Florea Mădălin-Alexandru 23.01.2022

Anul 1, Seria 14, Grupa 143

Examen
-Logică matematică și computațională-

$i=0$
$j=7$
$k=1$

Exercițiul I

Fie V mulțimea variabilelor propoziționale, E mulțimea enunțurilor, iar T mulțimea teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice.

Fie $p, q, r \in V$, două câte două distincte, $\theta, \varphi \in T$, $\Sigma \subseteq E$, iar $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \psi \in E$, astfel încât $\Sigma \nvdash \psi$, dar $\Sigma \cup \{p \vee q \vee r\} \vdash \psi$ și $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \alpha_i$, iar $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ sunt definite mai jos:

$$\alpha_0 = [(\theta \to p) \leftrightarrow (\varphi \to q)] \leftrightarrow r$$

$$\alpha_1 = \neg p \to [(\theta \wedge \neg q) \to (\varphi \wedge r)]$$

$$\beta_7 = (p \wedge q) \to \alpha_1$$

$$\gamma_1 = (p \vee q) \to r$$

① Să se demonstreze că:

- $\vdash \alpha_i \to (p \vee q \vee r)$

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare arbitrară și

$\tilde{h} \to E \to \mathcal{L}_2$ unica prelungire a lui h la E

care transformă conectorii logici în operații booleene

$$\theta \in T \Rightarrow \vdash \theta \overset{TCT}{\Rightarrow} \vDash \theta \Rightarrow \tilde{h}(\theta) = 1$$

$$\varphi \in T \Rightarrow \vdash \varphi \overset{TCT}{\Rightarrow} \vDash \varphi \Rightarrow \tilde{h}(\varphi) = 1$$

$$\alpha_0 \to (p \vee q \vee r) \Rightarrow [[(\theta \to p) \leftrightarrow (\varphi \to q)] \leftrightarrow r] \to$$

$$\to p \vee q \vee r$$

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(\theta \to p)$	$\tilde{h}(\varphi \to q)$	$\tilde{h}((\theta \to p) \leftrightarrow (\varphi \to q))$	$\tilde{h}(\alpha_0)$	$\tilde{h}(p \vee q \vee r)$
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\tilde{h}(\alpha_0 \to (p \vee q \vee r))$
1
1
1
1
1
1
1
1

$\tilde{h}(\alpha_0 \to (p \vee q \vee r)) = 1 \Rightarrow \models \alpha_0 \to (p \vee q \vee r) \overset{T.C.}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \vdash \alpha_0 \to (p \vee q \vee r)$

- $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \alpha_0$

$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha_0 \overset{T.D.}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \varphi \to \alpha_0$ (1)

$\Sigma \cup \{p \vee q \vee r\} \vdash \varphi \overset{T.D.}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \{p \vee q \vee r\} \to \varphi$

Cum $\vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\} \overset{C.S.i.}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\}$

$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash \{p \vee q \vee r\} \to \varphi \\ \Sigma \vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{tranzitivitate}} \Sigma \vdash \alpha_0 \to \varphi$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \Sigma \vdash (\varphi \to \alpha_0) \wedge (\alpha_0 \to \varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \alpha_0$

- $\Sigma \nvdash \alpha_0$

Presupun prin reducere la absurd că $\Sigma \vdash \alpha_0$

$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash \alpha_0 \\ \Sigma \vdash \alpha_0 \to \varphi \end{array}\right\} \overset{M.P.}{\Longrightarrow} \Sigma \vdash \varphi$ contradicție

(de la subpunctul de mai sus)

deoarece conform ipotezei $\Sigma \nvdash \varphi \Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow \Sigma \nvdash \alpha_0$

② Să se determine toate submulțimile consistente ale mulțimii $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\}$

$\alpha_0 = [(\theta \to p) \leftrightarrow (\varphi \to q)] \leftrightarrow r$

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(\theta \to p)$	$\tilde{h}(\varphi \to q)$	$\tilde{h}((\theta \to p) \leftrightarrow (\varphi \to q))$	$\tilde{h}(\alpha_0)$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$\alpha_1 = \neg p \to [(\theta \wedge \neg q) \to (\varphi \wedge r)]$

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(\neg p)$	$\tilde{h}(\neg q)$	$\tilde{h}(\theta \wedge \neg q)$	$\tilde{h}(\varphi \wedge r)$	$\tilde{h}[(\theta \wedge \neg q) \to (\varphi \wedge r)]$	$\tilde{h}(\alpha_1)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

$\beta_7 = (p \wedge q) \to \alpha_1$

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(p \wedge q)$	$\tilde{h}(\alpha_1)$	$\tilde{h}(\beta_7)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$\gamma_1 = (p \vee q) \to r$

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(p \vee q)$	$\tilde{h}(\gamma_1)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$\tilde{h}(p)$	$\tilde{h}(q)$	$\tilde{h}(r)$	$\tilde{h}(\alpha_0)$	$\tilde{h}(\beta_7)$	$\tilde{h}(\gamma_1)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Submulțimi consistente:

