Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

04.02.2022

Examen scris
- Structuri algebrice în informatică -

① $a = 6$
$b = 9$

② Determinați numărul de permutări de ordin 6 din grupul de permutări S_{15}.

③ Se consideră permutarea
$\sigma = (1,2,\dots,6)(7,8,\dots,15)(16,17,\dots,30)$ un produs de 3 cicli disjuncți de lungime a, b, respectiv $a+b$, din S_{30}. Determinați toate permutările $\tau \in S_{30}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

④ Calculați $6^{15^{9^{15}}}$ (mod 41).

⑤ Se consideră mulțimea de numere naturale $A = \{6, 7, \dots, 15\}$. Determinați o relație de echivalență ρ pe mulțimea A astfel încât mulțimea factor A/ρ să aibă exact 4 clase de echivalență diferite iar clasa de echivalență a lui 6 să conțină doar numerele 6 și 9.

⑥ Determinați numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^6}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^9}, +)$

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

⑦ Dați câte un exemplu, dacă există, sau justificați de ce nu există în caz contrar, de:

- funcție injectivă, care nu este surjectivă

$$f_{6,9}:\left(-\infty,\frac{6}{9}\right]\to\left[\frac{9}{6},+\infty\right)$$

- funcție surjectivă, care nu este injectivă

$$g_{6,9}:\left[\frac{6}{9},+\infty\right)\to\left(-\infty,\frac{9}{6}\right]$$

- funcție bijectivă $h_{6,9}:(6,15]\to\mathbb{N}$.

⑧ Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită astfel:

$$f(x)=\begin{cases}6x+63, & \text{dacă } x<-9\\ 6x^2+60x+6^3-72+6+9, & \text{dacă } x\geq -9\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}6x+63, & x<-9\\ 6x^2+60x+159, & x\geq -9\end{cases}$$

Decideți dacă funcția f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculați $f^{-1}([-15,15])$

⑨ Considerăm inelele produs direct $R=\mathbb{Z}[X]\times\mathbb{Z}[X]$ și $S=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Definim funcția $\phi:R\to S$ astfel $\phi(P(X),Q(X))=(P(6),Q(9))$. Să se arate că ϕ este un morfism de inele. Determinați $\ker(\phi)$, nucleul morfismului ϕ.

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

(10) Determinați toate numerele întregi x care au proprietatea că $x \equiv 6 \pmod{19}$, $x \equiv 7 \pmod{20}$ și $x \equiv 8 \pmod{21}$.

Rezolvări

(4) $6^{15^{9^{15}}} \pmod{41}$

41 este prim $\overset{T.Fermat}{\Rightarrow}$ $6^{40} \equiv 1 \pmod{41}$

Deci, pentru a calcula $6^{15^{9^{15}}} \pmod{41}$, este suficient să calculăm $15^{9^{15}} \pmod{40}$

$(15, 40) = 5 \neq 1$

$15^1 = 15 \pmod{40}$
$15^2 = 25 \pmod{40}$
$15^3 = 15 \pmod{40}$
$15^4 = 25 \pmod{40}$

Deci $15^n = \begin{cases} 15 \pmod{40}, & n = 2k+1 \\ 25 \pmod{40}, & n = 2k \end{cases}$ cu $k \in \mathbb{N}$

Calculăm ultima cifră a lui 9^{15}

$9^1 = 9$
$9^2 = 81$
$9^3 = 729$

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

$9^4 = 6561$

$\vdots$

Deci $U(9^k) = \begin{cases} 9, \text{ dacă } k \text{ este impar} \\ 1, \text{ dacă } k \text{ este par} \end{cases}$

15 impar $\Rightarrow U(9^{15}) = 9$

$\Rightarrow 9^{15}$ este impar $\Rightarrow 15^{9^{15}} = 15 \pmod{40}$

$6^{15^{9^{15}}} \pmod{41} \equiv 6^{15} \pmod{41} \equiv (6^3)^5 \pmod{41} \equiv$

$\equiv 216^5 \pmod{41} \equiv 11^5 \pmod{41} \equiv$

$\equiv 121 \cdot 121 \cdot 11 \pmod{41} \equiv 39 \cdot 39 \cdot 11 \pmod{41} \equiv$

$\equiv 2 \cdot 2 \cdot 11 \pmod{41} \equiv 44 \pmod{41} \equiv 3 \pmod{41}$

② $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & 6 \\ \theta(1) & \theta(2) & \theta(3) & \cdots & \theta(6) \end{pmatrix}$

