Funcții continue

- f continuă : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ pt că este sumă/raport/înmulțire de fct. continue
- Th: Fie $\Delta \subseteq (\underbrace{X, \tau}_{\text{sp. metric}})$ astfel $\exists x_0 \in \mathcal{I}z(\Delta)$. Orice funcție $f: \Delta \to (Y, \tau_0)$ este continuă în x_0. (este continuă în orice punct izolat al domeniului de definiție Δ)
- Definiție funcție continuă în pct cu șiruri (spații metrice)

Fie $f: \Delta \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ și $x_0 \in \Delta$. Spunem că f este funcție continuă în x_0 dacă $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din Δ cu $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem că $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

$$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 \\ f \text{ funcție continuă în } x_0 \end{array} \right| \overset{def}{\Rightarrow} f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$$

- Teorema de densitate a lui $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

V_1: Între oricare 2 nr reale diferite, există cel puțin un nr rațional + un nr irațional.

V_2: Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ ales arbitrar. Există $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{Q}$ și există $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aî $\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \alpha}$

Proprietățile mulțimilor

1. Intersecție de mulțimi deschise $\to$ mulțime deschisă
2. Intersecție de mulțimi închise $\to$ mulțime închisă
3. Reuniune de mulțimi deschise $\to$ mulțime deschise
4. Reuniune de mulțimi închise $\to$ mulțime închisă

Serii de puteri remarcabile

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

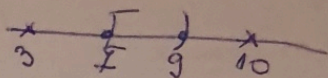
$x^n = (x-0)^n \; ; x_0 = 0$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Spații metrice

(X, d) spațiu metric, $A \subseteq X$ ex: $A = [7, 9) \cup \{3, 10\}$

1. Puncte interioare: $x \in \mathring{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} A$ este vecinătatea lui $x \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$



$\boxed{\mathring{A} = ?}$ $\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow \mathring{A} \subseteq [7, 9) \cup \{3, 10\}$

$G = (7, 9) \subseteq A$
G mulțime deschisă $\Big\} \Rightarrow G = (7, 9) \subseteq \mathring{A}$ $\Big| \Rightarrow (7, 9) \subseteq \mathring{A} \subseteq [7, 9) \cup \{3, 10\}$ (1)

• Există o bilă cu centrul în x_0 care să fie inclusă în A, $r > 0$?

$3 \in \mathring{A}$? Obs că bila $B(3, r) \not\subseteq A$, $\forall r > 0 \Rightarrow 3 \notin \mathring{A}$ (2)
$7 \in \mathring{A}$? Obs că bila $B(7, r) \not\subseteq A$, $\forall r > 0 \Rightarrow 7 \notin \mathring{A}$ (3)
$10 \in \mathring{A}$? Obs. că bila $B(10, r) \not\subseteq A$, $\forall r > 0 \Rightarrow 10 \notin \mathring{A}$ (4)
$\Rightarrow \mathring{A} = (7, 9)$

2. Pct de aderență/închidere: $x \in \bar{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} V \cap A \neq \emptyset$ (1) $\forall V$ o vecinătate a lui X

$\bar{A} = ?$ ~~* Orice element al mulțimii~~
* Orice element al mulțimii A este pct de închidere al mulțimii A

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow [7, 9) \cup \{3, 10\} \subseteq \bar{A}$
$A \subseteq F = [7, 9] \cup \{3, 10\}$; F mulțime închisă $\Big| \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

Se observa că $A \subseteq [3, 10]$, $[3, 10]$ - mulțime închisă

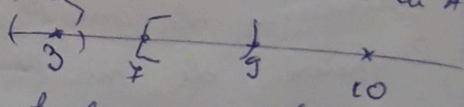
$[7, 9) \cup \{3, 10\} \subseteq \bar{A} \subseteq [7, 9] \cup \{3, 10\}$

• Exista o bilă $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$?, $r > 0$
• $9 \in \bar{A}$? Obs că $B(9, r) \cap A \neq \emptyset, r > 0 \Rightarrow 9 \in \bar{A}$
$\Rightarrow \bar{A} = [7, 9] \cup \{3, 10\}$

3. Marginea $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

4. Punct de Acumulare: $x \in A' \overset{def}{\Longleftrightarrow} V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, $\forall V$ o vecinătate a lui A
$\overset{def}{\Longleftrightarrow} B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ $\forall r > 0$

