

# Grafica pe calculator. Preliminarii

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Motivație

## Aspecte introductive

## Despre OpenGL

## Exemple de programe

# De ce un curs de grafică? / Aplicații?

- ▶ Filme.
- ▶ Dezvoltarea de jocuri.
- ▶ Imagistică medicală.

# Ce înseamnă un curs de grafică?

## ► Abordări posibile:

- background + dezvoltare “low level” (de exemplu *OpenGL*)



**Figura:** Sursa: <https://www.iamag.co/real-time-graphics-in-pixar-film-production/>

## ► tehnologii dedicate (de exemplu *Unity*)



**Figura:** Sursa: <https://unity.com/madewith/sonder>

# Cunoștințe necesare?

- ▶ cunoștințe elementare de programare în C++ (inclusiv utilizarea unui mediu de dezvoltare integrat) - vom folosi **Microsoft Visual Studio**;
- ▶ elemente de bază de Algebră liniară și Geometrie analitică.

# Ce teme vom aborda la curs+laborator? Care ar fi obiectivul?

- Primitive grafice
- Transformări
- Texturare
- Reprezentarea scenelor 3D
- Iluminare
- Efecte vizuale
- Ideal: la finalul cursului să puteți dezvolta o aplicație complexă 3D

# Resurse

- ▶ Site-ul oficial OpenGL
- ▶ Cărți:
  - D. Hearn si M. Baker, *Computer Graphics with OpenGL*, 2003
  - D. Shreiner, M.Woo, J. Neider si T. Davis. *OpenGL Programming Guide* (2nd edition), Addison Wesley, 1997
  - D. Shreiner, G. Sellers, J. Kessenich, B. Licea-Kane *OpenGL Programming Guide* (9th edition), Addison Wesley, 2016
  - G. Sellers, R. S. Wright Jr., N. Haemel, *OpenGL: SuperBible. Comprehensive Tutorial and Reference* (7th edition), Addison-Wesley, 2015,
- ▶ Cărți / tutoriale online:
  - <http://learnopengl.com/>
  - <http://www.opengl-tutorial.org/>
  - D. Eck, *Introduction to Computer Graphics*
  - <http://nehe.gamedev.net/>
  - A. Gerdan - *OpenGL 4 tutorials*;
  - etc.

## Elemente generale

- ▶ OpenGL este o interfață de programare (Application Programming Interface API)
- ▶ Pentru a funcționa are nevoie de o serie de biblioteci; versiunea suportată depinde de placa grafică a calculatorului - se poate folosi codul sursa `01_00_test_version.cpp`
- ▶ OpenGL **nu** este un limbaj de programare (există GLSL)
- ▶ Arhitectura de tip *client-server* (CPU-GPU) - element cheie: “comunicarea” dintre cele două componente *hardware*

## Scurt istoric

- ▶ 1992: versiunea 1.0 a OpenGL (derivat din IRIS GL), lansat de SGI; “open standard”
- ▶ 1992: OpenGL Architecture Review Board (elaborarea specificațiilor)
- ▶ 1997: versiunea 1.1
- ▶ 2002/2003: versiunile 1.4, 1.5; GLSL (GL Shading Language) apare ca o extensie a funcționalității de bază
- ▶ 2004: **OpenGL 2.0; GLSL 1.10.59 inclus în “core”**
- ▶ 2008: OpenGL 3.0: conceptul de “funcționalități depreciate”, legate de modul de redare imediat; mecanismul de depreciere a fost implementat / extins în 2009, când au fost lansate versiunile 3.1 și 3.2
- ▶ 2010: OpenGL 3.3 (hardware care suportă Direct3D 10); OpenGL 4.0 (hardware care suportă Direct3D 11); numerotarea versiunilor de GLSL este “sincronizată” (GLSL v. 3.30.6, respectiv v. 4.00.9)
- ▶ 2014 OpenGL 4.5 (respectiv GLSL 4.50)
- ▶ 2017 OpenGL 4.6 (respectiv GLSL 4.60)

# Biblioteci utilizate de OpenGL și funcții asociate

- ▶ bibliotecă fundamentală (core library): este independentă de platforma pe care se lucrează; funcțiile corespunzătoare au prefixul gl. De exemplu: (i) `glClearColor` ( ); `glFlush` ( ) – comune; (ii) `glVertex` ( ); `glColor` ( ); `glBegin` ( ) – depreciate; (iii) `glGenVertexArrays` ( ); `glDrawArrays` ( ) – OpenGL nou.
- ▶ GLU (OpenGL Utility): conține mai ales proceduri / funcții legate de proiecție, precum și funcții pentru conice și cuadrice; funcțiile asociate au prefixul glu
- ▶ GLUT (OpenGL Utility Toolkit) / freeglut: bibliotecă *dependentă de sistem*, utilizată pentru a realiza fereastra de vizualizare; poate interacționa cu sisteme de operare bazate pe ferestre de vizualizare; funcțiile specifice au prefixul glut. Există și alte biblioteci / pachete, cum ar fi GLFW.



Visual Studio |



Mediu de dezvoltare /  
limbaj de programare

API grafica - biblioteci / unelte



Placa grafica

# Exemplu de program care utilizează OpenGL “vechi”

Codul sursă 01\_01\_contur\_triunghi\_OLD.cpp

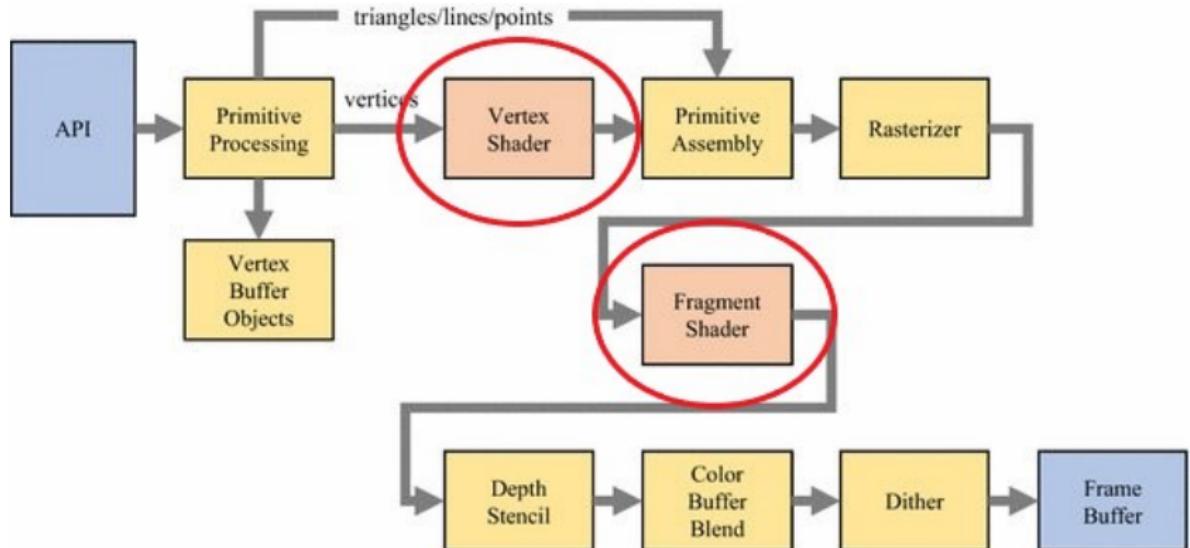
```
// Directive preprocessare  
// Procedură inițializare – init  
// Procedură desen – desen  
// Main  
    // Inițializări GLUT  
    // Generare fereastră  
    // Apelare procedură inițializare  
    // Apelare procedură desen  
    // Apelare glutMainLoop
```

# Exemplu de program care utilizează OpenGL “nou”

Codul sursă 01\_02\_varfuri\_triunghi.cpp

```
// Directive preprocessare
// Shader-e, date (coordonate, culori)
// Proceduri (inițializare, desen)
// Main
    // Inițializări GLUT
    // Generare fereastră
    // Apelare procedură inițializare
        // Creare VBO / VAO
        // Creare / Apelare shader-e
    // Apelare procedură desen
    // Stergere Shader-e, VBO / VAO
    // Apelare glutMainLoop
```

# “Fixed versus programmable pipeline”



Sursa: [Baek and Kim, 2019](#)

# Primitive grafice

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Spațiul culorilor

### Vârfuri

### Primitive grafice - generalități

### Algoritmi de rasterizare

Preliminarii, notații

Algoritmii

# Spațiul culorilor

- ▶ Culoarele sunt obținute combinând intensitățile de pe trei canale: R (red); G (green); B (blue) – **Cubul RGB**.
- ▶ În OpenGL o culoare este indicată prin:

- în OpenGL “vechi” folosind funcția

`glColor* ( )` – “deprecated”

Sufixul \* poate indica:

- dimensiunea  $n$  a spațiului de culori în care lucrăm,  $n = 3$  (RGB) sau  $n = 4$  (RGBA); A=factorul “alpha”, legat de opacitate/transparență.
- tipul de date utilizat, care poate fi:
  - i (integer) ( $i \in \{0, 1, \dots, 255\}$ )
  - f (float)
  - d (double) ( $f, d \in [0.0, 1.0]$ )
- (optional) posibila formă vectorială, indicată prin sufixul v.
- în OpenGL “nou”: culorile sunt manevrate într-un mod asemănător vârfurilor (folosind VBO), odată cu acestea (atribute ale vârfurilor).
- elementul comun este faptul că, în ambele cazuri, culorile conțin informații legate de canalele R, G, B, precum și de canalul A (factorul  $\alpha$ , legat de opacitate).

# Vârfuri - funcții pentru indicare

Primitivele grafice sunt trasate cu ajutorul **vârfurilor** (*entități abstracte, a nu fi confundate cu punctele!*). În OpenGL un vârf este definit:

- în OpenGL “vechi” cu ajutorul funcției

```
glVertex* ( );
```

— “deprecated”

- în OpenGL “nou”:  
vârfurile sunt stocate în matrice;  
împachetate în VAO (Vertex Array Objects);  
trimise plăcii grafice sub formă de VBO (Vertex Buffer Objects).

## Functii pentru primitive

Vârfurile sunt utilizate pentru trasarea primitivelor grafice. Funcțiile folosite sunt diferite pentru cele două moduri de randare:

- în OpenGL “vechi”, o funcție de tipul `glVertex()` poate fi apelată într-un cadru de tip

```
glBegin (*);
          — “deprecated”
glEnd;
```

(unde \* reprezintă tipul de primitivă generat);

- în OpenGL “nou” este utilizată o funcție de tipul

```
glDrawArrays (GLenum mode, GLint first, GLsizei count);
```

unde

`mode`: tipul primitivei;

`first`: primul vârf;

`count`: câte vârfuri se iau în considerare.

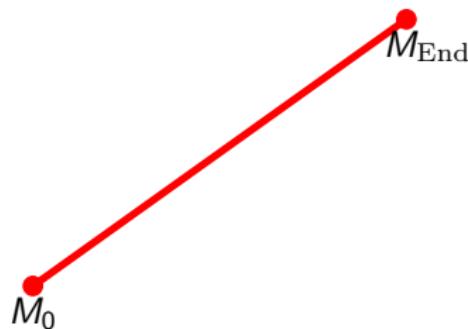
# Tipuri de primitive

- ▶ Puncte: GL\_POINTS
- ▶ Segmente de dreaptă: GL\_LINES, GL\_LINE\_STRIP, GL\_LINE\_LOOP
- ▶ Triunghiuri: GL\_TRIANGLES, GL\_TRIANGLE\_STRIP, GL\_TRIANGLE\_FAN
- ▶ Dreptunghiuri: GL\_QUADS, GL\_QUAD\_STRIP
- ▶ Poligoane (convexe!): GL\_POLYGON

# Motivație și problematizare

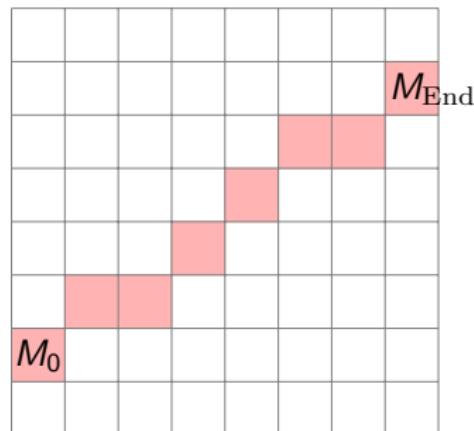
“Continuu”

“Grafica vectorială”



“Discret”

“Grafica rasterială”



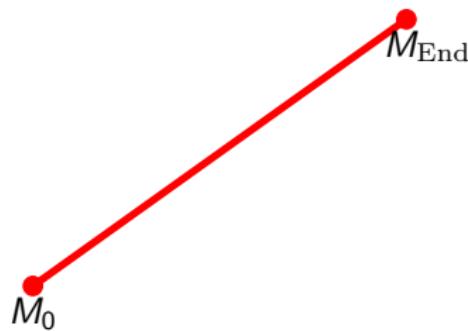
$$M_0 = (x_0, y_0), M_{\text{End}} = (x_{\text{End}}, y_{\text{End}}) \\ x_0, y_0, x_{\text{End}}, y_{\text{End}} \in \mathbb{R}$$

$$M_0 = (x_0, y_0), M_{\text{End}} = (x_{\text{End}}, y_{\text{End}}) \\ x_0, y_0, x_{\text{End}}, y_{\text{End}} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z})$$

# Motivație și problematizare

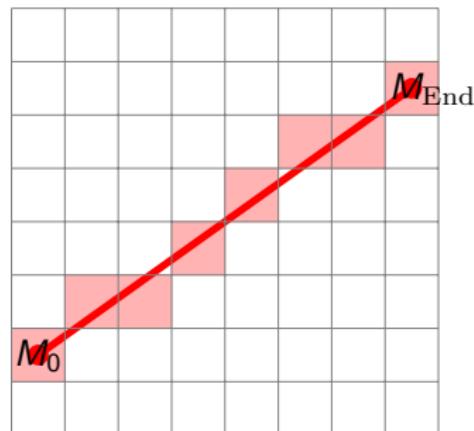
“Continuu”

“Grafica vectorială”



“Discret”

“Grafica rasterială”



$$M_0 = (x_0, y_0), M_{\text{End}} = (x_{\text{End}}, y_{\text{End}}) \\ x_0, y_0, x_{\text{End}}, y_{\text{End}} \in \mathbb{R}$$

$$M_0 = (x_0, y_0), M_{\text{End}} = (x_{\text{End}}, y_{\text{End}}) \\ x_0, y_0, x_{\text{End}}, y_{\text{End}} \in \mathbb{N}(\mathbb{Z})$$

# Ce este un algoritm de rasterizare?

Un algoritm de rasterizare are ca efect reprezentarea grafică a unei primitive într-un sistem de reprezentare de tip grilă (monitor), care este format dintr-o structură discretă de pixeli. Pentru un segment, un algoritm de rasterizare are ca:

**Input:** Coodonatele  $x_0, y_0, x_{\text{End}}, y_{\text{End}} \in \mathbb{N}$  ( $\in \mathbb{Z}$ ) ale extremităților segmentului care urmează să fie reprezentat - altfel spus, pixelii inițial  $M_0 = (x_0, y_0)$ , respectiv final  $M_{\text{End}} = (x_{\text{End}}, y_{\text{End}})$ .

**Output:** Pixelii selectați pentru a trasa segmentul de la  $M_0$  la  $M_{\text{End}}$

## Ipoteze / restricții

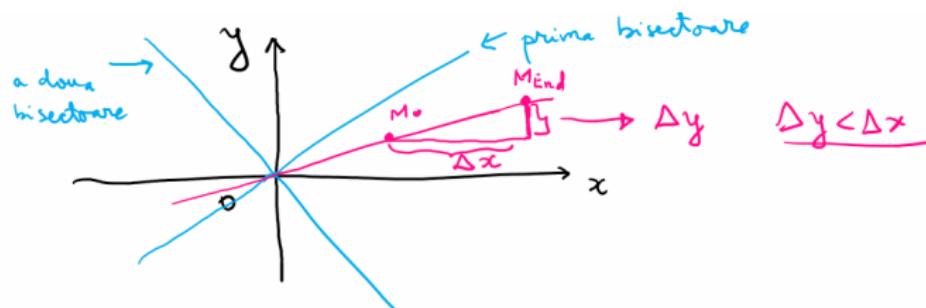
Raționamentele se pot adapta la restul situațiilor/cazurilor. Ipoteze (simplificatoare) făcute:

Ip. 1 Intuitiv: "deplasarea se face înspre dreapta/sus"

$$\begin{aligned}x_{\text{End}} > x_0, \quad y_{\text{End}} > y_0 &\Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \Delta x > 0, \quad \Delta y > 0.\end{aligned}$$

Ip. 2 Intuitiv: "dreapta trăsată prin origine și paralelă cu dreapta suport este situată sub prima bisectoare"

$$\Leftrightarrow \Delta x > \Delta y > 0.$$



# Ecuăția dreptei

Ecuăția dreptei care unește punctele  $M_0$  și  $M_{End}$

$$y = mx + n. \quad (1)$$

# Ecuăția dreptei

Ecuăția dreptei care unește punctele  $M_0$  și  $M_{End}$

$$y = mx + n. \quad (1)$$

Elemente importante: panta  $m$  și coeficientul  $n$ , care poate fi exprimat în funcție de pantă și de coordonatele lui  $M_0$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (panta)}$$

$$y_0 = mx_0 + n \rightarrow n = y_0 - mx_0 \Rightarrow \\ (\text{pt că } M_0 \in \text{dreptei})$$

$$n = y_0 - \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x_0$$

## Ecuăția dreptei

Ecuăția dreptei care unește punctele  $M_0$  și  $M_{End}$

$$y = mx + n. \quad (1)$$

Elemente importante: panta  $m$  și coeficientul  $n$ , care poate fi exprimat în funcție de pantă și de coordonatele lui  $M_0$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (panta)}$$

$$y_0 = mx_0 + n \rightarrow n = y_0 - mx_0 \Rightarrow \\ (\text{pt că } M_0 \in \text{dreptei})$$

$$n = y_0 - \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot x_0$$

**Concluzie:** În cazul continuu avem

$$y = mx + n \stackrel{NOT}{=} f(x).$$

# Varianta 1 - înlocuire în ecuația dreptei

## Algoritm

- Initializare  $x_0, y_0 = f(x_0), m, n$
- Pasul  $k \rightarrow k + 1$  ( $k \geq 0$ )

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$
$$f(x_{k+1}) \leftarrow m \cdot x_{k+1} + n \quad // \text{ formula (1)}$$
$$y_{k+1} \leftarrow \text{round}(f(x_{k+1}))$$

Calcule...

$$\text{ptr} \cdot f(x_{k+1})$$

$$\underline{f(x_{k+1})} = m \cdot \underbrace{x_{k+1}}_{x_k + 1} + n = m(x_k + 1) + n =$$

$$= mx_k + m + n = \underbrace{m x_k + n}_{f(x_k)} + m = \underline{f(x_k) + m}$$

# Varianta 2 - algoritmul Digital Differential Analyzer (DDA)

## Algoritm

- Initializare  $x_0, y_0 = f(x_0), m$
- Pasul  $k \rightarrow k + 1$  ( $k \geq 0$ )

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$

$f(x_{k+1}) \leftarrow f(x_k) + m$  // formula (1), calculele anterioare

$$y_{k+1} \leftarrow \text{round}(f(x_{k+1}))$$

## Exemplu

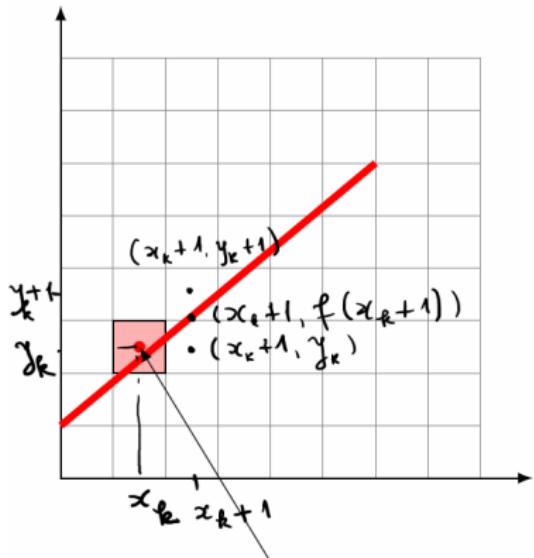
$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + m$$

$$M_0 = (10, 20), M_{\text{End}} = (20, 28)$$

$$\Delta x = 10; \Delta y = 8; m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_k$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(x_k)$	20	20.8	21.6	22.4	23.2	24	24.8	25.6	26.4	27.2	28
$y_k$	20	21	22	22	23	24	25	26	26	27	28

# Varianta 3 - algoritmul lui Bresenham. Idei fundamentale



Presupunem că pixelul  $(x_k, y_k)$  a fost selectat.  
Care este pixelul următor?

Doi "candidați" pentru pixelul următor :  
 $j: (x_k + 1, y_k)$  (ipoteza privind pe latura dreptei)  
 $s: (x_k + 1, y_k + 1)$

Idea: se calculează distanța de la punctul de pe dreapta corespunzător abscisei  $x_k + 1$  la centrele pixelilor candidați :

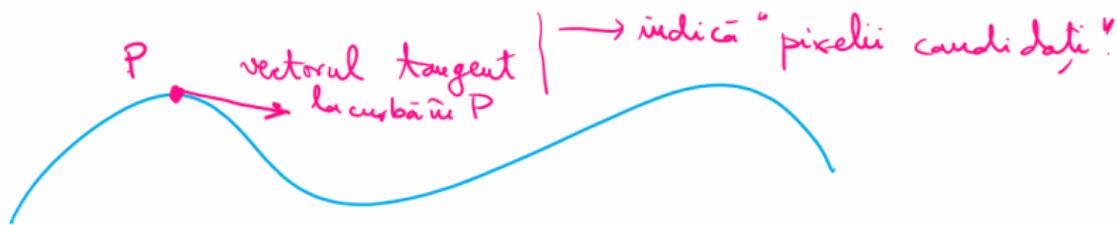
$$d_s = y_k + 1 - f(x_k + 1)$$

$$d_j = f(x_k + 1) - y_k$$

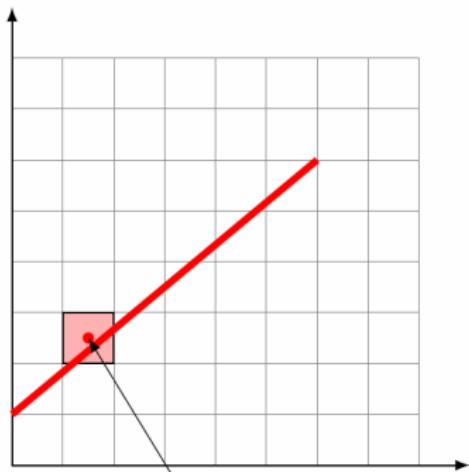
(sunt diferențe de coordonate !)

## Algoritmul lui Bresenham. Observație

Varianta originală (1965) avea în vedere în special segmentele de dreaptă. Folosind conceptul de vector tangent, algoritmul poate fi adaptat și aplicat și în cazul altor curbe.



# Algoritmul lui Bresenham. Factorul de decizie



Presupunem că pixelul  $(x_k, y_k)$  a fost selectat.  
Care este pixelul următor?

$$d_s = \underbrace{y_k + 1}_{\text{ordonata pixelului de sus}} - \underbrace{f(x_k + 1)}_{\text{ordonata punctului de pe dreapta}}$$

$$d_j = f(x_k + 1) - y_k$$

$$d_s = y_k + 1 - mx_k - m - m$$

$$d_j = mx_k + m + m - y_k$$

$d_s \geq d_j ?$

# Algoritmul lui Bresenham. Semnul factorului de decizie

Ne interesează semnul numărului  $d_j - d_s \in \mathbb{Q}$

$$d_j - d_s = 2m \parallel (x_k + 1) - 2y_k + 2m - 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{2\Delta y(x_k + 1)}{\Delta x} - 2y_k \cdot \Delta x + 2m \Delta x - \Delta x$$

$\Delta x$        $\Delta x > 0$

$$y = 2\Delta y + 2m \Delta x - \Delta x$$

Deci semnul lui  $d_j - d_s$  este semnul lui  $p_k$

$$p_k \stackrel{\text{DEF}}{=} 2\Delta y \cdot x_k - 2\Delta x \cdot y_k + y$$

$$p_k < 0 \Leftrightarrow d_j - d_s < 0 \Leftrightarrow d_j < d_s \Rightarrow \text{se adaugă } (x_k + 1, y_k)$$

$$p_k \geq 0 \Leftrightarrow d_j - d_s \geq 0 \Leftrightarrow d_j \geq d_s \Rightarrow \dots \quad (x_k + 1, y_k + 1)$$

# Algoritmul lui Bresenham. Parametrul de decizie

Semnul lui  $d_j - d_s$  este semnul **parametrului de decizie**

$$p_k \stackrel{DEF}{=} 2\Delta y \cdot x_k - 2\Delta x \cdot y_k + \gamma$$

Dacă  $p_k < 0 \Rightarrow d_j < d_s \Rightarrow$  se alege pixelul  $(x_k + 1, y_k)$

Dacă  $p_k \geq 0 \Rightarrow d_j \geq d_s \Rightarrow$  se alege pixelul  $(x_k + 1, y_k + 1)$

## Algoritmul lui Bresenham. Parametrul de decizie - rescriere

Evaluăm  $p_{k+1} - p_k =$ 

$$= 2\Delta y \cdot x_{k+1} - 2\Delta x \cdot y_{k+1} + 2\Delta y \cdot x_k + 2\Delta x \cdot y_k$$

$$\text{II } (x_{k+1} = x_k + 1)$$

$$2\Delta y$$

$$y_{k+1} - y_k = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & p_k \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\Delta y, & \text{dacă } p_k < 0, \text{ adică } y_{k+1} = y_k \\ 2\Delta y - 2\Delta x, & \sim p_k \geq 0, \text{ adică } y_{k+1} = y_k + 1 \end{cases}$$

# Algoritmul lui Bresenham. Parametrul de decizie - rescriere

Evaluăm

$$p_0 = 2\Delta y \cdot x_0 - 2\Delta x \cdot y_0 + \gamma =$$

$$= 2\Delta y \cdot x_0 - 2\Delta x \cdot (m \cdot x_0 + n) + 2\Delta y + 2\Delta x \cdot n - \Delta x \Rightarrow$$

$$p_0 = 2\Delta y - \Delta x.$$

# Algoritmul lui Bresenham

## Algoritm

- Calcul preliminar  $\Delta x, \Delta y, 2\Delta y, 2\Delta y - 2\Delta x, p_0 = 2\Delta y - \Delta x$
- Pasul  $k \rightarrow k + 1$  ( $k \geq 0$ ). // Pp. că avem  $x_k, y_k, p_k \in \mathbb{Z}$   
Dacă  $p_k < 0$  (''stagnare pe orizontală'')

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$

$$y_{k+1} \leftarrow y_k$$

$$p_{k+1} \leftarrow p_k + 2\Delta y$$

- Dacă  $p_k \geq 0$  (''în sus'')

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$$

$$y_{k+1} \leftarrow y_k + 1$$

$$p_{k+1} \leftarrow p_k + 2\Delta y - 2\Delta x$$

# Algoritmul lui Bresenham. Exemplu

$$M_0 = (10, 20), M_{\text{End}} = (20, 28)$$

$$x_0 = 10, y_0 = 20, x_{\text{End}} = 20, y_{\text{End}} = 28.$$

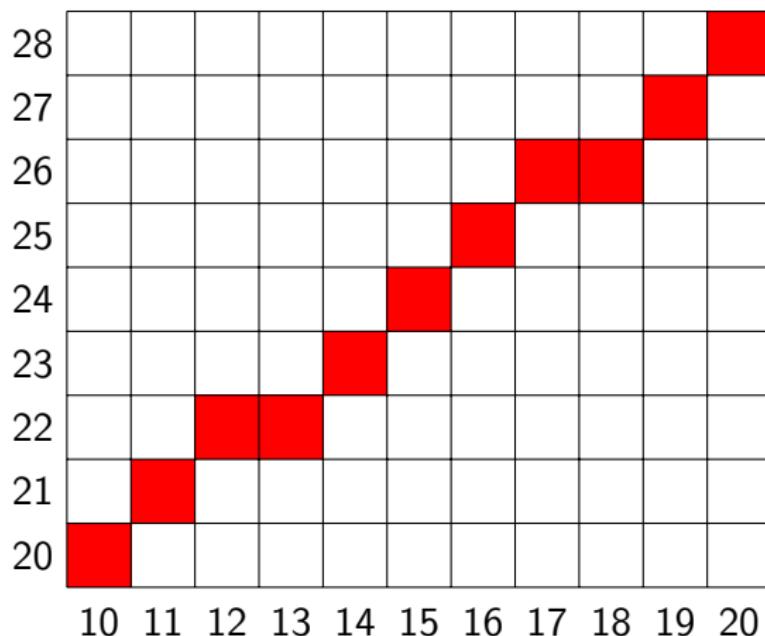
$$\Delta x = 10, \Delta y = 8$$

$$p_0 = 2\Delta y - \Delta x = 6$$

$$2\Delta y = 16$$

$$2\Delta y - 2\Delta x = -4$$

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_k$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_k$	20	21	22	22	23	24	25	26	26	27	28
$p_k$	6	2	-2	14	10	6	2	-2	14	10	6



**Figura: Algoritmul DDA / algoritmul lui Bresenham.** Pixelii selectați pentru a uni punctele  $(10, 20)$  și  $(20, 28)$  sunt colorați cu roșu.

