



Universidade Federal de Roraima  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Curso de Licenciatura em Matemática  
Modalidade a Distância

Eliane Lewis

## **Fractais e o Conjunto de Mandelbrot**

Normandia – RR

2022

Eliane Lewis

## **Fractais e o Conjunto de Mandelbrot**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para conclusão do Curso de Licenciatura, modalidade a distância, em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima.

Orientador: Edwin Pedro López Bambarén

Normandia – RR

2022

Dados Internacionais de Catalogação Na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

L673f Lewis, Eliane.

Fractais e o conjunto de Mandelbrot / Eliane Lewis. –  
Normandia, RR, 2022.  
52 f. : il.

Orientador: Edwin Pedro López Bambarén.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade  
Federal de Roraima, Curso de Matemática modalidade de Ensino à  
Distância.


1 – Fractais. 2 – Conjunto de Mandelbrot. 3 – Dimensão. 4 –  
Auto-semelhança. 5 – Complexidade. I – Título. II – Bambarén,  
Edwin Pedro López (orientador).

CDU – 510.22

Eliane Lewis


## Fractais e o Conjunto de Mandelbrot

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como pré-requisito para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Roraima.

Documento assinado digitalmente  
 EDWIN PEDRO LOPEZ BAMBARÉN  
Data: 19/12/2022 17:47:28-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>


---

**Dr. Edwin Pedro López Bambarén**  
(Presidente / DMAT-UFRR)

Documento assinado digitalmente  
 CARLOS ALBERTO SALAZAR MERCADO  
Data: 16/12/2022 10:46:30-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

---

**Dr. Carlos Alberto Salazar Mercado**  
(Membro / IFSUDESTEMG)

Documento assinado digitalmente  
 ROY PERCY TOCTO GUARNIZ  
Data: 15/12/2022 19:23:49-0300  
Verifique em <https://verificador.iti.br>

---

**Dr. Roy Percy Tocto Guarniz**  
(Membro / UFRPE)

*Este trabalho é dedicado a Deus por ter criado  
o universo fractal.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido chegar até aqui. Agradeço também minha mãe por ter me acompanhado nessa jornada, Tia Sonita e família por terem me acolhido quando precisei de acesso à internet, aos meus Chefes por me deixarem usar o computador do trabalho para estudar e a meus familiares e amigos pelo encorajamento.

Deixo aqui um agradecimento especial ao meu orientador por me ajudar a encontrar o caminho que eu deveria seguir.

*“Um fractal é uma maneira de ver o  
infinito”.  
(Benoit Mandelbrot)*

# Resumo

Este trabalho apresentará uma parte do universo fractal e sua importância como fonte de conhecimento. Serão apresentados conceitos que envolvem números complexos, espaço, dimensão, métrica, funções e fractais. Cada um destes conceitos é necessário para que se possa entender o que são as figuras fractais, como podem ser geradas, de que forma podem ser medidas e por qual motivo são estudadas. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica por sua ampla gama de informações e dados precisos. Através da história do Conjunto de Mandelbrot, veremos que medir algo é muito mais complexo do que imaginamos. Como resultado pudemos observar que os Fractais estão presentes nas mais variadas áreas e que seu estudo pode ampliar as fronteiras do conhecimento.

**Palavras-chave:** Fractais. Conjunto de Mandelbrot. Dimensão. Auto-semelhança. Complexidade.



# Abstract

This work will present a part of the fractal universe and its importance as a source of knowledge. Concepts involving complex numbers, space, dimension, metric, functions and fractals will be presented. Each of these concepts is necessary to understand what fractal figures are, how they can be generated, how they can be measured and why they are studied. The methodology used was bibliographical research for its wide range of information and accurate data. Through the history of the Mandelbrot Set, we will see that measuring something is much more complex than we imagine. As a result, we could observe that Fractals are present in the most varied areas and that their study can expand the frontiers of knowledge.

**Keywords:** Fractals. Mandelbrot set. Dimension. Self-similarity. Complexity.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Forma Geométrica. . . . .	16
Figura 2 – Auto-semelhança na natureza. . . . .	20
Figura 3 – Representação dos Conjuntos $A = [100, 150] \times [100, 150]$ e $B = [200, 300] \times [100, 150]$ . . . . .	24
Figura 4 – Conjunto de Cantor . . . . .	25
Figura 5 – Floco de Neve de Koch. . . . .	29
Figura 6 – Fractais na Natureza. . . . .	30
Figura 7 – Benoit Mandelbrot. . . . .	31
Figura 8 – Conjunto de Julia. . . . .	33
Figura 9 – Divisão da tela. . . . .	34
Figura 10 – Conjunto de Mandelbrot para um máximo de 20 iterações. . . . .	37
Figura 11 – Construção da Curva de Peano. . . . .	38
Figura 12 – Curva de Peano. . . . .	39
Figura 13 – Triângulo de Sierpinski. . . . .	39
Figura 14 – Figura geradora da curva de Hilbert. . . . .	40
Figura 15 – Processo de construção da curva de Hilbert. . . . .	40
Figura 16 – Processo de construção da Árvore Pitagórica. . . . .	41
Figura 17 – Árvore Pitagórica com triângulos isóceles. . . . .	42
Figura 18 – Árvore Pitagórica com triângulos escalenos. . . . .	42
Figura 19 – Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott. . . . .	44
Figura 20 – Característica fractal do comportamento de preços. . . . .	45
Figura 21 – Imagem editada usada para análise fractal com variação de $N(\varepsilon)$ dos tamanhos das caixas. . . . .	47
Figura 22 – Cosmometria. . . . .	48

# Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	é o conjunto dos número naturais
$\mathbb{N}_0$	é o conjunto de todos os números naturais incluindo o 0
$\mathbb{R}$	é o conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	é o conjunto dos números complexos
$\mathfrak{C}$	é o conjunto de Cantor
$\aleph_0$	é a cardinalidade do conjunto de todos os números naturais
$\aleph_1$	é a classe de todos os conjuntos equivalentes ao conjunto das partes dos números naturais

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
2.1	Conjunto dos Números Complexos	15
2.2	Sequências de números complexos	16
2.3	Espaços Métricos	18
<b>3</b>	<b>FRACTAIS</b>	<b>20</b>
3.1	Auto-semelhança	20
3.2	Sistemas de Funções Iteradas	21
3.3	Métrica Hausdorff	23
3.4	Atratores para sistemas de funções iteradas	25
3.4.1	Conjuntos de Cantor	25
3.4.2	Cardinalidade e algumas propriedades de $\mathcal{C}$	26
3.5	Dimensão fracionária ou dimensão fractal	27
3.6	Dimensão de Hausdorff	28
3.7	Complexidade Infinita	29
<b>4</b>	<b>O CONJUNTO DE MANDELBROT</b>	<b>31</b>
4.1	Benoit Mandelbrot	31
4.2	O Conjunto de Julia	32
4.3	Como é gerado o conjunto de Mandelbrot	33
4.4	O conjunto de Mandelbrot em python	34
<b>5</b>	<b>ALGUNS FRACTAIS INTERESSANTES</b>	<b>38</b>
5.1	Curva de Peano	38
5.2	Triângulo de Sierpinski	39
5.3	Curva de Hilbert	40
5.4	Árvore Pitagórica	41
<b>6</b>	<b>POR ONDE ANDAM OS FRACTAIS?</b>	<b>44</b>
6.1	Fractais nas finanças	44
6.2	Fractais na saúde	46
6.3	Fractais na cosmometria	48
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>49</b>

**REFERÊNCIAS . . . . . 51**

# 1 Introdução

Na matemática do século XX, existe um conceito muito contemporâneo, que é o conceito de fractal. Este conceito, que possui imagens surpreendentes, é contra-intuitivo.

Em 1914, um matemático chamado Carathéodory<sup>1</sup> havia desenvolvido uma teoria geral de medidas e dimensão. Em 1918, Hausdorff decidiu fazer uma contribuição ao trabalho de Carathéodory demonstrando que sua teoria funcionava mesmo em alguns casos em que a dimensão não era um número inteiro.

Vamos pensar em uma figura plana, como um retângulo, que possui dimensão 2. E temos a medida em dimensão 2 que é a área. A medida em dimensão 1 seria o comprimento e a medida em dimensão 3 seria o volume. Uma das coisas que Carathéodory mostrou é que se pegarmos um objeto de uma certa dimensão e utilizarmos uma medida muito alta, por exemplo, um retângulo e usarmos a medida 3 (volume), descobriremos que o volume é 0. Se utilizarmos a medida 1 (que seria o comprimento de um retângulo), descobriremos que o comprimento é infinito. Em outras palavras, se utilizarmos uma medida errada porque ela é muito alta, a medida será 0. Se utilizarmos uma medida numa dimensão abaixo, encontraremos o infinito. E na dimensão certa a medida encontrada é apropriada ao objeto que estamos medindo. Ou seja, cada objeto tem a sua medida adequada.

E Hausdorff observou que às vezes essa medida certa, essa dimensão certa, não era um número inteiro. No entanto, esse conceito de Hausdorff, que é o conceito de fractal, ficou esquecido até a década de 60. Um meteorologista chamado Edward Lorenz, estava trabalhando com modelos matemáticos de previsão do tempo, quando por acaso, percebeu que o modelo que estava usando tinha uma característica que até então não era muito explorada, que era a de ser caótico.

E mais, ele descobriu que o modelo dele tinha um atrator. E esse atrator estanho, hoje conhecido como *atrator de Lorenz* ou *atrator estranho*, era um fractal no sentido de Hausdorff. Então os matemáticos passaram a olhar essa teoria com muito cuidado.

Por exemplo, quando analisamos o Floco de Neve de Koch, percebemos que ele é mais do que uma curva e menos do que uma região. A dimensão dele é maior do que 1 e menor do que 2, ou seja, é um número que não é inteiro. E foi isso que Hausdorff percebeu em 1918, e que só foi ganhar importância a partir da década de 60.

No Conjunto de Cantor, em que eliminamos sempre os terços centrais e a figura vai ficando repleta de pontos, observe que os pontos extremos não saem mais da figura. Vemos que esse conjunto não é um conjunto de pontos isolados porque ele tem dimensão maior que 0 e não

<sup>1</sup> O matemático Constantin Carathéodory (1873-1950).

é um segmento porque tem dimensão menor que 1. E isso gerou toda a teoria dos fractais.

Os matemáticos acabaram descobrindo alguns exemplos estranhos em que o objeto é um fractal mas tem dimensão inteira. Mas a ideia central que será apresentada neste trabalho é a de que um fractal não possui uma dimensão inteira. Também veremos como um fractal pode ser construído na linguagem de programação PYTHON.

## 2 Preliminares

Antes de começarmos a falar especificamente de Fractais e como eles são formados, precisaremos introduzir alguns conceitos importantes que nos ajudarão a compreender melhor as definições, propriedades e exemplos que serão citados nos próximos capítulos.

Inicialmente falaremos sobre os Números Complexos, pois é dentro deste conjunto que construímos o Conjunto de Mandelbrot, em seguida falaremos sobre as Sequências de Números Complexos e o que as fazem convergir ou divergir, finalizaremos o capítulo com o tópico Espaços Métricos que são de fundamental importância para que exista a semelhança.

### 2.1 Conjunto dos Números Complexos

Surgidos da necessidade de resolver equações com raiz de números negativos, os números complexos podem ser representados na forma algébrica, geométrica, trigonométrica e exponencial.

Definimos a seguir um número complexo na forma algébrica:

**Definição 2.1.** Um número complexo é todo número que pode-se escrever na forma  $a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ .

O sistema dos números complexos é uma extensão natural do sistema dos números reais. Observe que os números complexos podem ser definidos como pares ordenados  $(x, y)$  de números reais, dentro do plano complexo, da mesma forma que pensamos nos números reais como pontos da reta real.

**Definição 2.2.** Dado um número complexo  $z = a + bi$ , definimos módulo de  $z$ , denotado por  $|z|$ , como  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Segundo REAMAT (2020), para  $z \neq 0$ , também definimos argumento  $\theta$ , denotado por  $\theta = \arg(z)$ , como qualquer solução do sistema

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|}, \quad (2.1)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|}, \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Na Figura 1 abaixo apresentamos a forma geométrica de um número complexo no plano complexo onde o eixo- $x$  é chamado eixo real e o eixo- $y$  é chamado de eixo imaginário.



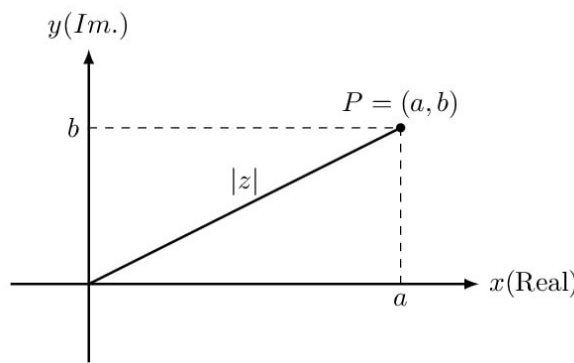


Figura 1 – Forma Geométrica.

**Definição 2.3.** Sendo um número complexo  $z = a + bi$  (em que  $a, b \in \mathbb{R}$ ), o seu conjugado é  $\bar{z} = a - bi$  e  $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$ .

Podemos observar que  $|z| = |\bar{z}|$ .

A forma trigonométrica de um número complexo é dada por  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $\theta$  é o argumento.

Podemos definir o conjugado de um número complexo  $z = a + bi$  como  $\bar{z} = a - bi$ . Na prática apenas trocamos o sinal da parte imaginário do número complexo.

Finalmente, a forma exponencial de um número complexo é  $z = |z|e^{i\theta}$ , onde  $|z|$  é o módulo de  $z$ ,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  é a fórmula de Euler e podemos observar que  $\theta$  satisfaz as seguintes equações:  $a = |z| \cos(\theta)$  e  $b = |z| \sin(\theta)$ .

**Exemplo 2.1.** Se  $a = 2$  e  $b = 3$  então formamos o número complexo  $z = 2 + 3i$ , o qual é representado no plano complexo como um ponto de coordenadas  $(2, 3)$ , cujo módulo é  $|z| = \sqrt{13}$  e o argumento é  $\theta$  que é solução de  $\{\sin \theta = 3/\sqrt{13}, \cos \theta = 2/\sqrt{13}\}$ .

## 2.2 Sequências de números complexos

**Definição 2.4.** Uma sequência de números complexos  $(z_n)$  é uma função  $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  que associa a cada número natural  $n$  um número complexo.

Uma sequência  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  de números complexos tem um *limite*  $z$  se, dado qualquer número positivo  $\varepsilon$ , existir algum inteiro positivo  $n_0$  tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon, \text{ se } n > n_0.$$

Uma sequência tem, no máximo, um limite. Quando o limite  $z$  existir, dizemos que a sequência *converge* a  $z$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Se uma sequência não tiver limite, ela *diverge*.

**Teorema 2.1.** *Suponha que  $z_n = x_n + iy_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $z = x + iy$ . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

*se e só se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Sobre convergência de séries, podemos dizer que uma **série** infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k + \dots$$

de números complexos **converge à soma**  $s$  se a sequência

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k = z_1 + \dots + z_k + \dots + z_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

das *somas parciais* convergir a  $s$ , nesse caso, escrevemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s.$$

**Teorema 2.2.** *Suponha que  $z_n = x_n + iy_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $s = x + iy$ . Então,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s,$$

*se e só se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y.$$

O teorema afirma que podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

sempre que saibamos que as duas séries do lado direito convergem ou que a do lado esquerdo converge.

**Corolário 2.3.** *Se uma série de números complexos converge, então o  $n$ -ésimo termo converge a zero se  $n$  tender ao infinito.*

**Corolário 2.4.** *A convergência absoluta de uma série de números complexos implica a convergência dessa série.*

## 2.3 Espaços Métricos

Uma métrica é uma função, que associa a cada par ordenado um número real, que definimos a seguir.

**Definição 2.5.** Dado  $X$  um conjunto não vazio, chamamos de uma *métrica* sobre  $X$  uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfazendo, para todo  $x, y, z \in X$ :

1.  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ;
2.  $d(x, x) = 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Sendo  $X$  um conjunto e  $d$  uma métrica, um *espaço métrico* é um par  $(X, d)$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $d(x, y) = |x - y|$ , para todo  $x, y \in \mathbb{C}$ , onde  $|\cdot|$  é o módulo de um número complexo. A função  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{C}$ , já que satisfaz as seguintes condições, considerando  $x = x_1 + x_2i$ ,  $y = y_1 + y_2i$  e  $z = z_1 + z_2i$ , onde  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1$  e  $z_2$  são números reais:

- Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| = |x_1 + x_2i - (y_1 + y_2i)| \\ &= |(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)i| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} > 0, \end{aligned}$$

para todo  $x_1 \neq y_1$  ou  $x_2 \neq y_2$ .

- $d(x, x) = 0$ . De fato

$$d(x, x) = |x - x| = |0| = 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{C}$ .

- $d(x, y) = d(y, x)$ . De fato,

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = d(y, x)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{C}$ .

- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 d(x, z)^2 &= |x - z|^2 = |(x - y) + (y - z)|^2 \\
 &= ((x - y) + (y - z))\overline{((x - y) + (y - z))} \\
 &= (x - y)\overline{(x - y)} + (x - y)\overline{(y - z)} + (y - z)\overline{(x - y)} + (y - z)\overline{(y - z)} \\
 &= |x - y|^2 + 2\operatorname{Re}(x - y, y - z) + |y - z|^2 \\
 &\leq |x - y|^2 + 2|x - y||y - z| + |y - z|^2 \\
 &= (|x - y| + |y - z|)^2.
 \end{aligned}$$

Então

$$d(x, y)^2 \leq (|x - y| + |y - z|)^2;$$

Um espaço métrico é completo quando todas as *sequência de Cauchy*<sup>1</sup> convergem para um limite que pertence ao espaço. O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$  é completo.

---

<sup>1</sup> Uma sequência de Cauchy é uma sequência tal que a distância entre os termos vai se aproximando de zero.

## 3 Fractais

Muitas formas naturais possuem características de auto-semelhança ao longo de várias ordens de grandeza. Essas abstratas construções estão presentes em áreas da matemática, física, biologia e até astronomia.

**Definição 3.1.** Um fractal<sup>1</sup> é uma figura geométrica em que uma parte se assemelha a toda figura, obtida através de um processo iterativo e que pode ter uma dimensão não inteira, ver Carvalho (2005).

### 3.1 Auto-semelhança

As figuras denominadas fractais possuem três características principais: auto-semelhança, dimensão fracionária e complexidade infinita. Neste primeiro tópico falaremos sobre a auto-semelhança, que de acordo com Hartmann et al. (2014) “é a simetria através de escalas, de modo que cada pequena porção do fractal pode ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor”.

Alguma vez você já olhou para a natureza e percebeu que certos padrões se repetiam? Como nas folhas de uma samambaia, na imagem de um raio, ou até no sistema vascular humano. Vamos pegar o exemplo do raio, quando observamos a imagem de um raio se projetando para a terra, vemos que sua estrutura é constituída de ramificações, se aproximarmos a imagem mais um pouco, percebemos que essas ramificações se repetem, só que em menor escala, se insistirmos em aproximar a imagem mais uma vez, encontraremos essas mesmas ramificações em uma escala menor ainda.



Figura 2 – Auto-semelhança na natureza.

Existem diversas formas da natureza que apresentam estruturas de auto-semelhança e, apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, elas são discutidas sob o

<sup>1</sup> A definição formal de fractal ainda é um problema na matemática, pois qualquer que seja a definição apresentada, esta deixa a desejar. No entanto, isso não deve ser um impedimento ao estudo dos fractais.

ponto de vista da geometria fractal. Para estas formas da natureza, a noção de auto-semelhança deve ser vista cuidadosamente e encarada como auto-semelhança aproximada, uma vez que, partes destas figuras têm a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica, mas não são réplicas exatas destas, ver Nunes (2006).

No exemplo anterior, percebemos que existe algum tipo de semelhança dentro da estrutura do raio. Para que exista auto-semelhança, precisamos da semelhança, para ter semelhança, precisamos de um espaço métrico.

**Definição 3.2.** Sejam  $(S, \rho)$  e  $(T, \tau)$  dois espaços métricos. Uma função  $f : S \rightarrow T$  é chamada **semelhança de razão  $r$**  se

$$\tau(f(x), f(y)) = r\rho(x, y) \quad \forall x, y \in S.$$

**Exemplo 3.1.** Sejam  $S = T = \mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos e  $\rho = \tau$  a métrica usual. Uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = az + b$  com  $a, b \in \mathbb{C}$  é uma semelhança, pois

$$\begin{aligned} \tau(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| \\ &= |a(x - y)| = |a||x - y| \\ &= r\rho(x, y), \end{aligned}$$

com  $r = |a|$ .

**Exemplo 3.2.** Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = 2z + 1 + i$ . Provaremos que esta função é uma semelhança de razão  $r$ ,  $r > 0$ , em  $S = T = \mathbb{C}$  e métrica usual. De fato,

$$|f(x) - f(y)| = |2x + 1 + i - (2y + 1 + i)| = |2x - 2y| = 2|x - y| = r|x - y|,$$

onde  $r = 2$  e  $x, y \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$|f(x) - f(y)| = r|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

## 3.2 Sistemas de Funções Iteradas

De forma simplificada, sistemas de funções iteradas são uma ferramenta utilizada para construir fractais. Segundo Souza (2019) elas “são um conjunto de mapas que possuem uma operação que modifica a posição dos elementos dentro do conjunto.”

**Definição 3.3.** Uma lista finita de razões é uma  $n$ -tupla<sup>2</sup> ordenada  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  de números positivos; a lista é chamada de contrativa quando  $r_i < 1, \forall i = 1, \dots, n$ .

Um sistema de funções iteradas em um espaço métrico  $S$  realizando uma lista de razões, é uma lista  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  de semelhanças de razão  $r_i$ , respectivamente.

<sup>2</sup> Uma  $n$ -tupla ou  $n$ -tupla é uma sequência ordenada de  $n$  elementos, pode conter um objeto mais de uma vez e os objetos são apresentados obrigatoriamente na ordem dada.

Um conjunto compacto não-vazio  $K \subseteq S$  é um conjunto invariante do sistema de funções iteradas  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  se, e somente se,

$$K = \bigcup_{i=1}^n f_i[K],$$

neste caso dizemos que  $K$  é auto-semelhante.

**Exemplo 3.3.** Seja  $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , com a métrica usual  $d(x, y) = |x - y|$  e  $n = 3$ . Tome  $f_1(z) = \frac{1}{3}z + i$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{2}z - i$  e  $f_3(z) = \frac{2}{3}z + 1$ . Aplicando a métrica usual em  $f_1(z)$  temos:

$$\begin{aligned} d(f_1(x), f_1(y)) &= |f_1(x) - f_1(y)| = \left| \frac{1}{3}x + i - \frac{1}{3}y - i \right| \\ &= \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y). \end{aligned}$$

Então,  $r_1 = \frac{1}{3}$ .

