

Nume și prenume:  
Grupa:

Nota: \_\_\_\_\_

## Examen Restanță - Sesiunea Iunie 2023

9 Iunie 2023



Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Sunt autorizate doar cele două foi A4 semnate și eventual calculatoare electronice de mână. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Se va ține cont de modul de redactare a soluției. Mult succes !

### Exercițiul 1

10p

Se consideră cuplul de variabile aleatoare  $(X, Y)$  a cărui repartiție este definită în triunghiul care are ca vârfuri originea, punctul  $A(0, 1)$  și punctul  $B(1, 1)$  prin densitatea de repartiție

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{a}{\sqrt{xy}}.$$

- a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ . 1p
- b) Să se determine densitatea marginală a lui  $X$  și a lui  $Y$  și să se calculeze  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$ ,  $\text{Var}[X]$  și  $\text{Var}[Y]$ . 1p
- c) Să se găsească densitățile condiționate ale variabilelor aleatoare  $X|Y = y$  și respectiv  $Y|X = x$ . 2p
- d) Scrieți o funcție în  $\mathbb{R}$  care să permită trasarea grafică a densității marginale a lui  $Y$  și respectiv a densității condiționate  $Y|X = x$ . 2p
- e) Să se calculeze  $\mathbb{E}[X|Y = y]$  și  $\mathbb{E}[Y|X = x]$ . 2p
- f) Să se determine coeficientul de corelație dintre  $X$  și  $Y$ . 2p

### Exercițiul 2

10p

O instanță de judecată formată din trei judecători găsește că o persoană este vinovată atunci când cel puțin doi dintre cei trei judecători consideră că această decizie este fondată. Admitem faptul că în cazul în care acuzatul este în adevăr vinovat, fiecare judecător se va pronunța în acest sens cu probabilitatea 0.72, independent de ceilalți doi. Această probabilitate scade la 0.19 în cazul în care acuzatul este nevinovat. Știm că 71% dintre acuzați sunt vinovați. Determinați care este probabilitatea ca cel de-al treilea judecător să voteze vinovat în fiecare din situațiile următoare:

- a) primii doi judecători au făcut acest lucru 3p
- b) cel puțin unul dintre primii doi judecători au votat vinovat 3p
- c) primii doi judecători nu au votat vinovat. 4p



### Exercițiul 3

10p

Fie  $X$  și  $Y$  două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și  $c > 0$ . Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile  $=$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  sau  $?$  (în caz că nu putem decide). Justificați alegerile făcute:

- $\mathbb{E}[\log(X)] \leq \log(\mathbb{E}[X])$
- $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X]}$
- $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)] = 1$
- $\mathbb{P}(X > c) \leq \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$
- $\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X \geq Y)$
- $\mathbb{P}(|X + Y| > 2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X+Y)^4]}{16}$
- $\mathbb{E}[X^Y] \leq \mathbb{E}[X]^{\mathbb{E}[Y]}$
- $\mathbb{P}(X + Y > 10) \leq \mathbb{P}(X > 5 \text{ sau } Y > 5)$
- $\mathbb{E}[\min(X, Y)] \geq \min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$
- $\mathbb{E}[X^2(X^2 + 1)] = \mathbb{E}[X^2(Y^2 + 1)]$
- $\mathbb{E}[\frac{1}{X}] \leq \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$
- $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \frac{\mathbb{E}[X^4]}{\mathbb{E}[X^3]}$
- $\mathbb{P}(|X - Y| > 2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{2}$

### Exercițiul 4

10p

Tabloul următor reprezintă repartiția cuplului  $(X, Y)$ : unde putem considera că  $X$  este numărul de copii dintr-o familie și  $Y$  este numărul de televizoare din aceea familie (am considerat numai familii cu 1 – 3 copii și cu 1 – 3 televizoare).

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0.22	0.11	0.02
2	0.2	0.15	0.1
3	0.06	0.07	0.07

Determinați:

- Repartițiile marginale ale lui  $X$  și respectiv  $Y$ .
- Media și varianta lui  $X$  și respectiv a lui  $Y$ .
- Coeficientul de corelație dintre  $X$  și  $Y$ .
- Repartiția condiționată a lui  $X$  la  $Y = 2$  și respectiv repartiția condiționată a lui  $Y$  la  $X = 2$ .
- Media și varianta acestor repartiții condiționate și verificați dacă are loc relația

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$$

### Exercițiul 5

10p

Ionel și Vasile au obiceiul să se întâlnească în fiecare vineri seara la un pahar pentru a povesti ce s-a întâmplat în săptămâna curentă. În general, ei decid să achite factura în mod aleator, prin aruncarea unei monede. Ionel se plânge că a achitat ultimele 4 note de plată iar Vasile pentru a-i face pe plac prietenului său îi propune să schimbe regula: "Ionel tu vei arunca cu moneda de zece ori și vei achita nota doar dacă vom observa în cele 10 aruncări o secvență de cel puțin 3 capete consecutive sau 3 cozi consecutive". Ionel este bucuros că are un prieten atât de bun. Are sau nu dreptate să fie bucuros?