# Primitive grafice. Fața și spatele unui poligon convex

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Condiții pentru poligoane

Vector normal. Față și spatele unui poligon convex

## Exemple

Linii poligonale închise cu autointersecții

# Motivație

- ▶ Codurile sursă 01\_04\_poligoane\_OLD.cpp (funcția RenderFunction3), 02\_02\_fata\_spate\_poligon.cpp, 02\_03\_poligoane3D\_ex1\_OLD.cpp, 02\_04\_poligoane3D.cpp.
- ▶ Ce proprietăți geometrice sunt / NU sunt implementate în OpenGL?
  - ▶ **NU:** reguli pentru aplicarea opțiunii GL\_POLYGON - se presupune că **vârfurile determină un poligon convex** (exemplificare: luați  $A_1 = (0, 0)$ ,  $A_2 = (200, 0)$ ,  $A_3 = (200, 200)$ ,  $A_4 = (140, 60)$  și desenați, folosind modul GL\_POLYGON, poligonul  $A_1A_2A_3A_4$ , apoi poligonul  $A_4A_1A_2A_3$ )
  - ▶ **DA:** fața și spatele unui poligon convex

## Reguli pentru aplicarea opțiunii GL\_POLYGON

Se presupune că opțiunea GL\_POLYGON este utilizată pentru un sir de vârfuri  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , distincte două câte două. Reguli referitoare la vârfurile indicate, pentru ca poligonul să poată fi desenat:

1. Punctele trebuie să fie coplanare, dar nu coliniare.
2. Vârfurile trebuie indicate în ordinea corectă, astfel încât linia poligonală să nu aibă autointersecții.
3. Poligonul trebuie să fie convex.

În continuare primele două subpuncte sunt descrise succint, pentru cel de-al treilea sunt prezentate mai multe detalii (fapt esențial: **pentru un poligon convex vom putea defini fața și spatele poligonului**).

# 1. Coplanaritatea

**De verificat:** condiția de coplanaritate

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{P_1} & x_{P_2} & x_{P_3} & \dots & x_{P_N} \\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_{P_3} & \dots & y_{P_N} \\ z_{P_1} & z_{P_2} & z_{P_3} & \dots & z_{P_N} \end{pmatrix} = 3 \quad (1)$$

sau faptul că

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \dots, \overrightarrow{P_1P_N} \rangle = 2. \quad (2)$$

**Fapt:** O condiție alternativă este coliniaritatea vectorilor  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$ ,  $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4}$ ,  $\dots$ ,  $\overrightarrow{P_{N-1}P_N} \times \overrightarrow{P_NP_1}$ ,  $\overrightarrow{P_NP_1} \times \overrightarrow{P_1P_2}$ . Altfel spus: punctele  $P_1, P_2, \dots, P_N$  sunt coplanare dacă și numai dacă vectorii  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$  ( $i = 1, \dots, N$ , cu convenții modulo  $N$ ) sunt coliniari.

## Exemplu

Punctele  $P_1 = (7, 1, 1)$ ,  $P_2 = (-3, 3, 9)$ ,  $P_3 = (1, -1, 9)$ ,  $P_4 = (8, -4, 5)$  sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$$

vectorii sunt proporționali,  
deci coliniari  
 $\Leftrightarrow$  punctele sunt coplanare

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-3, 3, 9) - (7, 1, 1) = (-10, 2, 8)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} = P_3 - P_2 = (1, -1, 9) - (-3, 3, 9) = (4, -4, 0)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{vmatrix} -10 & 4 & e_1 \\ 2 & -4 & e_2 \\ 8 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dezv.}}{\overbrace{\text{ultima}}^{\text{columna}}} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} e_2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} e_3 = 32e_1 + 32e_2 + 32e_3 = (32, 32, 32)$$

## Exemplu

Punctele  $P_1 = (7, 1, 1)$ ,  $P_2 = (-3, 3, 9)$ ,  $P_3 = (1, -1, 9)$ ,  $P_4 = (11, -3, 1)$  sunt coplanare.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_3P_4} = (16, 16, 16)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} \times \overrightarrow{P_4P_1} = (32, 32, 32)$$

$$\overrightarrow{P_4P_1} \times \overrightarrow{P_1P_2} = (48, 48, 48)$$

## 2. Linie poligonală fără autointersecții

**De verificat:** intersecții de segmente.

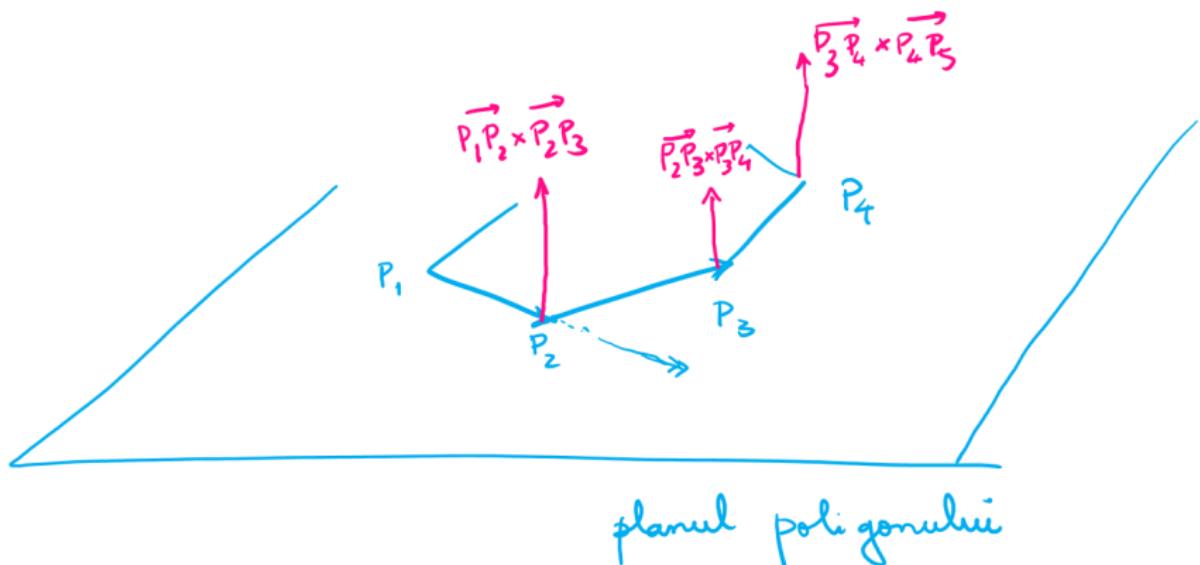
**Varianta 1** Segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$  se intersectează  $\Leftrightarrow A$  și  $B$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $CD$  și  $C$  și  $D$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $AB$ . Două puncte  $M$  și  $N$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $d$  de ecuație  $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow f(M) \cdot f(N) < 0$ .

**Varianta 2** Se folosește reprezentarea segmentelor cu ajutorul combinațiilor afine. Segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$  se intersectează  $\Leftrightarrow$

$$\exists s_0, t_0 \in [0, 1] \quad \text{a.î.} \quad (1 - t_0)A + t_0B = (1 - s_0)C + s_0D.$$

Această variantă poate fi aplicată și în context 3D.

### 3. Convexitatea poligonului - figura



În cazul unui poligon convex, vectorii  $\vec{P_1P_2} \times \vec{P_2P_3}, \vec{P_2P_3} \times \vec{P_3P_4}, \dots$   
au același sens ( și reciproc! )

### 3. Convexitatea poligonului

**De verificat:** convexitatea (folosind produse vectoriale).

**Observație.** (i) Fie  $(P_1, P_2, \dots, P_N)$  un poligon (sensul de parcursere este important!). Poligonul  $\mathcal{P}$  este convex dacă și numai dacă pentru orice trei vârfuri consecutive  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  (modulo  $N$ ) ale poligonului sensul vectorul  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$  este independent de  $i$ .

- (ii) Vectorii menționați au toți aceeași direcție (perpendiculari pe planul poligonului), deoarece punctele sunt coplanare (vezi condiția 1).
- (iii) Pentru un poligon convex, vectorul

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de  $i$ .

**Exemplu.** Punctele  $P_1 = (7, 1, 1)$ ,  $P_2 = (-3, 3, 9)$ ,  $P_3 = (1, -1, 9)$ ,  $P_4 = (11, -3, 1)$  determină un poligon convex.

## Definiție - vector normal

**Lemă.** Pentru un poligon convex, vectorul

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

este independent de  $i$ .

**Definiție.** Fie  $(P_1, P_2, \dots, P_N)$  un poligon convex. Se alege  $i = 1, \dots, n$ .

Vectorul

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}}}{\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \times \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \|}$$

se numește **vector normal (normală)** la planul poligonului / poligonul  $(P_1, P_2, \dots, P_N)$ .

## Convexitatea poligonului - observație

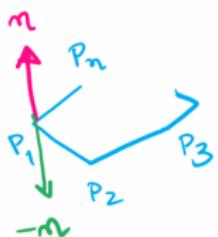
Obs. Fie  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  un poligon convex.

(i) Parcurgerea  $P_1 P_2 \dots P_n \rightarrow$  vector normal

$m$

(ii) Parcurgerea  $P_n P_{n-1} \dots P_1 \rightarrow$   $-m$

$-m$



## Modalitate de calcul (I)

1. Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu  $P_1, P_2, P_3$ , având coordonatele  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$ ,  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$ , respectiv  $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$ .

# Modalitate de calcul (I)

- Se aleg trei vârfuri consecutive, de exemplu  $P_1, P_2, P_3$ , având coordonatele  $P_1 = (x_{P_1}, y_{P_1}, z_{P_1})$ ,  $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2}, z_{P_2})$ , respectiv  $P_3 = (x_{P_3}, y_{P_3}, z_{P_3})$ .
- Se scrie ecuația planului determinat de cele trei puncte sub forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde coeficienții  $A, B, C$  și  $D$  sunt date de formulele

$$A = \begin{vmatrix} y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} x_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{P_1} & 1 & z_{P_1} \\ x_{P_2} & 1 & z_{P_2} \\ x_{P_3} & 1 & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix}, \quad D = - \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} \end{vmatrix},$$

fiind deduși din condiția de coliniaritate

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_{P_1} & y_{P_1} & z_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & z_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & z_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pe scurt: se dezvoltă după linia I determinantul de mai sus.

## Modalitate de calcul (II)

3 Are loc relația

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} = (A, B, C).$$

4 În final:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C).$$

5 În particular, există o legătură între vectorul  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$  și ecuația  $Ax + By + Cz + D = 0$  asociată planului poligonului considerat (observați ce se întâmplă dacă se schimbă ordinea parcurgerii vârfurilor!).

## Conceptul de față / spate ale unui poligon convex

Considerăm un poligon  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  pentru care am calculat ecuația planului  $Ax + By + Cz + D = 0$  ca pe slide-ul 12 (ordinea parcurgerii vârfurilor contează!).

**Definiție.** Pentru un punct  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  notăm

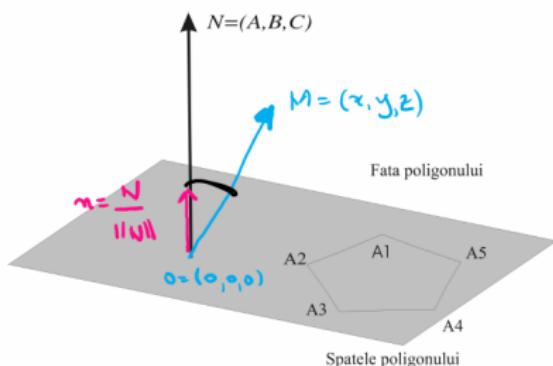
$$\pi(M) = \pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Noțiunile de **față/spate** a planului poligonului (și, implicit, a poligonului convex fixat) sunt definite astfel:

- $M = (x, y, z)$  se află **în fața planului (poligonului)**  
 $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) > 0$ ;
- $M = (x, y, z)$  se află **în spatele planului (poligonului)**  
 $\Leftrightarrow \pi(M) = \pi(x, y, z) < 0$ .

# Interpretare - “normala indică fața poligonului”

Presupunem că  $D = 0$ , adică planul trece prin originea  $O = (0, 0, 0)$ .



M este în fața poligonului

$$\Leftrightarrow A x + B y + C z > 0, \text{ unde } M = (x, y, z)$$

produs scalar între vectorii  
 $(A, B, C)$  și  $(x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \langle (A, B, C), (x, y, z) \rangle > 0$$

$$\Leftrightarrow \langle n, \overrightarrow{OM} \rangle > 0 \quad (\overrightarrow{OM} = (x, y, z))$$

$$\Leftrightarrow \cos(\angle(n, \overrightarrow{OM})) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\angle(n, \overrightarrow{OM}) < 90^\circ$$

$n$  și  $\overrightarrow{OM}$  sunt de aceeași parte a planului.

$\Leftrightarrow$  Normala indică fața poligonului (convex)

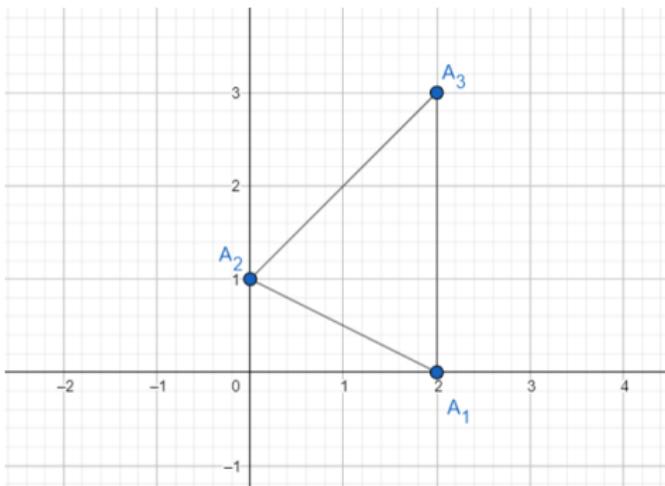
## Interpretare - sinteză

- ▶ Presupunem că  $D = 0$ , deci planul trece prin origine, iar ecuația sa este  $\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0$ .
- ▶ Considerând vectorul  $n = (A, B, C)$  care direcționează normala la plan, avem  $\pi(A, B, C) > 0$ , deci vectorul  $n$  indică partea din față a poligonului (planului).
- ▶ În general, un vector  $(x, y, z)$  este orientat înspre partea din față a planului dacă  $\pi(x, y, z) > 0$ , i.e.  $\langle (x, y, z), n \rangle > 0$ , ceea ce înseamnă că proiecția vectorului  $(x, y, z)$  pe  $N$  este la fel orientată ca și  $n$ .
- ▶ Prin translație, aceste rezultate pot fi extinse pentru un plan arbitrar. Mai mult, presupunând că parcurgem poligonul  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  în sens trigonometric și că rotim un burghiu drept în sensul indicat de această parcurgere, acesta se va deplasa în sensul indicat de vectorul  $N$ , deci înspre fața poligonului (vezi figura).

## De reținut

- ▶ Pentru un poligon convex putem defini față / spatele poligonului. Ordinea parcurgerii vârfurilor este esențială!
- ▶ Putem stabili dacă un punct este în față / spatele unui poligon cu un criteriu **algebric**, folosind ecuația planului asociat (vezi slide 14 - aceasta este definiția formală).
- ▶ Conceptul de față / spate pentru un poligon convex este legat de vectorul normal (normală), care indică fața poligonului.
- ▶ **Intuitiv / geometric:** din față un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens trigonometric, iar din spate un poligon este văzut ca fiind parcurs în sens orar (vezi slide 15).

## De reținut (și de aplicat la cerința 2, L2)!

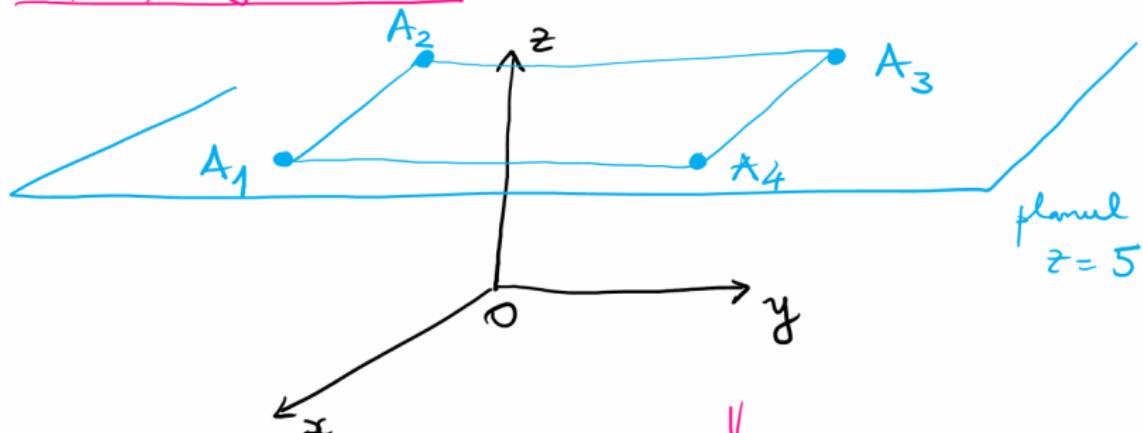


Considerăm figura de mai sus. Dacă în codul sursă vârfurile sunt indicate în ordinea  $A_1, A_3, A_2$ , atunci triunghiul din figură este "văzut din față" și se aplică regulile pentru GL\_FRONT, iar dacă sunt indicate în ordinea  $A_1, A_2, A_3$ , atunci triunghiul este "văzut din spate" și se aplică regulile pentru GL\_BACK. Ordinea de parcursare face referire la modul implicit (GL\_CCW).

## Exemplul 1. Cod sursă 02\_03\_poligoane3D\_ex1\_OLD.cpp

$$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$$

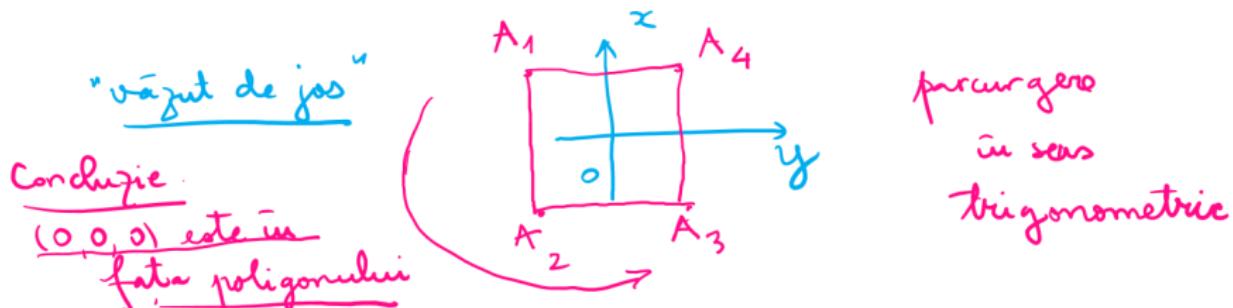
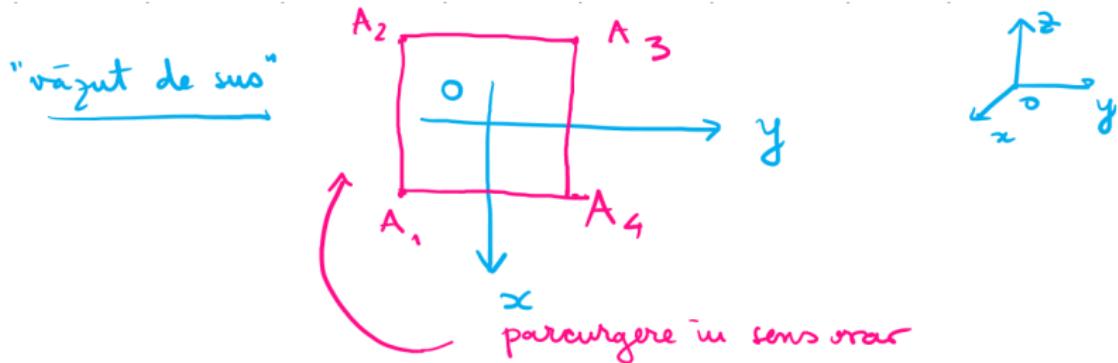
Explicație geometrică



↓  
 $O = (0, 0, 0)$  este  
 situat în fața poligonului

## Exemplul 1. Cod sursă 02\_03\_poligoane3D\_ex1\_OLD.cpp

$$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$$



## Exemplul 1. Cod sursă 02\_03\_poligoane3D\_ex1\_OLD.cpp

$$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$$

Explicație algebrică

- scriem ecuația planului poligonului sub forma  $\bar{x}(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$
- pt. a obține această ecuație folosim determinanțele

$$\begin{array}{l} \text{desv.} \\ \text{linia 1} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \\ 5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 & 1 \end{array} \right| = 0 \cdot x - 0 \cdot y + (-100) \cdot z - (-500)$$

$$\boxed{\bar{x}(x, y, z) = -100z + 500}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 5 & -5 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{array} \right| \stackrel{L_2 \rightarrow L_2 - L_1}{=} \left| \begin{array}{ccc} 5 & -5 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -10 & 0 \\ -10 & 10 \end{array} \right| = -100$$

analog  $\left| \begin{array}{ccc} 5 & -5 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \end{array} \right| = \dots = -500$

# Exemplul 1. Cod sursă 02\_03\_polygone3D\_ex1\_OLD.cpp

$$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$$

Am obținut  $\pi(x, y, z) = -100z + 500$

Ecuatia planului este  $-100z + 500 = 0$

Aveam și  $(0, 0, 0) = 500 > 0 \Rightarrow$  punctul  $(0, 0, 0)$

este în fața poligonului.

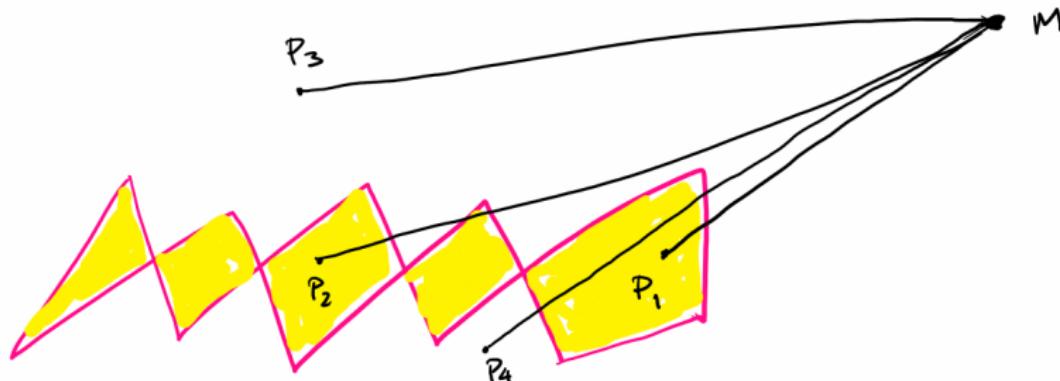
# Exemplul 1. Cod sursă 02\_03\_poligoane3D\_ex1\_OLD.cpp

$$A_1 = (5, -5, 5), A_2 = (-5, -5, 5), A_3 = (-5, 5, 5), A_4 = (5, 5, 5)$$

Comentariu:  $Ax + By + Cz + D = 0$   
 $A=0, B=0, C=(-100)$

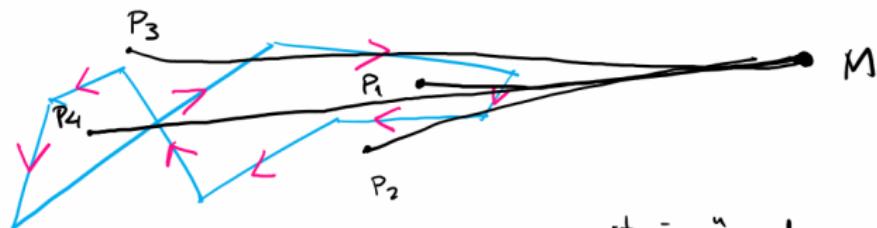
Vectorul normal este direcționat de  $(0, 0, -100) \Rightarrow$   
 vectorul normal este  $(0, 0, -1) \Rightarrow$  fața poligonului este  
 "în jos".

## Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula par-impar (*odd-even rule*)

- se alege un punct  $M$  "de departe" în afara poligonului
- pentru un punct  $P$  nerisuat pe laturi: paritatea nr. de intersecții dintre segmentul  $[PM]$  și linia poligonată  $\rightarrow$  decizie
  - nu par de intersecții  $\rightarrow$  exterior
  - impar  $\rightarrow$  interior

## Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

Regula indexului nenul (*non-zero winding number rule*)

ne uităm "în dreapta": +

Convenție: ne deplasăm de la M la P: - "în stânga": -

Notăm:  $n_+$  : nr. de intersecții cu semnul +  
 $n_-$  : - , — , — , —Indexul unui punct P este  $i_p = n_+ - n_-$ 

Pt. regula în dexului: un punct este exterior dacă indexul este 0  
interior  $\neq 0$

## Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

## Observație

Legătura dintre cele două reguli

Obs :  $(n_+ + n_-)$  = numărul total de intersecții,  
iar paritatea acestuia ne dă regula par/impar.

