2}\end{bmatrix}
$$

Então o produto fica um vetor coluna de dimensão $p^2 \times 1$:

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{p^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\o\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1(1) + \mathbf{h}_2(0) + \cdots + \mathbf{h}_{p^2}(0)\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)}
$$

Com isso os p primeiros termos do lado esquerdo do processo escalar empilhado é o vetor coluna

$$
\begin{bmatrix}\gamma_0\\\gamma_1\\\gamma_2\\\vdots\\\gamma_{p-1}\end{bmatrix}
$$

e os p primeiros termos do lado direito desta mesma equação é um vetor composto pelos p primeiros elementos do vetor

$$
\sigma^2\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1\end{bmatrix}_{(p^2\times 1)},
$$

que é equivalente aos p primeiros elementos da primeira coluna de

$$\sigma^2\mathbf{H} \equiv \sigma^2[\mathbf{I}_{p^2} - \mathscr{A}]^{-1} \quad \blacksquare$$

$\boxed{10.2}$ a) Sendo $\mathbf{y} = (X_t, Y_t)'$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_k = E[(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})']$$

Dados que no exercício $\mu_X = \mu_Y = 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_k &= E[(\mathbf{y}_t)(\mathbf{y}_{t-k})'] \\
&= E\left\{\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-k} & Y_{t-k} \end{bmatrix}\right\} \\
&= E\begin{bmatrix} X_tX_{t-k} & X_tY_{t-k} \\ Y_tX_{t-k} & Y_tY_{t-k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_0 &= E\begin{bmatrix} X_tX_t & X_tY_t \\ Y_tX_t & Y_tY_t \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1X_{t-1} + u_t) \\ (h_1X_{t-1} + u_t)(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) & (h_1X_{t-1} + u_t)(h_1X_{t-1} + u_t) \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t) \\ (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) & (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] & h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 \\ h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\varepsilon^2 h_1^2[1+\theta^2] + \sigma_u^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_1 &= E\begin{bmatrix} X_tX_{t-1} & X_tY_{t-1} \\ Y_tX_{t-1} & Y_tY_{t-1} \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1X_{t-2} + u_{t-1}) \\ (h_1X_{t-1} + u_t)(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) & (h_1X_{t-1} + u_t)(h_1X_{t-2} + u_{t-1}) \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) + u_{t-1}) \\ (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) & (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(h_1(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) + u_{t-1}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \theta\sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ h_1\sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] & h_1^2\theta\sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}_2 &= E\begin{bmatrix} X_tX_{t-2} & X_tY_{t-2} \\ Y_tX_{t-2} & Y_tY_{t-2} \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1X_{t-3} + u_{t-2}) \\ (h_1X_{t-1} + u_t)(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) & (h_1X_{t-1} + u_t)(h_1X_{t-3} + u_{t-2}) \end{bmatrix} \\
&= E\begin{bmatrix} (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) & (\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(h_1(\varepsilon_{t-3} + \theta\varepsilon_{t-4}) + u_{t-2}) \\ (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3}) & (h_1(\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) + u_t)(h_1(\varepsilon_{t-3} + \theta\varepsilon_{t-4}) + u_{t-2}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Temos ainda que $\boldsymbol{\Gamma}_j = \mathbf{0}$ para $j \geqslant 3$. $\blacksquare$

b) Equação 10.4.3:

$$\mathbf{s_y}(\omega) = (2\pi)^{-1}\mathbf{G_y}(e^{-i\omega}) = (2\pi)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{\Gamma}_k e^{-i\omega k}.$$

Neste caso $k = -1, 0, 1$. Lembrando que $\mathbf{\Gamma}_{-k} = \mathbf{\Gamma}'_k$:

$$\mathbf{s_y}(\omega) = (2\pi)^{-1}\sum_{k=-1}^{1}\mathbf{\Gamma}_k e^{-i\omega k}$$

Que de acordo com 10.4.11 fica:

$$\mathbf{s_y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{XX}^{(k)}\cos(\omega k) & \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{XY}^{(k)}\{\cos(\omega k) - i\,\mathrm{sen}(\omega k)\} \\ \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{YX}^{(k)}\{\cos(\omega k) - i\,\mathrm{sen}(\omega k)\} & \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{YY}^{(k)}\cos(\omega k) \end{bmatrix}$$

Analisando cada termo separadamente, lembrando que $\cos(0) = 1$ e $\cos(\omega) = \cos(-\omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s_y}(\omega)^{11} = \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{XX}^{(k)}\cos(\omega k) &= \theta\sigma_\varepsilon^2\cos(-\omega) + \sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] + \theta\sigma_\varepsilon^2\cos(\omega) \\ &= \sigma_\varepsilon^2[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s_y}(\omega)^{22} = \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{YY}^{(k)}\cos(\omega k) &= h_1^2\theta\sigma_\varepsilon^2\cos(-\omega) + \sigma_\varepsilon^2 h_1^2[1+\theta^2] \\ &+ \sigma_u^2 + h_1^2\theta\sigma_\varepsilon^2\cos(\omega) \\ &= \sigma_\varepsilon^2[h_1^2[1+\theta^2] + h_1^2 2\theta\cos(\omega)] + \sigma_u^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{s_y}(\omega)^{12} = \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{XY}^{(k)}e^{-i\omega k} = h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 e^{i2\omega} + h_1\sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2]e^{i\omega} + h_1\theta\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbf{s_y}(\omega)^{21} = \sum_{k=-2}^{2}\gamma_{YX}^{(k)}e^{-i\omega k} = h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 + h_1\sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2]e^{-i\omega} + h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 e^{-i2\omega}$$