Fazendo o mesmo com  $f_2(z)$  e  $f_3(z)$  temos:

$$\begin{aligned} d(f_2(x), f_2(y)) &= \frac{1}{2}d(x, y), \text{ o que implica que } r_2 = \frac{1}{2}, \\ d(f_3(x), f_3(y)) &= \frac{2}{3}d(x, y), \text{ o que implica que } r_3 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

onde  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são as razões da semelhança.

**Teorema 3.1.** *Seja  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  uma lista contrativa de razões, então existe um único número não negativo  $s$  que satisfaz*

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1.$$

*O número  $s$  é 0 se, e somente se,  $n = 1$ .*

**Exemplo 3.4.** Usando  $r_1, r_2$  e  $r_3$  que encontramos no Exemplo 3.3 temos:

$$r_1^s + r_2^s + r_3^s = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{2}{3}\right)^s = 1,$$

de onde

$$s = 1,64027\dots$$

**Definição 3.4.** A dimensão associada a  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , uma lista contrativa de razões, é o número positivo  $s$  tal que

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_n^s = 1$$

e é chamada dimensão de semelhança.

**Exemplo 3.5.** A dimensão associada a  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  é 1,64027.

### 3.3 Métrica Hausdorff

Felix Hausdorff descreve a convergência de conjuntos definindo uma distância entre eles, o que para nossos propósitos é conveniente, pois queremos analisar a convergência de sequências de compactos em um espaço métrico completo. Na matemática, a distância Hausdorff, ou Métrica Hausdorff, (...) mede o quão distante dois subconjuntos do espaço métrico estão um do outro. Apresentaremos a seguir duas definições que nos ajudarão a compreender a Métrica Hausdorff.

**Definição 3.5.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo. Denotaremos por  $H(X)$  o espaço cujos pontos são subconjuntos compactos não vazios de  $X$ , ou seja,

$$H(X) := \{K \subset X : K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}.$$

**Definição 3.6.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $x \in X$  e  $B \in H(X)$ . Definimos a distância do ponto  $x$  ao conjunto  $B$  como

$$d(x, B) := \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

**Definição 3.7.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $A, B \in H(X)$ . A distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$  é definida como

$$d(A, B) := \max\{d(x, B) : x \in A\}.$$

*Observação 1.* Essa definição de distância entre conjuntos não pode ser uma métrica, pois nem sempre  $d(A, B) = d(B, A)$ . Dessa forma, a métrica Hausdorff será definida como a maior entre as distâncias  $d(A, B)$  e  $d(B, A)$ .

Considerando a notação  $x \vee y$  para representar o máximo entre dois números reais  $x$  e  $y$ , temos a seguinte definição formal:

**Definição 3.8.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Definimos a distância Hausdorff entre dois pontos  $A, B \in H(X)$  como

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

**Exemplo 3.6.** Dados os conjuntos  $A = [100, 150] \times [100, 150]$  e  $B = [200, 300] \times [100, 150]$ . Vamos calcular a distância do conjunto  $A$  ao conjunto  $B$ .



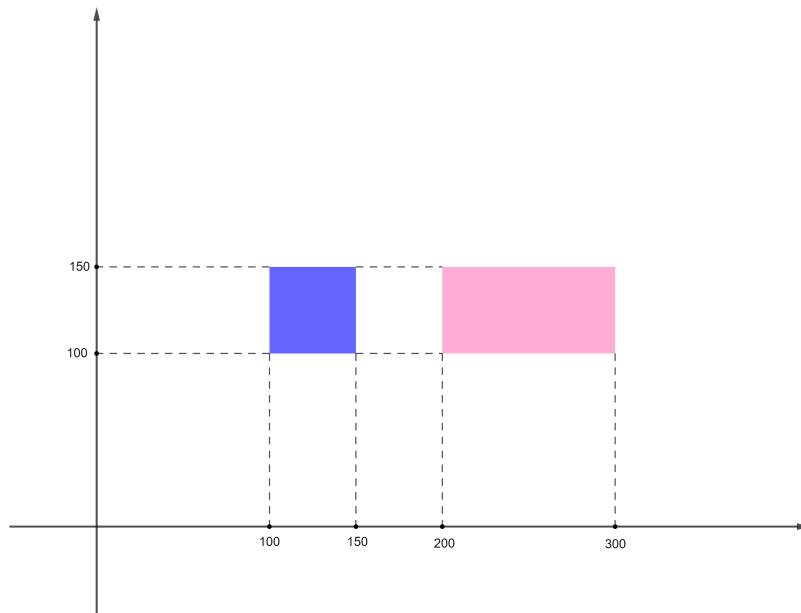


Figura 3 – Representação dos Conjuntos  $A = [100, 150] \times [100, 150]$  e  $B = [200, 300] \times [100, 150]$ .

Primeiramente, calcularemos as distâncias de cada ponto  $x \in A$  ao conjunto  $B$ . Assim, se

$$x = (100, 150) \Rightarrow d(x, B) = 100,$$

$$x = (150, 100) \Rightarrow d(x, B) = 50,$$

$$x = (150, 150) \Rightarrow d(x, B) = 50,$$

$$x = (100, 100) \Rightarrow d(x, B) = 100,$$

como qualquer ponto deve estar entre os limites do ponto  $x$  que já calculamos, basta ver o máximo entre eles. Logo,  $d(A, B) = \max\{d(x, B) : x \in A\} = 100$ .

Para calcular  $d(B, A)$ , o processo será análogo, somente considerando o sentido inverso para o cálculo das distâncias. Calculando as distâncias de cada ponto  $y \in B$  ao conjunto  $A$ , tem-se

$$y = (200, 100) \Rightarrow d(y, A) = 50,$$

$$y = (200, 150) \Rightarrow d(y, A) = 50,$$

$$y = (300, 100) \Rightarrow d(y, A) = 150,$$

$$y = (300, 150) \Rightarrow d(y, A) = 150.$$

Logo,  $d(B, A) = \max\{d(y, A) : y \in B\} = 150$ .

Dessa forma, a Distância Hausdorff entre o conjunto A e B é:

$$h(A, B) = 100 \vee 150.$$

### 3.4 Atratores para sistemas de funções iteradas

No campo matemático dos *sistemas dinâmicos*, um **atrator** é um conjunto de estados para os quais um sistema tende a evoluir, para uma ampla variedade de condições iniciais dos sistemas, os valores dos sistemas que se aproximam o suficiente dos valores do atrator permanecem próximos, mesmo se ligeiramente perturbados, ver stringfixer (2022).

#### 3.4.1 Conjuntos de Cantor

Considere o intervalo  $C_0 = [0, 1]$  e divida-o em três partes iguais. Ao remover o intervalo aberto correspondente ao terço central, obtemos

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

O seguinte conjunto  $C_2$  é obtido removendo o terço central de cada intervalo de  $C_1$ , de maneira que

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

e seguindo da mesma forma obtemos uma sequência aninhada de conjuntos fechados  $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$  cujo limite chamamos de conjunto de Cantor ou conjunto de terços centrais omitidos, veja a figura abaixo que denotamos por  $\mathfrak{C}$ .

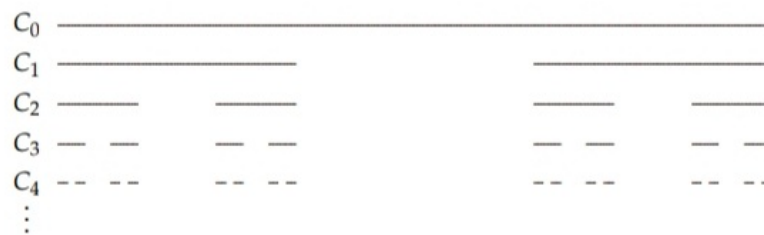


Figura 4 – Conjunto de Cantor

$$\mathfrak{C} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

**Proposição 3.2.** *A dimensão de semelhança de  $\mathfrak{C}$  é  $\ln 2 / \ln 3$ .*

*Demonstração.* Temos que a construção anterior, conhecida como construção por **tremas**<sup>3</sup> corresponde à seguinte aplicação: Se  $A_k$  é qualquer conjunto compacto não vazio em  $S = [0, 1]$ , e

<sup>3</sup> Do latim *tremissis*, moeda romana que valia um terço de um sólido de ouro.

se  $A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^n f_i[A_k]$ , para  $k \geq 0$ , então a sequência  $(A_k)$  converge na métrica de Hausdorff para o conjunto invariante do sistema iterado de funções para  $A_0 = C_0 = [0, 1]$  com  $f_0(x) = \frac{x}{3}$  e  $f_1(x) = \frac{x+2}{3}$ , assim, o conjunto de Cantor é o conjunto invariante para o sistema iterado de funções  $(f_0, f_1)$ , que realizam a lista de razões  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . E resolvendo a equação  $(\frac{1}{3})^s + (\frac{1}{3})^s = 1$  obtemos o resultado.

Observe que cada  $C_k$  contém  $2^k$  intervalos fechados, cada um de comprimento  $(\frac{1}{3})^k$  e que no primeiro passo, removemos um subintervalo de comprimento  $\frac{1}{3}$ , na segunda etapa dois intervalos de comprimento  $\frac{1}{9}$ , em geral, no  $k$ -ésimo passo removemos  $2^{k-1}$  intervalos de comprimento  $(\frac{1}{3})^k$ . Então a soma dos comprimentos dos intervalos que removemos do intervalo  $[0, 1]$  é:

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1,$$

isto é, do conjunto inicial  $[0, 1]$ , cujo comprimento é 1, subtraímos os intervalos que tem o mesmo comprimento 1. ■

### 3.4.2 Cardinalidade e algumas propriedades de $\mathfrak{C}$

Consideremos o conjunto  $A$  formada por todas as funções  $f$  cujo domínio é  $\mathbb{N}$  e imagem  $\{0, 2\}$ , a cardinalidade de  $A$  é  $|A| = |\{0, 2\}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = |\mathbb{R}|$ , então  $A$  é incontável. Além disso, para todo  $f \in A$ , existe um único  $x = 0, f(1)f(2)f(3) \cdots$  tal que  $x \in \mathfrak{C}$ , ou seja, existe uma bijeção entre  $A$  e  $\mathfrak{C}$ , então  $|\mathfrak{C}| = \aleph_1$ . Em outras palavras,  $\mathfrak{C}$  tem o mesmo número de elementos que  $\mathbb{R}$  tem. Apesar disso,  $\mathfrak{C}$  tem uma estrutura topológica muito diferente:

1.  $\mathfrak{C}$  é compacto: é fechado, pois é a intersecção enumerável de conjuntos fechados, e  $\mathfrak{C}$  é limitado, pelo teorema de Heine-Borel<sup>4</sup>, é compacto.
2.  $\mathfrak{C}$  não contém nenhum intervalo: Suponha que  $I = (a, b) \subseteq \mathfrak{C}$ , então  $I \subseteq C_k, \forall k \in \mathbb{N}$ . Como  $C_k$  é composto de  $2^k$  intervalos fechados disjuntos,  $I$  é um subconjunto de algum intervalo de tamanho  $(\frac{1}{3})^k$ , então  $b - a \leq (\frac{1}{3})^k, \forall k \in \mathbb{N}$ , o que implicaria que  $b = a$ .
3.  $\mathfrak{C}$  não tem pontos isolados: se  $x$  não é um ponto final de qualquer intervalo de  $C^k$  para algum  $k$ , seja  $x_n$  a extremidade esquerda do intervalo de  $C_n$  contendo  $x$  então  $0 < x - x_0 \leq (\frac{1}{3})^n$ , pelo que  $x_n \rightarrow x$ . Se  $x$  é o ponto final esquerdo em algum intervalo de  $C_k$  para algum  $k$ , tome  $x_n$  como a extremidade direita desse intervalo para  $n \geq k$  e  $x_n = 1$  caso contrário; por algum argumento semelhante,  $x_n \rightarrow x$ .

