CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ GIẢI THUẬT

CÁC LƯỢC ĐỒ THUẬT TOÁN QUAN TRỌNG

Các lược đồ thuật toán quan trọng

- Đệ quy
- Đệ quy có nhớ
- Đệ quy quay lui
- Nhánh và cận
- Tham lam
- Chia để trị
- Quy hoạch động

Đệ quy

- Một chương trình con (thủ tục/hàm) đưa ra lời gọi đến chính nó nhưng với dữ liệu đầu vào nhỏ hơn
- Tình huống cơ sở
  - Dữ liệu đầu vào nhỏ đủ để đưa ra kết quả một cách trực tiếp mà không cần đưa ra lời gọi đệ quy
- Tổng hợp kết quả
  - Kết quả của chương trình còn được xây dựng từ kết quả của lời gọi đệ quy và một số thông tin khác

Ví dụ: tổng 1 + 2 + … + n

```
int sum(int n) {
  if (n <= 1) return  1;
  int s = sum(n-1);
  return n + s;
}
```

Đệ quy

- Ví dụ: hằng số tổ hợp

$$C(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

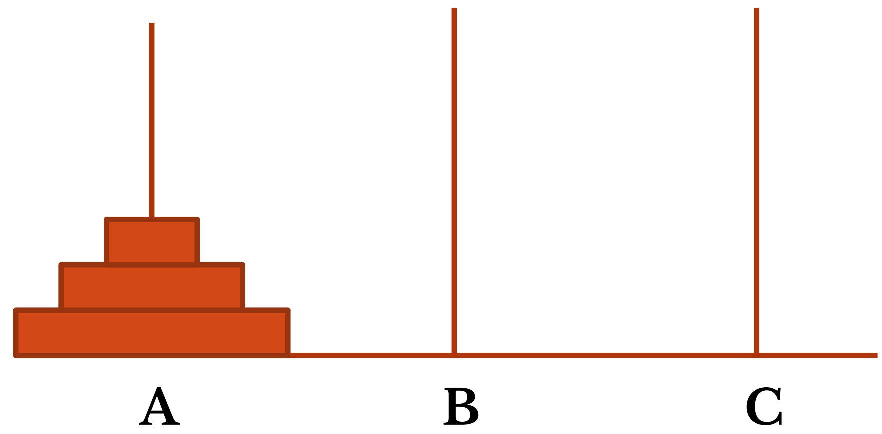
- $C(k, n) = C(k\text{-}1, n\text{-}1) + C(k, n\text{-}1)$
- Trường hợp cơ sở:

$$C(0, n) = C(n, n) = 1$$

```
int C(int k, int n) {
  if (k == 0 || k == n)
    return  1;
  int C1 = C(k-1,n-1);
  int C2 = C(k,n-1);
  return C1 + C2;
}
```

Đệ quy

- Bài toán tháp Hà Nội
  - Có n đĩa với kích thước khác nhau và 3 cọc A, B, C
  - Ban đầu n đĩa nằm ở cọc A theo thứ tự đĩa nhỏ nằm trên và đĩa lớn nằm dưới
  - Tìm cách chuyển n đĩa này từ cọc A sang cọc B, sử dụng cọc C làm trung gian theo nguyên tắc
    - Mỗi lần chỉ được chuyển 1 đĩa trên cùng từ 1 cọc sang cọc khác
    - Không được phép để xảy ra tình trạng đĩa to nằm bên trên đĩa nhỏ

