Solution for Time Series Analysis (Hamilton, 1994)

Lucca Simeoni Pavan *

5 de outubro de 2016

*Doutorando em Desenvolvimento Econômico, PPDGE/UFPR - warrenjax@gmail.com

Capítulo 3

Processos ARMA estacionários

$\boxed{3.1}$

$$E(Y_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = E(Y_t)^2 &= \text{Var}(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2}) \\ &= (1 + 5.76 + 0.64)\sigma^2 = 7.4\end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo é estacionário em covariância.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-1} + 2.4\varepsilon_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-3}) \\ &= (2.4 + 1.92)\sigma^2 = 4.32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = E(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu) &= E(\varepsilon_t + 2.4\varepsilon_{t-1} + 0.8\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + 2.4\varepsilon_{t-3} + 0.8\varepsilon_{t-4}) \\ &= 0.8E(\varepsilon_{t-2}^2) = 0.8\sigma^2 = 0.8\end{aligned}$$

$\boxed{3.2}$

$$\begin{aligned}
Y_t &= 1.1Y_{t-1} - 0.18Y_{t-2} + \varepsilon_t \\
(1 - 1.1L + 0.18L^2)Y_t &= \varepsilon_t \\
Y_t &= (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}\varepsilon_t
\end{aligned}$$

$$E(Y_t) = (1 - 1.1L + 0.18L^2)^{-1}E(\varepsilon_t) = 0 \therefore \mu = 0$$

Encontrando a variância $: \gamma_0$

$$\begin{aligned}
Y_t^2 &= 1.1Y_tY_{t-1} - 0.18Y_tY_{t-2} + Y_t\varepsilon_t \\
E(Y_t^2) &= 1.1E(Y_tY_{t-1}) - 0.18E(Y_tY_{t-2}) + E(Y_t\varepsilon_t) \\
\gamma_0 &= 1.1\gamma_1 - 0.18\gamma_2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

Encontrando a autocovariância γ_j :

$$\begin{aligned}
Y_tY_{t-j} &= 1.1Y_{t-1}Y_{t-j} - 0.18Y_{t-2}Y_{t-j} + Y_{t-j}\varepsilon_t \\
E(Y_tY_{t-j}) &= 1.1E(Y_{t-1}Y_{t-j}) - 0.18E(Y_{t-j}Y_{t-2}) + E(Y_{t-j}\varepsilon_t) \\
\gamma_j &= 1.1\gamma_{j-1} - 0.18\gamma_{j-2}
\end{aligned}$$

Dado que $\rho_j = \gamma_j/\gamma_0$ dividindo ambos os lados de γ_j por γ_0 temos:

$$\rho_j = 1.1\rho_{j-1} - 0.18\rho_{j-2}$$

Para $j = 1$, $\rho_1 = 1.1\rho_0 - 0.18\rho_1$, então:

$$\rho_1 = \frac{1.1}{(1 + 0.18)} = 0.9322$$

Para $j = 2$, $\rho_2 = 1.1\rho_1 - 0.18$, então:

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= 1.1(0.9322) - 0.18 \\
&= 0.8454
\end{aligned}$$

Como $\gamma_j = \rho_j\gamma_0$, podemos escrever a variância γ_0 como:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 1.1\rho_1\gamma_0 - 0.18\rho_2\gamma_0 + \sigma^2 \\
&= 1.1(0.9322)\gamma_0 - 0.18(0.8454)\gamma_0 + \sigma^2 \\
&= 1.02542\gamma_0 - 0.152176\gamma_0 + \sigma^2 \\
(1 - 1.02542 + 0.152176)\gamma_0 &= \sigma^2 \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{(1 - 1.02542 + 0.152176)} \approx 7.9\sigma^2
\end{aligned}$$

Podemos verificar pela fórmula geral:

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2)\sigma^2}{(1 + \phi_2)[(1 - \phi_2^2)^2 - \phi_1^2]}$$

Dado que $\phi_1 = 1.1$ e $\phi_2 = -0.18$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{(1+0.18)\sigma^2}{(1-0.18)[(1+0.18)^2 - 1.1^2]} \\ &= \frac{(1.18)\sigma^2}{(0.82)[0.182]} \approx 7.9\end{aligned}$$

Como a média e a variância não dependem do tempo, o processo $\{Y_t\}$ é estacionário em covariância.