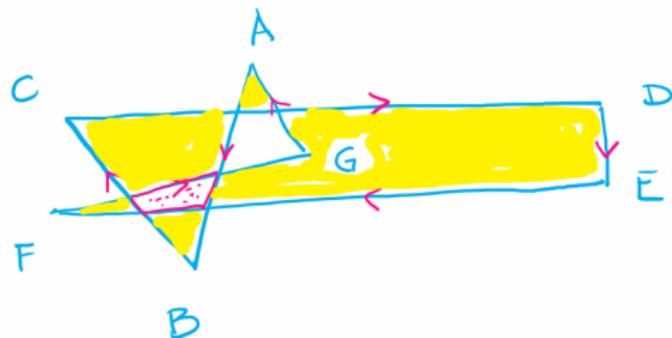
- P exterior pînă la regula înde xului  $\Rightarrow n_+ = n_-$

$$\Rightarrow (n_+ + n_-) \text{ este par} \rightarrow \begin{array}{c} \text{P exterior pînă} \\ \text{par/impar} \end{array}$$

<  $\neq$  NU este neapărat  
adevarat

# Linii poligonale închise cu autointersecții: interior/exterior

## Exemplu



exterior în  
ptr · p/i în  
ptr · index



interior în  
ptr · index  
în ptr · p/i



exterior  
ptr ·

par / impar  
interior ptr  
index

# Transformări

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

# Motivație

- ▶ Cum desenăm primitive atunci când vârfurile au coordonatele în afara intervalului  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ?
- ▶ Cum procedăm pentru a “deplasa” primitivele în scenă?

## În OpenGL "vechi" - codul sursă 03\_01\_animatie\_OLD.cpp

```
// Parametri pentru glOrtho2D() - decupare;  
GLfloat xMin = 0, yMin = 0, xMax = 800.0, yMax = 600.0;  
  
// Setarea parametrilor necesari pentru fereastra de viz  
void Initialize(void)  
{  
    glClearColor(1.0, 1.0, 1.0, 0.0);  
    gluOrtho2D(xMin, xMax, yMin, yMax);
```

Coordonata x intre 0 si 800, coordonata y intre 0 si 600 - "dreptunghi decupat"

```
// Se translateaza dreptunghiul  
glPushMatrix();  
glTranslated(i, 200.0, 0.0);  
// Se roteste dreptunghiul - se  
glPushMatrix();  
glRotated(j, 0.0, 0.0, 1.0);  
// Se deseneaza dreptunghiul;  
glColor3f(1.0, 0.0, 0.0);  
glRecti(-5, 30, 5, 40);
```

Functii specifice pentru deplasare  
(translatie, rotatie) - atentie la ordinea  
in care sunt aplicate!

## În OpenGL "nou" - codul sursă 03\_02\_animatie\_new.cpp

```
resizeMatrix = glm::ortho(-width, width, -height, height); // scalam, "a
matrTransl = glm::translate(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(i, 0.0, 0.0)); //
matrDepl = glm::translate(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(0, 80.0, 0.0)); //
matrScale1 = glm::scale(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(1.1, 0.3, 0.0)); // f
matrScale2 = glm::scale(glm::mat4(1.0f), glm::vec3(0.25, 0.25, 0.0)); //
matrRot = glm::rotate(glm::mat4(1.0f), angle, glm::vec3(0.0, 0.0, 1.0));
```

```
// Matricea de transformare pentru dreptunghiul ALBASTRU;
myMatrix = resizeMatrix * matrTransl * matrScale1;
codCol = 1;
// Transmiterea variabilelor uniforme pentru MATRICEA DE TRANSFORMARE si COLOR
glUniformMatrix4fv(myMatrixLocation, 1, GL_FALSE, &myMatrix[0][0]);
glUniform1i(codCollocation, codCol);
glDrawArrays(GL_POLYGON, 4, 4);
```

In programul principal

```
out vec4 gl_Position;
out vec4 ex_Color;
uniform mat4 myMatrix;

void main(void)
{
    gl_Position = myMatrix*in_Position;
    ex_Color = in_Color;
}
```

In vertex shader

# Functii pentru transformari in OpenGL

- `glTranslate*(t); // glm::translate` Translația  $T_t$  de vector  $t = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- `glScale*(s); // glm::scale` Scalarea  $\sigma_s$  de factor  $s = (s_1, s_2, s_3)$  (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_s} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- `glRotate*(theta, u); // glm::rotate` Rotația  $R_{u,\theta}$  de unghi  $\theta$  și axă dată de vectorul  $u$  // Rotația 2D  $R_{3,\theta}$  de axă  $Ox_3$  (adică  $u = (0, 0, 1)$  și unghi  $\theta$  (centrul rotației fiind în origine - punct fix al transformării) este dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{Ox_3,\theta}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Scalările și rotațiile au centrul în  $O = (0, 0, 0)$ , acesta este punct fix!

## Aspecte teoretice

- ▶ **Motivație:** Transformările pot fi modelate cu ajutorul matricelor, **dar** este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: **folosind "coordonate omogene" și considerând 4 coordonate.**
- ▶ **De reținut!**
  - (i) orice vârf este reprezentat (intern) ca având 4 coordonate
  - (ii) orice transformare este reprezentată (intern) folosind o matrice  $4 \times 4$
  - (iii) compunerea transformărilor  $\leftrightarrow$  înmulțirea matricelor (în particular, ordinea contează!)

## Din punctul de vedere al implementării...

- În OpenGL “vechi”: apelarea unor funcții specifice (**deprecated**) duce la generarea internă a matricelor corespunzătoare transformărilor, realizarea operațiilor cu acestea și aplicarea asupra vârfurilor, rezultând efectul de deplasare dorit
- În OpenGL “nou”: **nu există funcții specifice, ci trebuie manevrate în mod explicit matricele.** Se poate folosi biblioteca `glm` ([OpenGL Mathematics](#))

**Q:** unde/cum indicăm matricele pentru transformări?  
unde/cum efectuăm operațiile?

**A:** pot fi utilizate programul principal, shader-ele sau o combinație pot fi utilizate mai multe shader-e

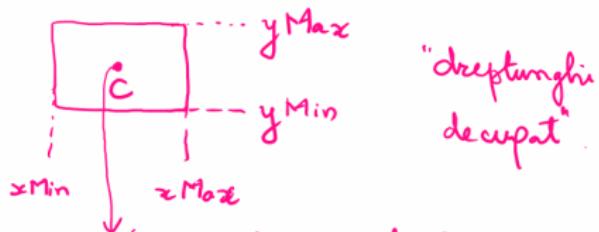
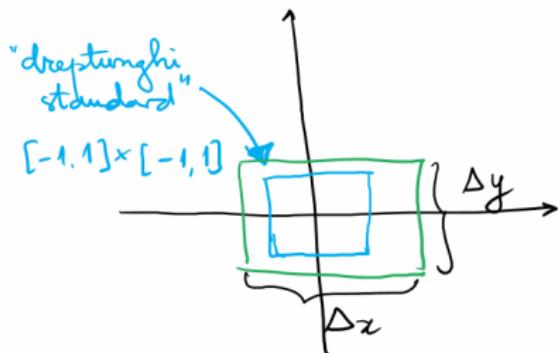
## Despre `glm::ortho` - L3. Codul sursă 03\_03\_resize.cpp

- Dorim să desenăm o scenă 2D cu vârfuri având coordonata  $x$  între  $x_{min}$  și  $x_{max}$  și coordonata  $y$  între  $y_{min}$  și  $y_{max}$ . Se aplică funcția `glm::ortho(xmin, xmax, ymin, ymax)`. În codul sursă:  
 $x_{min} = -400, x_{max} = 500, y_{min} = -200, y_{max} = 400$ . Efectul funcției este transformarea dreptunghiului “decupat”  
 $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$  în dreptunghiul “standard”  
 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

## Despre `glm::ortho` - L3. Codul sursă 03\_03\_resize.cpp

- ▶ Dorim să desenăm o scenă 2D cu vârfuri având coordonata  $x$  între  $x_{min}$  și  $x_{max}$  și coordonata  $y$  între  $y_{min}$  și  $y_{max}$ . Se aplică funcția `glm::ortho(xmin, xmax, ymin, ymax)`. În codul sursă:  
 $x_{min} = -400, x_{max} = 500, y_{min} = -200, y_{max} = 400$ . Efectul funcției este transformarea dreptunghiului “decupat”  
 $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$  în dreptunghiul “standard”  
 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .
- ▶ Funcția `glm::ortho` este dată de compunerea dintre o translație și o scalare. **Atenție la ordine!**

## Despre glm::ortho - L3. Codul sursă 03\_03\_resize.cpp



$$-\text{"recentrare": } T_{(-x_c, -y_c)} \Rightarrow M_T$$

$$x_c = \frac{x_{\text{Min}} + x_{\text{Max}}}{2}$$

$$y_c = \frac{y_{\text{Min}} + y_{\text{Max}}}{2}$$

( $\Rightarrow$  dreptunghi cu centru în origine)

$$-\text{"scalare": } S \text{ cu factori } \frac{2}{\Delta x}, \frac{2}{\Delta y} \Rightarrow M_S$$

$\Rightarrow$  matricea  $M_S \cdot M_T$

Obs. importantă: Rotările și scalările au originea punct fix. Dacă dorim să aplicăm o rotație sau o scalare cu centru oricare, avem de realizat o compunere:

fie C centrul rotației

- aplicăm translația de vector  $\overrightarrow{OC} : T_{\overrightarrow{OC}}(M_1)$
  - aplicăm rotație / scalarea  $(M_2)$
  - aplicăm translație de vector  $\overrightarrow{OC} : T_{\overrightarrow{OC}}(M_3)$
- matricea  $M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$

# Transformări

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Exemple de transformări

### Coordinate omogene

### Coordinate omogene - breviar teoretic

### Sinteză

# Funcții pentru transformări în OpenGL

- **glm::translate** Translația  $T_t$  de vector  $t = (t_1, t_2, t_3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

- **glm::scale** Scalarea  $\sigma_s$  de factor  $s = (s_1, s_2, s_3)$  (de-a lungul celor trei axe, centrul scalării fiind în origine - punct fix al transformării)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_s} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- **glm::rotate** Rotația  $\mathbb{R}_{u,\theta}$  de unghi  $\theta$  și axă dată de vesorul  $u$  //Rotația 2D  $\mathbb{R}_{3,\theta}$  de axă  $Ox_3$  (adică  $u = (0, 0, 1)$  și unghi  $\theta$  (centrul rotației fiind în origine - punct fix al transformării) este dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_{Ox_3, \theta}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Pot fi reprezentate în mod uniform transformările de mai sus?

## Exemplu (1)

Fie aplicația afină  $f$  dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

**Obs.** Utilizăm formalismul cu coloane pentru consistența lucrului cu matrice; aplicația se scrie și  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$ .

- Calculați  $f(0, 0)$ ,  $f(2, 5)$ ,  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ .
- Scrieți relația (1) sub forma matriceală. Ce observați? (legătura cu  $f(e_1), f(e_2)$ ).

## Exemplu (1) - Calcule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}; \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$$

(i) Calculați  $f(0, 0)$ ,  $f(2, 5)$ ,  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$ .

$$f(0, 0) = (0, 0) ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(2, 5) = (24, 11) ; \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1, 0) = (2, 3) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (4, -1) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Exemplu (1) - Calcule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}; \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2, 3x_1 - x_2)$$

(ii) Scrieți  $f$  folosind reprezentarea matriceală. Ce observați? (legătura cu  $f(e_1), f(e_2)$ ).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{M_f} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

↓ Cobweb bri Mg

$$\text{sunt } f(e_1) \text{ in } f(e_2)$$

## Exemplu (2)

Aceleași cerințe pentru aplicația afină  $f$  dată de

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + 4x_2 + 5, 3x_1 - x_2 - 2) \quad (2)$$

# Proprietăți - de reținut!

(i) Pentru  $f$  aplicație afină 2D dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Coloanele matricei sunt exact  $f(e_1), f(e_2)$ .

(ii) Pentru  $f$  aplicație afină 2D dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

# Rotații 2D

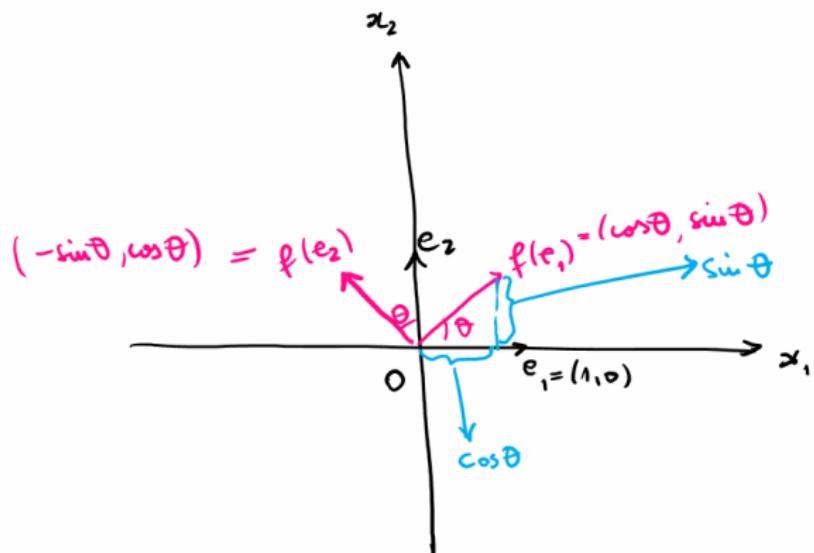
Rotația 2D (cu axa de rotație  $u = (0, 0, 1)$ ) de unghi  $\theta$ , cu centrul în origine are matricea  $2 \times 2$  asociată dată de

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

iar matricea  $3 \times 3$  este

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Figura - rotații 2D



Dacă  $f = R_{0, \theta}$   
în plan

$$\Downarrow$$

$$M_f = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## Vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- ▶ **Motivație:** Pot fi reprezentate în mod uniform translațiile, scalările, rotațiile? Este necesar un cadru în care transformările să fie reprezentate în mod uniform și compunerea lor să fie ușor de descris: folosind “**coordonate omogene” și considerând 4 coordonate.**
- ▶ **Coordonatele omogene verifică proprietatea fundamentală**

$$[\alpha : \beta : \gamma : \delta] = [\lambda\alpha : \lambda\beta : \lambda\gamma : \lambda\delta], \quad \forall \lambda \neq 0, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0).$$

De exemplu,  $[2 : 3 : -1 : 4] = [4 : 6 : -2 : 8] = [-6 : -9 : 3 : -12]$ , dar  $[2 : 3 : -1 : 4] \neq [4 : -1 : 3 : 2]$ .

- ▶ Unui **vârf** de coordonate  $(x_1, x_2, x_3)$ , notate și  $(x, y, z)$  i se asociază **coordonatele omogene**

$$[x_1 : x_2 : x_3 : 1] \text{ (sau } [x : y : z : 1]).$$

- ▶ Unei **direcții** date de vectorul  $(v_1, v_2, v_3)$ , i se asociază **coordonatele omogene**

$$[v_1 : v_2 : v_3 : 0].$$

# Transformări – reprezentare matriceală

- Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o aplicație afină arbitrară a lui  $\mathbb{R}^3$ , dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(a da o aplicație afină  $f$  revine la a da matricele  $(a_{ij})_{i,j}$  și  $(b_i)_i$ ).

- Lui  $f$  îi corespunde o matrice  $4 \times 4$

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Principiu:** Dat un vârf / o direcție având coordonate omogene reprezentate de un vector coloană

$$\xi = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_0 \end{pmatrix},$$

aplicarea transformării  $f$  generează un nou vector coloană, și anume

$$M_f \cdot \xi.$$

## Exemple

- ▶ În momentul apelării funcției `glm::translate3f(t1, t2, t3)`, se generează (și manevrează) matricea  $4 \times 4$

$$M_{T_t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ▶ În momentul apelării funcției `glm::scale3f(s1, s2, s3)`, se generează (și manevrează) matricea  $4 \times 4$

$$M_{\sigma_s} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Completere

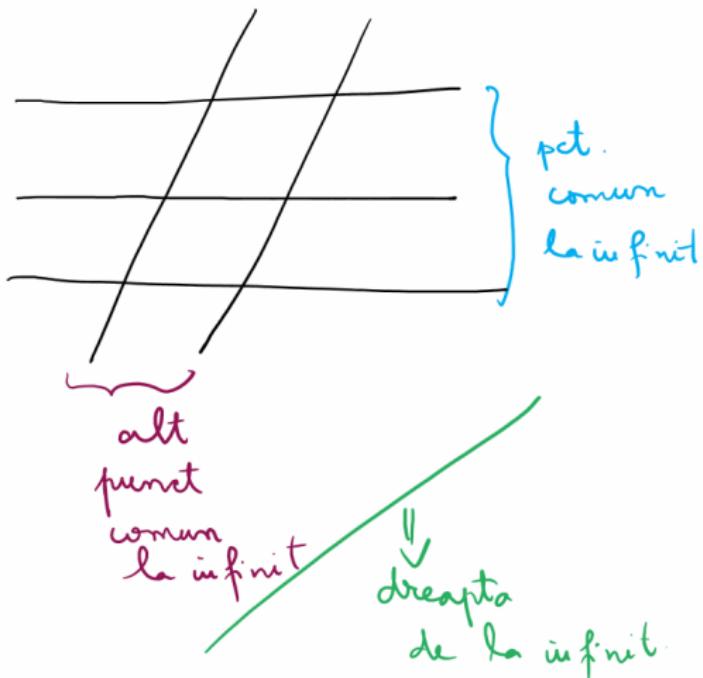
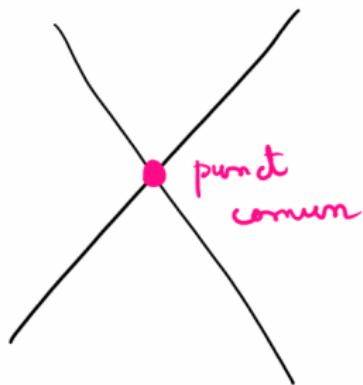
Pe lângă funcțiile din biblioteca glm, transformările de modelare pot fi apelate în codul sursă indicând explicit matricea  $4 \times 4$  asociată. Prin convenție, elementele sunt introduse pe coloane, de sus în jos, de la stânga la dreapta

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

În continuare...

Cum se ajunge la introducerea coordonatelor omogene? Care sunt fundamentele teoretice care stau la baza utilizării lor?

# Construcție I - geometrică



# Construcție I - geometrică

- ▶ Se obține **dreapta de la infinit** (dată de punctele de la infinit)
- ▶ Planul  $\mathbb{R}^2$ , prin reuniune cu dreapta de la infinit (dată de punctele de la infinit) formează **planul proiectiv real, notat  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$** .
- ▶ Este greu să ne “**reprezentăm intuitiv**” planul proiectiv real. Motivul: “nu admite scufundare în spațiul  $\mathbb{R}^3$ ”. Alte exemple de suprafețe care nu admit astfel de scufundări: banda lui Möbius (infinită); **sticla lui Klein**.
- ▶ Putem descrie dreapta proiectivă reală  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ ? Dar dreapta proiectivă complexă  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ?
- ▶ Aplicabilitate a geometriei proiective (de exemplu): **curbe eliptice** → **criptografie și securitate**.

## Construcție II - algebrică

- ▶  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  poate fi descris **algebric**, folosind **coordonate omogene**.
- ▶ Pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  se introduce relația de echivalență  $\sim$  dată prin  $(X_1, X_2, X_0) \sim (Y_1, Y_2, Y_0)$  dacă și numai dacă există  $\lambda \neq 0$  astfel ca  $Y_0 = \lambda X_0$ ,  $Y_1 = \lambda X_1$ ,  $Y_2 = \lambda X_2$  (este același  $\lambda$ , ca factor de proporționalitate!).
- ▶ Clasa de echivalență a unui element  $X = (X_1, X_2, X_0)$  va fi notată cu  $[X_1 : X_2 : X_0]$ . Astfel, de exemplu, avem  $[1 : 2 : -5] = [2 : 4 : -10]$ . În schimb,  $[1 : 2 : -5] \neq [1 : 2 : 5]$  și  $[1 : 2 : -5] \neq [-5 : 2 : 1]$ .
- ▶ Se consideră mulțimea claselor de echivalență
 
$$\mathcal{C} = \{[X_1 : X_2 : X_0] | (X_1, X_2, X_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$
- ▶ **Terminologie.** Pentru un element  $\xi$ , dacă  $\xi = [X_1 : X_2 : X_0]$ , atunci  $(X_1, X_2, X_0)$  se numesc **coordonatele omogene ale lui  $\xi$** . Coordonatele omogene sunt definite și sunt unice până la înmulțirea cu un scalar nenul.

# Legătura dintre cele două construcții

(i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C}, \quad \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația  $\iota$  este injectivă.

**Justificare:**

Île  $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$  cu  $\iota(x_1, x_2) = \iota(y_1, y_2) \Rightarrow$

$$[x_1 : x_2 : 1] = [y_1 : y_2 : 1] \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ a.s.}$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, 1) = (y_1, y_2, 1) \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 \text{ a.s.} \quad \begin{cases} y_1 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda x_2 \\ 1 = \lambda \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \text{ deci } (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow \iota \text{ este injectivă}$$

# Legătura dintre cele două construcții

- (i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C}, \quad \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

Aplicația  $\iota$  este injectivă.

# Legătura dintre cele două construcții

- (i) Există o aplicație de incluziune naturală

$$\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathcal{C}, \quad \iota(x_1, x_2) = [x_1 : x_2 : 1].$$

**Aplicația  $\iota$  este injectivă.**

- (ii) Pe de altă parte, fie  $[\delta]$  clasa de echivalență a unei drepte  $\delta$  modulo relația de paralelism (intuitiv, o astfel de clasă de echivalență poate fi privită ca punct de la infinit al unei drepte, în sensul că două drepte paralele au în comun un punct la infinit, iar prin acest punct trece orice dreaptă paralelă cu ele). Fie  $(v_1, v_2)$  un vector director al lui  $\delta$  (atunci orice vector de forma  $(\lambda v_1, \lambda v_2)$ , cu  $\lambda \neq 0$  este, la rândul său, un vector director al lui  $\delta$ ); acești vectori sunt vectori direcționali pentru orice dreaptă paralelă cu  $\delta$ . Avem asocierea

$$[\delta](\text{alegem } (v_1, v_2)) \mapsto [v_1 : v_2 : 0] \in \mathcal{C}.$$

**Definiția este coerentă.**

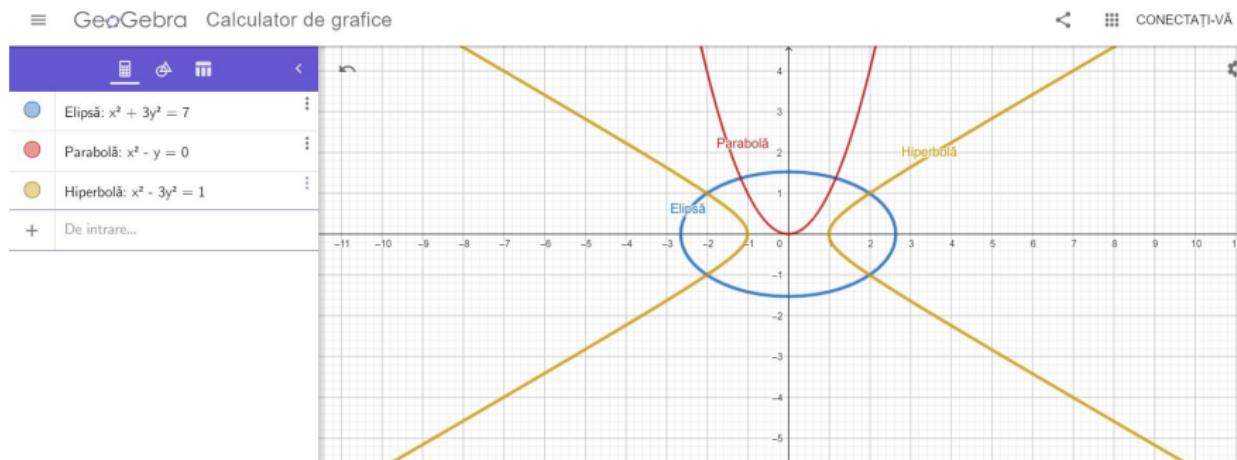
- **Concluzie:** Există o corespondență naturală 1:1 între planul proiectiv real  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  (construit geometric) și mulțimea  $\mathcal{C}$  a claselor de echivalență (construită algebraic). Aceasta în seamnă că în  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  sunt folosite coordonate omogene.

# Sinteză

În concluzie, planul proiectiv real  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  conține două tipuri de elemente:

- ▶ **"Puncte reale"**: elemente de forma  $P = [X_1 : X_2 : X_0]$  cu  $X_0 \neq 0$ ;  $P$  îi corespunde punctului  $\left(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right)$  din spațiul geometric  $\mathbb{R}^2$  (deoarece  $[X_1 : X_2 : X_0] = [\frac{X_1}{X_0} : \frac{X_2}{X_0} : 1]$ ). În codul sursă 04\_01\_coord\_omogene.cpp punctul  $[-100 : -100 : 0 : 0.5]$  coincide cu  $[-200 : -200 : 0 : 1]$ , deci corespunde punctului  $(-200, -200)$ .
- ▶ **"Puncte de la infinit"**: elemente de forma  $Q = [X_1 : X_2 : 0]$ . În codul sursă 04\_01\_coord\_omogene.cpp punctul  $[-100 : -100 : 0 : 0]$  este punct de la infinit și corespunde direcției  $(-100, -100)$ , adică primei bisectoare. Mulțimea punctelor de la infinit formează o dreaptă, numită **dreapta de la infinit**, având ecuația  $X_0 = 0$ .

# Câte puncte au la infinit elipsa, parabola, hiperbolă?



## Varianta algebrică

- ▶ Coordonate omogene: se utilizează polinoame omogene (toate monoamele au același grad).
- ▶ Oricărui loc geometric din  $\mathbb{R}^2$  descris printr-o ecuație polinomială implicită îi corespunde un loc geometric din planul  $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ , descris printr-o ecuație ce se obține “omogenizând” ecuația inițială.

## ► Exemplul 1:

- Cercul  $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ .
- Omogenizare:  $x_1 = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $x_2 = \frac{x_2}{x_0}$ .
- Înlocuire + calcule:  $X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0$ .
- Puncte de la infinit?

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_2 = 0.$$

Nu este posibil ca  $X_0 = X_1 = X_2 = 0$  (așa am definit relația de echivalență), deci **nu avem puncte la infinit** în acest caz.

## ► Exemplul 2:

- Hiperbola  $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$ .

- Omogenizare:  $x_1 = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $x_2 = \frac{x_2}{x_0}$

- Înlocuire + calcule:  $X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0$

- Puncte la infinit? :  $\begin{cases} X_1^2 - X_2^2 - X_0^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases} \rightarrow X_1^2 = X_2^2$

$$\rightarrow \begin{cases} X_1 = X_2 = t \\ X_1 = -X_2 = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [t: t: 0] = [1: 1: 0] \\ [t: -t: 0] = [1: -1: 0] \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{două} \\ \text{puncte} \\ \text{la infinit} \end{array} \right\}$$

## Puncte de la infinit: concluzii+exemplu important

- ▶ Oricărui loc geometric  $L$  din  $\mathbb{R}^2$  i se poate asocia un loc geometric  $\bar{L}$  din  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ , prin **completarea cu puncte de la infinit**. Dacă  $L$  este descris prin ecuații implicate,  $\bar{L}$  este dat prin **omogenizarea** ecuațiilor lui  $L$ .
- ▶ Astfel, dacă  $L$  este dat prin ecuația

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

omogenizarea ecuației lui  $L$  se obține astfel: se notează  $x_i = \frac{x_i}{x_0}$  ( $i = 1, 2$ ) și se efectuează înlocuirile în ecuația lui  $L$ , obținând, după eliminarea numitorului, ecuația omogenă a lui  $\bar{L}$

- ▶ Pentru locul geometric

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} = 0 \end{cases}$$

prin omogenizare se obține locul geometric

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 = 0 \end{cases}$$

sau matriceal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} = 0 \end{pmatrix}$$

## Pentru aplicații

- Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplicația dată de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{20} \end{pmatrix}$$

- În coordonate omogene (după omogenizare), această transformare se scrie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{10}X_0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{20}X_0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_0 \end{pmatrix}$$

- Analog, pentru  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se obține o matrice  $4 \times 4$ .
- Faptul că pe ultima linie este  $(0, 0, 1)$  sau  $(0, 0, 0, 1)$  se interpretează prin faptul că “nu se schimbă poziția dreptei de la infinit”.