B(3, r) nu are pct com cu A\{3}



$A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq [7, 9] \cup \{3, 10\}$

Verific dacă fiecare pct de închidere e pct de acumulare

• $3 \in A'$? Obs. că $B(3, 2) \cap (A \setminus \{3\}) = \emptyset \Rightarrow 3 \notin A'$
~~$7 \in A'$?~~ " "
• $10 \in A'$? " $B(10, \frac{1}{2}) \cap (A \setminus \{10\}) = \emptyset \Rightarrow 10 \notin A'$
• $7 \in A'$? Obs că $B(7, r) \cap (A \setminus \{7\}) \neq \emptyset \Rightarrow 7 \in A'$
• $9 \in A'$? " " $\Rightarrow 9 \in A'$
• Fie $x \in (7, 9)$
$x \in A'$? Obs că $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$ -
$\Rightarrow A' = [7, 9]$

5. Puncte izolate: $x \in Iz(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists V_0$ o vecinătate a lui x a.î. $V_0 \cap A = \{x\}$
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists r_0 > 0$ a.î. $B(x, r_0) \cap A = \{x\}$

$Iz(A) \subseteq A \setminus A' \Rightarrow Iz(A) \subseteq [7,9] \cup \{3, 10\} \setminus [7, 9]$

$Iz(A) \subseteq \{3, 10\}$

- $3 \in Iz(A)$? Obs că $B(3, 1) \cap A = \{3\} \Rightarrow 3 \in Iz(A)$
- $10 \in Iz(A)$? Obs că $B(10, 1) \cap A = \{10\} \Rightarrow 10 \in Iz(A)$

$\Rightarrow Iz(A) = \{3, 10\}$

Convergență simplă + uniformă

$f_n : \Delta \to B$.

1. Se alege corect n.
2. Fie x în A și se calculează $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
3. $A \overset{def}{=} \{x \in \Delta \mid \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \in B\}$

$f : A \to B$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Convergență simplă: $f_n \xrightarrow[A]{\Delta(S)} f$ (Șirul de funcții f_n converge simplu pe mulțimea A către f)

Convergență uniformă:

- f_n este funcție continuă pe Δ, $\forall n \in \mathbb{N}^*$?

- $f_n \xrightarrow[[0,1]]{\Delta} f$
- f_n funcție continuă în x_0
- f funcție continuă în x_0

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[[0,1]]{u} f$

★ **Convergența uniformă**

$f_n \xrightarrow[A]{u} f \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Continuitate cu 2 variabile

$f : \Delta \to B$

1), f e continuă pe $\Delta \times \Delta \setminus \{(x_0, y_0)\}$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \overset{?}{=}$

2) Testăm existența limitei funcției alegând minim 2 șiruri de perechi ordonate $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0, y_0)$ și

calculăm $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) =$

ex $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)$

I. • $\lim_{n\to\infty} f(x_{n1}, y_{n1}) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_{n2}, y_{n2}) \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)$

$\Rightarrow f$ nu e continuă în (x_0, y_0)

CONCLUZIE: f. funcție continuă în $\Delta \times \Delta \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

II. $\lim_{n\to\infty} f(x_{n1}, y_{n1}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{n2}, y_{n2}) \Rightarrow$ Demonstrăm că

$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = l = \lim_{n\to\infty} f(x_{n1}, y_{n1})$

Evaluăm: $|f(x,y) - l|$

$0 \le |f(x,y) - l| \le g(x,y)$???

$0 \le |f(x,y) - l| \le g(x,y)$ ← mărim numărătorul sau micșorăm numitorul a.î.

0

$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} |f(x,y) - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = l = \lim_{n\to\infty} f(x_{n1}, y_{n1})$

$f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) \Rightarrow f$ este continuă în $(x_0, y_0) \Rightarrow$ f este continuă pe Δ.

Raza de convergență R, mulțimea de convergență (Δ) suma seriei de puteri

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 ? \\ a_n = ? \\ a_0 = ? \end{cases}$

Raza de convergență $R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \in (0, +\infty) \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$

Varianta 1

$l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

Varianta 2

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (dacă $\exists$)

Δ = mulțimea de convergență

- Dacă $R = 0$, $\Rightarrow \Delta = \{x_0\}$
- Dacă $R = +\infty \Rightarrow \Delta = \mathbb{R}$
- Dacă $R \in (0, +\infty)$, atunci $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \Delta \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$

ex: $\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ R = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1, 1) \subseteq \Delta \subseteq [-1, 1]$

$\Rightarrow \Delta$ poate fi $(-1, 1)$, $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, -1]$

- $-1 \in \Delta$?
- $1 \in \Delta$?

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ - serie de puteri

1) $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ - serie de nr reale.

- Studiem convergența / divergența seriei de nr reale asociate lui $x = -1$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$ seria divergentă de nr reale $\Rightarrow -1 \notin \Delta$

2) $x = 1 \Rightarrow$ n — $4 \Rightarrow$ seria ~~din~~ convergentă $\Rightarrow 1 \in \Delta$