Para encontra as autocovariâncias usamos $\gamma_j = \rho_j \gamma_0$:

$$\gamma_1 = \rho_1 \gamma_0 = 0.9322 \times 7.9\sigma^2 \approx 7.364$$

$$\gamma_2 = \rho_2 \gamma_0 = 0.8545 \times 7.9\sigma^2 \approx 6.75$$

$\boxed{3.3}$

$$\psi_0 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + ... - \phi_1\psi_0 L - \phi_1\psi_1 L^2 - \phi_1\psi_2 L^3 - ... - \phi_2\psi_0 L^2 - \phi_2\psi_1 L^3 - \phi_2\psi_2 L^4 - ... \\ - \phi_p\psi_0 L^p - \phi_p\psi_1 L^{p+1} - \phi_p\psi_2 L^{p+2} - ... = 1$$

$$\psi_0 + [\psi_1 - \phi_1\psi_0]L + [\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0]L^2 + [\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0]L^3 \\ + [\psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0]L^4 + ... + [\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0]L^p = 1$$

Para $j = p, p+1, ...$

Com isso temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - \phi_1\psi_0 &= 0 \\ \psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 &= 0 \\ \psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 &= 0 \\ \psi_4 - \phi_1\psi_3 - \phi_2\psi_2 - \phi_3\psi_1 - \phi_4\psi_0 &= 0 \\ &\vdots \\ \psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_{j-p} &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a partir de ψ_0:

$$\psi_0 = 1$$
$$\psi_1 - \phi_1\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$
$$\psi_2 - \phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$
$$\psi_3 - \phi_1\psi_2 - \phi_2\psi_1 - \phi_3\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 + \phi_2\psi_1 + \phi_3\psi_0$$
$$\vdots$$
$$\psi_j - \phi_1\psi_{j-1} - \phi_2\psi_{j-2} - ... - \phi_{p-1}\psi_1 - \phi_p\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + ... + \phi_{p-1}\psi_1 + \phi_p\psi_{j-p}$$

Para $j = p, p+1, ...$

Portanto os valores de ψ_j são a solução para a equação de diferenças de $n^{\text{ésima}}$ ordem com valor inicial $\psi_0 = 1$ e $\psi{-1} = \psi_{-2} = ... = \psi_{-p+1} = 0$. Então, dos resultados das equações em diferença:

$$\begin{bmatrix} \psi_j \\ \psi_{j-1} \\ \vdots \\ \psi_{-p+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^j \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\psi_j = f_{11}^{(j)}$$

$\boxed{3.4}$

$$\psi(L)c = \psi_0 c + \psi_1 Lc + \psi_2 L^2 c + \psi_3 L^3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2}$$

$$\text{como } L^j c = c \ \ \forall \ \ j$$

$$\psi(L)c \equiv \psi(1)c = \psi_0 c + \psi_1 c + \psi_2 c + \psi_3 c + ... = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

$\boxed{3.5}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

Deixe λ_1 e λ_2 satisfazerem $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)$, note que λ_1 e λ_2 ambos estão dentro do círculo unitário em um processo $AR(2)$ estacionário em covariância.

Considere primeiro o caso em que as duas raízes λ_1 e λ_2 sejam reais e distintas. Dado que $\psi_j = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j| \\ &< \sum_{j=0}^{\infty} |c_1 \lambda_1^j| + |c_2 \lambda_2^j| \\ &= \frac{|c_1|}{(1 - |\lambda_1|)} + \frac{|c_2|}{(1 - |\lambda_2|)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Considere o caso em que λ_1 e λ_2 sejam raízes complexas conjugadas distintas. Deixe $R - |\lambda_i|$ representar o modulo de λ_1 ou λ_2. Então $0 \leqslant R < 1$. Dado que no caso de raízes complexas conjugadas distintas,

$$c_1 \lambda_1^j + c_2 \lambda_2^j = 2\alpha R^j \cos(\theta j) + 2\beta R^j \text{sen}(\theta j).$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| &= \sum_{j=0}^{\infty} |c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} |2\alpha R^j \cos(\theta j) - 2\beta R^j \mathrm{sen}(\theta j)| \\
&\leqslant |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\cos(\theta j)| + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} R^j |\mathrm{sen}(\theta j)| \\
&\leqslant |2\alpha| \sum_{j=0}^{\infty} |R^j| + |2\beta| \sum_{j=0}^{\infty} |R^j \\
&= 2\frac{(|\alpha| + |\beta|)}{(1-R)}
\end{aligned}
$$