# De reținut: vârfuri și direcții - rolul celei de-a 4 coordonate

- OpenGL utilizează coordonate omogene, fiind utilizate 4 coordonate.  
Semnificația:

- Unui **vârf** de coordonate  $(x_1, x_2, x_3)$ , notate și  $(x, y, z)$ , i se asociază **coordonatele omogene**  $[x_1 : x_2 : x_3 : 1]$  (sau  $[x : y : z : 1]$ ),

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : 1] (= [\alpha x_1 : \alpha x_2 : \alpha x_3 : \alpha], \forall \alpha \neq 0).$$

De exemplu, pentru **punctul**  $(1, 2, 5)$ :

$$(1, 2, 5) \mapsto [1 : 2 : 5 : 1] = [3 : 6 : 15 : 3] = \dots, \text{etc.}$$

- Unei **drepte / direcții** date de vectorul  $(v_1, v_2, v_3)$ , i se asociază **coordonatele omogene**  $[v_1 : v_2 : v_3 : 0]$ ,

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto [v_1 : v_2 : v_3 : 0].$$

De exemplu, pentru **direcția**  $(1, 4, 3)$ :

$$(1, 4, -3) \mapsto [1 : 4 : -3 : 0] = [2 : 8 : -6 : 0] = \dots, \text{etc.}$$

## De reținut: transformări – reprezentare matriceală

- Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o aplicație afină arbitrară a lui  $\mathbb{R}^3$ , dată prin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

(a da o aplicație afină  $f$  revine la a da matricele  $(a_{ij})_{i,j}$  și  $(b_i)_i$ .

- Lui  $f$  îi corespunde o matrice  $4 \times 4$

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- De exemplu, matricea asociată translației  $T$  de vector  $(2, -3, 5)$  este

$$\mathcal{M}_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Texturare

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

# Etape

Maparea texturilor presupune realizarea următoarelor patru etape:

- ▶ crearea unei texturi sau a unui obiect textură și specificarea caracteristicilor texturii;
- ▶ indicarea modului în care textura este aplicată pe pixelii imaginii;
- ▶ activarea texturării;
- ▶ reprezentarea scenei, indicând atât coordonatele de texturare ( $s, t, r, q$ ), cât și cele geometrice ( $x, y, z, w$ ).

## Texturi 1D - funcții asociate

Definirea unei texturi 1D se face apelând funcția

```
glTexImage1D (.....);
```

având parametrii

- ▶ target: tipul de textură (GL\_TEXTURE\_1D);
- ▶ level: nivelul de texturare (0);
- ▶ intformat: numărul valorilor (de culoare) utilizate pentru fiecare pixel; în cazul codului RGBA acest număr este 4;
- ▶ width: lățimea este o putere a lui 2; trebuie să fie coerentă și consistentă cu modul în care a fost definită textura;
- ▶ border: este un număr egal cu 0,1 sau 2 și indică numărul pixelilor de pe frontieră;
- ▶ format: poate fi o constantă simbolică de forma GL\_RGB; GL\_RGBA;
- ▶ type: tipul este indicat printr-o constantă simbolică GL\_UNSIGNED\_BYTE; GL\_BYTE;
- ▶ texels: se indică unde este localizată textura.

# 1. Crearea unui obiect textură și specificarea proprietăților acestuia

**Obiectele textură** memorează date referitoare la textură, făcându-le accesibile imediat. Fiecare obiect îi este asociată o singură textură. Sunt parcurși câțiva pași intermediari, descriși mai jos, împreună cu funcțiile OpenGL asociate.

## 1a. Generarea numelor obiectelor textură

:

```
glGenTextures (n, *texNames);
```

Prin această funcție sunt *rezervați*  $n$  identificatori de textură în vectorul `texNames`, declarat explicit în procedura de inițializare `init`. Rezervarea are ca semnificație faptul că numele din `texNames` sunt marcate ca fiind utilizate, ele primesc caracteristici efective atunci când sunt prima dată legate cu funcțiile specifice. **Observație.** De menționat că funcția OpenGL cu efect contrar celei descrise este funcția de stergere

```
glDeleteTextures (n, *texNames);
```

## 1b. Crearea și utilizarea obiectelor textură

```
glBindTexture (target, id);
```

Aici target este parametrul care descrie dimensiunea texturii; fiind vorba de o textura 2-dimensională este GL\_TEXTURE\_2D, iar id este numele texturii. Prin această funcție este *creat* un nou obiect textură, cu numele id. La apelarea lui `glBindTexture (...) ;` în cadrul funcției de desenare, textura este legată de obiectul desenat, ceea ce este corelat cu corespondența dintre coordonatele de texturare și cele de modelare. De fapt, `glBindTexture (...) ;` precizează obiectul textură activ.

## 1c. Specificarea caracteristicilor texturii

```
glTexImage2D (.....);
```

având parametrii asemănători cu cei din cazul 1-dimensional

- ▶ target: tipul de textură (GL\_TEXTURE\_2D);
- ▶ level,intformat: similar cu cazul 1D;
- ▶ width, height: lățimea și înălțimea texturii sunt de forma  $2^w + b_w$ , respectiv  $2^h + b_h$  (altfel spus, puteri ale lui 2 la care se adaugă dimensiunile frontierei);
- ▶ border: dimensiunea frontierei ( $b_w, b_h$ );
- ▶ format, type, texels: similar cu cazul 1D.

Trebuie menționat faptul că pot fi definite și subtexturi, prin funcția

```
glTexSubimage2D (.....);
```

având parametrii similari

- ▶ target: tipul de textură (GL\_TEXTURE\_2D);
- ▶ level: similar cu funcția glTexImage2D;
- ▶ xoffset, yoffset: sunt numere întregi, pozitive, care precizează unde anume este așezată subtextura în structura de texeli (cu convenția că (0,0) este în stânga jos);
- ▶ width, height: lățimea și înălțimea subtexturii;
- ▶ format, type, texels: similar cu funcția glTexImage2D.

Semnificația acesti funcții este că se definește o structură prin care este înlocuită parțial / total o porțiune a texturii active (curente).

## 2. Precizarea unor reguli referitoare la modul în care texelii sunt așezați pe structura de pixeli

Două reguli sunt luate în considerare: *repetarea texturii și filtrare*. Ambele sunt legate de faptul că atât structura de texeli cât și cea de pixeli sunt discrete, iar scopul lor este de a indica modul în care se procedează atunci când nu există o corespondență 1:1 între cele două structuri. Forma generală a funcției asociate este

```
glTexParameter* (target, pname, value);
```

Parametrul **target** indică tipul de textură, fiind **GL\_TEXTURE\_2D**. Celalți parametri depind ca semnificație și valoare de regula la care se face referire.

## 2a. Repetarea texturii.

În acest caz (și ținând cont că suntem în context bidimensional) parametrul poate lua valorile

GL\_TEXTURE\_WRAP\_S

GL\_TEXTURE\_WRAP\_T

$s, t$  sunt primele două coordonate ale texturii 2D, semnificația fiind că este precizată regula aplicată pentru coordonata indicată. În particular, pot fi utilizate reguli diferite pentru cele două coordonate de texturare.

Parametrul value poate avea una din valorile

GL\_CLAMP

GL\_REPEAT

În cazul lui GL\_CLAMP, dacă se parcurge toată textura de-a lungul coordonatei considerate, valoarea ultimului texel este folosită în continuare pentru completarea tuturor pixelilor. În cazul lui GL\_REPEAT, dacă se parcurge toată textura de-a lungul coordonatei considerate, se repornește parcurgerea texturii de la început, aceasta fiind repetată de câte ori este necesar.

## 2b. Filtrare.

Aici apare explicit faptul ca se poate întâmpla ca la randarea unei scene să nu existe o corespondență biunivocă între texeli și pixeli. Astfel, se poate ca un pixel să corespundă unei porțiuni mici a structurii de texeli sau, invers, un pixel să corespundă unei structuri de texeli, iar rolul regulii de filtrare este de a stabili ce texel îi este asociat pixelului considerat.

Parametrul `pname` poate avea, corespunzător celor două situații, valorile

`GL_TEXTURE_MAG_FILTER`

`GL_TEXTURE_MIN_FILTER`

Parametrul `value` poate avea una din valorile

`GL_NEAREST`

`GL_LINEAR`

Semnificația valorilor este următoarea: pentru `GL_NEAREST` se alege texelul având coordonatele cele mai apropiate de centrul pixelului, în timp ce pentru `GL_LINEAR` este utilizată o tehnică de tipul *moving window*, fiind considerat un tablou de  $2 \times 2$  texeli apropiati de centrul pixelului, după care se face o mediere.

## Coordinate de modelare și coordonate de texturare

- ▶ Coordonatele de modelare sunt cele utilizate în mod curent în funcția de desenare. Fiecărui vârf îi sunt asociate, aşa cum se știe, coordonatele spațiale  $(x, y)$  în cazul scenelor 2D).

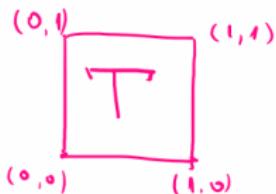
# Coordonate de modelare și coordonate de texturare

- ▶ Coordonatele de modelare sunt cele utilizate în mod curent în funcția de desenare. Fiecărui vârf îi sunt asociate, aşa cum se ştie, coordonatele spațiale  $(x, y)$  în cazul scenelor 2D.
- ▶ În cazul texturilor 2D coordonatele de texturare sunt  $s$  și  $t$ . Prin referire strict la **textură**, ambele sunt în intervalul  $[0.0, 1.0]$ . Cu alte cuvinte, coordonatele de texturare (teoretic) sunt reprezentate de pătratul  $[0.0, 1.0] \times [0.0, 1.0]$ .
- ▶ În cadrul funcției de desenare, fiecărui vârf îi sunt asociate anumite coordonate de texturare. Când se realizează “legarea” de vârfuri pot fi considerate coordonate arbitrarе, pe baza regulilor menționate anterior (v. slide-ul 10).
- ▶ Este suficient, pentru o primitivă grafică 2D, să fie indicate coordonatele de texturare pentru trei dintre vârfuri, coordonatele de texturare ale punctelor din interior rezultă automat. Motivație: dacă au fost fixate trei puncte necoliniare  $a, b, c$  în spațiul de texturare și trei puncte necoliniare  $A, B, C$  în spațiul de modelare, există o unică aplicație afină care transformă punctele  $a, b, c$  în  $A, B$ , respectiv  $C$ . Dacă sunt mai mult de trei vârfuri: coerentă!

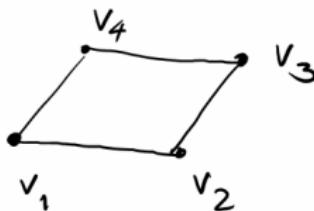
# Despre aplicarea texturii

Coordonatele de texturare (teoretic) sunt reprezentate de pătratul  $[0.0, 1.0] \times [0.0, 1.0]$ . În cadrul funcției de desenare, fiecărui vârf îi sunt asociate anumite coordonate de texturare (valorile pot fi arbitrale).

Textură



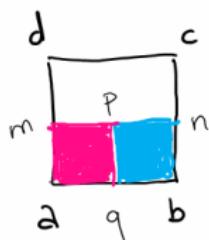
În scenă



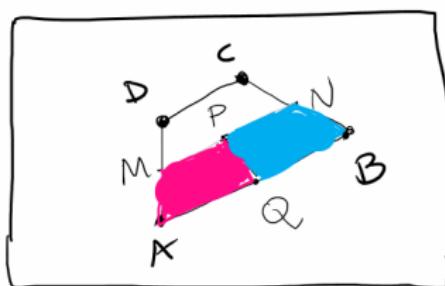
fiecare vîrf îi se asociază  
coord. de texturare

## Despre aplicarea texturii

Este suficient, pentru o primitivă grafică 2D, să fie indicate coordonatele de texturare pentru trei dintre vârfuri, coordonatele de texturare ale punctelor din interior rezultă automat, folosind coliniaritatea și rapoarte de puncte coliniare. Dacă sunt mai mult de trei vârfuri: coerență!



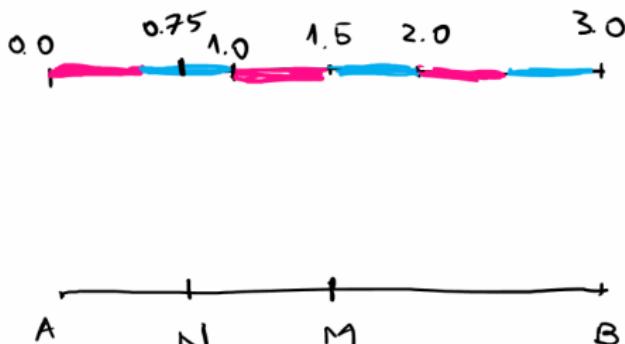
Textura



se aplică pe ABCD ( $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$   
 $\dots$ )

## Un exemplu numeric

Se aplică o textură 1D  așa încât vârfurile  $A = (30, 50)$  și  $B = (70, 40)$  au coordonata de texturare 0.0, respectiv 3.0, opțiunea fiind GL\_REPEAT. Fie  $N$  mijlocul lui  $[AM]$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $[AB]$ . Ce culoare are  $N$ ?



Vârf	Coord. de texturare
A	0.0
B	3.0
M	1.5
N	0.75

N are coord. de texturare 0.75, deci va fi reprezentat cu albastru.

# Concluzie

În concluzie, o textură 2D este: (i) un tablou dreptunghiular de texeli având dimensiunile puteri ale lui 2; (ii) o mulțime înzestrată cu coordonate de texturare (pătratul standard). Atunci când tabloul de texeli are același număr de linii / coloane și atunci când textura este aplicată direct pe un pătrat, corespondența dintre pixeli și texeli este ușor de controlat și nu apar fenomene de deformare. În caz contrar (situație mai des întâlnită), trebuie manevrați în mod convenabil parametrii disponibili.

# Transformări (III). Reperul de vizualizare (poziția camerei)

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

Coordinate de modelare. Coordinate de vizualizare

Reperul de vizualizare

Transformarea de vizualizare

# Coordonate de modelare și coordonate de vizualizare

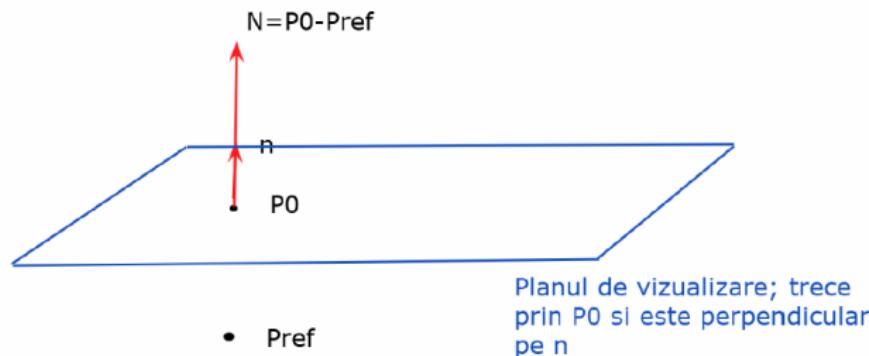
## ► Coordonatele de modelare

- originea  $O$
- axe de coordonate  $Ox, Oy, Oz$  cu vesorii  $e_1, e_2, e_3$
- implicit, obiectele/primitivele (vârfurile) sunt indicate în raport cu acest sistem de coordonate

## ► Apelarea funcției `glm::lookAt( )`; are ca efect (implicit) generarea unui nou reper / sistem de coordonate, numite **reper de vizualizare / coordonate de vizualizare**

- originea:  $P_0$  (poziția observatorului)
- axe: date de vesorii  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$  (construiți în continuare)

# Reperul de vizualizare - vectorul $n$



$$N = \overrightarrow{P_{ref}P_0} = P_0 - P_{ref}; \quad n = \frac{N}{\|N\|}$$

de ce  $P_0 - \text{Pref}$  și nu  $\text{Pref} - P_0$ ?

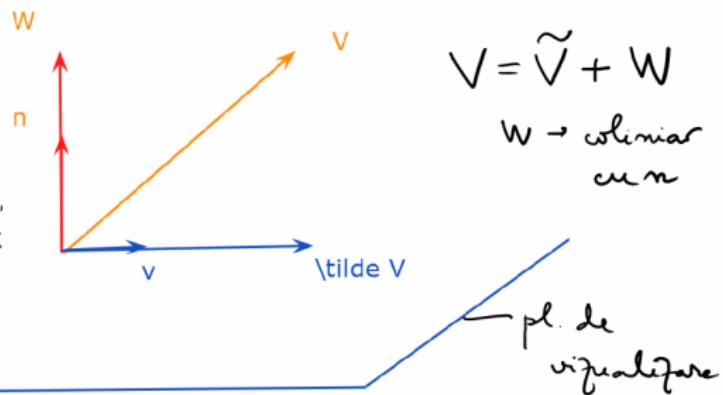
de ce se împarte la  $\|N\|$ ?

# Legătura dintre vectorii $V$ și $v$

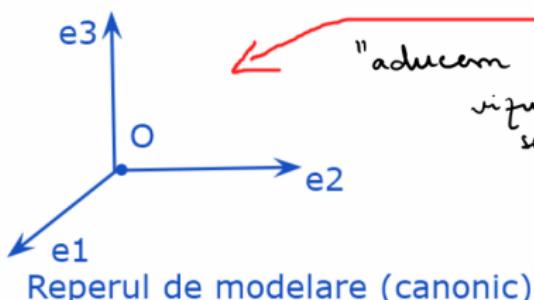
**Comentariu/Întrebare:** ce legătură există între vectorul  $V$ , indicat ca "verticală" în funcția `glm::lookAt( )`; și vectorul  $v$ , calculat ca fiind al doilea versor al reperului de vizualizare?

**R:** Vectorul  $V$  se descompune ca suma dintre un vector  $\tilde{V}$  (=proiecția lui  $V$  pe planul de vizualizare) și un vector  $W$ , perpendicular pe planul de vizualizare (coliniar cu  $n$ ). Are loc relația  $v = \frac{\tilde{V}}{\|\tilde{V}\|}$ .

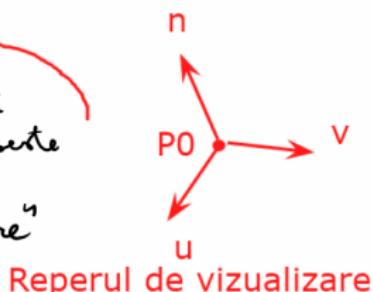
Dacă modificăm vectorul  $V$ , adăugând multipli ai lui  $N$  (sau  $n$ ) vectorul  $v$  nu se modifică



# Schimbarea reperului ca transformare



"aducem reperul de vizualizare ca să se suprapună pe reperul de modelare"



Descrierea transformărilor:

- translatăm a.î.  $P_0$  să devină originea, adică aplicăm  $T_{(-x_0, -y_0, -z_0)}$  vectorii sunt  $\perp 2 \times 2$ , cu normă 1
- roatare 3D a.î. reperul ortonormal  $(u, v, n)$  să se suprapună cu reperul  $ON (e_1, e_2, e_3)$

Care este matricea asociată?

# Matricea asociată schimbării de reper

Matricele asociate celor două transformări:

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{T}_{(-x_0, -y_0, -z_0)} \rightarrow M_{\mathbb{T}_{(-x_0, -y_0, -z_0)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\textcircled{2} rotatia ? Pentru început: matricea  $3 \times 3$  care transformă  $(e_1, e_2, e_3)$  în reperul ON ( $u, v, n$ ).

$$A = \begin{pmatrix} u_x & v_x & n_x \\ u_y & v_y & n_y \\ u_z & v_z & n_z \end{pmatrix}$$

$\brace{}$  coloanele acestei matrice sunt componentele lui  $u, v, n$  în reperul canonic

# Matricea asociată schimbării de reper

Matricea  $A^{-1}$  este cea care transformă reperul  $(u, v, n)^T$  în reperul canonic.

Obs.  $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x & v_x & n_x \\ u_y & v_y & n_y \\ u_z & v_z & n_z \end{pmatrix} =$

$$= \mathbb{I}_3 \text{ (deoarece } (u, v, n) \text{ este reper ON)}$$

Deri: Întrucât  $(u, v, n)$  este reper ON, matricea  $A$  verifică relația  $A^t \cdot A = \mathbb{I}_3$  ( $A$  s.n. ortogonală) și matricea inversă este  $A^{-1} = A^t$ .

# Matricea asociată schimbării de reper

În final, matricea  $4 \times 4$  asociată este:

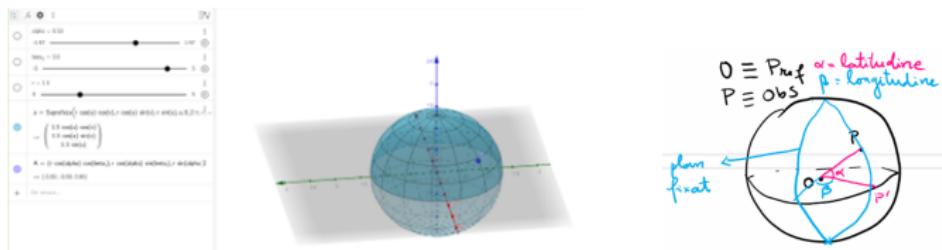
$$M = A^+ \cdot M_{\text{II}} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & -\langle u, P_0 \rangle \\ v_x & v_y & v_z & -\langle v, P_0 \rangle \\ n_x & n_y & n_z & -\langle n, P_0 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Survolarea unui obiect - codul 07\_01\_survolare\_cub.cpp

- ▶ La ce revine a survola un obiect?
- ▶ Reprezentarea sferei de centru  $C$  și rază  $r$

$$\begin{cases} x = C_x + r \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ y = C_y + r \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ z = C_z + r \sin(\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \beta \in [0, 2\pi]$$



- ▶ Pentru a implementa survolarea, observatorul Obs se deplasează pe o sferă cu centrul în punctul de referință Ref și cu raza dist. În cod dist, alpha, beta sunt variabile.

```
//pozitia observatorului - se deplaseaza pe sfera
Obsx = Refx + dist * cos(alpha) * cos(beta);
Obsy = Refy + dist * cos(alpha) * sin(beta);
Obsz = Refz + dist * sin(alpha);
```

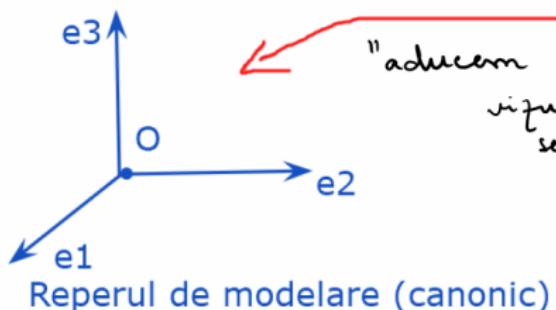
# Transformări (IV). Proiecții

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

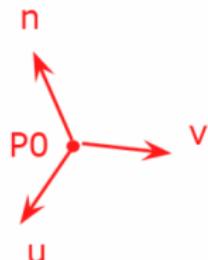
# Schimbarea reperului ca transformare

Schimbarea de reper  $\leftrightarrow$  Efectuarea unei transformări



Reperul de modelare (canonic)

"aducem reperul de vizualizare ca să se suprapună peste reperul de modelare"



Reperul de vizualizare

Descrierea transformărilor:

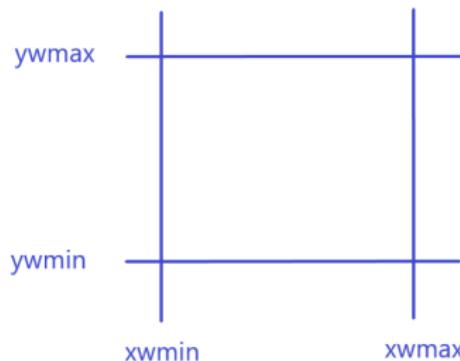
- translatăm a.î.  $P_0$  să devină originea, adică aplicăm  $T_{(-x_0, -y_0, -z_0)}$  vectorii sunt  $1 \times 2 \times 2$ , cu normă 1
- roatare 3D a.î. reperul ortonormal  $(u, v, n)$  să se suprapună cu reperul  $ON (e_1, e_2, e_3)$

- ▶ Rolul transformărilor de proiecție: de a permite reprezentarea unei lumi 3D, teoretic nemărginite, pe un monitor 2D mărginit.
- ▶ Despre aplicarea proiecțiilor:
  - dacă nu a fost efectuată nicio transformare de modelare, proiecția este aplicată în raport cu reperul de modelare, fiind decupat pătratul "standard"  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ,
  - dacă a fost efectuată o transformare de vizualizare (observatorul a fost "adus" în origine, axele au fost "aliniate", etc.): din punctul de vedere al logicii imaginii, decuparea / proiecția sunt realizate în raport cu observatorul și reperul de vizualizare. Altfel spus, proiecția este aplicată după transformarea de vizualizare.
- ▶ O proiecție este o transformare care implică (i) decuparea, (ii) proiecția propriu-zisă, fiind necesară o matrice  $4 \times 4$  adecvată. Din punct de vedere al implementării: dacă `matVis` este matricea de vizualizare (dată de `glm::lookAt()`) și `matPr` este matricea de proiecție, atunci în codul sursă trebuie să apară `matPr * matVis`.

## Cazul 2D

- ▶ `glm::ortho (xwmin, xwmax, ywmin, ywmax);`
- ▶ Efectul: este decupat un dreptunghi  $\mathcal{D}$  din planul orizontal  $Oxy$  (se presupune că nu au fost aplicate alte transformări). Dreptunghiul  $\mathcal{D}$  are laturile paralele cu axele de coordonate, fiind delimitat de dreptele

$$x = xwmin, \quad x = xwmax, \quad y = ywmin, \quad y = ywmax.$$

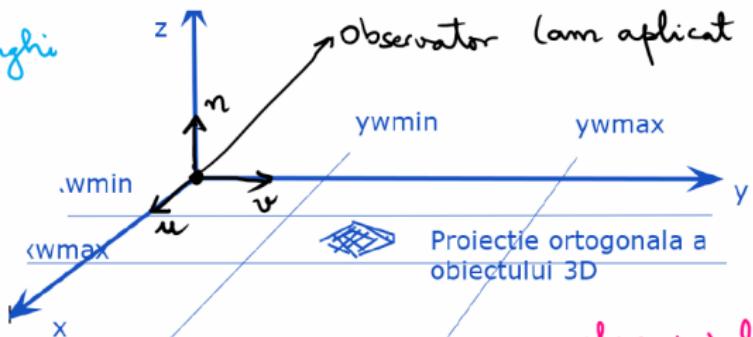


Apoi este realizată o transformare a dreptunghiului  $\mathcal{D}$  în pătratul "standard"  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Matricea  $4 \times 4$  asociată transformării poate fi determinată explicit.