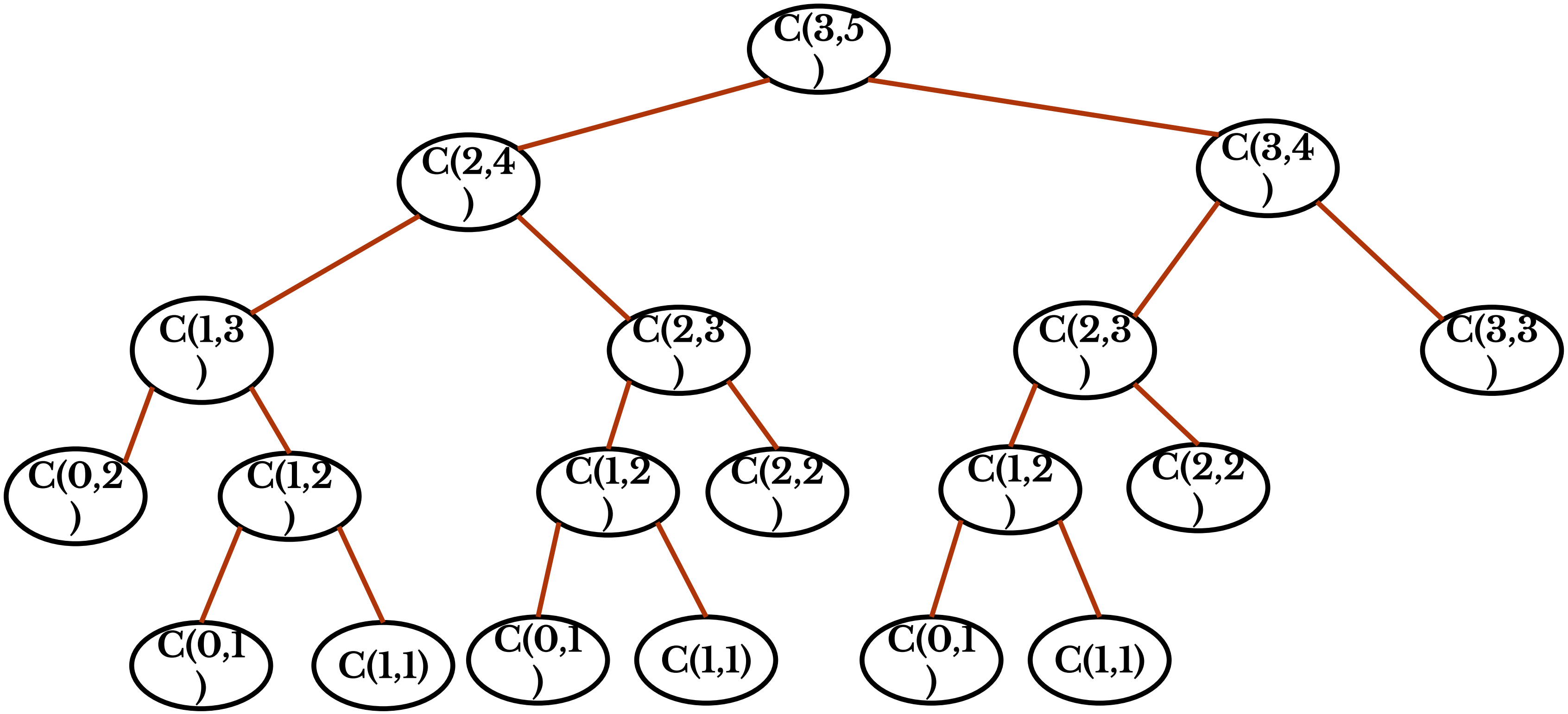


- Lời giải
- B1: A □ B
- B2: A □ C
- B3: B □ C
- B4: A □ B
- B5: C □ A
- B6: C □ B
- B7: A □ B

Đệ quy

```
void move(int n, char A, char B, char C) {
  if(n == 1) {
    printf("Move 1 disk from %c to %c", A,
B)
  }else{
    move(n-1, A, C, B);
    move(1, A, B, C);
    move(n-1, C, B, A);
  }
}
void main() {
   int n = 3;
   move(n, 'A', 'B', 'C');
}
```

Đệ quy


C(3,5)
C(2,4)
C(3,4)
C(1,3)
C(2,3)
C(2,3)
C(3,3)
C(0,2)
C(1,2)
C(1,2)
C(2,2)
C(1,2)
C(2,2)
C(0,1)
C(1,1)
C(0,1)
C(1,1)
C(0,1)
C(1,1)

Đệ quy có nhớ

- Khắc phục tình trạng một chương trình con với tham số xác định được gọi đệ quy nhiều lần
- Sử dụng bộ nhớ để lưu trữ kết quả của một chương trình con với tham số cố định
- Bộ nhớ được khởi tạo với giá trị đặc biệt để ghi nhận mỗi chương trình con chưa được gọi lần nào
- Địa chỉ bộ nhớ sẽ được ánh xạ với các giá trị tham số của chương trình con

```
int m[MAX][MAX];

int C(int k, int n) {
  if (k == 0 || k == n)
    m[k][n] = 1;
  if(m[k][n] < 0){
    m[k][n] = C(k-1,n-1) +
              C(k,n-1);
  }
  return m[k][n];
}

int main() {
  for(int i = 0; i < MAX; i++)
    for(int j = 0; j < MAX; j++)
       m[i][j] = -1;
  printf("%d\n",C(16,32));
}
```