Por fim, para o caso de raízes reais repetidas $|\lambda| < 1$,

$$
\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |k_1\lambda^j + k_2 j\lambda^{j-1}| \leqslant |k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda^j| + |k_2| \sum_{j=0}^{\infty} |j\lambda^{j-1}|.
$$

Mas

$$
|k_1| \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j = \frac{|k_1|}{(1-|\lambda|)} < \infty
$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |j\lambda^{j-1}| &= 1 + 2|\lambda| + 3|\lambda|^2 + 4\lambda|^3 + \cdots \\
&= 1 + (|\lambda| + |\lambda|) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^2 + |\lambda|^2) \\
&\quad + (|\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3 + |\lambda|^3) + \cdots \\
&= (1 + |\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda| + |\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + (|\lambda|^2 + |\lambda|^3 + \cdots) + \cdots \\
&= \frac{1}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|)} + \frac{|\lambda|^2}{(1-|\lambda|)} + \cdots \\
&= \frac{1}{(1-|\lambda|)} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

$\boxed{3.6}$ $AR(\infty)$:

$$
(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t
$$

$MA(q)$:

$$
(Y_t - \mu) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t
$$

Dado que as raízes de $1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \cdots + \theta_q z^q$ são todas reais e distintas e estão fora do círculo unitário e o processo $MA(q)$ é invertível, temos:

$$
(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) = 1
$$

Que ao multiplicarmos, resulta em:

$$\begin{aligned}
1 = 1 &+ \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots \\
&+ \theta_1 L + \theta_1 \eta_1 L^2 + \theta_1 \eta_2 L^3 + \cdots \\
&+ \theta_2 L^2 + \theta_2 \eta_1 L^3 + \theta_2 \eta_2 L^4 + \cdots \\
&\vdots \\
&+ \theta_q L^q + \theta_q \eta_1 L^{q+1} + \theta_q \eta_2 L^{q+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. colocando os L^i's em evidência:

$$\begin{aligned}
1 = \ & 1 + (\eta_1 + \theta_1) L \\
&+ (\eta_2 + \theta_1 \eta_1 + \theta_2) L^2 \\
&+ (\eta_3 + \theta_1 \eta_2 + \theta_2 \eta_1 + \theta_3) L^3 \\
&\vdots \\
&+ (\eta_j + \theta_1 \eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1} \eta_1 + \theta_q) L^j
\end{aligned}$$

Para $j = q, q+1, \cdots$. Para a igualdade valer, os coeficientes dos L^i's devem ser zero, então:

$$\begin{aligned}
\eta_1 + \theta_1 = 0 &\Rightarrow \eta_1 = -\theta_1 \\
\eta_2 + \theta_1 \eta_1 + \theta_2 = 0 &\Rightarrow \eta_2 = -\theta_1 \eta_1 - \theta_2 = -\theta_2 + \theta_1^2 \\
\eta_3 + \theta_1 \eta_2 + \theta_2 \eta_1 + \theta_3 = 0 &\Rightarrow \eta_3 = -\theta_1 \eta_2 - \theta_2 \eta_1 - \theta_3 = -\theta_1^3 + 2\theta_1 \theta_2 - \theta_3 \\
&\vdots \\
\eta_j + \theta_1 \eta_{j-1} + \cdots + \theta_{q-1} \eta_1 + \theta_q = 0 &\Rightarrow \eta_j = -\theta_1 \eta_{j-1} - \cdots - \theta_{q-1} \eta_1 - \theta_q
\end{aligned}$$

