Algebra

Tutoriat - 1 - Mulțimi + funcții

Proprietăți: Fie A, B, C - mulțimi. Atunci:

① $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

② $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

③ (De Morgan) Dacă $A, B \subseteq C$, atunci: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

A, B se numesc mulțimi disjuncte dacă $A \cap B = \emptyset$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - diferența simetrică a lui A și B

- Complementara unei ~~mul~~ mulțimi:

Fie A, B mulțimi, $A \subseteq B$. Atunci $C_B(A) = B \setminus A = \overline{A}$

Funcții / Aplicații

Fie A, B două mulțime. Numim funcție/aplicație $f: A \to B$ submulțime $f \subseteq A \times B$ definită astfel:

$\forall a \in A \ \exists! \ b_a \in B$ aî $(a, b_a) \in f$ | A: domeniu de definiție, B: codomeniu

- Numim imaginea funcției f mulțimea $f(A) \overset{def}{=} \{b \mid \exists a \in A \text{ aî } f(a) = b\}$
- Numim preimaginea lui B prin f mulțimea $f^{-1}(B) = \{a \mid f(a) \in B\}$

Produsul cartezian: Fie A, B mulțimea. Numim produs cartezian al lui A și B mulțimea $A \times B = \{\underbrace{(a, b)}_{\text{pereche ordonată}} \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$

$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$

Injective / Surjective / Bijective

- Fct. injectivă: $f: A \to B$ - injectivă dacă $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) \neq f(a_2)$
(sau $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)
- Fct. surjectivă: $f: A \to B$ surjectivă dacă $\mathrm{Im} f = f(A) = B$
; $\forall b \in B \ \exists a \in A$ aî $f(a) = b$.
- Fct. bijectivă: $f: A \to B$ surjectivă + injectivă
; $\forall b \in B \ \exists! \ a \in A$ aî $f(a) = b$ (există și e unic)

Vf parabola: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Compunerea funcțiilor

Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$. Definim funcția $g \circ f: A \to C$,
$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$

Funcția identitate 1

$1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$

Funcții inversabile

Spunem că $f: A \to B$ inversabilă $\Leftrightarrow \exists!$ $(\exists!)$ $g: B \to A$ a.î. $f \circ g = g \circ f = 1_A$

$f \circ g = 1_B$

$g \circ f = 1_A$

$f: A \to B$ inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă

Mulțimea părților mulțimii A - $\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A) \overset{def}{=} \{B \mid B \subseteq A\} \Rightarrow P(A) = (\underline{not}\ 2^{[n]})$ $|A| = n$

~~$A = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow |A| = n$~~

$P(A) = \{$

Funcții speciale

Funcția caracteristică a unei submulțimi - f_A

Fie $A \subseteq X$, $f_A : X \to \{0, 1\}$

$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Obs: $A, B \subseteq X$. Atunci $\underset{\text{egalitate}}{A = B} \Leftrightarrow f_A = f_B$

Funcția indicatorul lui Euler - $f(n)$

$f(n)$ - funcția indicatorul lui Euler $\quad f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$

$f(n)$ = numărul de nr. naturale mai mici sau egale cu n, și care sunt relativ prime cu n

$f(n) = |\{k \mid 1 \le k \le n$ și $(k, n) = 1\}|$ - cardinal

$f(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ * completare

$f(1) = 1$

$n \ge 2 \quad n = p_1^{k_1} \cdots p_k$

$p_1, \dots, p_k$ - nr. prime

Funcția incluziune – i_A

$A \subseteq B$, $i_A : A \to B$ $\quad i_A(x) = x$; $(\forall) x \in A$.

Proiecția canonică pe mulțimea A – P_A

A, B – mulțimi $\quad P_A : A \times B \to A$ / $P_A(a, b) = a$ → proiecția pct $A(a, b)$ pe ox

F. parte întreagă / p. fracțională $[x]$, $\{x\}$

$\lfloor x \rfloor$ – parte înt. inferioară $\quad \lceil x \rceil$ – p. înt. superioară

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = [x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to [0, 1)$ $\quad g(x) = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x - [x] = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Permutarea mulțimii – S_n

$A = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow S_n = \{f \mid f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, f \text{ bij}\}$

$|S_n| = n!$

Obs: $(S_n, \circ)$ – grup neabelian pt $n \geq 3$ (compunerea funcțiilor $\circ$)

În particular, orice grup finit $(G, *)$ poate fi "scufundat" într-un $(S_n, \circ)$) → există un morfism injectiv de la $(G, *)$ în $(S_n, \circ)$).