<sup>4</sup> O teorema de que em um espaço métrico cada cobertura consistindo de conjuntos abertos que cobrem um conjunto fechado e compacto tem uma coleção finita de subconjuntos que cobre o conjunto fornecido.

Em suma,  $\mathfrak{C}$  é um conjunto totalmente desconexo, compacto e perfeito<sup>5</sup>. Também é incontável e tem medida zero. Em geral, um conjunto de Cantor é um conjunto que satisfaz essas três primeiras propriedades, e pode-se mostrar que todos os conjuntos de Cantor são homeomorfos. Seja  $f_1(x) = \frac{x}{3}$  e  $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$  com domínio e contradomínio igual a  $\mathfrak{C}$ ; ambas as funções são injetivas e:

$$f_1^{-1} \left( \mathfrak{C} \cap \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \right) = f_2^{-1} \left( \mathfrak{C} \cap \left[ \frac{2}{3}, 1 \right] \right) = \mathfrak{C}$$

Isso significa que, se olharmos apenas para a metade direita ou a metade esquerda do conjunto de Cantor obtemos uma cópia homeomórfica dele. Além disso, podemos ver que o conjunto de Cantor é um atrator porque a medida que repetimos o processo de iterações dentro do sistema de funções que ele apresenta, ele evolui para diferentes estados cujos valores diminuem cada vez mais. Existem outros fractais como essa mesma propriedade, como o triângulo de Sierpinski e o dragão de Highway.

### 3.5 Dimensão fracionária ou dimensão fractal

Durante várias gerações após Euclides, largura, altura e comprimento foram fatores determinantes para formular o conceito de dimensão, cujos valores eram um número inteiro positivo. Ao longo do tempo, a medida que surgiam “problemas” como o aparecimento das curvas que preenchem o quadrado, a definição de dimensão era reescrita.

Para Euclides, todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples como quadrados, circunferências, etc. No entanto, a geometria euclidiana era insuficiente para explicar e descrever fenômenos ditos como monstros matemáticos (...), ver Nunes (2006).

Benoit Mandelbrot levantou a possibilidade de se definir valores fracionários à dimensão analisando o contorno de um litoral. Percebeu que, dependendo do tamanho da unidade de medida adotado, o comprimento do litoral sofria variações: quanto menor a unidade adotada, maior o valor do comprimento. Levando este processo ao extremo, no limite em que a unidade de medida tende a zero, o comprimento tende ao infinito. Este problema o levou à uma outra forma de medir a dimensão de uma figura geométrica, a *dimensão fractal*. Os objetos com dimensão fractal passaram a ser chamados de *fractais*, ver geocities (2022).

Nem comprimento nem área servem para medir o tamanho dos objetos fractais. Os fractais são “mais” do que linhas, e “menos” do que superfícies. O que podemos medir é um número que caracterize o grau de desordem de um fractal. Pode-se entender intuitivamente essa ideia compreendendo que uma linha desordenada em um plano preenche mais espaço que uma linha

<sup>5</sup> Em topologia, um conjunto perfeito é um subconjunto fechado tal que todos seus pontos são pontos de acumulação, isto é, o conjunto carece de ponto isolados

reta, que tem dimensão 1, porém menos espaço que um plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal, ver Junior (2002).

### 3.6 Dimensão de Hausdorff

O nome dimensão de Hausdorff vem do matemático alemão Felix Hausdorff (1868 - 1942), o qual publicou trabalhos na área de topologia e introduziu a ideia dessa dimensão. Alguns autores também se referem a ela por dimensão de Hausdorff - Besicovitch, pelo fato de seu desenvolvimento ter recebido grandes contribuições do matemático russo Abram Samoilovitch Besicovitch (1891 - 1970). Anos mais tarde, o matemático francês Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) retomou os estudos de Hausdorff e Besicovitch em seus trabalhos sobre a geometria fractal.

**Definição 3.9.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo,  $A \in H(X)$  e  $\varepsilon > 0$ . Defina  $N(A, \varepsilon)$  como sendo o menor número de bolas fechadas de raio  $\varepsilon$  necessárias para cobrir o conjunto  $A$ . Isto é,  $N(A, \varepsilon)$  é o menor inteiro positivo  $M$ , tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \varepsilon),$$

para algum conjunto de pontos distintos  $\{x_n; n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$ .

**Definição 3.10.** Seja  $A \in H(X)$ , onde  $(X, d)$  é um espaço métrico. Se

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})},$$

existe, então  $D$  é chamado *dimensão de Hausdorff* ou dimensão fractal de  $A$ . Também pode ser usada a notação  $D = D(A)$ .

**Exemplo 3.7.** Considere  $X$  o espaço métrico  $\mathbb{C}^2$  com a métrica euclidiana. Sejam  $a \in X$  e  $A = \{a\}$ . Assim, para cada  $\varepsilon > 0$ , temos que  $N(A, \varepsilon) = 1$ . Então

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = 0.$$

Logo,  $D = 0$ .

**Exemplo 3.8.** Para calcular a dimensão de Hausdorff de um segmento  $[0, 1]$ , por exemplo. Isto pode ser feito percebendo que o menor número  $N$  de bolas fechadas de raio  $\varepsilon$  que cobre o intervalo  $[0, 1]$  deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2\varepsilon} \leq N < \frac{1}{2\varepsilon} + 1.$$

Depois podemos usar o teorema do confronto para obter a dimensão de Hausdorff do segmento, que é 1.

### 3.7 Complexidade Infinita

No início do capítulo, dissemos que uma figura possui auto-semelhança quando apresenta sempre o mesmo aspecto visual em qualquer escala, seja ela ampliada ou reduzida, isto é, quando as partes da figura se assemelham ao objeto inteiro.

No entanto, quando falamos de figuras ou objetos auto-semelhantes, temos que considerar dois tipos de auto-semelhança: a exata e a aproximada (ou estatística). A auto-semelhança exata só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja, é formado através de um processo iterativo, ver Nunes (2006).

A *iteração* é a repetição de um procedimento consecutivamente.

Dito isso, podemos afirmar que os fractais são formados por um processo recursivo aplicado indefinidamente. Quanto maior é o número de iterações, mais detalhes são apresentados. Dessa forma a imagem se estende indefinidamente, daí a expressão *complexidade infinita*.

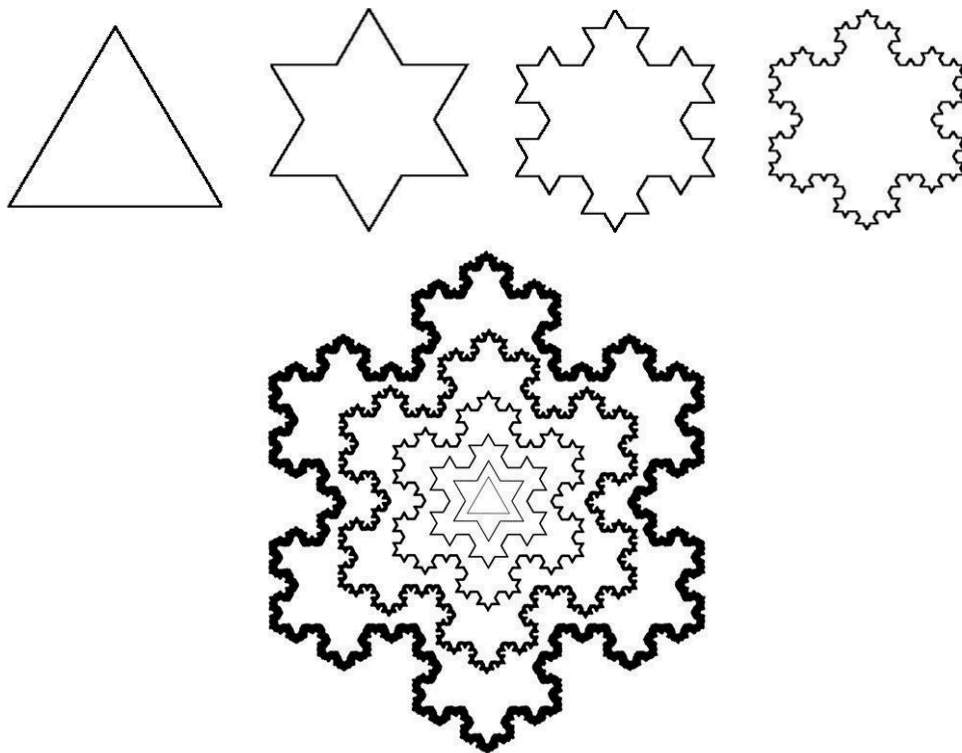


Figura 5 – Floco de Neve de Koch.

Vejam os exemplos do floco de Neve de Koch, ele é um exemplo geométrico da construção de um fractal. Um mesmo procedimento é aplicado diversas vezes sobre um objeto simples, gerando uma imagem complexa. Cada pedaço da linha foi dividido em 4 pedaços menores idênticos ao pedaço original, cada um sendo 3 vezes menor que o tamanho original.



Figura 6 – Fractais na Natureza.

Podemos ver a auto-semelhança aproximada em muitas formas da natureza, como nas figuras abaixo, onde parte do todo possui a mesma estrutura da figura inteira, mas não é uma réplica perfeita desta.

## 4 O conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é um fractal que se tornou famoso fora da matemática por causa de sua beleza estética e ao fato de sua estrutura complexa resultar de um algoritmo de construção simples, ver cftcciencias (2022).

### 4.1 Benoit Mandelbrot

Nesta seção se fala um pouco sobre o cientista que apresentou os fractais para o resto do mundo.

Benoit Mandelbrot nasceu em 1924 numa família que possuía raízes judia lituanas. Sua mãe, Bela Lurie, era médica e o pai, Karl Mandelbrot, era armarinho. Em 1936, toda a família se mudou para Paris, onde o tio de Benoit fundou o clube de matemáticos local.



Figura 7 – Benoit Mandelbrot.

Apesar de ter perdido o interesse em estudar quando mais jovem, demonstrou excelentes habilidades matemáticas. Ele possuía uma notável imaginação espacial, conseguindo resolver problemas algébricos através da geometria. Sua originalidade e a forma como pensava permitiram que ingressasse na Escola Politécnica de Paris.

Em 1958, depois de se formar na universidade e também obter um doutorado, começou a trabalhar no centro de Pesquisa da IBM (*International Business Machines*), onde se engajou em diferentes áreas como teoria dos jogos, linguística, geografia, fisiologia entre outras.

Com o tempo, Mandelbrot também se aprofundou no estudo da economia. Em certo momento, ele pensou que talvez o movimento dos preços aparentemente caóticos poderiam possuir uma certa ordem oculta. Desejando se aprofundar nesse tema, Mandelbrot começou a estudar a dinâmica dos preços do algodão ao longo de mais de 100 anos. Durante o dia, as flutuações dos preços do algodão pareciam totalmente caóticas, no entanto, ele conseguiu encontrar um



certo padrão ao traçar a simetria em termos de flutuações de longo e curto prazo, o que causou surpresa a muitos economistas.

Em 1975, Mandelbrot publicou um trabalho chamado “O comprimento da costa da Grã-Bretanha”, que foi o primeiro estudo completo da teoria fractal. O conceito de fractal foi introduzido pelo próprio Mandelbrot e significa, literalmente, “quebrado”. Utilizando todos os computadores da IBM que lhe foram disponibilizados, criou algumas imagens gráficas baseadas no Conjunto de Mandelbrot.

Mandelbrot também foi capaz de detectar certos padrões no quadro de flutuações de preços da bolsa de valores. Provavelmente sua capacidade de encontrar tendências no caos possa ser explicada pelos seus interesses em diferentes campos da ciência.