$\boxed{3.7}$ $AR(\infty)$:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots)(Y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$MA(q)$:

$$Y_t - \mu = \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \varepsilon_t$$

Então:

$$(1 + \eta_1 L + \eta_2 L^2 + \cdots) \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} = 1$$

Efetuando a multiplicação, temos:

$$\begin{aligned}
1 = &\left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_1 L \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&+ \eta_2 L^2 \left\{ \prod_{j=0}^{n} (1 - \lambda_j L) \right\} \left\{ \prod_{j=n+1}^{q} (1 - \lambda_j^{-1} L) \right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right\}\left\{1-\frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\right\}\\
&+\eta_1 L\left\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right\}\left\{1-\frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\right\}\\
&+\eta_2 L^2\left\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right\}\left\{1-\frac{1}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\right\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 = &\left\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n-\frac{\left[1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\right\}\\
&+\eta_1 L\Bigg\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\\
&-\frac{\left[\eta_1 L1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\Bigg\}\\
&+\eta_2 L^2\Bigg\{1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\\
&-\frac{\left[\eta_2 L^2 1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_n L^n\right]}{\prod\limits_{j=n+1}^{q}\lambda_j}\left[\theta_{n+1}L+\theta_{n+2}L^2+\cdots+\theta_q L^q\right]\Bigg\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Como no exercício 6, devemos realizar as multiplicações e isolar os L^i's para derivar o algoritmo dos coeficientes.

$\boxed{3.8}$

$$Y_t = (1+2.4L+0.8L^2)\varepsilon_t$$

$$
\begin{gathered}
\Rightarrow (1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z) = 1+2.4z+0.8z^2\\
\lambda_1 = -0.4,\ \ \lambda_2 = -2
\end{gathered}
$$

Então $1+2.4z+0.8z^2 = (1+0.4z)(1_2 z)$ como uma raiz, λ_2 está está fora do círculo unitário, o termo $(1+0.4z)(1+2z)$ não é invertível. O operador invertível é

$$(1+0.4z)(1+0.5z) = (1+0.9z+0.2z^2).$$

Função geradora de autocovariância e invertibilidade para um processo $MA(2)$:

$$
\begin{aligned}
g_Y(z) &= \sigma^2(1+\theta_1 z+\theta_2 z^2)(1+\theta_1 z^{-1}+\theta_2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2(1+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\theta_1 z^{-1}+\theta_1^2+\theta_1\theta_2 z+\theta_1 z^{-2}+\theta_1\theta_2 z^{-1}+\theta_2^2 z^{-2}) \\
&= \sigma^2[1+\theta_2 z^2+(\theta_1+\theta_1\theta_2)z+(1+\theta_1^2+\theta_2^2)z^0+\theta_2 z^{-2}+(\theta_1+\theta_1\theta_2)z^{-1}] \\
&\equiv \sigma^2[(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2 z)(1-\lambda_1 z^{-1})(1-\lambda_2 z^{-1})]
\end{aligned}
$$

Como $\lambda_2 = -2$ está fora do círculo unitário, substituímos por seu inverso $\lambda_2^{-1} = -0.5$. Devemos também substituir σ^2 por $\sigma^2\lambda_2^2$.Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero:

$$
\begin{aligned}
g_Y &= \sigma^2\lambda_2^2[(1-\lambda_1 z)(1-\lambda_2^{-1} z)(1-\lambda_1 z^{-1})(1-\lambda_2^{-1} z^{-1})] \\
&= (1)4[(1+0.4z)(1+0.5z)(1+0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})] \\
&= 4[(1+0.9z+0.2z^2)(1+0.9z^{-1}+0.2z^{-2})] \\
&= 4[z^0+0.9z+0.2z^2+0.9z^{-1}+0.18z^0+0.18z+0.2z^{-2}+0.018z^{-1}+0.2z^0]
\end{aligned}
$$

As autocovariâncias podem ser encontradas derivando a função geradora de autocovariâncias com respeito a z^j em que j é a ordem de defasagem desejada para a autocovariância. Lembrando que $z^0 = 1$ para encontrarmos a autocovariância de ordem zero. Então:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^0} = 4[1+0.81+0.4] = 7.4 \\
\gamma_1 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^1} = 4[0.9+0.18] = 4.32 \\
\gamma_2 &= \frac{\partial g_y}{\partial z^2} = 4[0.2] = 0.8
\end{aligned}
$$