## Cazul 3D - proiecții ortogonale

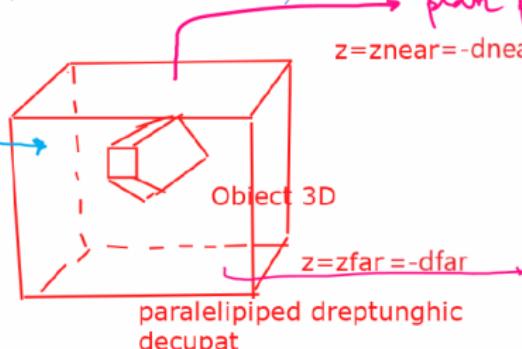
```
glm::ortho (xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, dnear, dfar);
```

delimitarea unui dreptunghi  $\rightarrow$  Observator (am aplicat trsf. de vizualizare)



această fată  
 ("distringă") e într-un plan  
parallel cu  $Oxz$   
dăt de  
ecuația  $y = y_0$  unde

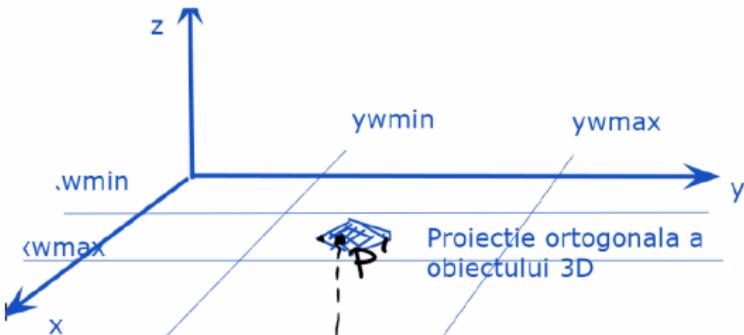
$\rightarrow$  plan paralel cu Oxy dat de  
 $z = z_{\text{near}} = -d_{\text{near}}$  (plan apropiat do  
de capătare)



plan V cu Oxy  
(plan îndepărtat de  
decupare)

# Ce este o proiecție ortogonală?

`glm::ortho (xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, dnear, dfar);`



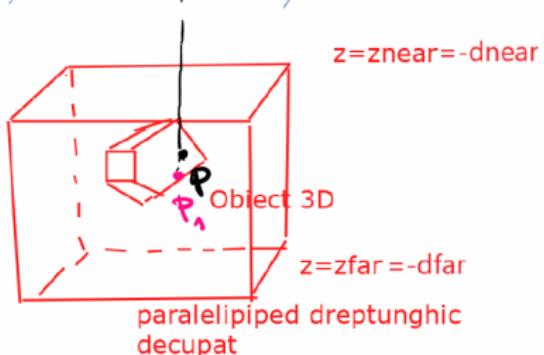
formula:

$$(x_p, y_p, z_p) \mapsto$$

$$\mapsto (x_p, y_p, 0)$$

$$\text{III}$$

$$(x_p, y_p)$$



$P'$  = proiecția  
ortogonală  
a lui  $P$   
(prin  $P$  trece o  
dreaptă perp-  
te cu Oxy, apoi  $\cap$   
cu Oxy)

$P'$  e și proiecția  
ortogonală a  
lui  $P$ ,

# Cazul 3D - proiecții ortogonale

Matricea  $4 \times 4$  asociată este

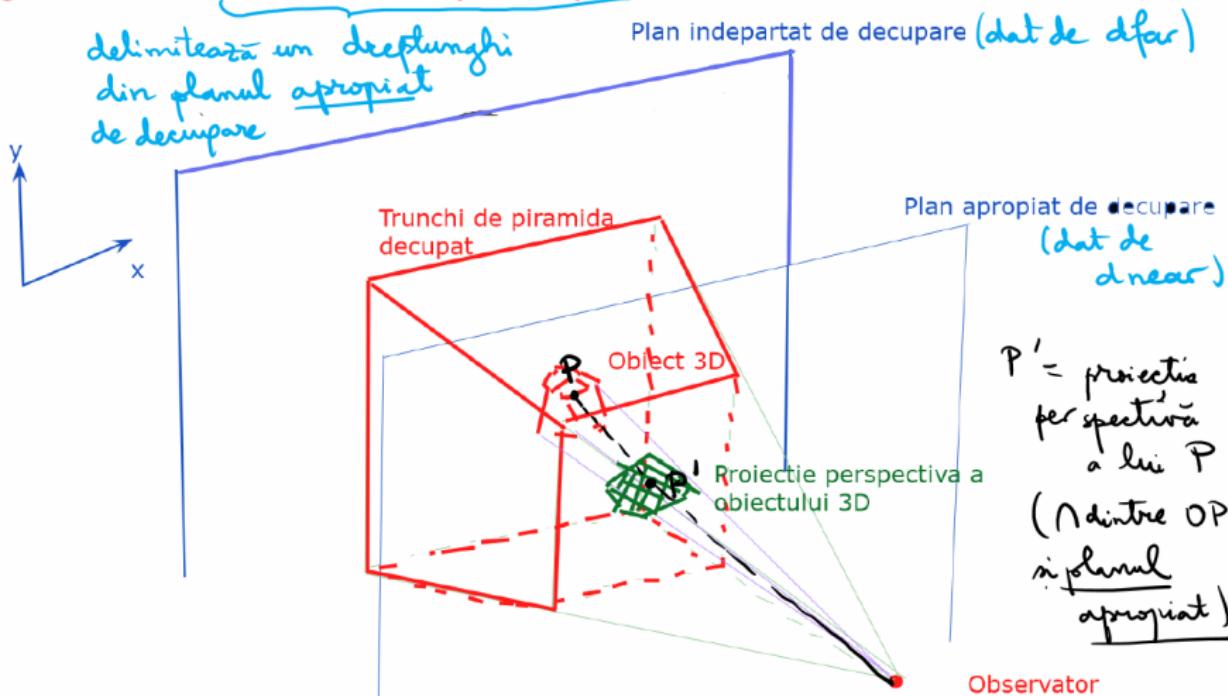
$$\mathcal{M}_{\text{orto,norm}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{xw_{\max} - xw_{\min}} & 0 & 0 & -\frac{xw_{\max} + xw_{\min}}{xw_{\max} - xw_{\min}} \\ 0 & \frac{2}{yw_{\max} - yw_{\min}} & 0 & -\frac{yw_{\max} + yw_{\min}}{yw_{\max} - yw_{\min}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{z_{\text{near}} - z_{\text{far}}} & \frac{z_{\text{near}} + z_{\text{far}}}{z_{\text{near}} - z_{\text{far}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această matrice are rolul de a transforma un **paralelipiped dreptunghic** decupat în paralelipipedul “standard”  $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ , apoi, în mod implicit, sunt reținute primele două coordonate.

# Cazul 3D - proiecții perspective

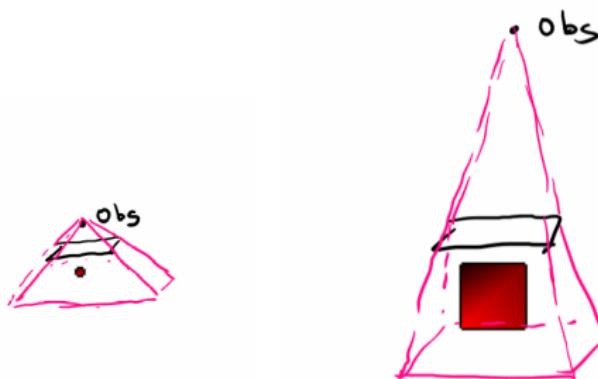
`glm::frustum()` - este decupat un trunchi de piramidă.

`glm::frustum(xwmin, xwmax, ywmin, ywmax, dnear, dfar);`



## Cazul 3D - proiecții perspective. Valoarea $d_{near}$ și efectul asupra desenului în cazul glFrustum

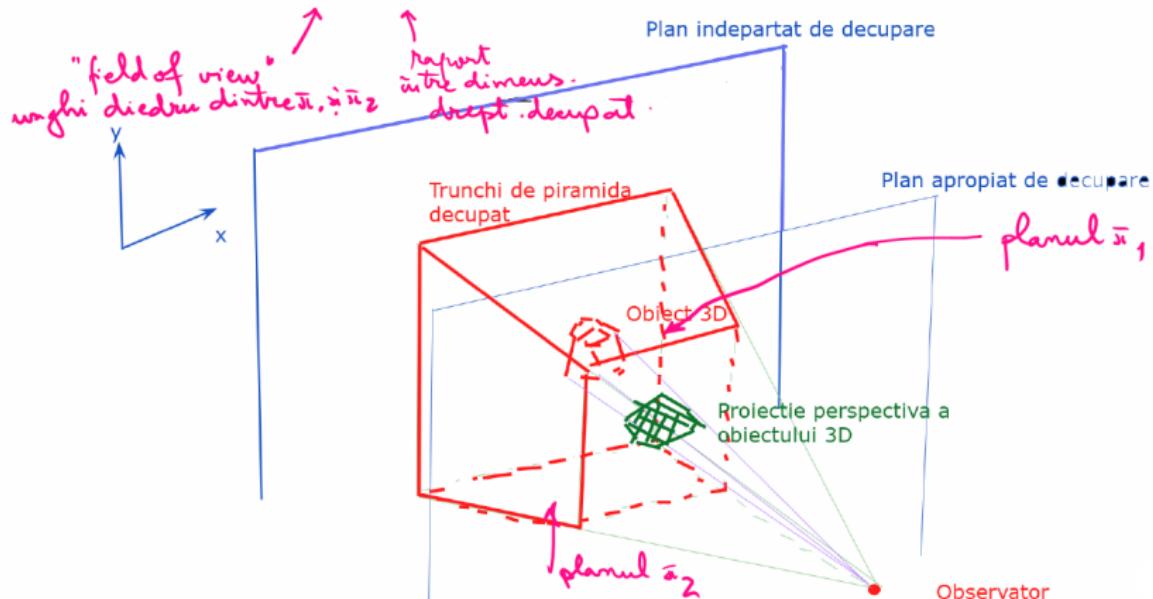
Presupunem că nu modificăm valoarea  $xwmin$ ,  $xwmax$ ,  $ywmin$ ,  $ywmax$ . Dacă  $d_{near}$  este mic, atunci trunchiul de piramidă decupat are "deschidere mai mare" și obiectele vor părea mai mici (stânga). Dacă  $d_{near}$  este mare, atunci trunchiul de piramidă decupat este "mai îngust" și obiectele vor părea mai mari (dreapta).



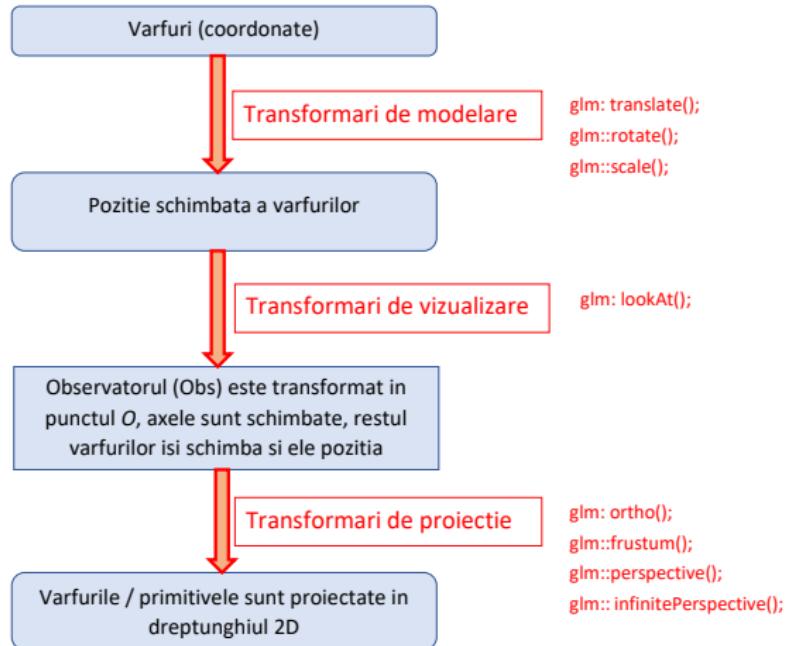
# Cazul 3D - proiecții perspective

`glm::perspective()` - este decupat un trunchi de piramidă decupat dintr-o piramidă în care înălțimea dusă din vârful piramidei inițiale (observator) cade în centrul dreptunghiului. "Deschiderea" piramidei este dată de `fov`.

`glm::perspective(fov, aspect, ywmax, dnear, dfar);`



# Concluzie - fluxul transformărilor

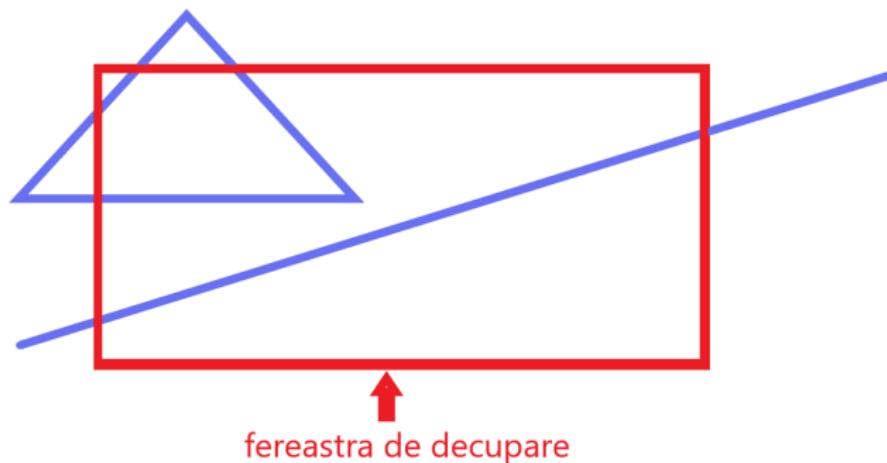


Atenție la ordinea înmulțirii matricelor corespunzătoare din shader:

**matrProiectie \* matrVizualizare \* matrModelare.**

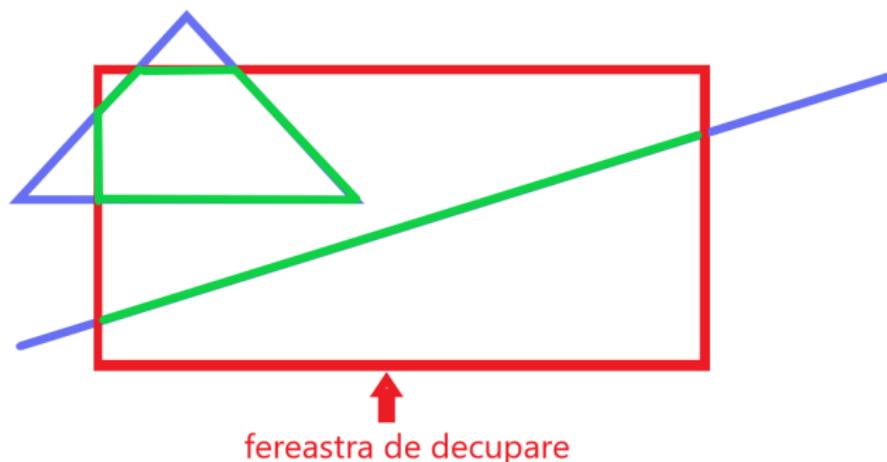
## Algoritmi de decupare - motivație

În cazul primitivelor din desen, doar o parte a acestora intersectează fereastra de decupare și urmează să fie randate.



## Algoritmi de decupare - motivație

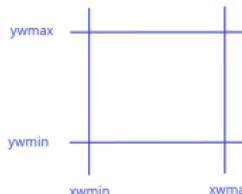
Pentru segment va fi randată doar o porțiune. În cazul triunghiului, va fi decupată o porțiune a sa, fiind randat un pentagon.



## Algoritmi de decupare - observații generale

- ▶ Trebuie stabilit dacă o primitivă geometrică intersectează sau nu fereastra de decupare. În continuare presupunem că suntem în cazul 2D, fereastra de decupare fiind delimitată de dreptele

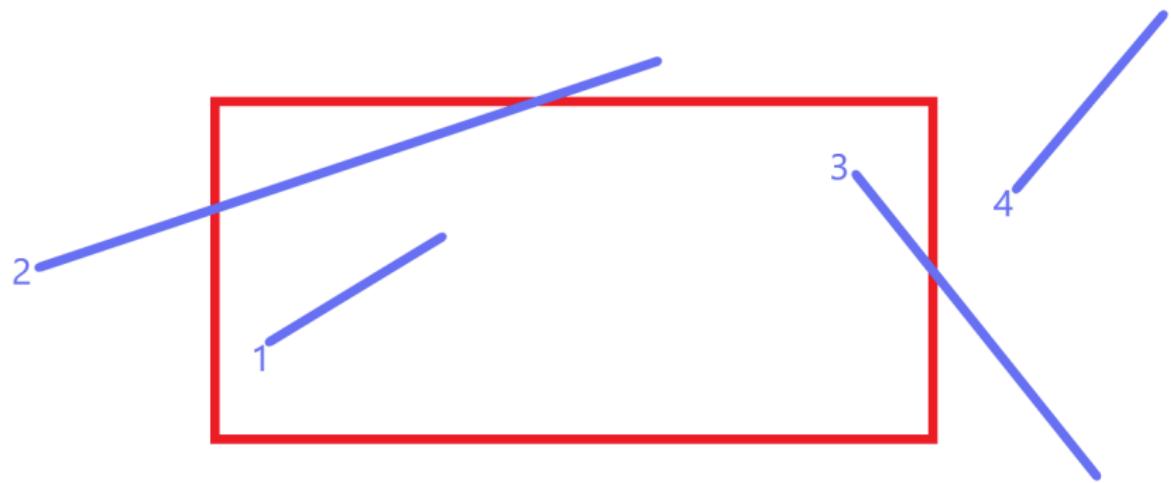
$$x = xwmin, \quad x = xwmax, \quad y = ywmin, \quad y = ywmax.$$



- ▶ Algoritmii de decupare depind de tipul primitivei. În cazul punctelor: se bazează pe inegalități.
- ▶ În continuare: algoritmi pentru segmente de dreaptă (pornind de la aceștia se poate ajunge la algoritmi pentru poligoane). Sunt descriși doi algoritmi: (i) Cohen-Sutherland (calitativ), (ii) Liang-Barski (cantitativ).
- ▶ Alte metode / referințe se găsesc în *Line Clipping in 2D: Overview, Techniques and Algorithms, 2022*

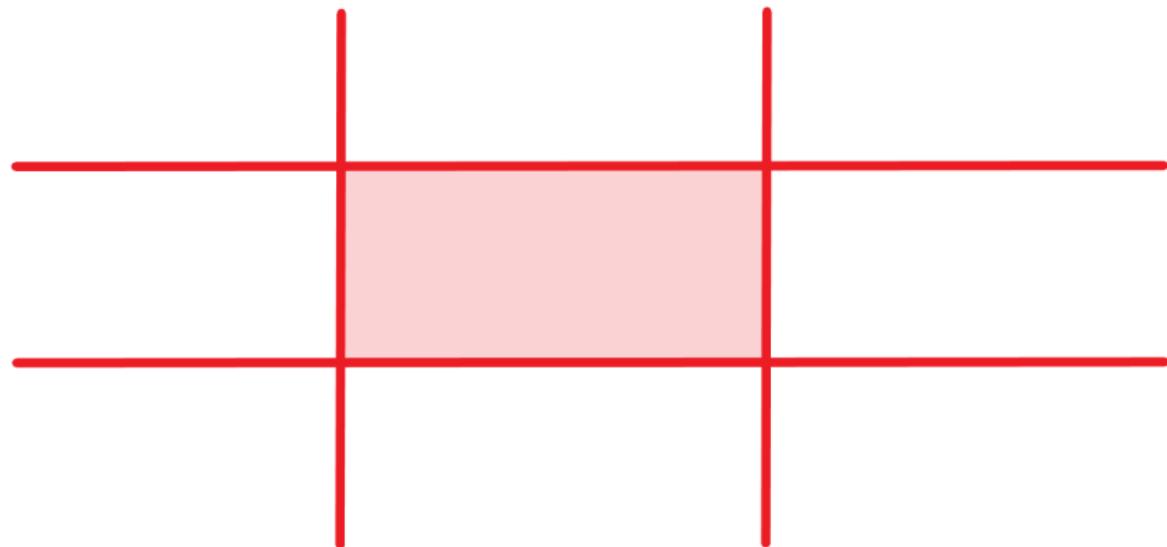
# Abordare calitativă. Algoritmul Cohen-Sutherland

Diverse configurații ale segmentelor față de fereastra de decupare.



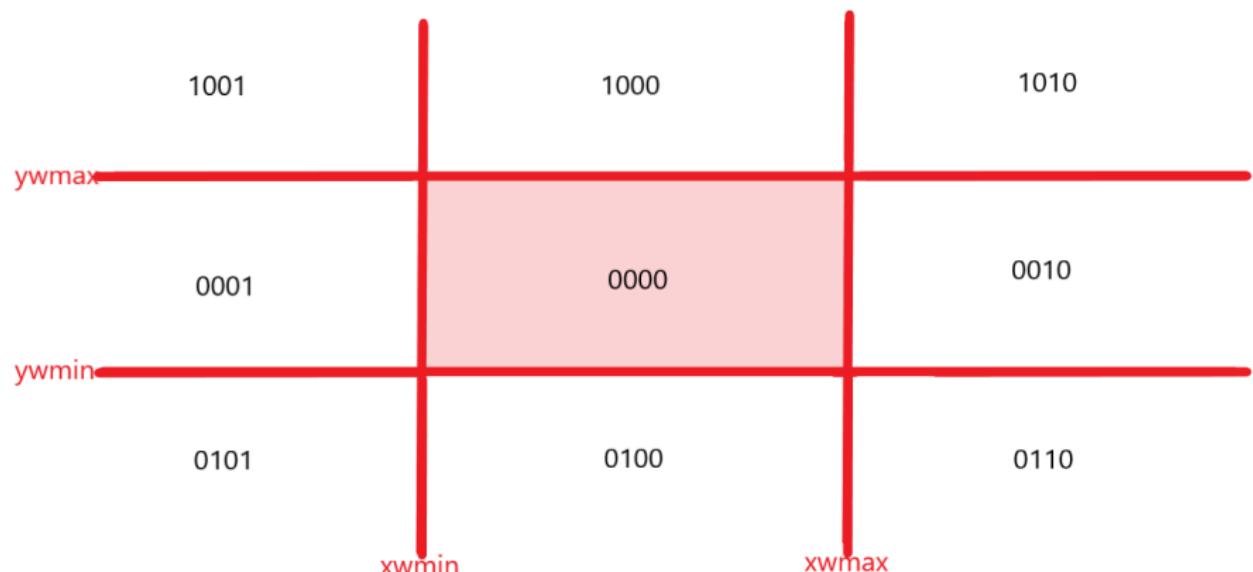
## Algoritmul Cohen-Sutherland - împărțirea planului

Planul este împărțit în 9 regiuni, fiecareia dintre ele îi este asociat un cod pe 4 biți (**TBRL – Top Bottom Right Left**).



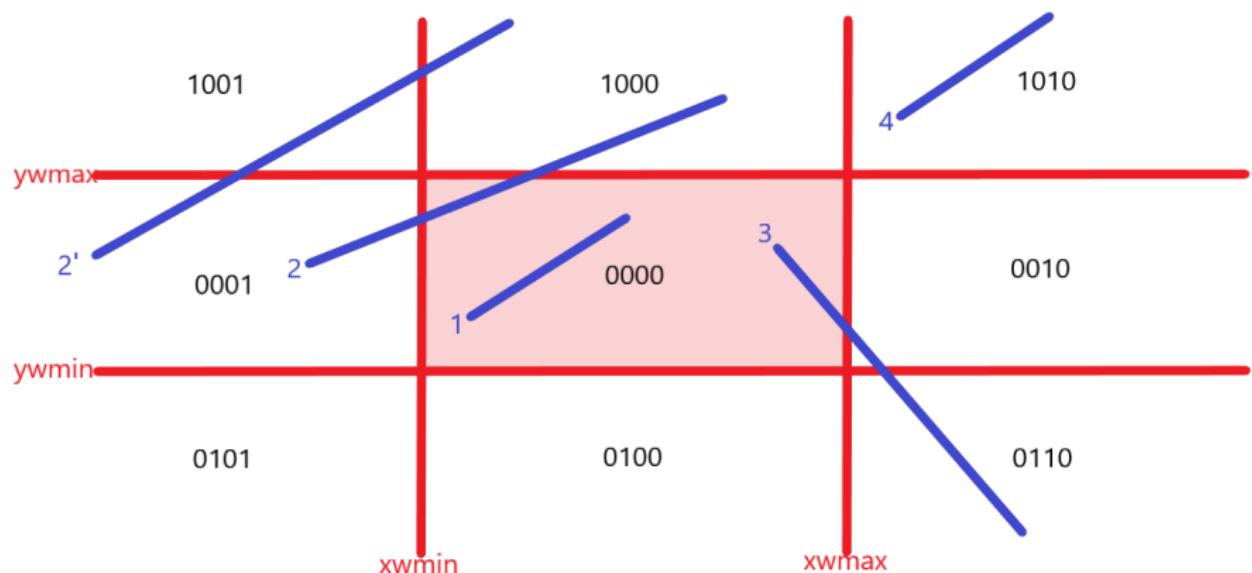
# Algoritmul Cohen-Sutherland - codurile regiunilor

Planul este împărțit în 9 regiuni, fiecareia dintre ele îi este asociat un cod pe 4 biți (TBRL – Top Bottom Right Left).



# Algoritmul Cohen-Sutherland - coduri și segmente

Dat un segment  $s$ , codurile asociate extremităților sale dă o primă informație despre poziția segmentului  $s$  față de fereastra de decupare.



## Algoritmul Cohen-Sutherland - sinteză

- ▶ Pentru un punct  $M = (x_M, y_M)$  se stabilește codul regiunii:  
 $x < xwmin \Rightarrow L = 1, R = 0$ , deci \*\*01  
 $x > xwmax \Rightarrow L = 0, R = 1$ , deci \*\*10, etc
- ▶ Date două puncte,  $P$  și  $Q$ , cele două coduri asociate dău o primă informație referitoare la poziția segmentului  $[PQ]$  față de fereastra de decupare.
- ▶ Există cazuri în care folosind codurile se poate lua o decizie referitoare la poziția relativă a segmentului față de fereastră (de exemplu două coduri de tipul \*\*10, ambele coduri 0000, etc.).
- ▶ Există cazuri în care folosind codurile nu se poate lua o decizie (de exemplu 0001 și 1000), fiind necesari alți algoritmi, cantitativi (se determină explicit coordonatele intersecțiilor dintre segment și dreptele suport ale ferestrei de decupare, se stabilește dacă aceste puncte sunt pe laturile dreptunghiului, etc.).