Tlm. Cayley

Proprietăți funcții

Fie $f, f' : A \to B$ și $g, g' : B \to C$. Atunci:

1. f, g injective $\Rightarrow g \circ f$ injective
2. f, g surj $\Rightarrow g \circ f$ surj
3. f, g bij $\Rightarrow g \circ f$ bij
4. $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj
5. $g \circ f$ surj. $\Rightarrow g$ surj
6. $g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ e surj, f e inj

* Fie $f : A \to B$ o funcție. f bij $\Leftrightarrow \exists$ o funcție $g : B \to A$ a.î. $(g \circ f)(x) = 1_A$ și $(f \circ g) = 1_B$ (f. identitate)

* Dacă f bij. atunci g este unică și s.n. inversa lui f și se notează f^{-1}.

Proprietăți funcții

Fie $f: A \to B$ funcție, $X, W \subseteq A$ și $Y, Z \subseteq B$. Atunci

1) $X \subseteq W \Rightarrow f(X) \subseteq f(W)$
2) $Y \subseteq Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$
3) $f(X) \cup f(W) = f(X \cup W)$
4) $f(X \cap W) \boxed{\subseteq} f(X) \cap f(Y)$ (egalitate pt f inj)
5) $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$
6) $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$
7) $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ (egalitate pt f inj)
8) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (egalitate pt f surj)

unde $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$ ($f(A) = \mathrm{Im} f$) și

$f^{-1}(Y) \overset{def}{=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ s.n. preimaginea lui Y prin f

Preimagine vs. inversa

$f^{-1}(Y)$ - preimaginea și f nu trebuie să fie bij (preimaginea unei submulțimi a codomeniului prin funcția f există întotdeauna)

Mulțimi echipotente

- Spunem că 2 mulțimi A și B s.n. echipotente (au același cardinal) dacă $\exists f: A \to B$ bijecție. Scriem $|A| = |B|$ dacă A, B au același cardinal

Obs: 1) 2 mulțimi A, B sunt echipotente $\Leftrightarrow A, B$ au același nr de elemente ($|A| = |B| = n \Rightarrow |\{f \mid f: A \to B, f$ bijecție$\}| = n!$)

2) O mulțime echipotentă cu $\mathbb{N}$ s.n. numărabilă. ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) ($\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$)

- Fie A, B - 2 mulțimi. Spunem că $|A| \le |B|$ dacă $\exists f: A \to B$ injectivă

Dacă $|A| \le |B|$ și A, B - nu sunt echipotente $\Rightarrow |A| < |B|$

Obs: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ ($\mathbb{R}$ nu e numărabilă)

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

• Orice mulțime infinită conține o "copie" a lui $\mathbb{N}$, ie
$\exists\ f: \mathbb{N} \to A$ inj ($\Leftrightarrow |\mathbb{N}| \leq |A|\ \forall\ A$ infinită)
• $(\forall)$ A mulțime $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ($\mathbb{R} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ bijecție)

Teorema Cantor - Bernstein

Fie A, B 2 mulțimi. $|A| = |B| \Leftrightarrow |A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$
(adică 2 mulțimi sunt echipotente $\Leftrightarrow$ găsesc funcții inj | ($\exists$ bij $f: A \to B$)
$g: A \to B$ și $h: B \to A$ |

Relații binare

• Fie $A \neq \emptyset$. O relație "binară "$\sim$" pe mulțimea A reprezintă o submulțime a lui $A \times A$. Dacă $(a, b) \in \sim$ vom scrie $a \sim b$.

Relație de echivalență

O relație binară "$\sim$" pe mulțimea $A (\neq \emptyset)$ s.n. relație de echivalență dacă îndeplinește simultan condițiile

1) reflexivă: $a \sim a\ \forall\ a \in A$
2) simetrică: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
(3) antisimetrică: $\left.\begin{matrix} a \sim b \\ b \sim a \end{matrix}\right| \Rightarrow a = b$)
4) tranzitivă: $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Relații de ordine $a \leq b$

1) reflexivă: $a \leq a$
2) antisimetrică $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq a \end{matrix}\right| \Rightarrow a = b$
3) tranzitivă: $\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix}\right| \Rightarrow a \leq c$

~~Obs: Dacă avem~~

Obs: Dacă avem $|A| = n \to$ avem 2^{n^2} rel. binare pe mulțimea A.