A ideia da teoria fractal surgiu de forma banal, quando Mandelbrot percebeu que medir o litoral da Grã-Bretanha através de um mapa, não levaria em conta o terreno irregular, as pequenas baías e demais detalhes que influenciariam no cálculo final, passou então a buscar uma precisão maior para medir as coisas.

Em 1977 e 1982 publicou artigos sobre “Geometria Fractal” ou “Geometria da Natureza” onde argumentou que formas matemáticas aparentemente aleatórias na verdade seguiam um padrão quando separadas e repetidas. A partir daí os cientistas puderam medir objetos imensuráveis como nuvens, pulmões, o litoral das ilhas britânicas.

Mandelbrot foi um cientista que teve a coragem de olhar ao redor e entender que as estruturas fractais estão por toda parte. Ele abriu os olhos da humanidade para coisas incrivelmente simples, enquanto sua teoria se tornou perfeitamente aplicável em muitas áreas do conhecimento.

## 4.2 O Conjunto de Julia

Antes de estudar o comportamento do Conjunto de Mandelbrot, é introduzido outro conjunto que é de fundamental importância na origem e construção do Conjunto de Mandelbrot. Trata-se do Conjunto de Julia<sup>1</sup> de iteração quadrática.

Se toma um ponto  $c$  com coordenadas  $u$  e  $v$  e designemo-lo por parâmetro. Em seguida, num plano diferente, toma-se um ponto  $p_0$  com coordenadas  $x_0$  e  $y_0$ . Fazendo  $x_1 = x_0^2 + u$  e  $y_1 = 2x_0y_0 + v$ . Estas fórmulas simplificam-se se o ponto  $c$  com coordenadas  $u$  e  $v$  for representado por um número complexo  $z = x + yi$ .

Para os números complexos  $c = u + vi$  e  $z = x + yi$ , a regra anterior simplifica-se desta forma:  $z_1 = z_0^2 + c$  e (mais genericamente)  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ .

Quando a órbita  $p_n$  não consegue afastar-se em direção ao infinito dizemos que o ponto

<sup>1</sup> Do matemático francês Gaston Julia, que estudou estas entidades matemáticas juntamente com seu colega Pierre Fatou, durante a Primeira Guerra Mundial.

inicial,  $p_0$ , pertence ao “Conjunto de Julia preenchido”.

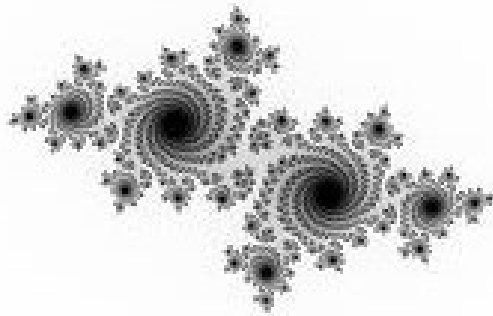


Figura 8 – Conjunto de Julia.

Se começa a construção do conjunto fora da forma em negro, alcançando o infinito. Se começa no seu interior, não se consegue nunca atingir o infinito. A fronteira entre as regiões negras e brancas da figura é conhecida como *curva de Julia*. Esta curva é aproximadamente auto-semelhante. Nenhum pedaço é absolutamente idêntico a um pedaço maior devido ao efeito das deformações não lineares. É surpreendente que através de um processo iterativo se possa criar uma forma qualquer de auto-semelhança de um modo quase espontâneo.

### 4.3 Como é gerado o conjunto de Mandelbrot

De acordo com Mandelbrot (2003), o conjunto de Mandelbrot se constrói da seguinte forma: Pegue um ponto inicial  $c_0$ , no plano, com coordenadas  $u_0$  e  $v_0$ . A partir das coordenadas de  $c_0$ , obtenha-se um segundo ponto,  $c_1$ , com coordenadas  $u_1 = u_0^2 - v_0^2 + u_0$  e  $v_1 = 2u_0v_0 + v_0$ . Em seguida, obtenha-se o ponto  $c_2$ , de coordenadas  $u_2 = u_1^2 - v_1^2 + u_0$  e  $v_2 = 2u_1v_1 + v_0$ . Mais genericamente, as coordenadas  $u_n$  e  $v_n$  de  $c_n$  são obtidas de  $u_{n-1}$  e  $v_{n-1}$  através das chamadas « fórmulas de iteração »  $u_n = u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2 + u_0$  e  $v_n = 2u_{n-1}v_{n-1} + v_0$ . Quando  $c_0$  é representado por  $z_0 = u_0 + v_0i$ , as fórmulas acima simplificam-se a  $z_1 = z_0^2 + z_0$  e  $z_n = z_{n-1}^2 + z_0$ .

Diz-se que os pontos  $c_n$  formam a órbita de  $c_0$ , e este conjunto pode ser determinado da seguinte maneira: se a órbita  $c_n$  não se dirige para o infinito, dizemos que  $c_0$  está contido no conjunto de Mandelbrot. Se a órbita  $c_n$  se dirige para o infinito, dizemos que o ponto  $c_0$  está fora do conjunto de Mandelbrot.

**Definição 4.1.** O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os números complexos  $c$  tais que após um certo número de iterações de  $z_n = z_{n-1}^2 + c$  não tende para o infinito, Nunes (2006). Nesse caso  $z_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) e  $c$  são números complexos, e  $z_0 = 0$ .

**Exemplo 4.1.** para  $z_0 = 0$ , construção da sequência  $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots\}$ , ver Rabay

(2013):

$$\begin{aligned}
 z_0 = 0 &\rightarrow z_1 = z_0^2 + c = c, \\
 z_1 = c &\rightarrow z_2 = z_1^2 + c = c^2 + c, \\
 z_2 = c^2 + c &\rightarrow z_3 = z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c, \\
 &\vdots \\
 z_{n-1} &\rightarrow z_n = z_{n-1}^2 + c, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

## 4.4 O conjunto de Mandelbrot em python

O python é uma linguagem de programação que é bem dinâmica, multiplataforma e orientada a objetos. Sua linguagem é bem simples e pode ser utilizadas por diversos setores como engenharia, matemática, análise de dados.

Para desenhar a imagem do conjunto de Mandelbrot foi considerada uma tela de  $1280 \times 720$  com coordenadas  $(0, 0)$  na parte superior esquerda, a coordenada  $(1280, 0)$  na parte superior direita, a coordenada  $(0, 720)$  na parte inferior esquerda e a coordenada  $(1280, 720)$  na parte inferior direita da tela, ver Figura 9. A origem das coordenadas está em  $(640, 360)$ .

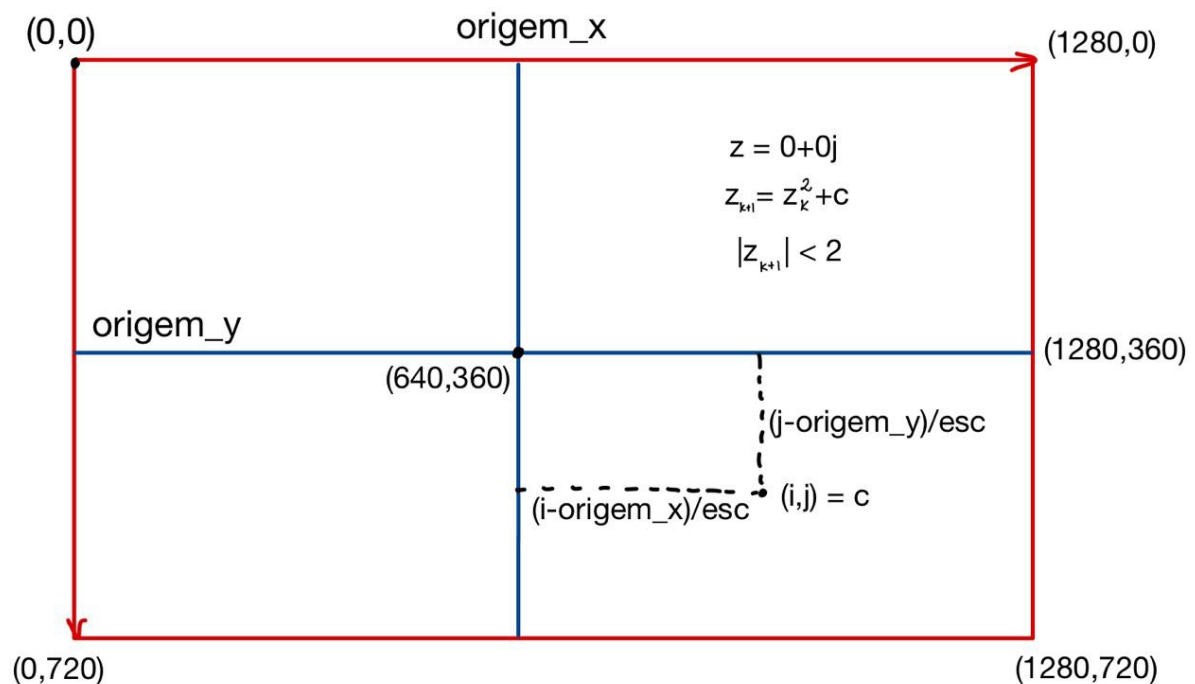


Figura 9 – Divisão da tela.

São importado os módulos `os` e `pygame`. O primeiro fornece uma maneira de usar a funcionalidade dependente do sistema operacional e o segundo é um pacote utilizado na criação de jogos.

As funções que o módulo `os` fornece permitem que você faça interface com o sistema operacional subjacente no qual o Python está sendo executado – seja Windows, Mac ou Linux.

```
1 import os
2 import pygame
```

Na seguinte linha de códigos são inicializadas algumas constantes a serem utilizadas pela parte principal do programa.

```
1 pygame.init ()
2 comp, alt = 1280, 720
3 janela = pygame.display.set_mode((comp,alt),pygame.RESIZABLE)
4 pygame.display.set_caption('Conjunto de Mandelbrot')
5 origem_x = comp / 2 + 50
6 origem_y = alt / 2
7 esc = 250
8 iteracoes = 20
```

A seguinte parcela do código é a parte principal onde são feitas as iterações da função  $z_{k+1} = z_k^2 + c$  e onde a imagem do Conjunto de Mandelbrot é colorida de preto, RGB(0,0,0).

```
1 def mandelbrot():
2     for j in range(int(alt / 2)+1):
3         for i in range(comp):
4             z = 0 + 0j
5             c = complex(float(i-origem_x)/esc, float(j-origem_y)/esc)
6
7             for k in range(iteracoes):
8                 z = z ** 2 + c
9                 if abs(z) < 2 or abs(z) < abs(c):
10                     color = (0, 0, 0)
11             else:
12                 v = 765 * k / iteracoes
13                 if v > 510:
14                     color = (255, 255, v%255)
15                 elif v > 255:
16                     color = (100, v%255, 255)
17                 else:
```

```
18         color = (50, 50, v%255)
19         break
20
21     janela . set_at (( i ,j ), color)
22     janela . set_at (( i , alt-j ), color)
```

A seguinte parcela do código mantém ativa a janela criada até a variável `done` se tornar `True`, assim como executa a função `mandelbrot()` para desenhar o conjunto de Mandelbrot. E finalmente as linhas 10 e 12 mostram a imagem na janela e fecham a janela, respectivamente.

```
1 def main():
2     done = False
3     while not done:
4         for event in pygame.event.get():
5             if event.type == pygame.QUIT:
6                 done = True
7
8         mandelbrot()
9
10        pygame.display.update()
11
12    pygame.quit()
```

O condicional `if` no código abaixo é executado se o programa é compilado pelo arquivo `mandelbrot.py` e não é chamado por outro arquivo.

```
1 if __name__ == '__main__':
2     main()
```

Na Figura 10 é mostrada a imagem do conjunto de Mandelbrot com um máximo de 20 iterações.