Đệ quy quay lui

- Áp dụng để giải các bài toán liệt kê, bài toán tối ưu tổ hợp
- A = $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i, \forall\ i = 1, \ldots, n\}$
- Liệt kê tất cả các bộ $x \in A$ thoả mãn một thuộc tính P nào đó
- Thủ tục TRY(k):
  - Thử các giá trị v có thể gán cho x_k mà không vi phạm thuộc tính P
  - Với mỗi giá trị hợp lệ v:
    - Gán v cho x_k
    - Nếu $k < n$: gọi đệ quy TRY(k+1) để thử tiếp giá trị cho x_{k+1}
    - Nếu $k = n$: ghi nhận cấu hình

Đệ quy quay lui

```
TRY(k)
  Begin
    Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k) /* kiểm tra xem v có hợp lệ không */
       Begin
         x_k = v;
         if(k = n) ghi_nhan_cau_hinh;
         else TRY(k+1);
       End
  End
Main()
Begin
  TRY(1);
End
```

Đệ quy quay lui: liệt kê xâu nhị phân

- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng `x[n]` trong đó `x[i]` $\in$ {0,1} là bít thứ `i` của xâu nhị phân

    (`i= 0, . . ., n-1`)

```
void printSolution(){
  for(int k = 0; k < n; k++)
    printf("%d",x[k]);
  printf("\n");
}

int TRY(int k) {
  for(int v = 0; v <= 1; v++){
    x[k] = v;
    if(k == n-1) printSolution();
    else TRY(k+1);
  }
}

int main() {
  TRY(0);
}
```

Đệ quy quay lui: liệt kê xâu nhị phân với ràng buộc

- Liệt kê các xâu nhị phân sao cho không có 2 bit 1 nào đứng cạnh nhau
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng `x[n]` trong đó `x[i]` $\in \{0,1\}$ là bít thứ `i` của xâu nhị phân

    (`i= 1, . . ., n`)
  - Thuộc tính *P*: không có 2 bít 1 nào đứng cạnh nhau

```
int TRY(int k) {
  for(int v = 0; v <= 1; v++){
    if(x[k-1] + v < 2){
      x[k] = v;
      if(k == n)
        printSolution();
      else TRY(k+1);
    }
  }
}

int main() {
  x[0] = 0;
  TRY(1);
}
```

Đệ quy quay lui: liệt kê các tổ hợp

- Liệt kê các tổ hợp chập k của 1, 2, …, n
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng $x[k]$ trong đó $x[i] \in \{1, . . ., n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình tổ hợp ($i = 1, . . ., k$)
  - Thuộc tính P: $x[i] < x[i+1]$, với mọi $i = 1, 2, …, k$-1

```
int TRY(int i) {
  for(int v = x[i-1]+1; v <= n-k+i;
          v++){
     x[i] = v;
     if(i == k)
       printSolution();
      else TRY(i+1);
     }
}

int main() {
  x[0] = 0;
  TRY(1);
}
```

Đệ quy quay lui: liệt kê các hoán vị kỹ thuật đánh dấu

- Liệt kê các hoán vị của 1, 2, …, n
- Mô hình hoá cấu hình:
  - Mảng $x[1,\ldots,n]$ trong đó $x[i] \in \{1,\ldots,n\}$ là phần tử thứ i của cấu hình hoán vị ($i = 1,\ldots,n$)
  - Thuộc tính P:
    - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
  - Mảng đánh dấu $m[v]$ = true (false) nếu giá trị v đã xuất hiện (chưa xuất hiện) trong cấu hình bộ phận, với mọi $v = 1, \ldots, n$

```
void TRY(int i) {
  for(int v = 1; v <= n; v++){
    if(!m[v]) {
      x[i] = v;
      m[v] = true; // đánh dấu
      if(i == n)
        printSolution();
      else TRY(i+1);
      m[v] = false;// khôi phục
    }
  }
}

void main() {
  for(int v = 1; v <= n; v++)
     m[v] = false;
  TRY(1);
}
```