# Abordare cantitativă. Algoritmul Liang-Barsky

- ▶ **Principiu:** Utilizează **reprezentarea parametrică** a unei drepte.  
Idea centrală: fiecărui punct de pe dreaptă îi corespunde exact un număr real (parametru) și reciproc.
- ▶ **Explicit:** Fie  $P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ , presupunem (fără a restrânge generalitatea) că  $x_0 < x_1, y_0 < y_1$ .  
Notăm  $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0$ .  
Dreapta  $P_0P_1$  are reprezentarea parametrică

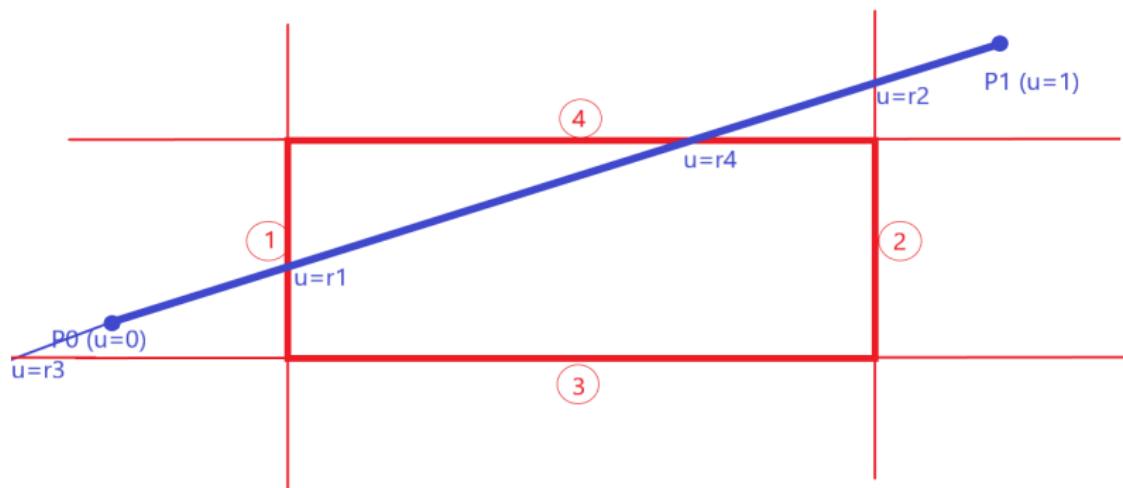
$$\begin{cases} x = x_0 + u \cdot \Delta x \\ y = y_0 + u \cdot \Delta y \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

A da un punct de pe dreapta  $P_0P_1$  revine la a indica o valoare a lui  $u$  și reciproc.

## Algoritmul Liang-Barsky - intersecții cu fereastra

**Intersecții cu fereastra de decupare:** Dreapta  $P_0P_1$  intersectează dreptele suport ale laturilor dreptunghiului (notate 1, 2, 3, 4) în puncte care corespund unor valori  $r_1, r_2, r_3, r_4$  ale parametrului (calculabile explicit!). De exemplu,  $r_1$  se determină din condiția

$$xwmin = x_0 + r_1 \cdot \Delta x, \text{ deci } r_1 = \frac{xwmin - x_0}{\Delta x}, \text{ etc.}$$



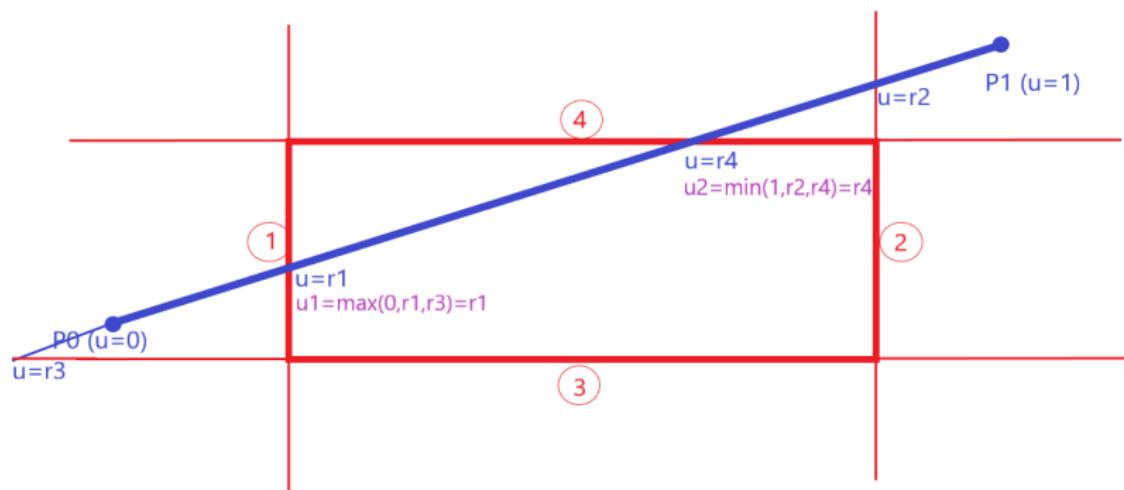
# Algoritmul Liang-Barsky - valori importante ale parametrului

"Intrare" în dreptunghi:  $u_1 = \max(0, r_1, r_3)$

(start segment, fâșia verticală, fâșia orizontală)

"Ieșire" din dreptunghi:  $u_2 = \min(1, r_2, r_4)$

(stop segment, fâșia verticală, fâșia orizontală)



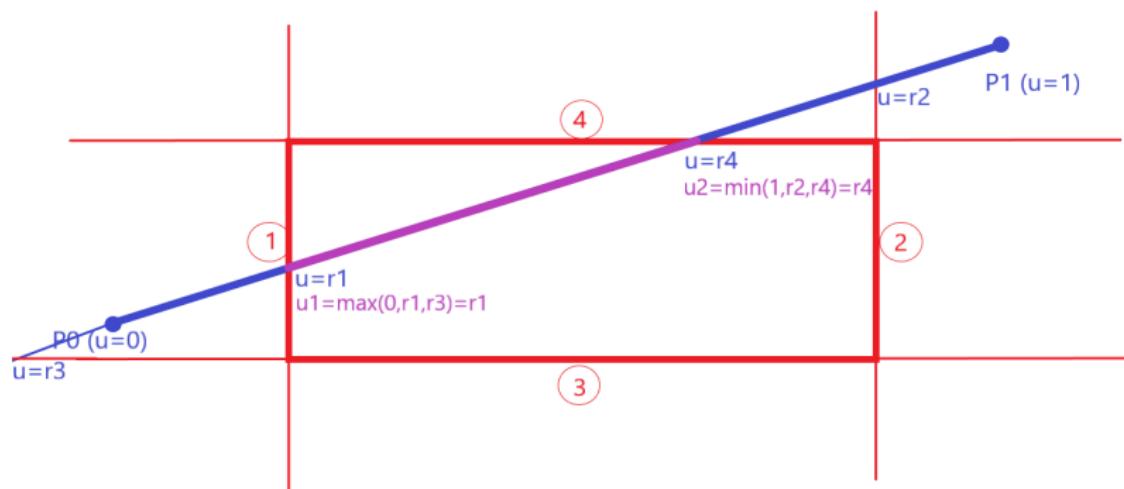
# Algoritmul Liang-Barsky - condiția de intersecție

Condiția ca **segmentul**  $[P_0P_1]$  să intersecteze dreptunghiul de decupare:

$$u_1 < u_2$$

(intuitiv: "intrăm în dreptunghiul de decupare înainte de a ieși").

Mai mult, segmentul care urmează să fie decupat are extremitățile corespunzătoare parametrilor  $u_1$  și  $u_2$ .



# Grafică 3D

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Obiecte 3D - scurte repere istorice și resurse

Poliedre

Suprafețe implicate

Curbe parametrizate

Suprafețe parametrizate

Suprafețe parametrizate

Suprafețe parametrizate - suprafețe de rotație

## Scurt istoric (i)

*“The Utah teapot”* - 1975. Consultați și schița ceainicului realizată de Martin Newell. În biblioteca glut sunt implementate (și pot fi folosite în OpenGL “vechi”) funcții dedicate (e.g. glutWireTeapot)



Sursa: Wikipedia, imagine încărcată de Marshall Astor (<http://www.marshallastor.com/>)

## Scurt istoric, resurse (ii)

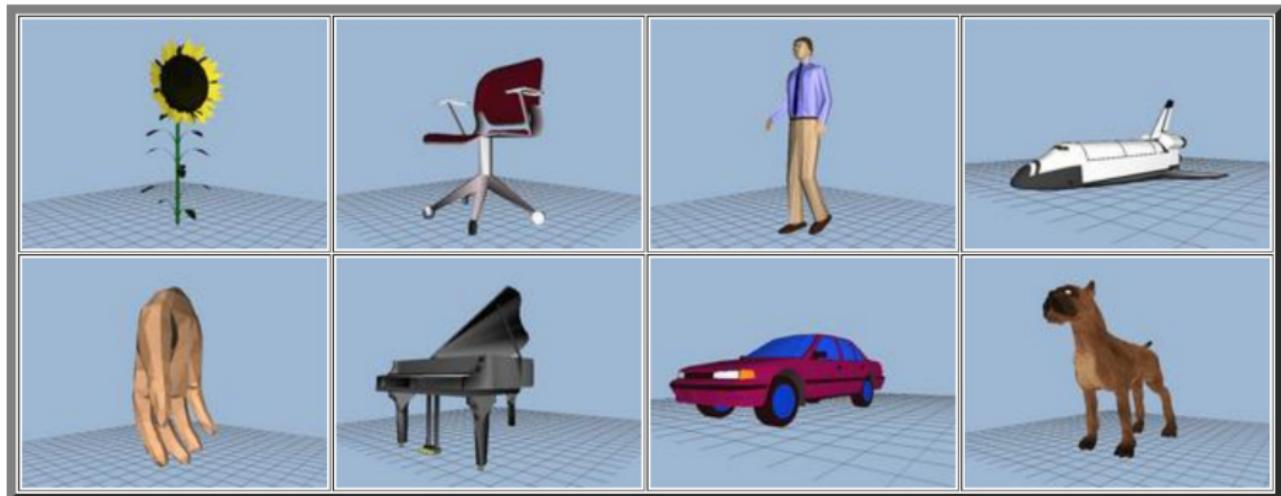
*“The Stanford bunny”* - 1994.



Sursa: [Stanford scanning repository](#)

## Scurt istoric, resurse (iii)

*“The Princeton shape benchmark”* - ~ 2005



Sursa: *Princeton shape benchmark*

## Scurt istoric, resurse (iv)

ModelNet - 2015

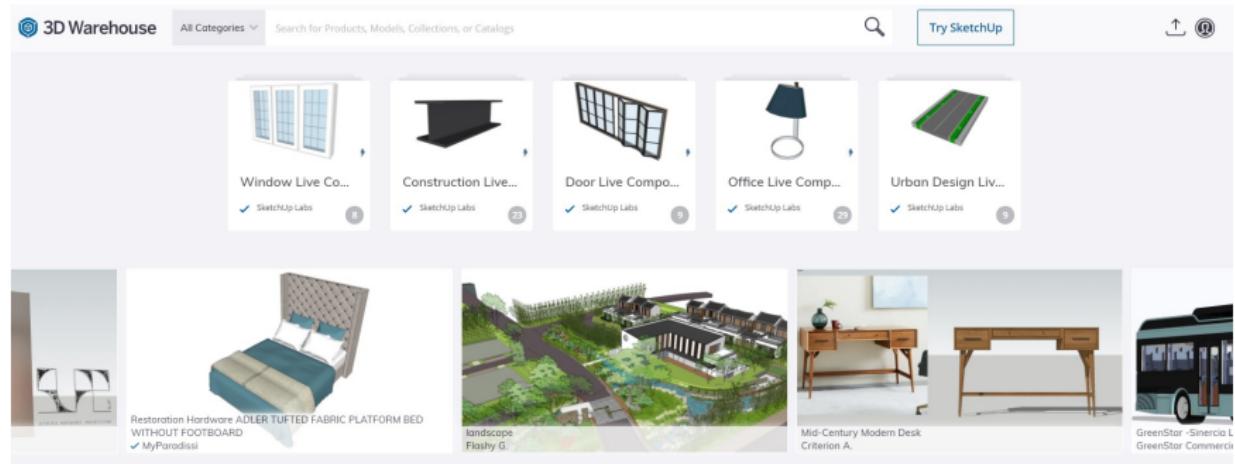


Figure 5: **ModelNet Dataset.** Left: word cloud visualization of the ModelNet dataset based on the number of 3D models in each category. Larger font size indicates more instances in the category. Right: Examples of 3D chair models.

Sursa: [Wu et al., 2015]

# Scurt istoric, resurse (v)

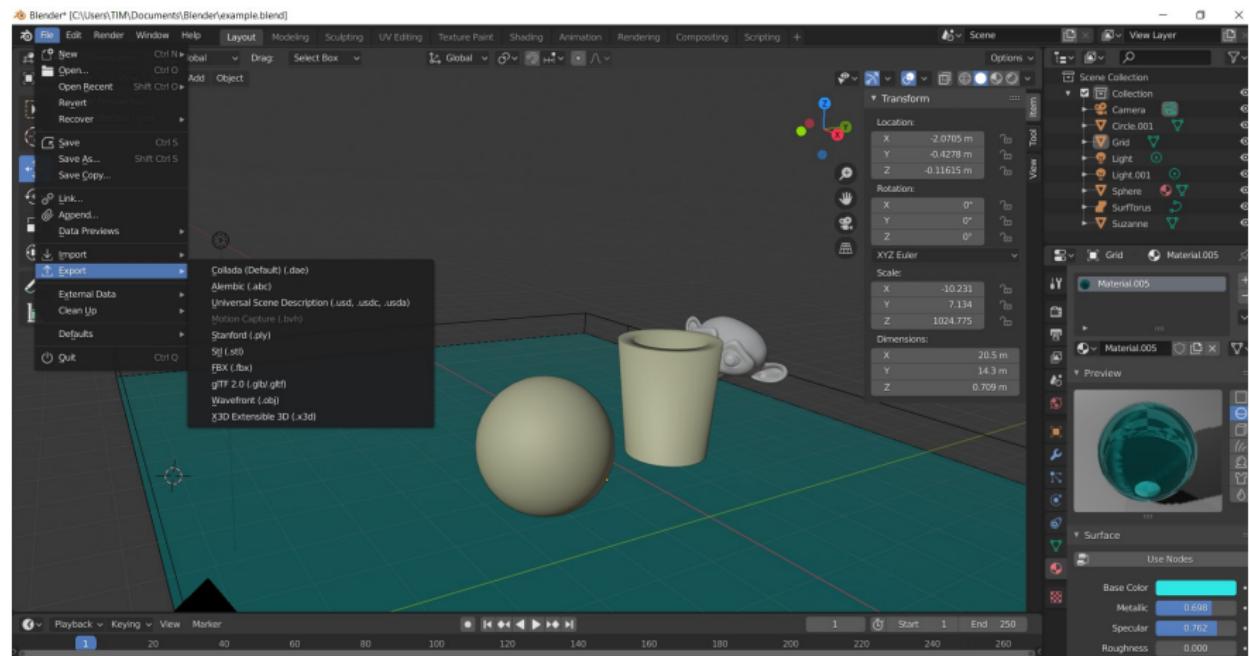
... în prezent există multe resurse disponibile!



Sursa: [3D warehouse](#)

# Resurse (vi)

... modele 3D pot fi create cu aplicații dedicate!



# Exemplu: .PLY

## Formatul PLY (altă referință)

bun\_zipper.ply - 3D Viewer

File Edit Tools View Help



bun\_zipper - Notepad

File Edit Format View Help

3D lib

```
ply
format ascii 1.0
comment zipper output
element vertex 35947
property float x
property float y
property float z
property float confidence
property float intensity
element face 69451
property list uchar int vertex_indices
end_header
-0.0378297 0.12794 0.00447467 0.850855 0.5
-0.0447794 0.128887 0.00190497 0.900159 0.5
-0.0680095 0.151244 0.0371953 0.398443 0.5
-0.0922874 0.13015 0.0232201 0.85268 0.5
-0.0226054 0.126675 0.00715587 0.675938 0.5
-0.0251078 0.125921 0.00624226 0.711533 0.5
```

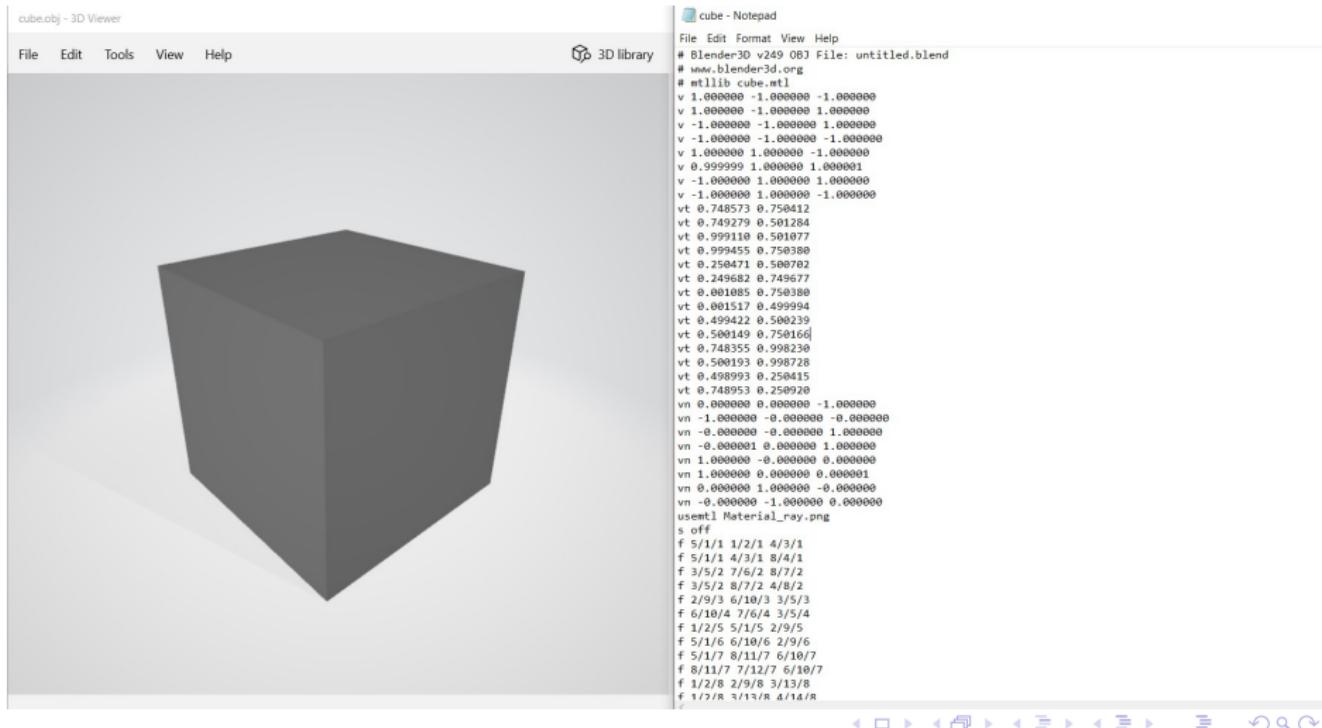
bun\_zipper - Notepad

File Edit Format View Help

```
-0.0678418 0.143634 -0.0139334 0.718635 0.5
-0.0677458 0.149084 -0.0355035 0.386188 0.5
-0.0221568 0.157426 -0.00647102 0.226161 0.5
-0.0708454 0.150585 -0.0434585 0.224465 0.337855
-0.0310262 0.153728 -0.00354608 0.167698 0.5
-0.0408442 0.15362 -0.00816685 0.734503 0.5
3 21216 21215 20399
3 9186 9280 14838
3 16020 13433 5187
3 16021 16020 5187
3 20919 20920 21003
3 23418 15239 23127
3 30553 27378 30502
3 7291 7293 21464
3 12883 12714 13083
3 12777 4682 16928
3 22066 22936 21048
3 21134 22066 21048
```

Exemplu: .OBJ

**Formatul .OBJ (altă referință)**



# Cadru

## ► Grafica 3D:

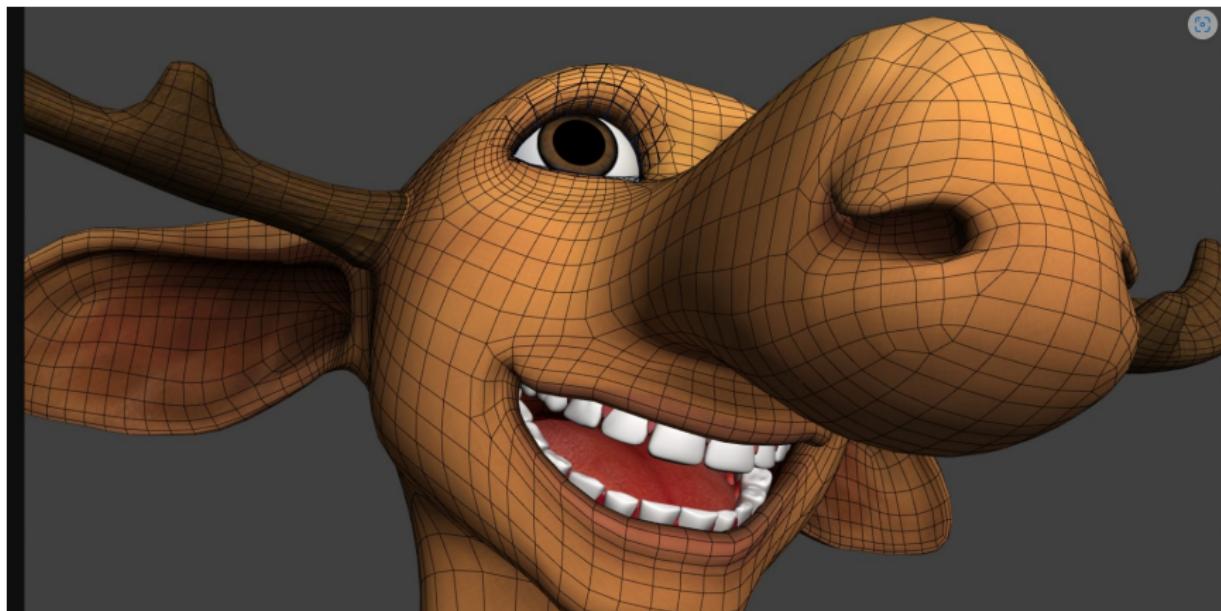
- ce reprezentăm? (aspecte teoretice)
- cum reprezentăm? (funcționalități OpenGL)

# Cadru

- ▶ Grafica 3D:
  - ce reprezentăm? (aspecte teoretice)
  - cum reprezentăm? (funcționalități OpenGL)
- ▶ Pentru a reprezenta cât mai realist un obiect 3D, pe lângă **coordonate, culori, coordonate de texturare**, un element cheie sunt **vectorii normali** asociați vârfurilor (un atribut al vârfurilor, indicați în funcția de tip creare a VBO, apoi transferați în shader).
- ▶ Formatele standard pentru obiectele 3D includ astfel de informații. Extrăgând informațiile din fișier (v. și [assimp](#)), astfel de modele 3D pot fi utilizate în OpenGL.

# 1. Poliedre / alte obiecte

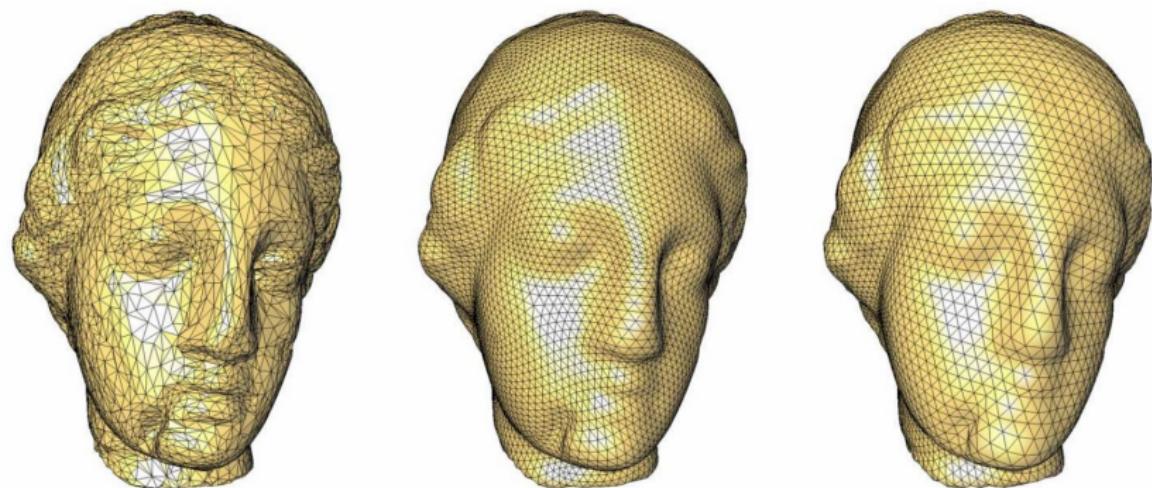
Sunt legate de rețele de poligoane/triunghiuri (*polygon/triangle meshes*)



Sursa: [https://talkingmoose.ca/wp-content/uploads/2012/01/Moose\\_11112\\_10.jpg](https://talkingmoose.ca/wp-content/uploads/2012/01/Moose_11112_10.jpg)

# 1. Poliedre / alte obiecte

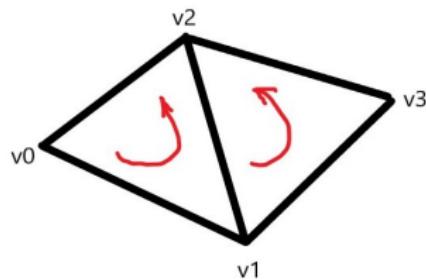
Sunt legate de rețele de poligoane/triunghiuri (*polygon/triangle meshes*)



Sursa: <https://hal.inria.fr/file/index/docid/186820/filename/modeling-course.pdf>

# 1. Poliedre: vectori normali pentru triunghiuri adiacente

- ▶ Un element esențial este indexarea vârfurilor.
- ▶ Legat de modul de calcul pentru normale / indexarea vârfurilor:



Fețele din imagine sunt indexate a.î. să fie același sens de parcursare:

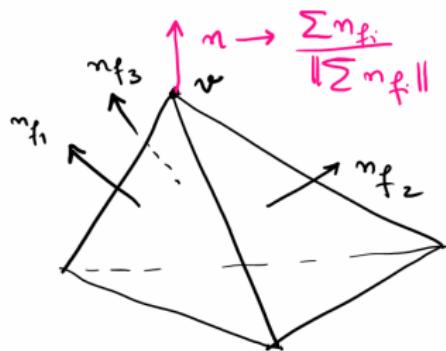
0 1 2  
2 1 3

# 1. Poliedre: vectori normali

- a) Pentru triunghiuri/poligoane convexe: descriere în cursurile anterioare.
- b) Pentru rețele de triunghiuri:
  - (i) se lucrează la nivel de vârfuri, pentru fiecare vârf se calculează normala (! normala este atribut al vârfurilor), folosind normalele fețelor adiacente.
  - (ii) se folosește pentru fiecare față normala, aşa cum a fost calculată (! atenție la implementare: normala este atribut al vârfurilor).

# 1. Poliedre: vectori normali - detaliere

- Fie  $v$  un vârf incident cu fețele  $f_1, f_2, \dots, f_q$ , având vectorii normali  $n_1, n_2, \dots, n_q$  (respectiv).



