Limite de șiruri

- șir convergent : $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$
- șir divergent : $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$

- Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir crescător + mărginit $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sup(x_n)$
- Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir descrescător + mărginit $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \inf(x_n)$
- Lema Stolz - Cesaro:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ a.î.:
- $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$
- y_n crescător
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$

- Corolar: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

- limită superioară : $\overline{\lim}\, x_n$ sau $\lim\sup(x_n)$
- limită inferioară: $\underline{\lim}\, x_n$ sau $\lim\inf(x_n)$
- x_n șir convergent $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

Serii

- S.n. serie $(x_n)_{n\geq p}$ $(y_n)_{n\geq p}$, unde $y_n = \sum_{k=p}^{n} x_n$, și se notează: $\sum_{n\geq p} x_n = \sum_{n=p}^{\infty} x_n$.

x_n = termenii seriei

y_n = sumele parțiale

- Dacă $\sum_{n\geq 1} x_n$ este finită $\to \sum_{n\geq p} x_n$ este convergentă.
- Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Reciproca nu e validă.

(Dacă $x_n \not\to 0 \Rightarrow$ seria e divergentă).

Criteriul de divergență pt serii de nr. reale

Se consideră seria de nr. reale: $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a.î.

1) $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$
2) $\nexists \lim_{n\to+\infty} x_n$

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Criterii de comparație - Termeni pozitivi

1. Criteriul comparației cu inegalități

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu elemente din $[0,\infty)$, a.î. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ și $M>0$ cu proprietatea că $a_n \le M b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0$

1) Dacă seria $\sum a_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum b_n$ este divergentă

2) Dacă seria $\sum b_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum a_n$ e convergentă

2) $\sum\limits_{n\ge 1} b_n < \infty \rightarrow \sum\limits_{n\ge 1} a_n < \infty$ $\left(\sum\limits_{n\ge 1}\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ div}\right)$

1) $\sum\limits_{n\ge 1} a_n = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n\ge 1} b_n = \infty$

2. Criteriul condensării $\left(\sum\limits_{n\ge 1} a_n \sim \sum\limits_{n\ge 1} 2^n a_{2^n}\right)$

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir descrescător cu elemente din $[0,\infty)$.

* seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ este convergentă

3. Criteriul comparației cu limite.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri cu termeni pozitivi.

1) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\in(0,\infty) \Rightarrow \sum a_n$ și $\sum b_n$ au aceeași natură

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ și $\sum b_n$ e convergentă $\Rightarrow \sum a_n$ este convergentă

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$ și $\sum b_n$ e divergentă $\Rightarrow \sum a_n$ e divergentă

4. Criteriul raportului

Fie $\sum\limits_{n\ge 1} x_n$, $x_n > 0$ $\forall n\ge 1$.

1) Dacă $\exists\, \alpha$ și $\exists\, n_0$ a.î. $\forall n\ge n_0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \alpha \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\ge 1} x_n$ convergentă $\rightarrow x_n \to 0$ $\Leftrightarrow \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

2) Dacă $\exists\, \alpha$ și $\exists\, n_0$ (rang) a.î. $\forall n\ge n_0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > \alpha \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n\ge 1} x_n$ - divergentă $\rightarrow x_n\to\infty \Leftrightarrow \underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$

• $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} l<1 \Rightarrow \text{s. conv} \\ l>1 \Rightarrow \text{s. div.}\end{cases}$

5. Criteriul radicalului

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ cu $x_n \geq 0$. Atunci

1) Dacă $\exists \alpha < 1$ și $\exists n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} < \alpha \Rightarrow$ s. convergentă
$\Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} < 1$

2) Dacă $\exists \alpha < 1$ și $\exists n > n$ $\forall n$ ~~...~~ a.î. $\sqrt[n]{x_n} < \alpha \Rightarrow$ s. convergentă
$\Leftrightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} > 1$.

2') Dacă $\exists$ ~~x~~n_k a.î. $x_{n_k} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n_k]{x_{n_k}} > 1 \Rightarrow x_n$ nu tinde la $0 \Rightarrow$ seria divergentă.

Obs!!! $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ dacă $\exists$ a doua limită.

6. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir cu elemente din $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\underbrace{\frac{x_n}{x_{n+1}}}_{} - 1\right) = \begin{cases} l < 1 & \text{, s. divergentă} \\ l > 1 & \text{, s. convergentă} \end{cases}$$

invers față de c. raportului

7. Criteriul Cauchy

Fie $\sum_{n\geq 1} x_n$ cu $x_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$.

1. Seria convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}$ avem:
$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |y_{n+p} - y_{n-1}| < \varepsilon$$

• $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ s.n. Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n > \varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$

$$y_n = \sum_{k\geq 1}^{n} x_k$$

Def: O serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă dacă $\sum_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă

Prop: Dacă seria este absolut convergentă $\Rightarrow$ seria e convergentă (reciproca nu e valabilă)

Def: O serie convergentă, dar care nu e absolut convergentă s.n. semiconvergentă.

8. ~~Criteriul lui Abel~~ ~~Dirichlet~~

Dacă $a_n \searrow$ ~~0~~ și $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq M$ atunci seria $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$ - conv.

9. Criteriul lui Leibniz

Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$ și ~~(caz)~~ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ - conv.

Lista seriilor remarcabile de nr. reale

1. Seria armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = l \begin{cases} l \leq 1 \Rightarrow \text{s. divergentă} \\ l > 1 \Rightarrow \text{serie convergentă} \end{cases}$$

2. Seria putere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \begin{cases} a \in (-1, 1) \Rightarrow \text{serie absolut convergentă} \\ a \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Rightarrow \text{serie divergentă} \end{cases}$$

3. Serie exponențială

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R}$ și are suma e^x.

Serii de numere reale

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}$; $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}$

$y_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ - șirul sumelor parțiale ale seriei

x_n = termen general

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - serie convergentă $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir convergent ($\exists \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - serie divergentă $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir divergent
- $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ - serie absolut convergentă $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ serie convergentă

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ abs. conv $\Rightarrow$ serie conv ($\not\Leftarrow$)

Dacă aproape toți termenii sunt poz/neg $\Rightarrow$ se întâmplă și reciproca