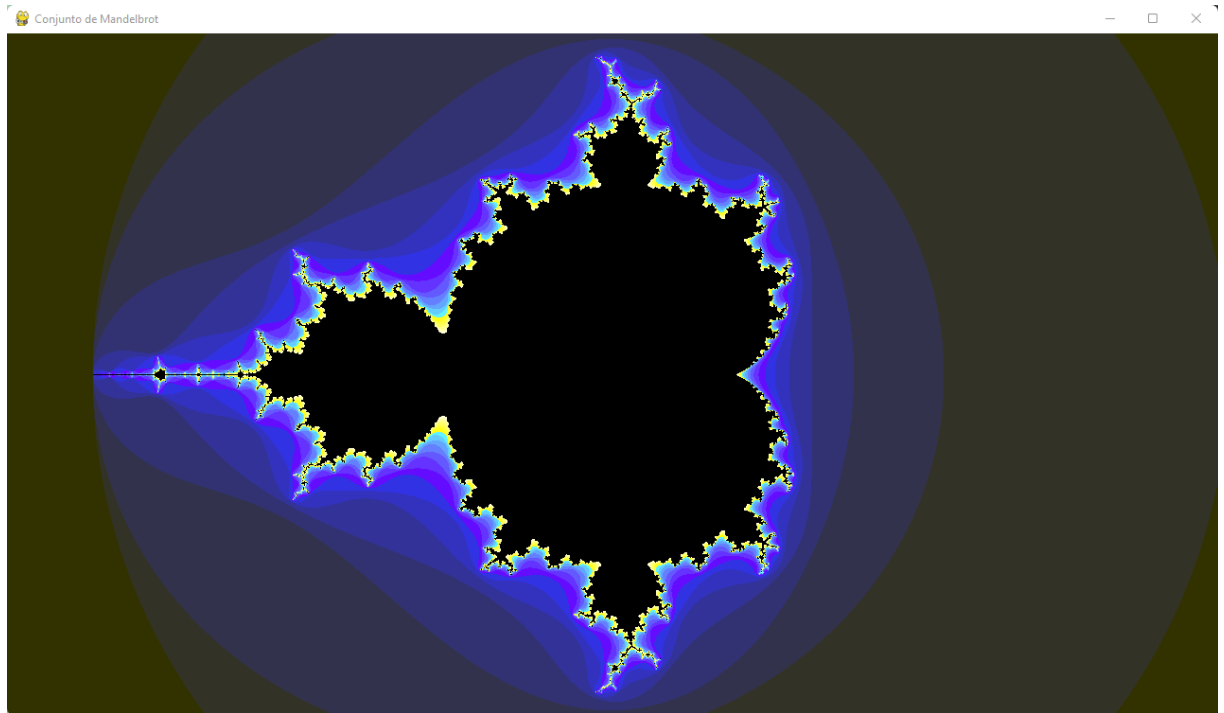


Figura 10 – Conjunto de Mandelbrot para um máximo de 20 iterações.

## 5 Alguns fractais interessantes

Ao longo do tempo, muitos matemáticos se envolveram no estudo dos “monstros matemáticos” que desafiavam a geometria clássica. Graças à sua dedicação, hoje temos acesso à formulação matemática de fractais como a Curva de Peano, o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Hilbert, a Árvore Pitagórica, entre outros.

### 5.1 Curva de Peano

A curva de Peano faz parte das curvas que preenchem o quadrado. Descoberta em 1890 pelo matemático Giuseppe Peano, ela revolucionou o mundo matemático, já que era uma curva capaz de passar por todos os pontos de um quadrado.

Para a construção da curva de Peano, começamos com um pequeno segmento de reta, depois dividimos o segmento de reta em três sub-segmentos iguais. Em seguida construímos um retângulo sobre o sub-segmento intermediário, ficamos assim com dois quadrados de lado igual a cada um dos sub-segmentos. Obtemos, então, uma curva geradora com 9 sub-segmentos como na figura abaixo.

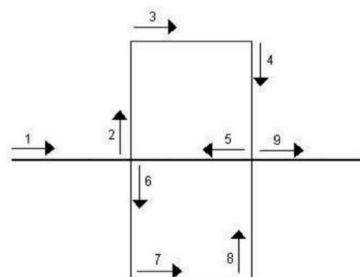


Figura 11 – Construção da Curva de Peano.

Continuamos esse processo de forma que cada segmento de reta seja substituído por vários segmentos de reta com tamanho inferior e proporcional por um fator de escala 3. Observando a tabela abaixo verificamos que no  $k$ -ésimo passo, cada sub-segmento mede  $\frac{1}{3^k}$  e o comprimento da curva é de  $9^k \left(\frac{1}{3^k}\right) = 3^k$ .

Passos	Nº de sub-segmentos	Comprimentos de cada sub-segmento	Comprimentos da curva
1	9	$\frac{1}{3}$	$9 \left(\frac{1}{3}\right) = 3$
2	$9(9) = 9^2$	$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^2}$	$9^2 \left(\frac{1}{3^2}\right) = 3^2$
3	$9(9)(9) = 9^3$	$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^3}$	$9^3 \left(\frac{1}{3^3}\right) = 3^3$
4	$9(9)(9)(9) = 9^4$	$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^4}$	$9^4 \left(\frac{1}{3^4}\right) = 3^4$

Se repetirmos sucessivamente os passos da construção da curva de Peano, encontraremos ao final um quadrado completamente preenchido.

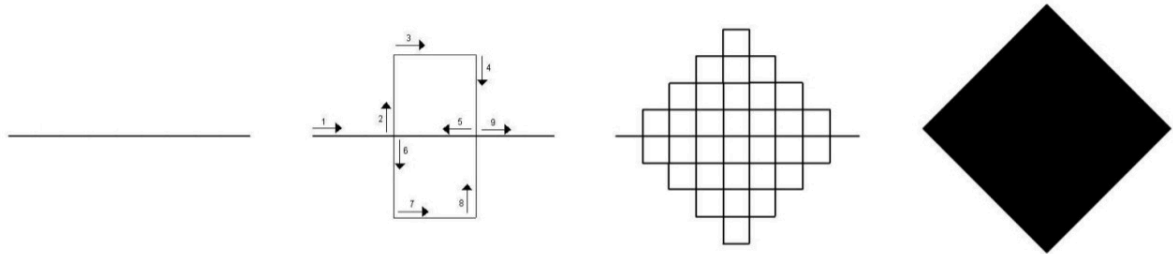


Figura 12 – Curva de Peano.

## 5.2 Triângulo de Sierpinski

Descoberto pelo matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969), o triângulo de Sierpinski é construído através de um processo iterativo onde dividimos um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, sendo que um destes triângulos está invertido em relação aos demais.

Em outras palavras, esta figura é obtida como limite de um processo recursivo. Partimos de um triângulo equilátero, depois removemos o triângulo equilátero definido pelos pontos médios dos lados e obtemos a figura geradora. Repetimos continuamente o processo, ou seja, aplicamos a figura geradora em todos os triângulos equiláteros que não foram removidos e obtemos, no limite, o Triângulo de Sierpinski, ver Nunes (2006).

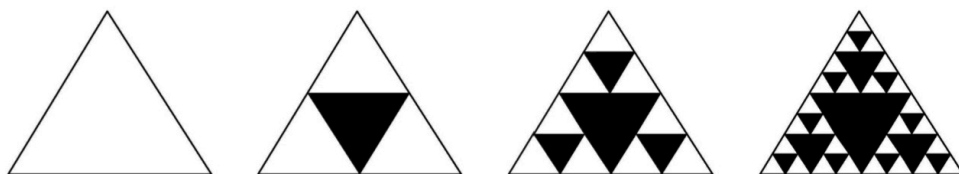


Figura 13 – Triângulo de Sierpinski.

Em cada iteração, a área do triângulo de Sierpinski é igual à área do triângulo inicial multiplicado pelo fator  $\frac{3}{4}$ , o mesmo se aplica ao perímetro, com a diferença de que o fator é  $\frac{3}{2}$ .

A tabela abaixo nos mostra que no  $n$ -ésimo passo a figura terá  $A_n = A \left(\frac{3}{4}\right)^n$  e o perímetro  $P_n = P \left(\frac{3}{2}\right)^n$ . Observando mais atentamente, percebemos que estamos diante de duas progressões geométricas de razão  $\frac{3}{4} (< 1)$  e  $\frac{3}{2} (> 1)$  respectivamente, o que significa que quando  $n \rightarrow +\infty$  o perímetro do triângulo de Sierpinski tende para o infinito.



Passos	Área	Perímetro
0	$A$	$P$
1	$A_1 = A \left(\frac{3}{4}\right)$	$P_1 = P \left(\frac{3}{2}\right)$
2	$A_2 = A \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$P_2 = P \left(\frac{3}{2}\right)^2$
4	$A_3 = A \left(\frac{3}{4}\right)^3$	$P_3 = P \left(\frac{3}{2}\right)^3$

### 5.3 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert, que também faz parte das curvas que preenchem o espaço, foi descoberta em 1891 pelo matemático David Hilbert.

A figura inicial da curva de Hilbert é um único quadrado, a figura geradora consiste em dividir este quadrado em quatro quadrados iguais onde unimos os pontos centrais de cada um.

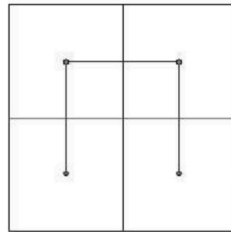


Figura 14 – Figura geradora da curva de Hilbert.

Perceba que não são os quadrados que formam a curva, mas sim os segmentos de reta formados pela ligação dos pontos centrais.

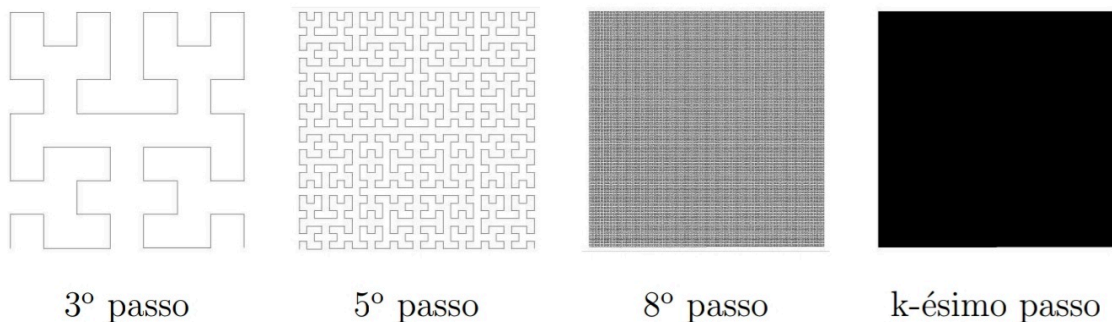


Figura 15 – Processo de construção da curva de Hilbert.

Utilizando esse processo de forma recursiva, construímos a curva de Hilbert. Observe, através da tabela abaixo, que no  $k$ -ésimo passo temos  $4^k$  quadrados com comprimento de lado

$$\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Passos	Nº de quadrados	Comprimento do lado do quadrado
1	4	$\frac{1}{2^0}$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{2^1}$
3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{2^2}$
4	$256 = 4^4$	$\frac{1}{2^3}$

Tanto a curva de Hilbert quanto a de Peano possuem comprimento infinito limitado à área de um quadrado e dimensão fractal igual a 2. A curva passa progressivamente através dos pontos de um grelha quadrada sempre mais refinada em cada passo de construção, ver Nunes (2006).