$\{\alpha_0\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$

$\{\beta_7\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$\{\gamma_1\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$

$\{\alpha_0, \beta_7\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$

$\{\alpha_0, \gamma_1\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,1), (1,1,1)\}$

$\{\beta_7, \gamma_1\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$

$\{\alpha_0, \beta_7, \gamma_1\}$ pentru $(\tilde{h}(p), \tilde{h}(q), \tilde{h}(r)) \in \{(0,0,1), (1,1,1)\}$

$\emptyset$

③ Să se determine care dintre enunțurile $\varepsilon \in \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\}$ se deduce din mulțimea celorlalte două, adică satisface $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\} \setminus \{\varepsilon\} \vdash \varepsilon$ (nu neapărat există unul și nu neapărat este unic).

④ Să se determine care dintre enunțurile $\delta, \varepsilon \in \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\}$ (nu neapărat cu $\delta \neq \varepsilon$) satisfac $\{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k\} \setminus \{\delta, \varepsilon\} \vdash \delta \rightarrow \varepsilon$.

Exercițiul 2

Considerăm signatura de ordinul I: $\tau = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1;2,2,2,2,2,2,2,2,2,2;\emptyset)$, simbolurile de operații unare $f_0, \dots, f_9$ și simbolurile de relații binare $R_0, \dots, R_9$, o mulțime $A = \{a, b, c\}$ având $|A| = 3$ și o structură de ordinul I de signatură τ (cu mulțimea suport A și înzestrată cu următoarele operații unare și relații binare corespunzătoare simbolurilor de mai sus): $\mathcal{A} = (A, f_0^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, f_3^{\mathcal{A}}, f_4^{\mathcal{A}}, f_5^{\mathcal{A}}, f_6^{\mathcal{A}}, f_7^{\mathcal{A}}, f_8^{\mathcal{A}}, f_9^{\mathcal{A}}, R_0^{\mathcal{A}}, R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}}, R_3^{\mathcal{A}}, R_4^{\mathcal{A}}, R_5^{\mathcal{A}}, R_6^{\mathcal{A}}, R_7^{\mathcal{A}}, R_8^{\mathcal{A}}, R_9^{\mathcal{A}})$, unde, pentru fiecare $n \in \overline{0,9}$, $f_n^{\mathcal{A}} : A \to A$ și $R_n^{\mathcal{A}} \subseteq A^2$, definite astfel:

u	a	b	c
$f_7^{\mathcal{A}}(u)$	b	c	a
$f_1^{\mathcal{A}}(u)$	b	a	a

$$R_7^{\mathcal{A}} = \{(a,b), (b,c), (c,c)\}$$

precum și două variabile distincte $v, w \in Var$.

Să se determine dacă $\mathcal{A} \vDash Q_i v Q_{1-i} w [(f_j(f_k(v)) = f_k(f_j(w))) \to R_j(v, f_k(w))]$, unde $\begin{cases} Q_0 = \forall \\ Q_1 = \exists \end{cases}$

$A \models Q_0 v Q_1 w[(f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w))) \to R_7(v, f_1(w))]$

unde: $Q_0 = \forall$, $Q_1 = \exists$

u	a	b	c
$f_1(u)$	b	a	a
$f_7(f_1(u))$	c	b	b

u	a	b	c
$f_7(u)$	b	c	a
$f_1(f_7(u))$	a	a	b

$R_7^A = \{(a,b), (b,c), (c,c)\}$

caz 1: $v = a$

$f_7(f_1(v)) = c$

w	$f_1(f_7(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w))$	$R_7(v, f_1(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w)) \to R_7(v, f_1(w))$
a	a	0	1	1
b	a	0	0	1
c	b	0	0	1

Pentru $v = a$ există $w \in \{a, b, c\}$ astfel încât se verifică formula $\Rightarrow g_1 = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$

caz 2: $v = b$

$f_7(f_1(v)) = b$

w	$f_1(f_7(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w))$	$R_7(v, f_1(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w)) \to R_7(v, f_1(w))$
a	a	0	0	1
b	a	0	0	1
c	b	1	0	0

Pentru $v = b$ există $w \in \{a, b\}$ astfel încât se verifică formula $\Rightarrow g_2 = 1 \vee 1 \vee 0 = 1$

caz 3: $v = c$

$$f_7(f_1(v)) = b$$

w	$f_1(f_7(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w))$	$R_7(v, f_1(w))$	$f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w)) \to R_7(v, f_1(w))$
a	a	0	0	1
b	a	0	0	1
c	b	1	0	0

Pentru $v = c$ există $w \in \{a, b\}$ astfel încât se verifică formula $\Rightarrow g_3 = 1 \vee 1 \vee 0 = 1$

$$g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \models \forall v \exists w [(f_7(f_1(v)) = f_1(f_7(w))) \to R_7(v, f_1(w))]$$