Đệ quy quay lui: bài toán xếp hậu

- Xếp n quân hậu trên một bàn cờ quốc tế sao cho không có 2 quân hậu nào ăn được nhau
- Mô hình hoá
  - $x[1, \ldots, n]$ trong đó $x[i]$ là hàng của quân hậu xếp trên cột i, với mọi $i = 1, \ldots, n$
  - Thuộc tính P
    - $x[i] \neq x[j]$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
    - $x[i] + \mathrm{i} \neq x[j] + \mathrm{j}$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$
    - $x[i] - i \neq x[j] - j$, với mọi $1 \leq i < j \leq n$

	1	2	3	4
1		X		
2				X
3	X			
4			X	

Lời giải $x = (3, 1, 4, 2)$

Đệ quy quay lui: bài toán xếp hậu

```
int check(int v, int k) {
  // kiểm tra xem v có thể gán được
  // cho x[k] không
  for(int i = 1; i <= k-1; i++) {
    if(x[i] == v) return 0;
    if(x[i] + i == v + k) return 0;
    if(x[i] - i == v - k) return 0;
  }
  return 1;
}
```

```
void TRY(int k) {
  for(int v = 1; v <= n; v++) {
    if(check(v,k)) {
      x[k] = v;
      if(k == n) printSolution();
      else TRY(k+1);
    }
  }
}
void main() {
    TRY(1);
}
```

Đệ quy quay lui: bài toán sudoku

- Điền các chữ số từ 1 đến 9 vào các ô trong bảng vuông 9x9 sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột và mỗi bảng vuông con 3x3 đều có mặt đầy đủ 1 chữ số từ 1 đến 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Đệ quy quay lui: bài toán sudoku

- Mô hình hoá
  - Mảng 2 chiều $x[0..8, 0..8]$
  - Thuộc tính P
    - $x[i, j_2] \neq x[i, j_1]$, với mọi $i = 0,\ldots,8$, và $0 \leq j_1 < j_2 \leq 8$
    - $x[i_1, j] \neq x[i_2, j]$, với mọi $j = 0,\ldots,8$, và $0 \leq i_1 < i_2 \leq 8$
    - $x[3I+i_1, 3J+j_1] \neq x[3I+i_2, 3J+j_2]$, với mọi $I, J = 0,\ldots, 2$, và $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \{0,1, 2\}$ sao cho $i_1 \neq i_2$ hoặc $j_1 \neq j_2$

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**
7	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**1**	**4**	**3**	**6**	**5**	**8**	**9**	**7**
3	**6**	**5**	**8**	**9**	**7**	**2**	**1**	**4**
8	**9**	**7**	**2**	**1**	**4**	**3**	**6**	**5**
5	**3**	**1**	**6**	**4**	**2**	**9**	**7**	**8**
6	**4**	**2**	**9**	**7**	**8**	**5**	**3**	**1**
9	**7**	**8**	**5**	**3**	**1**	**6**	**4**	**2**

Đệ quy quay lui: bài toán sudoku

- Thứ tự duyệt: từ ô (0,0), theo thứ tự từ trái qua phải và từ trên xuống dưới

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**
7	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**1**	**4**	**3**	**6**	**5**	**8**	**9**	**7**
3	**6**	**5**	**8**	**9**	★			

Đệ quy quay lui: bài toán sudoku

```
bool check(int v, int r, int c){
  for(int i = 0; i <= r-1; i++)
    if(x[i][c] == v) return false;
  for(int j = 0; j <= c-1; j++)
    if(x[r][j] == v) return false;
  int I = r/3;
  int J = c/3;
  int i = r - 3*I;
  int j = c - 3*J;
  for(int i1 = 0; i1 <= i-1; i1++)
    for(int j1 = 0; j1 <= 2; j1++)
      if(x[3*I+i1][3*J+j1] == v)
        return false;
  for(int j1 = 0; j1 <= j-1; j1++)
    if(x[3*I+i][3*J+j1] == v)
       return false;
  return true;
}
```

```
void TRY(int r, int c){
  for(int v = 1; v <= 9; v++){
    if(check(v,r,c)){
      x[r][c] = v;
      if(r == 8 && c == 8){
        printSolution();
      }else{
        if(c == 8) TRY(r+1,0);
        else TRY(r,c+1);
      }
    }
  }
}

void main(){
  TRY(0,0);
}
```