- Vectorul normal în  $v$  poate fi definit ca

$$n_v = \frac{\sum n_i}{\|\sum n_i\|}.$$

- (Variantă mai generală) Se pot considera ponderi  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  (au suma  $\sum \lambda_q = 1$ ) asociate fețelor (de exemplu date de arii), apoi  $n_v$  se definește ca

$$n_v = \frac{\sum \lambda_i n_i}{\|\sum \lambda_i n_i\|}.$$

## 2. Suprafețe implice

Forma generală:  $F(x, y, z) = 0$  (practic - dificil de implementat)

Exemple (suprafețe date de ecuații de gradul II - cuadrice)

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  sferă
- $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  hiperboloid cu 1 pânză
- $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  hiperboloid cu 2 pânze
- $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  con circular drept
- $x^2 + y^2 = 1$  cilindru circular drept
- $x^2 - y^2 = 2z$  paraboloid hiperbolic

## 2. Suprafețe implicate: vectori normali

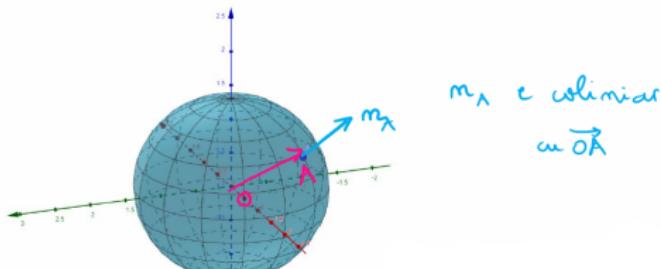
- ▶ **Vectori normali.** Fie  $(x_0, y_0, z_0)$  un punct al suprafeței. Normala exterioară la suprafață este dată de vectorul

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

- **Exemplu.** Sferă de ecuație  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , deci  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Fixăm un punct  $(x_0, y_0, z_0)$  pe sferă:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2y_0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 2z_0.$$

Vectorul  $\nabla(x_0, y_0, z_0)$  este coliniar cu vectorul de poziție  $(x_0, y_0, z_0)$ .



### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Preliminarii - reprezentarea curbelor

Jie  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$

deci  $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$  ,  $t \in \mathbb{R}$   
 $t \rightarrow$  parametru

Imaginea  
curbei  
(când t variază),  
cerul de  
centru 0 și rază 1.

- se aleg valori pt. t
- se calculează punctele corespunzătoare
- se unesc și se trasează o aproximare a curbei

În spațiu - "elice"  $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$  ,  $t \in \mathbb{R}$

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Exemple

1)

$$\begin{cases} x = r \cos u \cos v \\ y = r \cos u \sin v \\ z = r \sin u \end{cases} \quad r > 0 \text{ fixat, } u, v \in \mathbb{R} \text{ parametri}$$

este **sferă cu centrul**  $O = (0, 0, 0)$  și **raza**  $r$ , are ecuația  
 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Observații:

- (i) Această reprezentare a fost utilizată pentru “survolarea scenelor” (observatorul se deplasează, practic, pe o sferă).
- (ii) Desenarea sferei folosind reprezentarea parametrică este implementată în codul sursă 08\_03\_sfера.cpp.
- (iii) Stabiliți care este reprezentarea unei sfere de centru oarecare  $C = (x_C, y_C, z_C)$ .

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Exemple

2)

$$\begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = v \end{cases} \quad r > 0 \text{ fixat, } u, v, \in \mathbb{R} \text{ parametri}$$

este un **cilindru circular drept**, are ecuația  $x^2 + y^2 = r^2$ .

3)

$$\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = v \end{cases} \quad u, v, \in \mathbb{R} \text{ parametri}$$

este un **con circular drept**, are ecuația  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor. Definiția generală

În general, o suprafață parametrizată este dată de o funcție

$$f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad U, V \subset \mathbb{R} \text{ intervale}$$

Elemente de forma  $u \in U, v \in V$  se numesc **parametri**. Pentru diverse valori ale parametrilor se obțin diferite puncte ale suprafeței. **Pentru a desena o suprafață sunt selectate anumite valori ale parametrilor și, practic, sunt eșantionate puncte pe respectiva suprafață.**

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor.

#### Implementare: vârfuri

Pentru implementare: se consideră

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset U, \\ \tilde{V} &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V.\end{aligned}$$

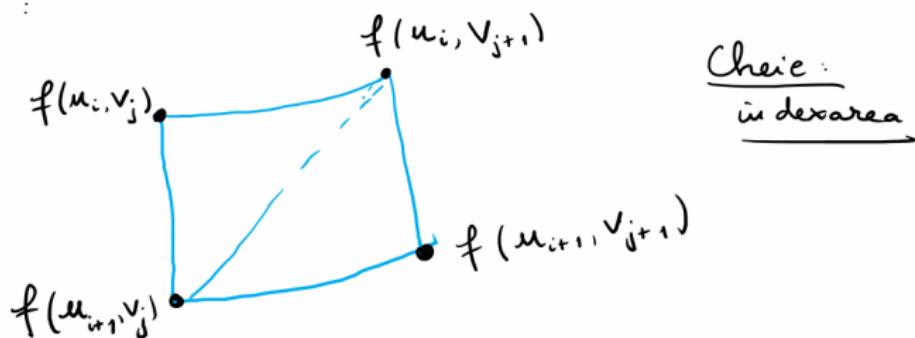
Pentru fiecare pereche  $(i, j)$  calculăm  $f(u_i, v_j)$ , acestea reprezentând coordonatele unui vârf, corespunzător unui punct de pe suprafață. În plus, fiecărei astfel de perechi îi este asociat un index corespunzător vârfului.

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor.

Implementare: fețe

Se generează folosind triunghiuri sau patrulatere și “legând” în mod adecvat vârfurile învecinate.

Principiu :



Cheie :  
în desarea

Sunt desenate două triunghiuri (sau un patrulater) care aproximează, local, suprafața respectivă. Se utilizează indexarea vârfurilor.  
Detalii pentru sferă.

### 3. Reprezentări parametrice ale suprafețelor.

Implementare: vectori normali

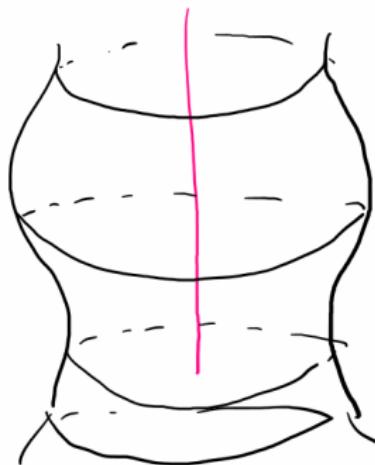
Pentru normale: două variante:

- (i) se aplică principiile pentru rețele de triunghiuri;
- (ii) fixând  $(u, v)$  și punctul corespunzător de pe suprafață, un vector său normal la suprafață în punctul respectiv se poate obține calculând  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ , apoi normalizând:

$$\mathbf{s} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

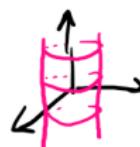
## 4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Illustrare

O suprafață de rotație se obține dacă o curbă este rotită în jurul unei drepte (axa de rotație) pe care nu o intersectează. De fapt: fiecare punct al curbei descrie un cerc având centrul pe axa de rotație (punctul de intersecție dintre axă și planul perpendicular pe axă care trece prin punctul respectiv).



## 4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Cazuri particulare

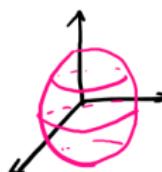
- (i) segment paralel cu axa de rotație  $\Rightarrow$  cilindru circular drept (sau o porțiune a acestuia)



- (ii) segment coplanar cu axa de rotație, dar care nu este paralel cu axa de rotație și nu o intersectează  $\Rightarrow$  trunchi de con



- (iii) semicerc  $\Rightarrow$  sferă (eventual fără poli)



## 4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Reprezentare parametrică

- ▶ Practic: se aleg două funcții  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval și  $\varphi(v) > 0, \forall v \in I$ . Fie

$$f : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$f(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$$

(uneori suprafețele pot fi definite pe  $\mathbb{R} \times I$  sau cu ordinea parametrilor inversată).

## 4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Reprezentare parametrică

- ▶ Practic: se aleg două funcții  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval și  $\varphi(v) > 0, \forall v \in I$ . Fie

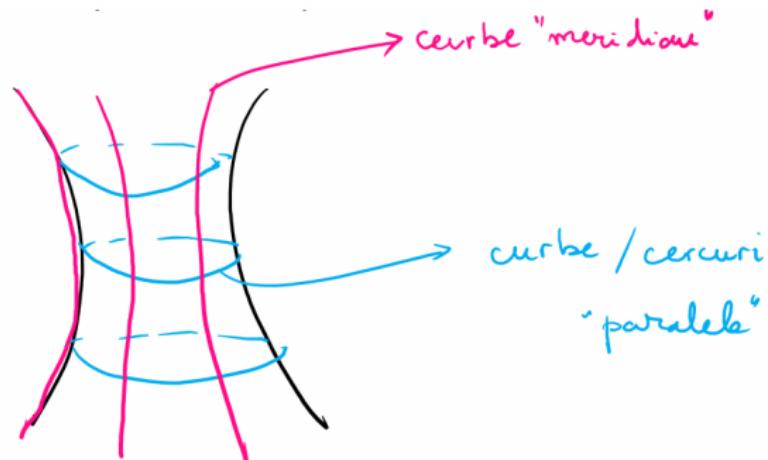
$$f : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$f(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$$

(uneori suprafețele pot fi definite pe  $\mathbb{R} \times I$  sau cu ordinea parametrilor inversată).

- ▶ Reprezentarea de mai sus corespunde suprafeței obținute prin rotirea curbei  $v \mapsto (\varphi(v), 0, \psi(v))$  în jurul axei  $Oz$ . Condiția  $\varphi(v) > 0, \forall v \in I$  corespunde faptului că această curbă nu intersectează axa de rotație (dreapta  $Oz$ ).

## 4. Un exemplu: suprafețe de rotație. Comentarii



În general, pe o suprafață de rotație, curbele  $u = \text{const}$  și  $v = \text{const}$  au denumiri speciale.

Fie  $(u_0, v_0) \in [0, 2\pi] \times I$ , deci  $f(u_0, v_0)$  este un punct de pe suprafață.

(i)  $v = v_0$ ,  $u$ =variabil,  $u \mapsto f(u, v_0)$  cerc paralel

(ii)  $u = u_0$ ,  $v$ =variabil,  $v \mapsto f(u_0, v)$  cerc meridian

# Illuminarea scenelor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Modele de iluminare - generalități

Un model de iluminare face referire la:

- (a) elemente luate în considerare
- (b) parametri corespunzători elementelor de la (a)
- (c) modul în care sunt “aggregate” elementele de la (a)

# Modelul Phong de iluminare

color =

$$\begin{aligned}
 & \text{emission} + \\
 & \text{ambient}_{\text{light model}} * \text{ambient}_{\text{material}} + \\
 & \sum_{i=0}^{N-1} \text{attenuation factor}_i \cdot \text{spotlight effect}_i \cdot \\
 & (\text{ambient term} + \text{diffuse term} + \text{specular term})_i,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

termenul legat de emisie
termen ambiental, independent de existenta unor surse de lumina

N termeni facute asociat unei surse de lumini

unde  $N$  este numărul surselor de lumină.

Ecuția (1) este implementată în shader (de vârfuri sau de fragment).

## Termenul de emisie și termenul ambiental

- ▶ *Emission*: este ceea ce “emite” vârful respectiv (util pentru surse de lumină).
- ▶ *Ambiental*: nu există surse de lumină, este doar efectul unei luminozități de fond.
- ▶  $\text{ambient}_{\text{light model}} * \text{ambient}_{\text{material}}$ . **Operația \* este dată de înmulțirea pe componente.**
- ▶ Exemplu:

$$\begin{aligned}(0.4, 0.8, 0.1) * (0.6, 0.2, 0.4) = \\ \Rightarrow (0.24, 0.16, 0.04)\end{aligned}$$

## Pentru o sursă de lumină $i$

attenuation factor $_i$  · spotlight effect $_i$

(ambient term + diffuse term + specular term) $_i$

i

ii

iii

## (i) Componenta ambientală

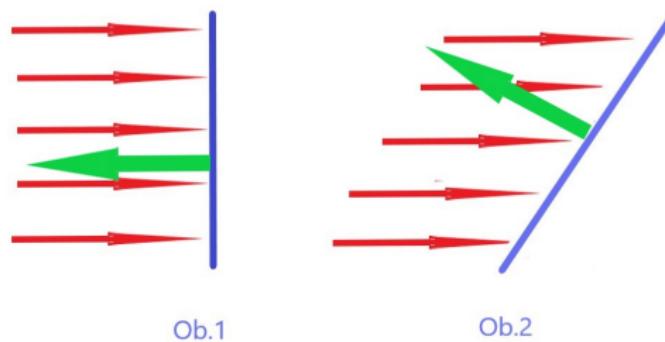
Termenul ambiental corespunzător unei surse de lumină este

$$\text{ambient term} = \text{ambient}_{\text{light}} * \text{ambient}_{\text{material}}.$$

Teoretic,  $\text{ambient}_{\text{light}}$ ,  $\text{ambient}_{\text{material}}$  sunt coduri RGB(A). Practic, este posibil ca acestea să fie și scalari.

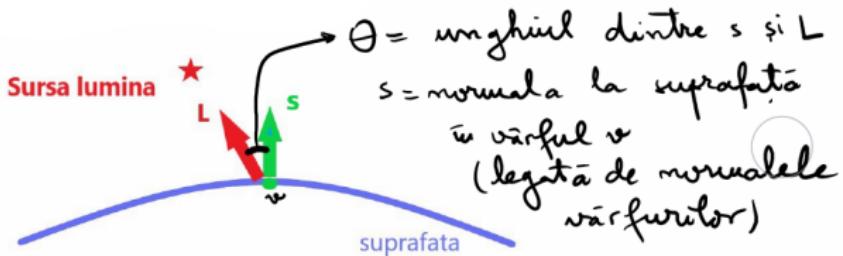
## (ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Are legătură cu geometria scenei, lumina reflectată depinde și de incidența luminii asupra obiectelor.



Relevant: unghiul dintre direcția incidentă a luminii și suprafață, de fapt dintre direcția incidentă a luminii și **normala** (în fiecare punct) la suprafață.

## (ii) Reflexia difuză (diffuse term)



Lumina reflectată este legată de  $\cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\langle L, s \rangle}{\|L\| \cdot \|s\|} = \langle L, s \rangle = L \cdot s$$

(produs scalar)

$\|L\|$   
dot

(versori,  
vectori unitari)

după care se realizează înmulțirea cu diffuse...

## (ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Reflexia difuză pentru o sursă de lumină este descrisă de

$$\text{diffuse term} = \begin{cases} (L \cdot s) \cdot \text{diffuse}_{\text{light}} * \text{diffuse}_{\text{material}}, & \text{dacă } L \cdot s > 0 \\ 0, & \text{dacă } L \cdot s \leq 0, \end{cases}$$

unde  $L$  este vectorul unitar orientat de la vârf la sursa de lumină (în cazul surselor direcționale este opusul direcției acesteia, normat), iar  $s$  este normala la suprafață în vârful considerat. Cazul  $L \cdot s < 0$  corespunde situației în care sursa de lumină este în spatele obiectului.

## (ii) Reflexia difuză (diffuse term)

- ▶ Comentariu legat de “vector spre sursa de lumină”. **Sursele de lumină:**
  - punctuale (bec, lanternă, etc.),
  - direcționale (Soare, alte corpuri cerești) - de fapt orice sursă de lumină situată la o distanță foarte mare de scenă, în raport cu proporțiile scenei.
- ▶ Dacă se lucrează cu `vec4`, atunci distincția se poate face la nivelul celei de-a patra componente:
  - 1.0 pentru surse punctuale;
  - 0.0 pentru surse direcționale.

## (ii) Reflexia difuză (diffuse term)

Dacă se lucrează cu vec3:

- sursă punctuală pozitivă în  $\mathbb{R}^3$ : vec 3 Light Pos



$$L = \frac{\text{Light Pos} - \text{Frag Pos}}{\|\text{Light Pos} - \text{Frag Pos}\|}$$

- sursă direcțională:



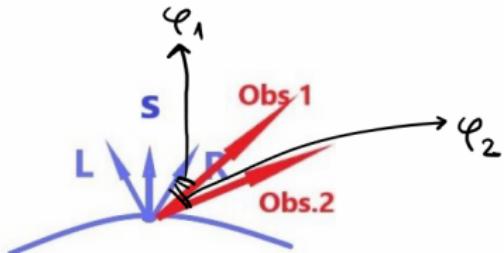
direcție: vec 3 d

$$L = \frac{-d}{\|-d\|}$$

## (iii) Reflexia speculară



Suprafata mata



Suprafata stralucitoare

$R$  = versor pentru direcția ideală de reflexie a luminii

$\varphi$  = unghiul format de  $R$  cu direcția spre observator

(în desen:  $\varphi_1 < \varphi_2$ )

Factorul de reflexie este proporțional cu  $\cos \varphi$  shininess

### (iii) Reflexia speculară

Astfel, în unele implementări, reflexia speculară este dată de

$$\text{specular term} = \begin{cases} (H \cdot s)^{\text{shininess}} \cdot \text{specular}_{\text{light}} * \text{specular}_{\text{material}}, & \text{dacă } L \cdot s > 0 \\ 0, & \text{dacă } L \cdot s \leq 0, \end{cases}$$

unde  $H = \frac{L + Obs}{\|L + Obs\|}$ , iar Obs este vesorul determinat de vârful considerat și poziția observatorului.

## (iv) Coeficientul de atenuare

Pentru o sursă (punctuală) fixată factorul de atenuare (attenuation factor) se calculează cu formula

$$\text{attenuation factor} = \frac{1}{a_0 + a_1 d + a_2 d^2},$$

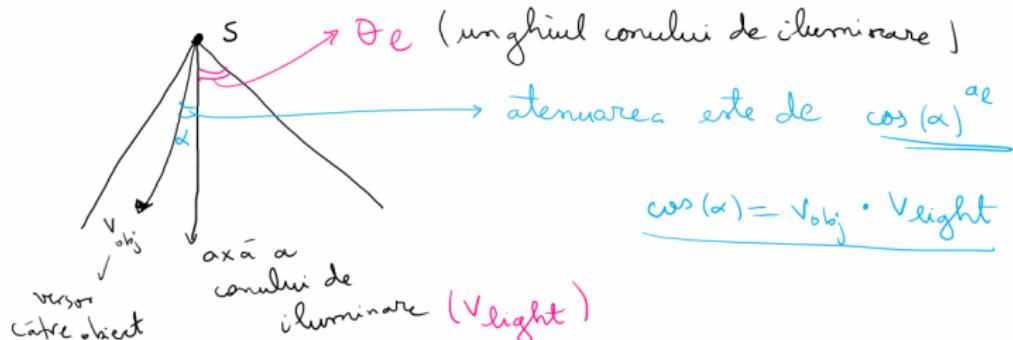
unde  $d$  este distanța de la sursa de lumină la vârful considerat ( $d=\text{dist}(\text{FragPos}, \text{LightPos})$ ).

## (v) Efectul de tip spot

- Efectul de tip spot pentru o sursă punctuală **S** este cuantificat de factorul

$$\text{spotlight effect} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \theta_I = 180^\circ \\ 0, & \text{dacă } v_{\text{obj}} \cdot v_{\text{light}} < \cos \theta_I, \\ (v_{\text{obj}} \cdot v_{\text{light}})^{\alpha_I}, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

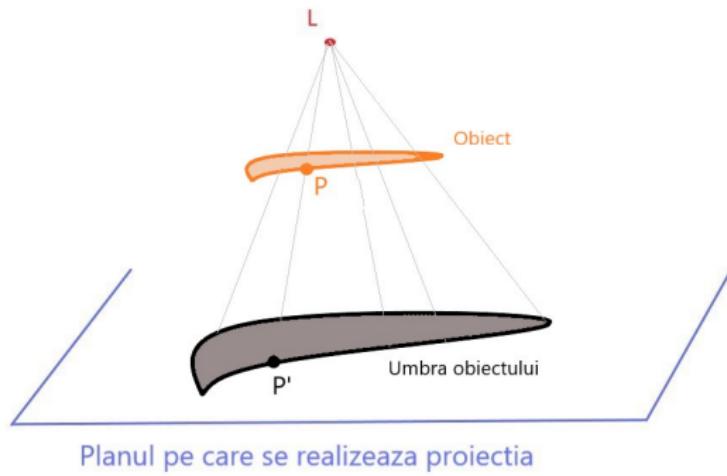
- Cu  $v_{\text{obj}}$  este vectorul unitar orientat de la sursa de lumină la obiectul iluminat.
- Elementele definitorii: (i)  $v_{\text{light}}$  este un versor al axei conului de iluminare; (ii)  $\theta_I$  este unghiul care definește conul de iluminare (deschiderea acestuia); (iii)  $\alpha_I$  este coeficientul de atenuare, care caracterizează cum descrește intensitatea luminii prin îndepărțarea de axa conului.



# Coduri sursă

- ▶ 10\_01\_iluminare.cpp: aplicarea iluminării în cazul unui cub, modelul de iluminare este implementat în shader-ul de fragment.
- ▶ 10\_02\_model\_iluminare.cpp: aplicarea iluminării în cazul unui cub, (i) modelul de iluminare este implementat atât în shader-ul de vârfuri cât și în shader-ul de fragment, (ii) normalele pot fi calculate atât la nivel de vârfuri, cât și la nivelul fețelor.
- ▶ 10\_03\_iluminare\_sfera.cpp: aplicarea iluminării pentru sferă
- ▶ Detalii despre codurile sursă se găsesc în fișierul [info\\_labs.pdf](#).

# Problematizare - elementele relevante



Cadru:

- sursa de lumină  $L = (x_L, y_L, z_L)$  - sursă punctuală
- planul pe care se realizează proiecția:  $Ax + By + Cz + D = 0$

$P$  (pt. al obiectului)  $\xrightarrow[\text{umbre}]{\text{truf.}} P'$  (pt. al umbrei)

# Ce este umbra? Etape pentru calcul

- ▶ **Umbra unui obiect  $\mathcal{O}$ :** imaginea lui  $\mathcal{O}$  printr-o aplicație (transformare)  $v$ . **Scop:** determinarea aplicației  $v$ , de fapt a matricei  $4 \times 4$  asociate,  $M_v$  (de explicat modul în care sunt transformate punctele).
- ▶ Fie  $P = (x_P, y_P, z_P)$  un vârf (punct) al obiectului. Sunt determinate coordonatele lui  $P'$  (proiecția perspectivă / centrală a lui  $P$  pe plan), în funcție de coordonatele lui  $P$ . Acest punct este dat de intersecția dintre dreapta  $PL$  și planul  $\pi$  (se presupune că există, dacă  $LP$  este paralelă cu planul, nu există umbra...). **Etape:**
  - ▶ Reprezentarea dreptei  $PL$
  - ▶ Determinarea coordonatelor punctului de intersecție
  - ▶ Trecerea la coordonate omogene și scrierea în coordonate omogene
  - ▶ Determinarea matricei  $4 \times 4$

# Reprezentarea dreptei $PL$

## Ecuațiile dreptei $PL$

$$\frac{x - x_L}{x_P - x_L} = \frac{y - y_L}{y_P - y_L} = \frac{z - z_L}{z_P - z_L} \stackrel{NOT}{=} \theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_L + \theta(x_P - x_L) \\ y = y_L + \theta(y_P - y_L) \\ z = z_L + \theta(z_P - z_L) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Semnificație: a da un punct de pe dreapta  $PL$  este echivalent cu a da o valoare  $\theta$

## Determinarea coordonatelor punctului de intersecție

Ecuăția planului este  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Pentru a determina intersecția dintre dreaptă și plan (presupunem că există!) determinăm valoarea  $\theta_0$  pentru care este verificată ecuația planului, altfel spus pentru care avem

$$0 = A[x_L + \theta_0(x_P - x_L)] + B[y_L + \theta_0(y_P - y_L)] + C[z_L + \theta_0(z_P - z_L)] + D$$

Prin calcul direct se obține

$$\theta_0 = \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)}$$

Am presupus tacit că  $A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P) \neq 0$ . Care este interpretarea geometrică a condiției de egalitate?

Cunoscând  $\theta_0$ , prin înlocuire, se găsesc coordonatele lui  $P'$

# Coordonatele punctului de intersecție

$$\begin{aligned}
 x_{P'} &= x_L + \theta_0(x_P - x_L) = \\
 &= x_L + \frac{Ax_L + By_L + Cz_L + D}{A(x_L - x_P) + B(y_L - y_P) + C(z_L - z_P)} \cdot (x_P - x_L) = \\
 &\quad \dots \\
 &= \frac{x_P(By_L + Cz_L + D) - y_P Bx_L - z_P Cx_L - Dx_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}
 \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
 y_{P'} &= \frac{-x_P A y_L + y_P (Ax_L + Cz_L + D) - z_P C y_L - D y_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)} \\
 z_{P'} &= \frac{-x_P A z_L - y_P B z_L + z_P (Ax_L + By_L + D) - D z_L}{(Ax_L + By_L + Cz_L) - (Ax_P + By_P + Cz_P)}
 \end{aligned}$$

Observați că  $x_P, y_P, z_P$  apar la numitor, deci aplicația  $P \mapsto P'$  nu este una liniară/afină. Pe de altă parte, numitorul este același. Atât numitorul, cât și numărătorii sunt liniari în  $x_P, y_P, z_P$ .