## 5.4 Árvore Pitagórica

A árvore Pitagórica ou árvore de Pitágoras foi construída pela primeira vez em 1942 por Albert Bosnam. O nome deste fractal vem do histórico teorema de Pitágoras, pois sua base é a figura do triângulo retângulo com quadrados construídos em cada um dos seus lados.

Trata-se de uma sequência simples de iterações que leva à construção de um dos mais belos fractais conhecidos, ver Reis (2015).

A construção da árvore Pitagórica é relativamente simples. Primeiro construímos um quadrado. Depois, usando como base o lado de cima do quadrado, construímos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a base. Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construímos dois novos quadrados onde os lados são exatamente os catetos. Daqui por diante só precisamos seguir o passo anterior para os novos quadrados.



Figura 16 – Processo de construção da Árvore Pitagórica.

A Árvore Pitagórica pode variar de formato conforme os ângulos internos dos triângulos que as compõem.



Figura 17 – Árvore Pitagórica com triângulos isóceles.

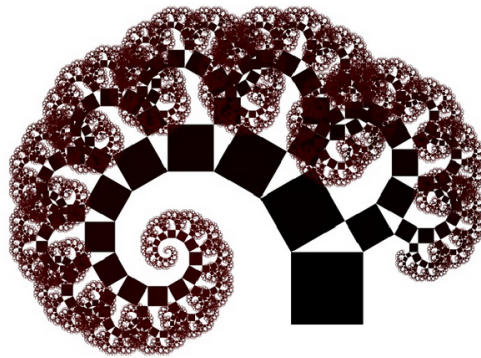


Figura 18 – Árvore Pitagórica com triângulos escalenos.

A área total deste fractal é simplesmente a soma das áreas de todos os quadrados e triângulos. Chamando de  $A_n$  a área total em cada nível de iteração, teremos

$$A_n = (\text{Área de cada triângulo}) \times (\text{Número de triângulos}) \\ + (\text{Área de cada quadrado}) \times (\text{Número de quadrados})$$

que representaremos da seguinte forma:

$$A_n = T_n \cdot t_n + Q_n \cdot q_n$$

onde<sup>1</sup>

$$T_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ e } Q_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Obtemos então um resultado surpreendente:

$$A_n = \frac{5}{4}l^2$$

para<sup>2</sup> todo  $n \geq 2$ , onde  $l$  é o lado do primeiro quadrado justaposto à hipotenusa do triângulo no início da iteração.

<sup>1</sup> Para saber como surgiram essas equações ou obter mais informações sobre a árvore Pitagórica visite Reis (2015).

<sup>2</sup> No início da iteração devemos somar  $l^2$  ao resultado.

A tabela abaixo mostra o que acontece com os valores de  $A_n$  supondo que  $l = 6$  e considerando até o 4º nível do fractal.

$n$	$T_n$	$t_n$	$Q_n$	$q_n$	$A_n$
1	9,00000	1	18,00000	2	45,00
2	4,50000	2	9,00000	4	45,00
3	2,25000	4	4,50000	8	45,00
4	1,12500	8	2,25000	16	45,00

## 6 Por onde andam os fractais?

Muitas vezes deixamos de perceber que a matemática está presente ao nosso redor, sem o avanço dos números e das operações básicas, viveríamos como nas eras remotas até hoje.

Antes vistos como “monstros”, os fractais que à primeira vista parecem apenas figuras caóticas, foram capazes de atuar no mercado financeiro, na identificação de núcleos atípicos e até na mensuração do universo.

### 6.1 Fractais nas finanças

A teoria dos fractais pode ser útil para a contabilidade nas situações em que essa necessita de instrumentos mais adequados de mensuração de valor. Além disso, o conhecimento que uma série histórica de preços segue um padrão fractal poderá ajudar, por exemplo, no processo de orçamento, inclusive para fins de projeções na análise de investimento, ver Silva, Matias e Vieira (2005).

Em 1934, Ralph Elliott<sup>1</sup> buscou compreender em seus estudos o comportamento dos preços para predizê-los no futuro. Nessa percepção dos processos sócio-econômicos, foi possível distinguir certos padrões de comportamento que se repetiam de forma similar e constante, como nas ondas. Em 1938, em seu ensaio “*The Wave Principle*” (O Princípio da Onda), Elliott apontou que no comportamento dos preços das ações se distinguem cinco movimentos básicos que se repetiam em escalas cada vez menores dentro de grandes ciclos vinculados ao tempo.

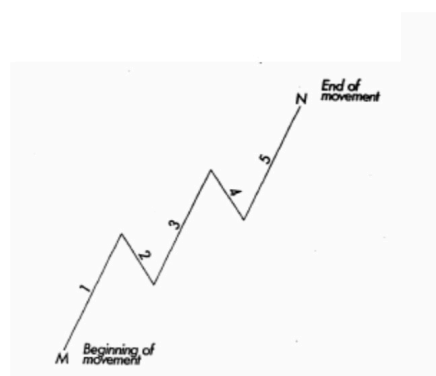


Figura 19 – Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott.

<sup>1</sup> Ralph Nelson Elliott foi um contador que criou a Teoria das Ondas de Elliott.

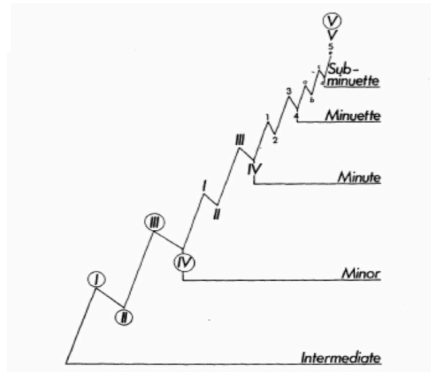


Figura 20 – Característica fractal do comportamento de preços.

Apesar do trabalho de Elliott ter identificado padrões auto-similares, estes não devem ser confundidos com fractais, pois o mesmo se limitou a realizar previsões a partir da interpretação de gráficos.

Mandelbrot, quando analisou os preços do algodão em gráficos de diferentes conjuntos de séries temporais, “percebeu que, apesar de não seguirem uma distribuição gaussiana, as séries temporais eram estatisticamente estacionárias e os gráficos tinham a mesma aparência”. Esta importante característica mais tarde se mostrou fundamental para o desenvolvimento de sua teoria sobre fractais, ver Silva, Matias e Vieira (2005).

Utilizando a técnica de R/S de Hurst<sup>2</sup>, Peters (1989) avaliou a persistência de memória em séries de retornos mensais de ações do ranking S&P500, títulos do tesouro norte americano, e o retorno relativo entre as duas séries no período de 1950 a 1988.

Utilizou a seguinte fórmula:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(N)}$$

onde  $R/S$  é a divisão da amplitude entre a maior e a menor ocorrência registrada ( $R$ ), pelo desvio padrão encontrado na série ( $S$ );  $N$  é o número de observações; e,  $H$  é o fator da lei de potência que originalmente foi objeto do estudo de Hurst, nesta fórmula chamada de Expoente de Hurst, variando entre zero e um, com as seguintes implicações para séries temporais:  $H = 0,5$  implica em comportamento puramente aleatório;  $H$  entre 0 e 0,5 implica em comportamento não persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa; e  $H$  maior que 0,5 ( $0,5 < H \leq 1$ ) implica em comportamento persistente, no qual uma tendência positiva no passado é mais provável de continuar positiva e vice-versa, e o nível desta persistência é medido quão maior for o resultado de 0,5, ver Silva, Matias e Vieira (2005).

Os resultados de Peters atestaram que o comportamento do mercado demonstrou uma certa constância de memória, que é uma característica do comportamento browniano fractal. No

<sup>2</sup> Harold Edwin Hurst foi um hidrólogo que desenvolveu uma fórmula denominada *rescaled range analysis*.

entanto, não foi significativo o suficiente para projetar resultados além de um curto período.

Müller et al. (1995) encontraram propriedades fractais em séries temporais de taxas de câmbio, inclusive identificando o fator de escala (lei de potência) seguido pelos preços, a partir da análise dos intervalos de tempo desde poucos minutos até um ano. Utilizaram amostras diárias e intra-diárias do período compreendido entre junho de 1973 e junho de 1993. Os autores verificaram que as mudanças no comportamento dos preços se assemelhavam mais ao modelo fractal, em detrimento do processo GARCH. Além disso, a volatilidade é positivamente correlacionada com a atividade do mercado e o volume de transações, um indicativo de que o mercado é heterogêneo, onde os diferentes participantes analisam eventos passados e novos com diferentes horizontes de tempo e diferentes expectativas em negociações, o que cria volatilidade.

Existem suficientes evidências empíricas de que existe fractalidade, principalmente nas séries temporais de ativos, que fornecem suporte para o desenvolvimento da aplicação em contabilidade financeira. Porém, estas pesquisas ainda estão em fase inicial de comprovação de hipóteses, sendo necessários mais testes e discussões a cerca deste campo das finanças.

## 6.2 Fractais na saúde

Nesta seção falaremos sobre como os fractais podem atuar na área da saúde, mais especificamente, na identificação de núcleos atípicos em Lesões Displásicas do Colo Uterino<sup>3</sup>.

De acordo com Sedivy et al. (1998), nos últimos anos, a utilização da análise fractal como uma ferramenta tem ganhado cada vez mais atenção nas ciências médicas, particularmente em cardiologia, patologia e radiologia. Também tem sido aplicada de forma a caracterizar limites irregulares de tumores a seus núcleos. A seguir, serão descritos os procedimentos utilizados no estudo de Sedivy et al. (1998) para a análise dos núcleos atípicos.

Foram selecionados 1200 núcleos (30 núcleos por paciente) que foram designados a partir de 40 biópsias em cone do colo uterino de pacientes com displasia grave ou sem qualquer lesão displásica, como controle.

Um algoritmo baseado em limiar de cor (RGB) implementado no pacote de software KS300 foi aplicado às imagens digitalizadas para determinar o contorno dos núcleos. O algoritmo de contagem de caixas foi usado para o cálculo da dimensão fractal: as imagens binárias foram cobertas com diferentes grades (comprimento da caixa  $\varepsilon$ ), e o número de caixas  $N(\varepsilon)$  necessárias para cobrir as estruturas dos núcleos foi registrado. Se um objeto é um fractal ideal,  $N(\varepsilon)$  aumenta de acordo com a relação

$$N(\varepsilon) = C\varepsilon^{D(A)}.$$

<sup>3</sup> A displasia do colo do útero são alterações que afetam as células da superfície da cérvix, que é a parte mais baixa do útero.

Onde  $D(A)$  é a dimensão fractal e  $C$  é a constante. Para uma linha reta,  $N(\varepsilon)$  dobra a cada metade do comprimento da caixa, correspondendo a uma dimensão de 1. Da equação acima, a dimensão fractal  $D(A)$  pode ser derivada como

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}.$$

Portanto, a dimensão fractal pode ser determinada como a inclinação de um gráfico logaritmo duplo de  $N(\varepsilon)$  sobre  $\varepsilon$ .