θ este permutarea de ordin 6 scrisă sub formă matriceală

Numărul de permutări de ordin 6 din S_{15} este $|S_{15}| - |\theta| = 15! - 6!$

Florea Mădălin-Alexandru

Grupa 143

(6) $(\mathbb{Z}_{3^6},+)\times(\mathbb{Z}_{3^9},+)=A$

$(\hat{a},\bar{b})\in A$

$ord(\hat{a},\bar{b})=9$

$ord(\hat{a},\bar{b})=9=3^2 \Rightarrow [\underbrace{ord(\hat{a})}_{m},\underbrace{ord(\bar{b})}_{n}]=9$

$[m,n]=9=3^2$

$\left.\begin{array}{l} m\mid 3^6 \\ n\mid 3^9 \end{array}\right\} \Rightarrow (m,n)\in\{(1,9),(3,3),(9,1)\}$

- $ord(a)=1 \Rightarrow a=\hat{0}$
- $ord(a)=3 \Rightarrow 3=\dfrac{3^6}{(3^6,a)} \Rightarrow (3^6,a)\cdot 3=3^6$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (3^6,a)=3^5 \\ a\leq 3^6 \end{array}\right| \Rightarrow a\in\{\widehat{3^5},\widehat{3^5\cdot 2}\}$

- $ord(a)=9 \Rightarrow 3^2=\dfrac{3^6}{(3^6,a)} \Rightarrow (3^6,a)\cdot 3^2=3^6$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (3^6,a)=3^4 \\ a\leq 3^6 \end{array}\right| \Rightarrow a\in\{\widehat{3^4},\widehat{3^4\cdot 2},\widehat{3^4\cdot 4},\widehat{3^4\cdot 5},\widehat{3^4\cdot 4},\widehat{3^4\cdot 8}\}$

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

$ord(h) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{3^9}{(3^9, h)} \Rightarrow 3 \cdot (3^9, h) = 3^9$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (3^9, h) = 3^8 \\ h \leq 3^9 \end{array}\right| \Rightarrow h \in \{\widehat{3^8}, \widehat{2 \cdot 3^8}\}$

$ord(h) = 9 \Rightarrow 3^2 = \frac{3^9}{(3^9, h)} \Rightarrow 3^2 \cdot (3^9, h) = 3^9$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (3^9, h) = 3^7 \\ h \leq 3^9 \end{array}\right| \Rightarrow h \in \{\widehat{3^7}, \widehat{3^7 \cdot 2}, \widehat{3^7 \cdot 4}, \widehat{3^7 \cdot 5}, \widehat{3^7 \cdot 7}, \widehat{3^7 \cdot 8}\}$

$ord(h) = 1 \Rightarrow h = \hat{0}$

Așadar, numărul elementelor de ordin 9 este

$1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 6 + 4 + 6 = 16$

9) $R = \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]$

$S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\phi : \mathbb{R} \to S, \ \phi(P(X), Q(X)) = (P(6), Q(9))$

ϕ morfism de inele $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(P(X) + Q(X)) = \phi(P(X)) + \phi(Q(X)) \Leftrightarrow$

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

$$\phi(P(x)\cdot Q(x)) = \phi(P(x))\cdot\phi(Q(x)) \text{ și } \phi(1_R)=1_S$$

$$\phi(P(6)+Q(9)) = \phi(P(6))+\phi(Q(9))$$

$$\phi(P(6)\cdot Q(9)) = \phi(P(6))\cdot\phi(Q(9))$$

$(\forall)$ $P(6), Q(9) \in R = \mathbb{Z}[x]\times\mathbb{Z}[x]$ și $\phi(1_R) = 1_S$

8. f injectivă $\Leftrightarrow (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$ cu $f(x)=f(y) \Rightarrow f(x)=y$

f surjectivă $\Leftrightarrow (\forall)\ y \in \mathbb{R}$ (codomeniu) $\exists\ x \in \mathbb{R}$ (domeniu) astfel încât $f(x)=y$

f bijectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă și f surjectivă

10.
$$x \equiv 6 \pmod{19} \qquad n_1 = 19 \qquad n_1' = 420 \qquad a_1 = 6$$
$$x \equiv 7 \pmod{20} \qquad n_2 = 20 \qquad n_2' = 399 \qquad a_2 = 7$$
$$x \equiv 8 \pmod{21} \qquad n_3 = 21 \qquad n_3' = 380 \qquad a_3 = 8$$

$$n = 19\cdot 20\cdot 21 = 7980$$

Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143

Calculăm t_1, t_2, t_3, inversele lui n_1', n_2', respectiv n_3' modulo 19, 20, respectiv 21

$$\left.\begin{aligned} 420 &= 19 \cdot 22 + 2 \\ 19 &= 2 \cdot 9 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t_1 = 10$$