Que são as mesmas autocovariâncias do processo $Y_t = (1+2.4L+0.8L^2)\varepsilon_t$ do exercício 1. Podemos concluir que o processo gerado pelo operador invertível

$$(1+0.4z)(1+0.5z) = (1+0.9z+0.2z^2),$$

têm a variância $\lambda_2^2 = 4$ vezes menor que o processo gerado pelo operador não invertível $1+2.4L+0.8L^2$. Para verificação, vamos gerar as autocovariâncias do processo invertível, conforme a fórmula padrão. Como $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = 0.2$ e $\sigma^2 = 1$, as autocovariâncias são:

$$
\begin{aligned}
\bar{\gamma_0} &= [1+\theta_1^2+\theta_2^2]\sigma^2 = 1+0.81+0.04 = 1.85 \\
\bar{\gamma_1} &= [\theta_1+\theta_1\theta_2]\sigma^2 = 0.9+0.18 = 1.08 \\
\bar{\gamma_2} &= \theta_2\sigma^2 = 0.2
\end{aligned}
$$

Isto ocorre pois a variância, σ^2 das $\bar{\gamma}_s$'s deveria ter sido substituída por $\sigma^2\lambda_2^2$. Conclui-se que quando existe uma raiz λ_i fora do círculo unitário, as autocovariâncias do proceso invertível associado devem ser infladas por um fator de

$$\prod_{i=n+1}^{m} \lambda_i^2.$$

em que $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_m$ são as raízes fora do círculo unitário, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são as raízes dentro do círculo unitário e m o número total de raízes.

Capítulo 4

Previsão

$\boxed{4.1}$ Fórmula 4.3.6:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(m)\prime} &\equiv \begin{bmatrix}\alpha_0^m & \alpha_1^m & \alpha_2^m & \cdots & \alpha_m^m\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mu & \gamma_1+\mu^2 & \gamma_2+\mu^2 & \cdots & \gamma^m+\mu^2\end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix}1 & \mu & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \gamma_0+\mu^2 & \gamma_1+\mu^2 & \cdots & \gamma_{m-1}+\mu^2 \\ \mu & \gamma_1+\mu^2 & \gamma_0+\mu^2 & \cdots & \gamma_{m-2}+\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \gamma m-1+\mu^2 & \gamma_{m-2}+\mu^2 & \cdots & \gamma_0+\mu^2\end{bmatrix}^{-1} \\
&\equiv E[Y_{t+1}X_t']E[X_tX_t']^{-1}
\end{aligned}
$$

Para $X_t = \begin{bmatrix}1 & Y_t\end{bmatrix}'$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix}E[Y_{t+1}] & E[Y_{t+1}Y_t]\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & E[Y_t] \\ E[Y_t] & E[Y_t^2]\end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix}\mu & \gamma_1+\mu^2\end{bmatrix} \times \frac{1}{\gamma_0}\begin{bmatrix}\gamma_0+\mu^2 & -\mu \\ -\mu & 1\end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\alpha}' &= \frac{1}{\gamma_0}\begin{bmatrix}\mu\gamma_0+\mu^3-\mu\gamma_1-\mu^3 & -\mu^2+\gamma_1+\mu^2\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\gamma_0}\begin{bmatrix}\mu\gamma_0-\mu\gamma_1 & \gamma_1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}(1-\rho_1)\mu & \rho_1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= \boldsymbol{\alpha}'X_t \\
&= \begin{bmatrix}(1-\rho_1)\mu & \rho_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ Y_t\end{bmatrix} \\
\hat{E}[Y_{t+1}|Y_t] &= (1-\rho_1)\mu+\rho_1Y_t
\end{aligned}
$$

Portanto a previsão para o período $t + 1$ com base em informações somente do período t é uma média ponderada entre o valor esperado de Y_t, μ e Y_t, em que o fator de ponderação é o coeficiente de autocorrelação de primeira defasagem, ρ_1.