

sparse-gaussian-elimination

January 3, 2022

1 Wierszowa, rzadka eliminacja Gaussa w formacie CSR

Maciej Skoczeń, Kacper Kafara

grupa wtorek (A) 17:50

2 Środowisko obliczeniowe

Processor: Intel i7-9750H @ 2,6 GHz; 6 rdzeni fizycznych (12 log.)

Pamięć RAM: 16 GB

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import os
import re
import subprocess
import matplotlib.pyplot as plt
import platform

from timeit import default_timer
from math import sqrt

Array = np.ndarray
```

2.1 Funkcje pomocnicze

```
[2]: class Timer(object):
    def __init__(self):
        self._start_time = None
        self._stop_time = None

    def start(self):
        self._start_time = default_timer()

    def stop(self):
        self._stop_time = default_timer()

    @property
```

```

def elapsed(self, val = None):
    if self._stop_time is None or self._start_time is None:
        return None
    elapsed = self._stop_time - self._start_time
    return elapsed

# mock impl
def is_int(value) -> bool:
    as_int = int(value)
    return value == as_int

```

2.1.1 Wczytywanie macierzy

wygenerowanej za pomocą dostarczonego skryptu `mass_matrix`, przepisanego do C++ (credit: Arkadiusz Wolk)

```

[3]: def input_matrix(octave_matrix, n, m, q=1):
    result = np.zeros((n*q, m*q), dtype=np.double)

    for elem in octave_matrix:
        m = re.match(r"\s*\((\d+),\s*(\d+)\)\s*-\>\s*(\d+\.\d+)\s*", elem)
        if m is not None:
            x, y, value = m.groups()
        elif len(elem) > 0:
            coord, value = elem.strip().split(' -> ')
            value = float(value)
            x, y = coord.split(',')
            x, y = x[1:], y.strip()[:-1]
        else:
            continue

        for i in range(q):
            for j in range(q):
                result[i*n + int(x) - 1, j*n + int(y) - 1] = float(value)

    return result

```

```

[4]: def load_octave_matrix(filename):
    with open(filename, "r") as file:
        return file.readlines()

```

```

[5]: data_dir = "../../output"

def resolve_path(matrix_type, width, height = None, generate = False):
    if height is None: height = width
    path = f"{data_dir}/{matrix_type}-{width}x{height}.txt"

```

```

    if os.path.isfile(path): return path
    elif not generate:
        raise FileNotFoundError(f"Matrix file {path} was not found in data dir.
↪")
    else:
        if platform.system() == "Windows":
            raise FileNotFoundError(f"Matrix file {path} was not found in data_
↪dir.\
            Automated generation is not supported on your platform:
↪{platform.system()}.".")

        if width != height:
            raise ValueError("Can only generate square matrix")

        generate_matrix(matrix_type, width)

    if os.path.isfile(path): return path
    else:
        print(path)
        raise RuntimeError("Failed to generate matrix")

```

```

[6]: def resolve_matrix(matrix_type, n, m, q = 1, generate = False):
    return input_matrix(
        load_octave_matrix(resolve_path(matrix_type, n, m, generate =
↪generate)), n, m, q)

```

```

[7]: def generate_matrix(matrix_type, rank):
    if matrix_type not in {'iga', 'fem'}:
        raise ValueError(f"Invalid matrix type: {matrix_type}")

    if rank < 16 or not is_int(sqrt(rank)):
        raise ValueError(f"Invalid matrix rank: {rank}. Must be >= 16 and
↪sqrt(rank) must be of type integer.")

    rank_root = int(sqrt(rank))

    if matrix_type == 'fem':
        for p in range(2, 5):
            double_nxx = rank_root - p + 1
            if double_nxx % 2 == 0 and double_nxx // 2 >= 2:
                nxx = double_nxx // 2
                pxx = p
                break
        else:
            raise RuntimeError(f"Failed to determine nxx, pxx for rank: {rank}")
    else:
        for p in range(2, 5):

```

```

        nxx = rank_root - p
        if nxx >= 2:
            pxx = p
            break
    else:
        raise RuntimeError(f"Failed to determine nxx, pxx for rank: {rank}")

cwd = os.getcwd()
os.chdir(os.getenv('SCRIPTS_DIR'))
!./generate-matrix.sh cpp {matrix_type} {nxx} {pxx} 0
os.chdir(cwd)

```

2.2 Implementacja formatu CSR

```

[8]: class CSRMatrix:
    def __init__(self, matrix: Array = None):
        self.non_zero_values_count = 0
        self.N = 0 # wysokość/szerokość macierzy
        self.column_indices = []
        self.values = []
        self.row_beginning_indices = []
        if matrix is not None:
            self.from_dense(matrix)

    def from_dense(self, matrix_dense: Array):
        self.N = matrix_dense.shape[0]
        for i in range(self.N): # wiersze
            self.row_beginning_indices.append(self.non_zero_values_count) # ↪
            ↪nowy wiersz
            for j in range(self.N): # kolumny
                if matrix_dense[i,j] != 0:
                    self.non_zero_values_count += 1
                    self.column_indices.append(j)
                    self.values.append(matrix_dense[i,j])

            self.row_beginning_indices.append(self.non_zero_values_count)

    def cleanup_row(self, row: int):
        i = self.row_beginning_indices[row]
        i1 = self.row_beginning_indices[row + 1]
        shift = 0
        while i < i1:
            if abs(self.values[i]) < 1e-10:
                self.non_zero_values_count -= 1
                self.values.pop(i)
                self.column_indices.pop(i)
                i1 -= 1

```