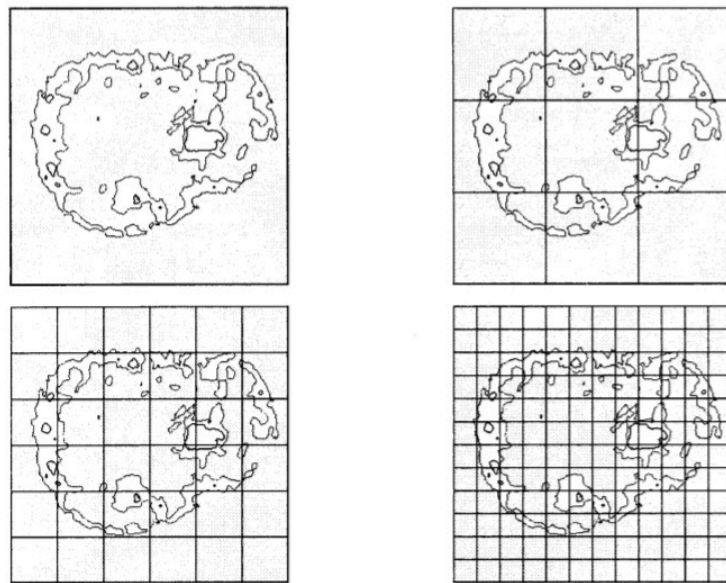


Figura 21 – Imagem editada usada para análise fractal com variação de  $N(\varepsilon)$  dos tamanhos das caixas.

A dimensão média dos núcleos de controle foi  $D(A) = 1.02 \pm 0.004$  e dos núcleos atípicos  $CIN1^4$ ,  $D(A) = 1.32 \pm 0.01$ ;  $CIN2$ ,  $D(A) = 1.37 \pm 0.009$  e  $CIN3$ ,  $D(A) = 1.40 \pm 0.008$ .

Os resultados da pesquisa demonstraram que a dimensão fractal dos núcleos atípicos foi significativamente maior que a dos núcleos do grupo de controle. Também foi verificado que a dimensão fractal dos núcleos atípicos aumentou a medida que o grau de displasia aumentou.

Para os autores da pesquisa, a dimensão fractal foi uma medida confiável para analisar os núcleos atípicos, pois produziu uma medida objetiva da irregularidade na forma dos núcleos cervicais. Essa discriminação matemática fornece informações adicionais e mais objetivas na classificação geral de lesões displásicas, apesar de ainda não ser suficiente para um diagnóstico histopatológico.

<sup>4</sup> Lembrando que foram analisados grupos CIN 1-3 e o grupo de controle.



### 6.3 Fractais na cosmometria

Antes de iniciar nosso último tópico, será necessário explicar-lhes do que se trata a cosmometria. Michaelis (2022) dá a seguinte definição para cosmometria: ciência que tem por objetivo fazer a mensuração da posição, dimensão e movimentação dos corpos cósmicos.



Figura 22 – Cosmometria.

A base da cosmometria é a ideia de que o universo é sinérgico, holográfico e fractal.

Ele é sinérgico porque quando observamos o comportamento dele como um sistema inteiro, ele é sempre maior e imprevisível do que o comportamento das partes quando vistas separadamente.

É considerado holográfico ao considerarmos que *o todo está presente em todos os lugares*. Vale lembrar que um holograma é feito brilhando dois feixes de luz coerente em uma placa de vidro revestida com uma emulsão sensível à luz. (...) É o padrão de interferência desses dois feixes que formam uma imagem holográfica. O mais impressionante (...) é que cada ponto na placa holográfica captura a luz de cada ponto do objeto que reflete a luz do laser de volta na placa. (...) Isso significa que toda a imagem do objeto está contida em cada ponto da placa holográfica, ver Cosmometry (2014). Este é o princípio primordial para a cosmometria, pois carrega a ideia de que toda a “imagem” está contida em cada ponto do cosmos. Por último, podemos considerar o universo fractal porque ele apresenta fractalidade em uma de suas características mais simples: *a repetição de padrões em todas as escalas*.

Na cosmometria, estamos explorando os padrões primários, estruturas e formas de fluxo que aparecem fractalmente, e como esses atributos primários são perfeitamente incorporados de escalas atômicas a galácticas. A escala fractal é uma das chaves para entender o modelo de cosmometria completo, especialmente quando procuramos entender o fato de que há movimento contínuo de energia e informação em todo o cosmos que se manifesta “localmente” enquanto permanece conectado “universalmente”, ver Cosmometry (2014).

## 7 Conclusões

Ao longo deste trabalho pudemos observar do que se tratam as figuras fractais e como são formadas. Foram apresentados conceitos importantes como o conjunto dos números complexos, cujo plano é onde construímos o conjunto de Mandelbrot; as sequências de números complexos que nos ajudam a compreender como um número é associado a outro através de uma função; e os espaços métricos que nos fornecem a distância de cada par ordenado dentro do conjunto.

Descobrimos que os fractais possuem três características principais que são a auto-semelhança, dimensão fracionária e complexidade infinita. Para que exista a auto-semelhança, necessitamos primeiramente ter a semelhança, pois a auto-semelhança é apenas a semelhança dentro de um mesmo conjunto. Com os sistemas de funções iteradas, a medida que fazemos iterações, obtemos novos valores, e através desses novos valores e dos valores anteriormente encontrados vamos comparando para ver se possuem algum tipo de semelhança. Vimos que a métrica de Hausdorff serve para medir a distância de dois subconjuntos dentro de um mesmo espaço métrico e que os atratores para funções iteradas são um conjunto de estados para os quais um sistema tende a evoluir.

A dimensão de Hausdorff e a dimensão topológica são importantes quando queremos descobrir a dimensão dos fractais. Já a complexidade infinita pode ser vista na aplicação infinita do recurso iterativo ao construirmos um fractal, quanto mais iterações, mais detalhes auto-semelhantes obtemos.

Chegamos então ao conjunto de Mandelbrot, onde foi apresentado um pouco da história de Benoit Mandelbrot e como foi que ele se interessou pelo estudo dos fractais. Observamos que o conjunto de Julia possui um papel importante na construção desse conjunto, através do que ele é construído e também como pode ser construído no python. Além de outros exemplos de fractais.

Vale ressaltar que apesar dos fractais não terem uma definição formal, seu estudo através da geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar o estudo dos fenômenos naturais, ver Santos e Lübeck (2009).

Os fractais deixaram à muito tempo de serem monstros matemáticos para serem uma parte importante da matemática, infelizmente utilizada apenas em pesquisas dentro de ramos mais específicos. O universo fractal, quando estendido por exemplo, aos alunos do ensino médio, pode introduzi-los aos números complexos, dimensões, outros lados da geometria e ainda

instigar o gosto pelo desconhecido. Ampliar o acesso a esse tipo de conteúdo, em que a matemática se torna um pouco mais complexa, porém fascinante, é o papel do professor que deseja que a matemática deixe de ser mecânica para ser dinâmica.

## Referências

- CARVALHO, H. C. d. *Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Pará, jun. 2005. Disponível em: <[http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao\\_GeometriaFractalPerpectivas.pdf](http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao_GeometriaFractalPerpectivas.pdf)>. Acesso em: 23 fev. 2022. Citado na página 20.
- CFTCCIENCIAS. *O Conjunto de Mandelbrot*. 2022. Disponível em: <<https://cftc.ciencias.ulisboa.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico10.php>>. Acesso em: 10 fev. 2022. Citado na página 31.
- COSMOMETRY. *Fractal Holographic Synergetic Universe*. 2014. Disponível em: <<https://cosmometry.net/fractal-holographic-sinergetic-universe>>. Acesso em: 20 oct. 2022. Citado na página 48.
- GEOCITIES. *Aula 5 - Dimensão Fractal*. 2022. Disponível em: <[http://www.geocities.ws/projeto\\_caos\\_ufg/minicurso/aula5.html](http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/minicurso/aula5.html)>. Acesso em: 24 ago. 2022. Citado na página 27.
- HARTMANN Ângela M. et al. *FRACTAIS: A COMPLEXIDADE E A AUTO-SEMELHANÇA DOS PADRÕES GEOMÉTRICOS REPRESENTADAS COM MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIA COMPUTACIONAL*. Dissertação (Mestrado) — Escola de inverno de educação Matemática, 2014. Disponível em: <[http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed\\_4/MC/MC\\_2\\_Angela\\_Hartmann.pdf](http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_2_Angela_Hartmann.pdf)>. Acesso em: 15 maio 2022. Citado na página 20.
- JUNIOR, F. C. d. S. Estudo da dimensão fractal de esferas de papel amassado e arruelas. 2002. Disponível em: <[http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530\\_F590\\_F690\\_F809\\_F895/F809/F809\\_seml\\_2002/981212-Rel\\_Final\\_Francisco.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_seml_2002/981212-Rel_Final_Francisco.pdf)>. Acesso em: 24 ago. 2022. Citado na página 28.
- MANDELBROT, B. B. *Fronteiras da Ciência*. 1. ed. Coimbra: [s.n.], 2003. Acesso em: 29 ago. 2022. Citado na página 33.
- MICHAELIS. *Cosmometria*. 2022. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/cosmometria>>. Acesso em: 29 oct. 2022. Citado na página 48.
- MÜLLER, U. A. et al. Fractals and intrinsic time - A challenge to econometricians. *International Conference of the Applied Econometrics Associations (AEA)*, jun. 1995. Disponível em: <<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.197.2969&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 09 oct. 2022. Citado na página 46.
- NUNES, R. S. R. *Geometria Fractal e Aplicações*. Dissertação (mathesis) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, jan. 2006. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica\\_artigos/dissertacao\\_nunes.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/maio2013/matematica_artigos/dissertacao_nunes.pdf)>. Acesso em: 28 fev. 2022. Citado 6 vezes nas páginas 21, 27, 29, 33, 39 e 41.
- PETERS, E. E. Fractal structure in the capital markets. v. 45, n. 4, 1989. Acesso em: 13 oct. 2022. Citado na página 45.

RABAY, Y. S. F. *Estudo e Aplicações da Geometria Fractal*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, abril 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7651/2/arquivototal.pdf>>. Acesso em: 28 fev. 2022. Citado na página 34.

REAMAT. *Números complexos e fórmula de Euler*. 2020. Disponível em: <[https://www.ufrgs.br/reatmat/TransformadasIntegrais/livros-af/rdnceft-nx00fameross\\_complexos\\_e\\_fx00f3rmula\\_de\\_euler.html](https://www.ufrgs.br/reatmat/TransformadasIntegrais/livros-af/rdnceft-nx00fameross_complexos_e_fx00f3rmula_de_euler.html)>. Acesso em: 15 maio 2022. Citado na página 15.

REIS, J. N. d. C. Uma Árvore de pitágoras explorando os fractais no ensino médio. *Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM*, v. 37, p. 411–418, nov. 2015. ISSN 0100-8307. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14636/pdf>>. Acesso em: 26 sep. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

SANTOS, E. C. dos; LÜBECK, K. R. M. Fractais como pontos fixos de funções iteradas. p. 4, 2009. Disponível em: <<http://revistas.utfrpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/download/673/385>>. Acesso em: 20 oct. 2022. Citado na página 49.

SEDIVY, R. et al. Fractal analysis: An objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri. 1998. Acesso em: 09 fev. 2022. Citado na página 46.

SILVA, C. A. T.; MATIAS, M. A.; VIEIRA, L. A inserção da teoria dos fractais na contabilidade financeira: evidências teórico-empíricas. *Congresso USP*, 2005. Disponível em: <<https://congressousp.fipecafi.org/anais/artigos62006/295.pdf>>. Acesso em: 09 oct. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

SOUZA, G. d. C. *Estudo de Sistemas de Funções Iterados Difusos com Auxílio de Ferramentas de Programação*. 2019. Disponível em: <[https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/209489/Poster\\_65340.pdf?sequence=2&isAllowed=y](https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/209489/Poster_65340.pdf?sequence=2&isAllowed=y)>. Acesso em: 16 maio 2022. Citado na página 21.

STRINGFIXER. *Atrator*. 2022. Disponível em: <[https://stringfixer.com/pt/Strange\\_attractors](https://stringfixer.com/pt/Strange_attractors)>. Acesso em: 15 nov. 2022. Citado na página 25.