Đệ quy quay lui: bài tập

Cho số nguyên dương M, N và N số nguyên dương A_1, A_2, …, A_N. Liệt kê các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_NX_N = M$$

Đệ quy quay lui: bài tập

1. Liệt kê tất cả các cách chọn ra *k* phần tử từ 1, 2, …, *n* sao cho không có 2 phần tử nào đứng cạnh nhau cũng được chọn
2. Liệt kê tất cả các cách chọn ra *k* phần tử từ 1, 2, …, *n* sao cho không có 3 phần tử nào đứng cạnh nhau cùng đồng thời được chọn
3. Liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài *n* trong đó không có 3 bit 1 nào đứng cạnh nhau
4. Liệt kê tất cả các cách phân tích số *N* thành tổng của các số nguyên dương
5. Giải bài toán Sudoku, xếp hậu sử dụng kỹ thuật đánh dấu
6. Giải bài toán Sudoku với 1 số ô đã được điền từ trước

Thuật toán nhánh và cận

- Bài toán tối ưu tổ hợp
  - Phương án $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong đó $x_i \in A_i$ cho trước
  - Phương án thoả mãn ràng buộc C
  - Hàm mục tiêu $f(x)$ □ min (max)

Thuật toán nhánh và cận

- Bài toán người du lịch
  - Có n thành phố 1, 2, …, n. Chi phí đi từ thành phố i đến thành phố j là $c(i, j)$. Hãy tìm một hành trình xuất phát từ thành phố thứ 1, đi qua các thành phố khác, mỗi thành phố đúng 1 lần và quay về thành phố 1 với tổng chi phí nhỏ nhất
- Mô hình hoá
  - Phương án $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong đó $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
  - Ràng buộc C: $x_i \neq x_j, \; \forall \; 1 \leq i < j \leq n$
  - Hàm mục tiêu

$$f(x) = c(x_1, x_2) + c(x_2, x_3) + \ldots + c(x_n, x_1) \; \square \; \min$$

Thuật toán nhánh và cận

- Duyệt toàn bộ:
  - Liệt kê tất cả các phương án bằng phương pháp đệ quy quay lui
  - Với mỗi phương án, tính toán hàm mục tiêu
  - Giữ lại phương án có hàm mục tiêu nhỏ nhất

```
TRY(k)
  Begin
    Foreach v thuộc A_k
     if check(v,k)
       Begin
         x_k = v;
         if(k = n)
           ghi_nhan_cau_hinh;
           cập nhật kỷ lục f*;
         else TRY(k+1);
       End
  End
Main()
Begin
  TRY(1);
End
```

Thuật toán nhánh và cận

- Duyệt nhánh và cận:
  - Phương án bộ phận $(a_1,\ldots, a_k)$ trong đó a_1 gán cho x_1,… a_k gán cho x_k
  - Phương án $(a_1,\ldots, a_k, b_{k+1},\ldots,b_n)$ là một phương án đầy đủ được phát triển từ $(a_1,\ldots,a_k)$ trong đó b_{k+1} gán cho $x_{k+1},\ldots, b_n$ được gán cho x_n
  - Với mỗi phương án bộ phận $(x_1,\ldots, x_k)$, hàm cận dưới $g(x_1,\ldots, x_k)$ có giá trị không lớn hơn giá trị hàm mục tiêu của phương án đầy đủ phát triển từ $(x_1,\ldots,x_k)$
  - Nếu $g(x_1,\ldots,x_k) \geq f^*$ thì không phát triển lời giải từ $(x_1,\ldots,x_k)$

```
TRY(k) {
  Foreach v thuộc A_k
      if check(v,k) {
        x_k = v;
        if(k = n) {
            ghi_nhan_cau_hinh;
            cập nhật kỷ lục f*;
        } {
            if g(x1,…,x_k) < f*
              TRY(k+1);
        }
      }
}
Main()
{ f* = ∞;
  TRY(1);
}
```

Thuật toán nhánh và cận giải bài toán người du lịch

- c_m là chi phí nhỏ nhất trong số các chi phí đi giữa 2 thành phố khác nhau
- Phương án bộ phận $(x_1,\ldots, x_k)$
  - Chi phí bộ phận $f = c(x_1, x_2) + c(x_2, x_3) + \ldots + c(x_{k-1}, x_k)$
  - Hàm cận dưới