```

        shift += 1
    else:
        i += 1

    for j in range(row + 1, self.N):
        self.row_beginning_indices[j] -= shift

```

2.3 Eliminacja Gaussa dla macierzy w formacie CSR

```

[9]: def sparse_gaussian_elimination(M: CSRMatrix, timer: Timer = None) -> None:
    N = M.N

    if timer: timer.start()

    for k in range(N - 1): # iterowanie po przekątnej macierzy
        # znajdujemy wyraz na przekątnej
        k_row_start = M.row_beginning_indices[k]
        k1_row_start = M.row_beginning_indices[k + 1]

        # zakładam, że wartość na przekątnej jest niezerowa
        # wtedy wartość na przekątnej jest pierwszą niezerową
        # wartością w wierszu
        M_kk = M.values[k_row_start]
        for i in range(k_row_start, k1_row_start):
            M.values[i] /= M_kk

        # iterujemy po wierszach poniżej przekątnej
        for j in range(k + 1, N):
            first_non_zero_col_ind_j = M.column_indices[M.
↪row_beginning_indices[j]]

            if first_non_zero_col_ind_j != k: continue # <=> M_jk == 0

            j_row_start = M.row_beginning_indices[j]
            j1_row_start = M.row_beginning_indices[j + 1]

            M_jk = M.values[j_row_start]

            k_iter = k_row_start
            j_iter = j_row_start
            was_inserted = False
            shift = 0
            while k_iter < k1_row_start and j_iter < j1_row_start:
                k_col = M.column_indices[k_iter]
                j_col = M.column_indices[j_iter]

```

```

        if k_col == j_col: # jeżeli ta sama kolumna, to aktualizujemy
            ↪wartość
            M.values[j_iter] -= M_jk * M.values[k_iter]
            k_iter += 1
            j_iter += 1
        elif k_col < j_col: # potrzebujemy wstawić wartość przed j_col
            M.non_zero_values_count += 1
            M.values.insert(j_iter, -(M_jk * M.values[k_iter]))
            M.column_indices.insert(j_iter, M.column_indices[k_iter])
            k_iter += 1
            j_iter += 1 # przesuwamy na element wskazywany przed
            ↪wstawieniem

            j1_row_start += 1
            shift += 1
            was_inserted = True
        else: # jeżeli indeks góry jest > niż dołu, to wartość zostaje
            ↪niezmieniona

            j_iter += 1

    while k_iter < k1_row_start:
        M.non_zero_values_count += 1
        M.values.insert(j_iter, -(M_jk * M.values[k_iter]))
        M.column_indices.insert(j_iter, M.column_indices[k_iter])
        k_iter += 1
        j_iter += 1 # przesuwamy na element wskazywany przed wstawieniem
        shift += 1
        was_inserted = True

    if was_inserted:
        for row_index in range(j + 1, N):
            M.row_beginning_indices[row_index] += shift

    # usunięcie wszystkich zer z przetworzonego wiersza
    M.cleanup_row(j)

    if timer: timer.stop()

```

2.4 Eliminacja Gaussa dla macierzy gęstej

```

[10]: def gaussian_elimination(
        A: Array,
        in_place: bool = False,
        timer: Timer = None
    ) -> Array:

        if not in_place: A = A.copy()

```

```

if timer is not None:
    timer.start()

n, _ = A.shape
for i in range(n - 1):
    A_i_i = A[i, i]
    for j in range(i + 1, n):
        factor = A[j, i] / A_i_i
        A[j, i] = 0
        for k in range(i + 1, n):
            A[j, k] -= factor * A[i, k]

if timer is not None: timer.stop()
if not in_place: return A

```

2.5 Generowanie macierzy

```

[47]: A_n = 1024 # liczba wierszy i kolumn macierzy A
A = resolve_matrix('iga', A_n, A_n, generate=True)