# Trecerea la coordonate omogene

Putem scrie, folosind toate cele 4 coordonate:

$$\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{numarator}(x_{P'})}{\text{numitorul comun}} \\ \frac{\text{numarator}(y_{P'})}{\text{numitorul comun}} \\ \frac{\text{numarator}(z_{P'})}{\text{numitorul comun}} \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{coord. omog.}}{=} \begin{bmatrix} \text{numarator}(x_{P'}) \\ \text{numarator}(y_{P'}) \\ \text{numarator}(z_{P'}) \\ \text{numitorul comun} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_P(By_L + Cz_L + D) & -y_P Bx_L & -z_P Cx_L & -Dx_L \\ -x_P A y_L & +y_P(Ax_L + Cz_L + D) & -z_P Cy_L & -Dy_L \\ -x_P A z_L & -y_P Bz_L & +z_P(Ax_L + By_L + D) & -Dz_L \\ -x_P A & -y_P B & -z_P C & +(Ax_L + By_L + Cz_L) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix},$$

# Trecerea la coordonate omogene

Concluzie:

$$\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \\ z_{P'} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P(By_L + Cz_L + D) & -y_P Bx_L & -z_P Cx_L & -Dx_L \\ -x_P A y_L & +y_P(Ax_L + Cz_L + D) & -z_P Cy_L & -Dy_L \\ -x_P A z_L & -y_P Bz_L & +z_P(Ax_L + By_L + D) & -Dz_L \\ -x_P A & -y_P B & -z_P C & +(Ax_L + By_L + Cz_L) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Determinarea matricei $4 \times 4$

$$M = \begin{pmatrix} By_L + Cz_L + D & -Bx_L & -Cx_L & -Dx_L \\ -Ay_L & Ax_L + Cz_L + D & -Cy_L & -Dy_L \\ -Az_L & -Bz_L & Ax_L + By_L + D & -Dz_L \\ -A & -B & -C & Ax_L + By_L + Cz_L \end{pmatrix}.$$

Ptr. plan de ecuatie  $z + D = 0$  (deci  $A = 0, B = 0, C = 1$ )

$$M = \begin{pmatrix} z_L + D & 0 & -x_L & -Dx_L \\ 0 & z_L + D & -y_L & -Dy_L \\ 0 & 0 & D & -Dz_L \\ 0 & 0 & -1 & z_L \end{pmatrix}$$

# Efecte vizuale

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Principiul amestecării

Legat de factorul  $A(\alpha)$  din codul RGBA. Implicit  $A = 1.0$  (obiectele sunt opace). Este specificat în cadrul funcțiilor de culoare / material.  
Elementele relevante:

- ▶ Destinația (fragmentul deja procesat), caracterizată de  
 $D = (R_d, G_d, B_d, A_d)$  (cod RGBA)  
 $F_D = (D_R, D_G, D_B, D_A)$  (factor destinație)
- ▶ Sursa (fragmentul care este procesat), caracterizată de  
 $S = (R_s, G_s, B_s, A_s)$  (cod RGBA)  
 $F_S = (S_R, S_G, S_B, S_A)$  (factor sursă)

## Principiul amestecării

- factorii destinație / sursă sunt indicați în  
 $F_D$        $F_S$

glBlend (srcFactor, destFactor);  
 $F_S$        $F_D$

- combinarea / amestecarea se realizează după formula

$$D * F_D + S * F_S$$

urmărită de trunchiere

# Valori pentru factorii sursă / destinație

Constantă simbolică	Factor RGB	Factor A
GL_ZERO	(0, 0, 0)	0
GL_ONE	(1, 1, 1)	1
GL_SRC_ALPHA	( $A_s, A_s, A_s$ )	$A_s$
GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA	(1, 1, 1) – ( $A_s, A_s, A_s$ )	$1 - A_s$
GL_DST_ALPHA	( $A_d, A_d, A_d$ )	$A_d$
GL_ONE_MINUS_DST_ALPHA	(1, 1, 1) – ( $A_d, A_d, A_d$ )	$1 - A_d$
GL_SRC_COLOR	( $R_s, G_s, B_s$ )	$A_s$
GL_ONE_MINUS_SRC_COLOR	(1, 1, 1) – ( $R_s, G_s, B_s$ )	$1 - A_s$
GL_DST_COLOR	( $R_d, G_d, B_d$ )	$A_d$
GL_ONE_MINUS_DST_COLOR	(1, 1, 1) – ( $R_d, G_d, B_d$ )	$1 - A_d$
GL_CONSTANT_COLOR	( $R_c, G_c, B_c$ )	$A_c$
GL_ONE_MINUS_CONSTANT_COLOR	(1, 1, 1) – ( $R_c, G_c, B_c$ )	$1 - A_c$
GL_CONSTANT_ALPHA	( $A_c, A_c, A_c$ )	$A_c$
GL_ONE_MINUS_CONSTANT_ALPHA	(1, 1, 1) – ( $A_c, A_c, A_c$ )	$1 - A_c$
GL_SRC_ALPHA_SATURATE	( $f, f, f$ ); $f = \min(A_s, 1 - A_d)$	1

## Exemplu: codul sursă 11\_02\_amestecare\_2D.cpp (I)

- ▶ Sunt desenate un triunghi galben și un triunghi turcoaz (cyan) pe fundal negru, cu factor destinație și factor sursă dați de GL\_SRC\_ALPHA și GL\_SRC\_ALPHA
- ▶ **Varianta 1:** Ordinea: fundal negru, apoi triunghi galben, apoi triunghi turcoaz  
**Pas 1.** Triunghiul galben (*sursa*<sub>1</sub>) pe fundalul negru (*destinatie*<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned} F_S * \text{sursa}_1 + F_D * \text{destinatie}_1 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{sursa}_1 + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{destinatie}_1 = \\ &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (1.0, 1.0, 0.0, 0.5) + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.0, 0.0, 0.0, 0.0) = \\ &= (0.5, 0.5, 0.0, 0.25) \end{aligned}$$

**Pas 2.** Triunghiul turcoaz (*sursa*<sub>2</sub>) pe ceea ce s-a calculat mai sus (*destinatie*<sub>2</sub>):

$$\begin{aligned} F_S * \text{sursa}_2 + F_D * \text{destinatie}_2 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{sursa}_2 + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{destinatie}_2 = \\ &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.0, 1.0, 1.0, 0.5) + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.5, 0.5, 0.0, 0.25) = \\ &= (0.0, 0.5, 0.5, 0.25) + (0.25, 0.25, 0, 0.125) = \\ &\quad \color{red}{(0.25, 0.75, 0.5, 0.375)} \end{aligned}$$

## Exemplu: codul sursă 11\_02\_amestecare\_2D.cpp (II)

- ▶ Sunt desenate un triunghi turcoaz (cyan) și un triunghi galben pe fundal negru, cu factor destinație și factor sursă dați de GL\_SRC\_ALPHA și GL\_SRC\_ALPHA
- ▶ **Varianta 2:** Ordinea: fundal negru, apoi triunghi turcoaz, apoi triunghi galben  
**Pas 1.** Triunghiul turcoaz (*sursa*<sub>1</sub>) pe fundalul negru (*destinatie*<sub>1</sub>)

$$\begin{aligned} F_S * \text{sursa}_1 + F_D * \text{destinatie}_1 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{sursa}_1 + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{destinatie}_1 = \\ &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.0, 1.0, 1.0, 0.5) + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.0, 0.0, 0.0, 0.0) = \\ &= (0.0, 0.5, 0.5, 0.25) \end{aligned}$$

**Pas 2.** Triunghiul galben (*sursa*<sub>2</sub>) pe ceea ce s-a desenat (*destinatie*<sub>2</sub>):

$$\begin{aligned} F_S * \text{sursa}_2 + F_D * \text{destinatie}_2 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{sursa}_2 + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * \text{destinatie}_2 = \\ &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (1.0, 1.0, 0.0, 0.5) + (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) * (0.0, 0.5, 0.5, 0.25) = \\ &= (0.5, 0.5, 0.0, 0.25) + (0.0, 0.25, 0.25, 0.125) = \\ &\quad \color{red}{(0.5, 0.75, 0.25, 0.375) \neq (0.25, 0.75, 0.5, 0.375)} \end{aligned}$$

## Functii de amestecare pentru scenele 3D: codul 11\_03\_amestecare\_3D.cpp

- ▶ Combinări:
  - ▶ ordinea în care sunt desenate obiectele
  - ▶ testul de adâncime
  - ▶ efectele de amestecare
- ▶ desenare obiecte opace cu:
  - ▶ z-buffer activ
  - ▶ buffer de adâncime: normal (read/write) `glDepthMask(GL_TRUE)`
- ▶ desenare obiecte transparente cu:
  - ▶ z-buffer activ
  - ▶ buffer de adâncime: read `glDepthMask(GL_FALSE)`

## Efectul de ceață

- **Principiu:** (mecanismul combinațiilor afine) este variată culoarea obiectelor în funcție de distanță, pe baza unei formule de tipul

$$C = f \cdot C_o + (1 - f) \cdot C_f,$$

unde:  $f$  = factor ceață;  $C_o$  = culoarea inițială a obiectului,  $C_f$  = culoarea ceții. Pentru implementare: în shader funcția `mix`.

- Factorul ceață  $f$  depinde de z-adâncime ( $\equiv$  depth) față de observator, fiind o funcție de forma  $f = f(z)$ , descrescătoare pe  $(0, \infty)$ . Exemple:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{end-z}{z-start} & (\text{liniar}) \\ e^{-\rho z} & (\text{exponențial}) \\ e^{-\rho z^2} & (\text{exponențial pătratic}) \end{cases}$$

Pentru implementare: necesară distanța  $z$  de la observator `inViewPos` la obiect `FragPos`. Parametrii necesari (de exemplu  $\rho$  - factor ceață) sunt indicați în cod.

# Fluxul operațiilor



# Cuaternioni

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

## Problematizare - generalități

Când este considerată o clasă de transformări:

- (i) de câte informații numerice este nevoie pentru a indica o transformare?
- (ii) există o structură algebrică subiacentă?

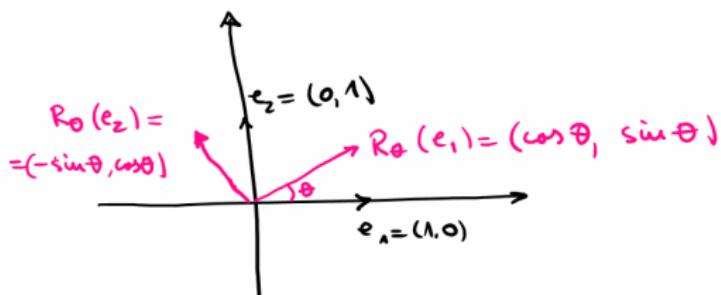
# 1. Translații

Context 2D, respectiv 3D :

- 2, respectiv 3 numere;
- $(\mathbb{R}^2, +)$ , respectiv  $(\mathbb{R}^3, +)$

## 2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



Avem

$$R_\theta(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2$$

$$R_\theta(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta \cdot e_1 + \cos \theta \cdot e_2$$

Așadar,  $R_\theta$  este complet caracterizată de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Matricea  $R_\theta$  verifică relația  $R_\theta \cdot R_\theta^T = \mathbb{I}_2$ .

## 2. Rotații 2D. De reținut

- pentru a indica o rotație 2D este necesară / suficientă o singură informație numerică,
- a descrie o rotație  $\Leftrightarrow$ 
  - $\Leftrightarrow$  a indica modul în care este transformat un reper ortonormat în alt reper ortonormat păstrând orientarea  $\Leftrightarrow$
  - $\Leftrightarrow$  a indica matricea de transformare între repere, în cazul 2D aceasta este de forma 
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

# Definiții generale. Grupul ortogonal

**Definiție (i)** O matrice pătratică  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  se numește **ortogonală** dacă  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$ .

**Definiție (ii)**  $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$ .

**Observații.**

- (a)  $(O(n), \cdot)$  este grup: **grupul ortogonal de ordinul  $n$** .
- (b)  $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$ , după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru  $\det A = 1$ , respectiv  $\det A = -1$ .

**Definiție (iii)**  $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ . Se numește **grupul special ortogonal de ordinul  $n$** .

**Observații.**

- (c)  $SO(n)$  este subgrup al lui  $O(n)$ .

## 2. Rotații 2D și grupul $SO(2)$

- ▶ Am văzut că unei rotații  $R_\theta$  de unghi  $\theta$  îi corespunde o matrice  $M_{R_\theta}$  din  $SO(2)$ .
- ▶ Și reciproc este adevărat: se poate arăta că orice matrice  $A \in SO(2)$  corespunde unei rotații de unghi convenabil.
- ▶ Grupul  $\mathcal{R}_{2D}$  al rotațiilor 2D este izomorf cu un grup de matrice

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot).$$

## 2. Rotații 2D și numere complexe

- Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos \theta, \sin \theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

- **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- $(S^1, \cdot)$  este grup.
- Avem izomorfisme naturale

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot) \simeq (S^1, \cdot).$$

$$R_\theta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \leftrightarrow \cos \theta + i \sin \theta.$$

## Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

**Construcție:** Se consideră mulțimea  $\mathbb{R}^2$ , înzestrată cu două operații:

$$“+”: (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$“\cdot”: (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

**Notății:**

$$1 \equiv (1, 0), \quad i \equiv (0, 1)$$

și folosind aceste notații orice pereche  $(a, b)$  se reprezintă sub forma  $a + ib$ .

Are loc relația fundamentală  $i^2 = -1$ .

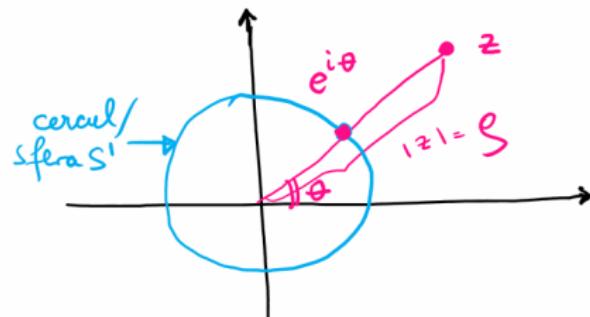
Corpul  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ .

Remember: corpul  $\mathbb{C}$  al numerelor complexe

### Proprietăți și notații

- (i) Pentru  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , modulul lui  $z$  este  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- (ii) Dacă  $z = a + ib \neq 0$ , are loc relația  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , unde  $\bar{z} = a - ib$  este conjugatul lui  $z$
- (iii) Orice număr complex  $z \neq 0$  se scrie în mod unic sub forma

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |z|.$$



### 3. Rotații 3D - generalități

#### Observație 1.

A indica o rotație 3D  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

$\Leftrightarrow$  a indica o matrice din grupul  $\text{SO}(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (\text{SO}(3), \cdot).$$

#### Observație 2.

Orice matrice  $A \in \text{SO}(3)$  (i.e. orice rotație în context 3D) admite **o valoare proprie reală și un vector propriu (axă a rotației)**. De asemenea, rotația este caracterizată de **un unghi**, măsurat în planul perpendicular pe axă. Pentru rotația de unghi  $\theta$  și axă  $(v_1, v_2, v_3)$ :

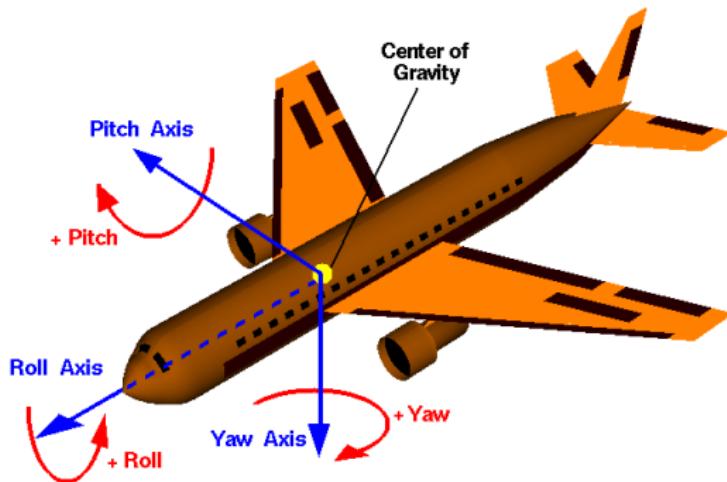
`glm :: rotate(theta, vec3(v1, v2, v3))`

### 3. Rotații 3D - problematizare: structura grupului $SO(3)$

Două posibilități:

- folosind unghiurile lui Euler
- folosind cuaternioni

### 3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție

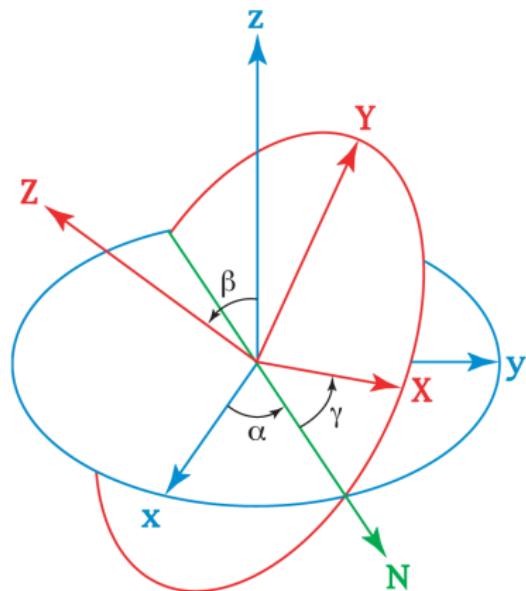


Sursa: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Rollpitchyawplain.png>

Altă reprezentare:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Euler2a.gif>

### 3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție



Sursa: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Euler.png>

### 3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare

**Exemplu:** Rotația de unghi  $\theta$  în jurul axei  $Oy$  are matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Altfel spus, considerând axa  $Oy$ , elementului  $\theta \in S^1$  i se asociază matricea  $M_{Oy,\theta} \in SO(3)$ .

**Observație:** Există o aplicație

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow SO(3)$$

ce se obține utilizând rotațiile în jurul axelor de coordonate.

**Fapt:** Orice matrice din  $SO(3)$  poate fi obținută ca produs al unor rotații (3) în jurul axelor de coordonate, cu unghiuri alese convenabil (**unghiurile lui Euler**).

### 3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: Gimbal Lock

Ilustrare Gimbal Lock

Exemplu

$R(\alpha, (1, 0, 0))$  ( rotație de unghi  
în jurul axăi  $(1, 0, 0)$ ) |

$R\left(\frac{\pi}{2}, (0, 1, 0)\right)$

$R(\gamma, (0, 0, 1))$

compoziție (scriem matrice, în mulțim... ) →

matricea  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{pmatrix}$  "se pierde o  
libertate de  
misiune"

→ legată de prop. aplicației  $S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow SO(3)$

### 3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

$$\mathbb{R}^4 = \{(s, a, b, c) \mid s, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

22

$$\mathbb{H} = \left\{ \underbrace{s}_{\text{"partea reală"}} + \underbrace{ai + bj + ck}_{\text{"partea imaginară"}} \mid s, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

i, j, k verificā

$$\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot i = -i \cdot k = j \end{array} \right.$$

Pe IH se definesc:  $\left\{ \begin{array}{l} "+" : \text{pe componente} \\ "-" : \text{inclusiv de regulile de mai sus} \end{array} \right.$

Fapt:  $(\mathbb{H}, +, \cdot)$  corp recombinație

### 3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

**Observație.** Fie

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Au loc relațiile

$$\left( \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fapt,  $(\mathcal{H}, +, \cdot) \cong (\mathbb{H}, +, \cdot)$ .

### 3. Rotări 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Notatie. Fie  $q = s + ai + bj + ck = (s, \mathbf{v})$ , unde  $\mathbf{v} = (a, b, c)$

Convenție notatie:

(i) înmulțirea este

$$q \cdot q' = (s \cdot s' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', s \cdot \mathbf{v}' + s' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}')$$

$$(ii) |q|^2 = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$(iii) \text{ Ptr } q \neq 0. \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad \bar{q} = (s, -\mathbf{v})$$

Notatie  $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ .

### 3. Rotări 3D - reprezentare folosind cuaternioni

**Propoziție.** (legătura dintre rotații 3D și cuaternioni)

(i) Fie rotația 3D având axa dată de vesorul  $u$  și unghiul  $\theta$ . Fie cuaternionul  $q \in S^3$  dat de

$$q = (s, v), \quad \begin{cases} s = \cos \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \\ v = \sin \frac{\theta}{2} u \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Fie  $P \in \mathbb{R}^3$  și  $P'$  punctul obținut aplicând rotația de unghi  $\theta$  și axă  $u$  lui  $P$ , adică

$$P' = R_{u,\theta}(P).$$

Atunci în  $\mathbb{H}$  are loc relația

$$(0, P') = q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}.$$

Altfel spus, pentru a determina  $P'$  efectuăm în  $\mathbb{H}$  calculul  $q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}$  și rezultatul ne va conduce la cuaternionul  $(0, P')$ .

(ii) Fie  $q = s + ai + bj + cK \in S^3$  un cuaternion de normă 1. El corespunde unei rotații având matricea  $3 \times 3$

$$\begin{pmatrix} s^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2sc & 2ac + 2sb \\ 2ab + 2sc & s^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2sa \\ 2ac - 2sb & 2bc + 2sa & s^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

### 3. Rotări 3D - reprezentare folosind cuaternioni

**Exemplul 1.** Considerăm rotarea  $R_{u,\theta}$  dată de vectorul  $u = (0, 0, 1)$  și de unghi  $\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ)$ . Avem  $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ . Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul  $u$  corespunde, de fapt, cuaternionului  $k$ . Conform propoziției anterioare, rotației  $R_{u,\theta}$  i se asociază cuaternionul

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} u = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} k.$$

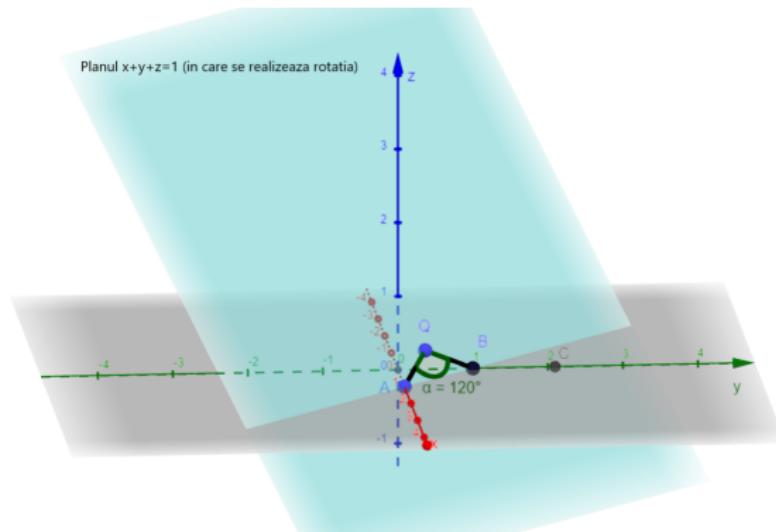
Atunci:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} k, \quad q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} k.$$

(ii) Punctele  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  corespund respectiv cuaternionilor  $i, j, k$ , deci  $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$  se rescrie  $R_{u,\theta}(i) = j$ . Se poate verifica faptul că are loc relația  $(0, j) = q \cdot (0, i) \cdot q^{-1}$  (altfel spus  $j = q \cdot i \cdot q^{-1}$ , sau, echivalent,  $j \cdot q = q \cdot i$ ). Aceasta este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu  $P = (1, 0, 0) \equiv i, P' = (0, 1, 0) \equiv j$ ).

### 3. Rotări 3D - reprezentare folosind cuaternioni

**Exemplul 2.** Considerăm rotația  $R_{u,\theta}$  dată de vectorul  $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  și de unghi  $\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ)$ . De exemplu, avem  $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$  (în figură  $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ ) - rotația de la  $A$  la  $B$  are loc în planul  $x + y + z = 1$  (perpendicular pe axa  $u$  a rotației). Punctul  $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  este fix. Practic are o rotație a lui  $QA$  către  $QB$ , unghiul fiind de  $120^\circ$ .



### 3. Rotări 3D - reprezentare folosind cuaternioni

**Exemplul 2 (continuare).** Considerăm rotarea  $R_{u,\theta}$  dată de vectorul  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  și de unghi  $\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ)$ . Avem  $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ . Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul  $u$  se scrie cu cuaternioni  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$ . Conform propoziției anterioare, rotăției  $R_{u,\theta}$  i se asociază cuaternionul

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} u = \cos \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right) = \dots$$

Prin calcul, se deduce

$$q = \frac{1}{2}(1 + i + j + k), \quad q^{-1} = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

(ii) Punctele  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  corespund respectiv cuaternionilor  $i, j, k$ , deci  $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$  se scrie  $R_{u,\theta}(i) = j$ . Se poate verifica faptul că are loc relația  $(0, j) = q \cdot (0, i) \cdot q^{-1}$ , care este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu  $P = (1, 0, 0) \equiv i, P' = (0, 1, 0) \equiv j$ ).

### 3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Alte detalii teoretice și despre implementare:

K. Shoemake, Quaternions

<https://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html>

# *Bump mapping*

Mihai-Sorin Stupariu

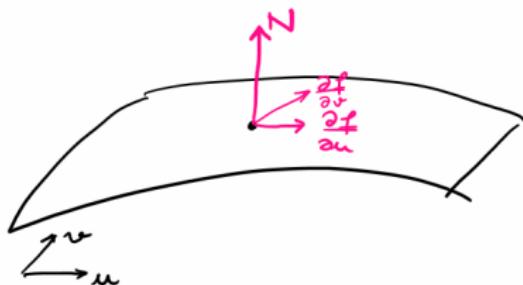
Sem. I, 2023 - 2024

# Problematizare

- ▶ Reprezentarea cât mai eficientă a unor suprafețe cu rugozitate mare.
- ▶ Articol de referință: [Blinn, 1978]  
Alte referințe: [Kautz et al., 2001], [Heidrich & Seidel, 1999]
- ▶ **Principiu: nu este necesar ca suprafețele propriu-zise să aibă o geometrie complicată, este suficient să fie controlat modul în care este reflectată lumina.**
- ▶ OpenGL nou permite implementarea metodei în *shader*.

## Context

Fie  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o suprafață parametrizată  
 $\downarrow$   
 $(u, v) \mapsto f(u, v)$



$$N = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

pp.  $N \neq 0$

$$m = \frac{N}{\|N\|}$$

vector normal  
la suprafață

## Ideea de lucru

Se consideră o funcție  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  care realizează o “distorsionare” cu “valori mici” în direcția normalei (în fiecare punct):

$$\tilde{f} = f + \varphi \cdot n$$

# Estimare pentru vectorii tangenți după distorsionare

$$\tilde{f} = f + \varphi \cdot n$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot n + \varphi \cdot \underbrace{\frac{\partial n}{\partial u}}_{\parallel 0 \text{ (neglijat)}}$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot n + \varphi \cdot \underbrace{\frac{\partial n}{\partial v}}_{\parallel 0 \text{ (neglijat)}}$$

## Estimare pentru vectorul normal după distorsionare

$$\tilde{N} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \approx \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} n \right) \times \left( \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} n \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}}_{N} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} n + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot n \times \frac{\partial f}{\partial v}}_{\text{"rotatie"} D'} + \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial u} n \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} n}_{\text{"O}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{N} = N + D}$$

D: "displacement vector"

# De la teorie la implementare

- ▶ **Inițial:**  $f$  (obiectul) și  $\varphi$  (*bump function*) definite pe același domeniu ([Blinn, 1978])
- ▶ **Idee:** “separarea” *bump function* de suprafața pe care este randată
- ▶ **Practic:** cum se reține *bump function*? - folosirea texturilor  
Tutoriale: [learnopengl](#), [opengl-tutorial](#)

## Obținerea *normal maps*

textură → texeli : rgb      pe fiecare componentă  
avem valori în  $[0.0, 1.0]$

normală      normal : pe fiecare componentă  
avem valori  
 $[-1.0, 1.0]$

schimbare de valori : rgb  $\longleftrightarrow$  normal

$$\text{rgb} = 0.5 \text{ normal} + 0.5$$

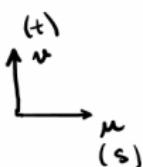
$$\text{normal} = 2 \cdot \text{rgb} - 1$$

$$(0.5, 0.4, 0.3) \rightarrow \text{rgb}$$

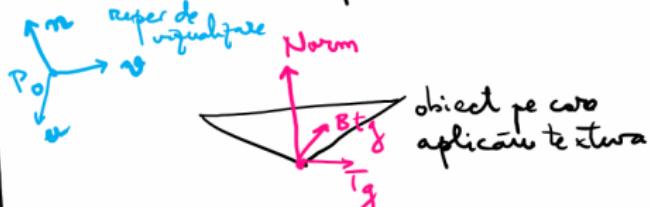
$$(0.0, -0.2, -0.4)$$

# Schimbare de coordonate

Textura: spațiu de textură



Obiect 3D: spațiul obiectelor



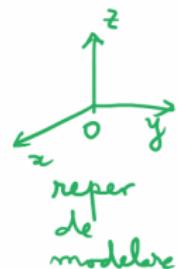
reper:  $(Tg, Btg, Norm)$

$Tg$ : tangent

$Btg$ : bitangent

$Norm$ : normală

reper: relevant pînă obiect



# Schimbare de coordonate

Ptr. vârfuri: input  $\begin{cases} \text{coordonate (Pos)} \\ \text{normale (Norm)} \\ \text{MV} \end{cases}$   $\xrightarrow[\text{cf. ideii de schimbare de repere}]{} \begin{matrix} T_g \\ B_tg \end{matrix}$

Se mai poate aplica matricea de modelare/visualizare (Modelview)

$$\begin{cases} T = \text{Modelview} \cdot T_g \\ B = \text{Modelview} \cdot B_tg \\ N = \text{Modelview} \cdot \text{Norm} \end{cases}$$

apoi mecanismul "standard" de iluminare.