    $g(x_1,\ldots, x_k) = f + c_m\times(n-k+1)$

Thuật toán nhánh và cận giải bài toán người du lịch

```
void TRY(int k){
  for(int v = 1; v <= n; v++){
    if(marked[v] == false){
      a[k] = v;
      f = f + c[a[k-1]][a[k]];
      marked[v] = true;
      if(k == n){
        process();
      }else{
        int g = f + cmin*(n-k+1);
        if(g < f_min)
          TRY(k+1);
      }
      marked[v] = false;
      f = f - c[a[k-1]][a[k]];
    }
  }
}
```

```
void process() {
  if(f + c[x[n]][x[1]] < f_min){
    f_min = f + c[x[n]][x[1]];
  }
}
void main() {
  f_min = 9999999999;
  for(int v = 1; v <= n; v++)
    marked[v] = false;
  x[1] = 1; marked[1] = true;
  TRY(2);
}
```

Thuật toán tham lam

- Được ứng dụng để giải một số bài toán tối ưu tổ hợp
- Đơn giản và tự nhiên
- Quá trình tìm lời giải diễn ra qua các bước
- Tại mỗi bước, ra quyết định dựa trên các thông tin hiện tại mà không quan tâm đến ảnh hưởng của nó trong tương lai
- Dễ đề xuất, cài đặt
- Thường không tìm được phương án tối ưu toàn cục

Thuật toán tham lam

- Lời giải được biểu diễn bởi tập S
- C biểu diễn các ứng cử viên
- select(C): chọn ra ứng cử viên tiềm năng nhất
- solution(S): trả về true nếu S là lời giải của bài toán
- feasible(S): trả về true nếu S không vi phạm ràng buộc nào của bài toán

```
Greedy() {
  S = {};
  while C ≠ ∅ and
        not solution(S){
    x = select(C);
    C = C \ {x};
    if feasible(S U {x}) {
      S = S U {x};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Bài toán tập đoạn không giao nhau
  - Đầu vào: cho tập các đoạn thẳng $X = \{(a_1, b_1), . . . , (a_n, b_n)\}$ trong đó $a_i < b_i$ là toạ độ đầu mút của đoạn thứ i trên đường thẳng, với mọi $i = 1, \ldots, n$.
  - Đầu ra: Tìm tập con các đoạn đôi một không giao nhau có số đoạn lớn nhất

Thuật toán tham lam

- Tham lam 1
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của a_i được danh sách L
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi L không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong L và loại nó ra khỏi L
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải

```
Greedy1() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
   theo thứ tự không giảm của ai;
  while (X ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
        trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Tham lam 1 không đảm bảo cho lời giải tối ưu, ví dụ

$$X = \{(1,11), (2,5), (6,10)\}$$

  - Greedy 1 sẽ cho lời giải là $\{(1,11)\}$ trong khi lời giải tối ưu là $\{(2,5), (6,10)\}$

Thuật toán tham lam

- Tham lam 2
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của độ dài b_i - a_i được danh sách L
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi L không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong L và loại nó ra khỏi L
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải

```
Greedy2() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
    theo thứ tự không giảm của
       bi- ai;
  while (X ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
       trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán tham lam

- Tham lam 2 không đảm bảo cho lời giải tối ưu, ví dụ

$$X = \{(1,5), (4,7), (6,11)\}$$

  - Greedy 1 sẽ cho lời giải là {(4,7)} trong khi lời giải tối ưu là {(1,5), (6,11)}

Thuật toán tham lam

- Tham lam 3
  - Sắp xếp các đoạn theo thứ tự không giảm của b_i được danh sách *L*
  - Lặp lại thao tác sau cho đến khi *L* không còn phần tử nào
    - Chọn đoạn (a_c, b_c) đầu tiên trong *L* và loại nó ra khỏi *L*
    - Nếu (a_c, b_c) không có giao nhau với đoạn nào trong lời giải thì đưa (a_c, b_c) vào lời giải
- Tham lam 3 đảm bảo cho lời giải tối ưu