O *spectrum* populacional fica:

$$\mathbf{s_y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} \mathbf{s_y}(\omega)^{11} & \mathbf{s_y}(\omega)^{12} \\ \mathbf{s_y}(\omega)^{21} & \mathbf{s_y}(\omega)^{22} \end{bmatrix}$$

O *cospectrum* entre X e Y é:

$$c_{XY}(\omega) = (2\pi)^{-1}h_1\sigma_\varepsilon^2(\theta\cos(2\omega) + [1+\theta^2]\cos(\omega) + \theta)$$

E o *quadrature spectrum* entre X e Y é:

$$q_{XY}(\omega) = -(2\pi)^{-1}h_1\sigma_\varepsilon^2(\theta\mathrm{sen}(2\omega) + [1+\theta^2]\mathrm{sen}(\omega))$$

c) Equação 10.4.45:

$$\begin{aligned}\mathbf{s_y}(\omega) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h(e^{-\omega}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{XX}(\omega) & 0 \\ 0 & s_{UU}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h(e^{i\omega}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{XX}(\omega) & s_{XX}(\omega)h(e^{i\omega}) \\ h(e^{-i\omega})s_{XX}(\omega) & h(e^{-i\omega})s_{XX}(\omega)h(e^{i\omega}) + s_{UU}(\omega) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde

$$h(e^{-i\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k}$$

Que neste caso $h(e^{-i\omega}) = h_1 e^{-i\omega}$ pois $h_k = 0$ para $k \neq 1$.

$$\begin{aligned}s_{XX}(\omega) &= (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}^{(k)} e^{-i\omega k} \\ &= (2\pi)^{-1} \Big[\sigma_\varepsilon^2 \theta e^{-i\omega} + \sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] + \sigma_\varepsilon^2 \theta e^{i\omega}\Big] \\ &= (2\pi)^{-1}\sigma_\varepsilon^2 \Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]\end{aligned}$$

$$s_{UU}(\omega) = (2\pi)^{-1}\sigma_u^2$$

$$\begin{aligned}s_{XX}(\omega)[h_1 e^{-i\omega}] &= (2\pi)^{-1} \Big[\sigma_\varepsilon^2 \theta e^{-i\omega} + \sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] + \sigma_\varepsilon^2 \theta e^{i\omega}\Big][h_1 e^{-i\omega}] \\ &= (2\pi)^{-1} h_1 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta e^{-i2\omega} + [1+\theta^2]e^{-i\omega} + \theta\Big] \\ &= (2\pi)^{-1} h_1 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta\{\cos(2\omega) - i\mathrm{sen}(2\omega)\} + [1+\theta^2]\{\cos(\omega) - i\mathrm{sen}(\omega)\} + \theta\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{XX}(\omega)h(e^{i\omega}) &= (2\pi)^{-1} \Big[\sigma_\varepsilon^2 \theta e^{-i\omega} + \sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] + \sigma_\varepsilon^2 \theta e^{i\omega}\Big][h_1 e^{i\omega}] \\ &= (2\pi)^{-1} h_1 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta + [1+\theta^2]e^{i\omega} + \theta e^{i2\omega}\Big] \\ &= (2\pi)^{-1} h_1 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta + [1+\theta^2]\{\cos(\omega) + i\mathrm{sen}(\omega)\} + \theta\{\cos(2\omega) + i\mathrm{sen}(2\omega)\}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(e^{-i\omega})s_{XX}(\omega)h(e^{i\omega}) + s_{UU}(\omega) &= (2\pi)^{-1} h_1 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta e^{-i2\omega} + [1+\theta^2]e^{-i\omega} + \theta\Big][h_1 e^{i\omega}] + s_{UU} \\ &= (2\pi)^{-1} h_1^2 \sigma_\varepsilon^2 \Big[\theta e^{-i\omega} + [1+\theta^2] + \theta e^{i\omega}\Big] + (2\pi)^{-1}\sigma_u^2 \\ &= (2\pi)^{-1} h_1^2 \sigma_\varepsilon^2 \Big[2\theta\{\cos(\omega)\} + [1+\theta^2]\Big] + (2\pi)^{-1}\sigma_u^2\end{aligned}$$

d) Equação 10.4.49:

$$h_k = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_{YX}(\omega)}{s_{XX}(\omega)} e^{i\omega k} d\omega.$$

Quando $k = 1$:

$$\begin{aligned}
h_1 &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(2\pi)^{-1}[h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 + h_1\sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2]e^{-i\omega} + h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 e^{-i2\omega}]}{(2\pi)^{-1}\sigma_\varepsilon^2\Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]} e^{i\omega} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 e^{i\omega} + h_1\sigma_\varepsilon^2[1+\theta^2] + h_1\theta\sigma_\varepsilon^2 e^{-i\omega}]}{\sigma_\varepsilon^2\Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Big(h_1\sigma_\varepsilon^2\Big[\theta e^{i\omega} + [1+\theta^2] + \theta e^{-i\omega}\Big]\Big)}{\sigma_\varepsilon^2\Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Big(h_1\sigma_\varepsilon^2\Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]\Big)}{\sigma_\varepsilon^2\Big[1 + 2\theta\cos(\omega) + \theta^2\Big]} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 d\omega = h_1
\end{aligned}$$

Quando $k \neq 1$:

$$\begin{aligned}
h_k &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 e^{-i\omega} e^{i\omega k} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 e^{(k-1)i\omega} d\omega \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 \cos([k-1]\omega) d\omega + i(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} h_1 \mathrm{sen}([k-1]\omega) d\omega \\
&= ([k-1]2\pi)^{-1} h_1 \Big[\mathrm{sen}([k-1]\omega)\Big]_{-\pi}^{\pi} - i([k-1]2\pi)^{-1} h_1 \Big[\cos([k-1]\omega)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$