Relația de echivalență indusă de o funcție

Fie $f: A \to B$ și definim pe A relația $\rho_f \overset{not}{=} \sim_f$ astfel:
$\underbrace{a \sim_f b}_{\in A} \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

Relația de echivalență modulo n pe $\mathbb{Z}$.

• $n \in \mathbb{N}$, notată "$\equiv (\text{mod } n)$":
$a \equiv b (\text{mod } n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} n \mid a-b$

1) $n=0$ $a \equiv b (\text{mod } 0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} 0 \mid a-b \Leftrightarrow a=b \Rightarrow$ "$\equiv (\text{mod } 0)$" este "$=$"

*Privită ca submulțime al lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, "$\equiv (\text{mod } 0)$" este $\{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

2) $n=1$ $a \equiv b (\text{mod } 1) \overset{def}{\Longleftrightarrow} 1 \mid a-b$ (adev.) $\rightarrow \forall a,b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv b (\text{mod}_1)$

*Privită ca submulțime al lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, "$\equiv (\text{mod } 0)$" este $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

3) $n \geq 2$ $a \equiv b (\text{mod } n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} n \mid a-b \Leftrightarrow a, b$ au același rest la împărțirea cu n

Partiție

O partiție a unei mulțimi $A \neq \emptyset$ este o familie de submulțimi nevide ale lui A, disjuncte 2 câte 2, și a căror reuniune este mulțimea A.

Notăm: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$, I este o familie de indici

ie: $A_i \neq \emptyset \; \forall i \in I$; $\underbrace{A_i \cap A_j = \emptyset}_{\text{partiție}} \; \forall i \neq j$, $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

ex: $A = \mathbb{N}$ $\mathcal{A} = (2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1)$ este o partiție a lui $\mathbb{N}$ cu 2 submulț.

$A = \mathbb{N}$ $\mathcal{A} = (\{n\})$ partiție cu o infinitate de submulțimi.

$A = \mathbb{R}$ $\mathcal{A} = ([n, n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$ este o partiție a lui $\mathbb{R}$ cu un nr. numărabil de submulțimi.

Clase de echivalență

Fie "$\sim$" o rel. de echivalență pe mulțimea $A \neq \emptyset$.

1) $a \in \hat{a}$ $\forall a \in A$ ($\hat{a}$ repr. clasa de echiv. a lui a)

2) 2 clase de echivalență sunt ori egale ori disjuncte
$\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \sim b$ (altfel, $a \nsim b \Leftrightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$)

3) Mulțimea claselor de echivalență repr. o partiție a lui A.

Mulțimea factor $\overset{not}{=} A/_\sim =$ mulțimea tuturor claselor de echivalență

Fie $\sim$ rel de echiv. pe A: $A/_\sim = \{\hat{a} \mid a \in A\}$

$p = p_\sim : A \rightarrow A/_\sim$ $p_\sim(a) = \hat{a}$ $p_\sim$ s.n. surjecția canonică asociată lui $\sim$

Sistem de reprezentanți

Fie A mulțimea $\neq \emptyset$, $\sim$ rel. de echiv. pe A.

Numim familia $(a_i)_{i \in I} \in A$ sist. de repr dacă:

1) $\forall i, j, i \neq j$, $a_i \not\sim a_j$ (I poate fi finită, numărabilă ($\simeq \mathbb{N}$) sau nenumărabilă)

2) $\forall a \in A, \exists i \in I$ a.î. $a \sim a_i$

O submulțime $S \subseteq A$ s.n SCR pt "$\sim$" dacă S conține EXACT câte un element din fiecare clasă de echivalență.

Deci S e SCR dacă:

1) $\forall a \in A$ $(\exists) s \in S$ a.î. $a \sim s$ ($\Leftrightarrow [a] = [s]$)

2) $\forall s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in S$ atunci $s_1 \not\sim s_2$ ($\Leftrightarrow [s_1] \cap [s_2] = \emptyset$)

Obs: $f : \{a_i \mid i \in I\} \to A/\sim$, $f(a_i) = \hat{a}_i$

f bij (surj avem)

(inj: $f(a_i) = f(a_j) \Leftrightarrow \hat{a}_i = \hat{a}_j \Leftrightarrow a_i \sim a_j$)

Principiul includerii și excluderii (P.I.E.)

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Formulă generală

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$