```
Greedy3() {
  S = {};
  L = Sắp xếp các đoạn trong X
   theo thứ tự không giảm của bi;
  while (X ≠ ∅) {
    (ac,bc) = chọn đoạn đầu tiên
        trong L;
    Loại bỏ (ac,bc) khỏi L;
    if feasible(S ∪ {(ac,bc)}) {
      S = S ∪ {(ac,bc)};
    }
  }
  return S;
}
```

Thuật toán chia để trị

- Sơ đồ chung
  - Chia bài toán xuất phát thành các bài toán con độc lập nhau
  - Giải các bài toán con (đệ quy)
  - Tổng hợp lời giải của các bài toán con để xây dựng lời giải của bài toán xuất phát

Thuật toán chia để trị

- Bài toán tìm kiếm nhị phân: cho dãy $x[1..n]$ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và 1 giá trị y. Tìm chỉ số i sao cho $x[i] = y$

```
bSearch(x, start, finish, y) {
  if(start == finish) {
    if(x[start] == y)
      return start;
    else return -1;
  }else{
    m = (start + finish)/2;
    if(x[m] == y) return m;
    if(x[m] < y)
      return bSearch(x, m+1,finish,y);
    else
      return bSearch(x,start,m-1,y);
  }
}
```

Thuật toán chia để trị

- Bài toán dãy con cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - Đầu ra: tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp của dãy đã cho có tổng cực đại

```
int maxSeq(int* a, int l, int r){
  if(l == r) return a[l];
  int max;
  int mid = (l+r)/2;
  int mL = maxSeq(a,l,mid);
  int mR = maxSeq(a,mid+1,r);
  int mLR = maxLeft(a,l,mid) +
            maxRight(a,mid+1,r);
  max = mL;
  if(max < mR) max = mR;
  if(max < mLR) max = mLR;
  return max;
}
```

Thuật toán chia để trị

```
int maxLeft(int* a, int l, int r){
  int max = -9999999;
  int s = 0;
  for(int i = r; i >= l; i--){
    s += a[i];
    if(s > max) max = s;
  }
  return max;
}

int maxRight(int* a, int l, int r){
  int max = -99999999;
  int s = 0;
  for(int i = l; i <= r; i++){
    s += a[i];
    if(s > max) max = s;
  }
  return max;
}
```

```
void main() {
  readData();
  int rs = maxSeq(a,0,n-1);
  printf("result = %d",rs);
}
```

Thuật toán chia để trị (định lí thợ)

- Chia bài toán xuất phát thành *a* bài toán con, mỗi bài toán con kích thước n/b
- $T(n)$: thời gian của bài toán kích thước n
- Thời gian phân chia (dòng 4): $D(n)$
- Thời gian tổng hợp lời giải (dòng 6): $C(n)$
- Công thức truy hồi:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n \le n0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + C(n) + D(n), & n > n0 \end{cases}$$

```
procedure D-and-C(n) {
1.   if(n ≤ n0)
2.      xử lý trực tiếp
3.   else{
4.      chia bài toán xuất phát
thành a bài toán con kích thước
n/b
5.      gọi đệ quy a bài toán con
6.      tổng hợp lời giải
7.   }
}
```

Thuật toán chia để trị

- Độ phức tạp của thuật toán chia để trị (định lí thợ)
- Công thức truy hồi:

  $T(n) = aT(n/b) + cn^k$, với các hằng số $a \geq 1$, $b > 1$, $c > 0$
- Nếu $a > b^k$ thì $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- Nếu $a = b^k$ thì $T(n) = \Theta(n^k \log n)$ với $\log n = \log_2 n$
- Nếu a < b^k thì $T(n) = \Theta(n^k)$

Thuật toán quy hoạch động

- Sơ đồ chung
  - Chia bài toán xuất phát thành các bài toán con không nhất thiết độc lập với nhau
  - Giải các bài toán con từ nhỏ đến lớn, lời giải được lưu trữ lại vào 1 bảng
  - Bài toán con nhỏ nhất phải được giải 1 cách trực tiếp
  - Xây dựng lời giải của bài toán lớn hơn từ lời giải đã có của các bài toán con nhỏ hơn (truy hồi)
    - Số lượng bài toán con cần được bị chặn bởi đa thức của kích thước dữ liệu đầu vào
  - Phù hợp để giải hiệu quả một số bài toán tối ưu tổ hợp

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$
  - Đầu ra: tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp của dãy đã cho có tổng cực đại
- Phân chia
  - Ký hiệu P_i là bài toán tìm dãy con bao gồm các phần tử liên tiếp có tổng cực đại mà phần tử cuối cùng là a_i, với mọi $i = 1,\ldots, n$
  - Ký hiệu S_i là tổng các phần tử của lời giải của P_i, $\forall\ i = 1,\ldots, n$
  - $S_1 = a_1$
  - $S_i = \begin{cases} S_{i-1} + a_i, \text{ nếu } S_{i-1} > 0 \\ a_i, \text{ nếu } S_{i-1} \leq 0 \end{cases}$
  - Tổng các phần tử của dãy con cực đại của bài toán xuất phát là

$$\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con tăng dần cực đại
  - Đầu vào: dãy số nguyên $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ (gồm các phần tử đôi một khác nhau)
  - Đầu ra: tìm dãy con (bằng cách loại bỏ 1 số phần tử) của dãy đã cho tăng dần có số lượng phần tử là lớn nhất (gọi là dãy con cực đại)

Thuật toán quy hoạch động

- Phân chia
  - Ký hiệu P_i là bài toán tìm dãy con cực đại mà phần tử cuối cùng là a_i, với mọi $i = 1,\ldots, n$
  - Ký hiệu S_i là số phần tử của lời giải của P_i, $\forall\ i = 1,\ldots, n$
  - $S_1 = 1$
  - $S_i = \max\{1, \max\{S_j + 1 \mid j < i \wedge a_j < a_i\}\}$
  - Số phần tử của dãy con cực đại của bài toán xuất phát là

$$\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