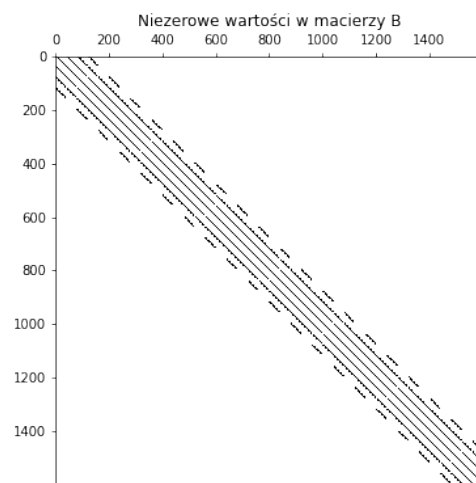
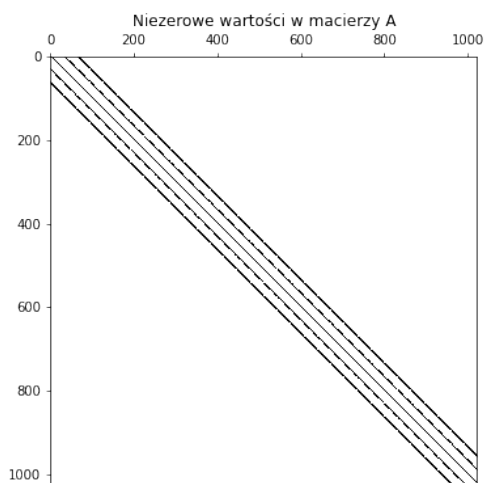
B_n = 1600 # liczba wierszy i kolumn macierzy B
B = resolve_matrix('fem', B_n, B_n, generate=True)

```

```

[12]: _, (ax_A, ax_B) = plt.subplots(nrows=1, ncols=2, figsize=(16,6))
ax_A.set_title('Niezerowe wartości w macierzy A')
ax_A.spy(A)
ax_B.set_title('Niezerowe wartości w macierzy B')
ax_B.spy(B)
plt.show()

```



2.6 Porównanie czasów wykonania eliminacji dla macierzy A (1024 x 1024)

```
[13]: n_tests = 1

sparse_exec_time_A = 0
dense_exec_time_A = 0

timer = Timer()

from pprint import pprint

for test_no in range(n_tests):
    A_sparse = CSRMatrix(A)

    sparse_gaussian_elimination(A_sparse, timer)
    sparse_exec_time_A += timer.elapsed

sparse_exec_time_A /= n_tests
print(f'Średni czas wykonania dla eliminacji "rzadkiej": {sparse_exec_time_A:.
↪5f}s')

for test_no in range(n_tests):
    gaussian_elimination(A, in_place=False, timer=timer)
    dense_exec_time_A += timer.elapsed

dense_exec_time_A /= n_tests
print(f'Średni czas wykonania dla eliminacji "gęstej": {dense_exec_time_A:.
↪5f}s')
```

Średni czas wykonania dla eliminacji "rzadkiej": 8.05650s

Średni czas wykonania dla eliminacji "gęstej": 108.06215s

2.7 Porównanie czasów wykonania eliminacji dla macierzy B (1600x1600)

```
[14]: n_tests = 1

sparse_exec_time_B = 0
dense_exec_time_B = 0

for test_no in range(n_tests):
    B_sparse = CSRMatrix(B)
    sparse_gaussian_elimination(B_sparse, timer)
    sparse_exec_time_B += timer.elapsed

sparse_exec_time_B /= n_tests
print(f'Średni czas wykonania dla eliminacji "rzadkiej": {sparse_exec_time_B:.
↪5f}s')
```



```

for test_no in range(n_tests):
    gaussian_elimination(B, in_place=False, timer=timer)
    dense_exec_time_B += timer.elapsed

dense_exec_time_B /= n_tests
print(f'Średni czas wykonania dla eliminacji "gęstej": {dense_exec_time_B:.
↪5f}s')

```

Średni czas wykonania dla eliminacji "rzadkiej": 26.86529s

Średni czas wykonania dla eliminacji "gęstej": 406.68220s

2.8 Porównanie wykorzystania pamięci dla macierzy A (1024x1024)

W przypadku "gęstym" macierz wynikowa zajmuje $\sim N^2 * \text{sizeof}(\text{double})$ B pamięci. W przypadku macierzy A będzie to:

```

[48]: Bsize = A.shape[0] ** 2 * 8 # dla sizeof(double) == 8B
      MB = Bsize / 1024 ** 2
      print(f"{Bsize}B ~= {MB:.2f}MB")

```

8388608B ~= 8.00MB

W przypadku macierzy "rzadkiej" przechowujemy niezerowe wartości, indeksy kolumn, wskaźniki na wiersze. Zatem będzie to:

```

[49]: Bsize = A_sparse.non_zero_values_count * 8 * 2 + 1024 * 8 # dla sizeof(double) ↪
      ↪== sizeof(int) == 8B
      MB = Bsize / 1024 ** 2
      print(f"{Bsize}B ~= {MB:.2f}MB")

```

1047440B ~= 1.00MB

2.9 Porównanie wykorzystania pamięci dla macierzy B (1600x1600)

Analogicznie w przypadku "gęstym":

```

[50]: Bsize = B.shape[0] ** 2 * 8 # dla sizeof(double) == 8B
      MB = Bsize / 1024 ** 2
      print(f"{Bsize}B ~= {MB:.2f}MB")

```

20480000B ~= 19.53MB

oraz w przypadku "rzadkim":

```

[51]: B = B_sparse.non_zero_values_count * 8 * 2 + 1600 * 8 # dla sizeof(double) == ↪
      ↪sizeof(int) == 8B
      MB = B / 1024 ** 2
      print(f"{Bsize}B ~= {MB:.2f}MB")

```

20480000B ~= 2.44MB