```
void solve(){
  S[0] = 1;
  rs = S[0];
  for(int i = 1; i < n; i++){
    S[i] = 1;
    for(int j = i-1; j >= 0; j--){
      if(a[i] > a[j]){
        if(S[j] + 1 > S[i])
          S[i] = S[j] + 1;
      }
    }
    rs = S[i] > rs ? S[i] : rs;
  }
  printf("rs = %d\n",rs);
}
```

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con chung dài nhất
  - Ký hiệu $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$, một dãy con của X là dãy được tạo ra bằng việc loại bỏ 1 số phần tử nào đó của X đi
  - Đầu vào
    - Cho 2 dãy $X = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ và $Y = \langle Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \rangle$
  - Đầu ra
    - Tìm dãy con chung của X và Y có độ dài lớn nhất

Thuật toán quy hoạch động

- Bài toán dãy con chung dài nhất
  - Phân rã
    - Ký hiệu $S(i, j)$ là độ dài dãy con chung dài nhất của dãy $\langle X_1, \ldots, X_i \rangle$ và $\langle Y_1, \ldots, Y_j \rangle$, với $\forall\ i = 1, \ldots, n$ và $j = 1, \ldots, m$
    - Bài toán con nhỏ nhất
      - $\forall\ j = 1, \ldots, m$: $S(1, j) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } X_1 \text{ xuất hiện trong } Y_1, \ldots, Y_j \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$
      - $\forall\ i = 1, \ldots, n$: $S(i, 1) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } Y_1 \text{ xuất hiện trong } X_1, \ldots, X_i \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$
  - Tổng hợp lời giải

$$S(i, j) = \begin{cases} S(i\text{-}1, j\text{-}1) + 1, \text{ nếu } X_i = Y_j \\ \max\{S(i\text{-}1, j), S(i, j\text{-}1)\} \end{cases}$$

Thuật toán quy hoạch động

X						
3	7	2	5	1	4	9

Y									
4	3	2	3	6	1	5	4	9	7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2
3	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	1	2	2	2	2	3	3	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3	3	3	3
6	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
7	1	1	2	2	2	3	3	4	5	5

Thuật toán quy hoạch động

```
void solve(){
  rs = 0;
  for(int i = 0; i <= n; i++) S[i][0] = 0;
  for(int j = 0; j <= m; j++) S[0][j] = 0;

  for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
      if(X[i] == Y[j]) S[i][j] = S[i-1][j-1] + 1;
      else{
        S[i][j] = S[i-1][j] > S[i][j-1] ?
                  S[i-1][j] : S[i][j-1];
      }
      rs = S[i][j] > rs ? S[i][j] : rs;
    }
  }
  printf("result = %d\n",rs);
}
```

Thuật toán quy hoạch động – Bài tập

- Cho dãy $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Một dãy con của dãy a là một dãy thu được bằng cách loại bỏ 1 số phần tử khỏi a. Tìm dãy con của a là một cấp số cộng với bước nhảy bằng 1 có độ dài lớn nhất