Repartiții comune, marginale și condiționate - cazul discret

- Fct de masă a vectorului (X,Y) - repartiție comună: $p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = f_{X,Y}(x,y)$
- Fct de repartiție a vectorului (X,Y): $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \le x, Y \le y)$; • $P((X,Y)\in A\times B) = \sum_{\substack{x\in A\cap X(\Omega)\\ y\in B\cap Y(\Omega)}} P(X=x, Y=y)$
- repartiție marginală X: $\mathbb{P}(X=x) = p_X(x) = \sum P(X=x, Y=y)$
- repartiție condiționată a lui X condiționat Y la A este $p_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X=x|A) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$
- repartiția condiționată a lui X la $Y=y$: $p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X=x|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- formula prob. totale: $p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{X|A_i}(x)\cdot P(A_i)$; $p_X(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{X|Y}(x|y_i)\cdot p_Y(y_i)$
- formula lui Bayes: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)\cdot p_{Y|X}(y|x)}{\sum_{x'} p_X(x')\, p_{Y|X}(y|x')}$
- media: $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)$
- media condiționată: $\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_x x\cdot p_{X|Y}(x|y)$ • $E[X] = \sum_y E[X|Y=y]\,\mathbb{P}(Y=y)$

Repartiții comune, marginale și condiționate - cazul continuu

- $f(x,y)$ se num. densitate comună a lui $(X,Y) \Leftrightarrow f(x,y)\ge 0$ și $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) = 1$
- $P((X,Y)\in A) = \mathbb{P}(a\le X\le b, c\le Y\le d) = \int_a^b\int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$
- densitate marginală a lui X: $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy$
- fct. de repartiție $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X\le x, Y\le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$
- repartiție condiționată: $\mathbb{P}(X\in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)\,dx \ \forall B\subseteq \mathbb{R} \to f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- probabilitatea totală $f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\,\mathbb{P}(A_i) \to f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)$
- independența v.a. continue $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \Leftrightarrow f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$
- formula lui Bayes: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x')\, f_X(x')\,dx}$

Covarianța și corelația

- $Cov = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = \mathbb{E}[XY] - E[X]\cdot E[Y]$
- X și Y necorelate $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
- $Var(X,Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$; $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$ $Cov(a+bX,Y) = b\,Cov(X,Y)$
- coeficient de corelație: $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)\cdot Var(Y)}$

	contează ordinea	nu contează ordinea
cu întoarcere	n^k	$\binom{n+k-1}{n-1}$
fără întoarcere	A_n^k	C_n^k sau $\binom{n}{k}$

ex: La un lab sunt 4b și 12f, grupe de 4 a.î. fiecare grupă e un băiat: $|\Omega| = \binom{16}{4\,4\,4\,4}$

$|A| = \binom{12}{3\,3\,3\,3}\cdot 4! = \frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot 4!$

Prob condiționate

• $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)}$ $Q(A|B) = \frac{Q(B|A)\cdot Q(A)}{Q(B)} = \frac{P(B|A,C)\cdot P(A|C)}{P(B|C)} = P(A|B,C)$

• $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$ $P(C|A) = Q(C) = Q(C|B)\cdot Q(B) + Q(C|B^c)\, Q(B^c)$

• A și B independente $\iff P(B|A) = P(B) \iff \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

• A și B independente condiționat la C dacă $P(A\cap B|C) = P(A|C)\cdot P(B|C) \iff Q(A\cap B) = Q(A)\cdot Q(B)$

Variabile aleatoare discrete

• Fct. de repartiție a lui X: $F: \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = P(X\le x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

• Fct. de masă - $f(x) = P(X=x)$

• v.a. Bernoulli $(B(p))$ $f(X) = \begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ $E[X] = p$ $Var(X) = p(1-p)$

• v.a. Binomială $(B(n,p))$ $E[X] = np$ $Var(X) = np(1-p)$ $P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot(1-p)^{n-k}\cdot p^k$

• v.a. Geometrică $(G(p))$ $P(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$ $E[X] = \frac{1}{p}$ $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

• v.a. Hipergeometrică $(H(n,N_1,N_0))$ $P(X=x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_0}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $E[X] = n\cdot\frac{N_1}{N_0}$

• v.a. Negativ Binomială $(NB(r,N_1,N_0))$: $P(X=x) = \binom{x-1}{r-1}\cdot\frac{N_0^{x-r}\cdot N_1^r}{N^x}$ $E(X) = \frac{r}{p} = \frac{r\cdot N}{N_1}$ $Var(x) = \frac{r\cdot(1-\frac{N_1}{N})}{(\frac{N_1}{N})^2}$

• v.a. Poisson (λ) $E[X] = \lambda$ $Var(X) = \lambda$ $P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

• v.a. independente X și Y $\iff P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B) \iff P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)\cdot P(Y\le y)$

• medie v.a. $E[X] = \sum_x x\cdot P(X=x)$ $E[aX+bY] = a\cdot E[X] + b\cdot E[Y]$ $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, P(X=x)$

• X și Y independente $\Rightarrow E[X\cdot Y] = E[X]\cdot E[Y]$

• momentul de ordin k: $E[X^k]$; momentul de ordin k centrat în a: $E[(X-a)^k]$

• varianța $Var(X) = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$

• dacă X și Y independente $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

• abatere standard $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

Variabile aleatoare continue

• variabile aleatoare continue: $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

• f densitate de repartiție $\iff f\ge 0$ și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ • Fct. de repartiție $F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ • $F'(x) = f(x)$

• momentul de ordin k: $E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$ • momentul de ordin k centrat în a: $E[(X-a)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x)\,dx$

• media v.a. X: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$ • varianța $Var(X) = E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^2 f(x)\,dx = E[X^2]-(E[X])^2$

• $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\,dx$ • $E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$ • $Var(aX+b) = a^2 X$

• X și Y independente $E[XY] = E[X]\cdot E[Y]$ și $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

• variabile aleatoare rep. uniform $\Rightarrow f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$ $F(x) = \begin{cases}\frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x<a\\ 1 & x>b\end{cases}$ $P(X\in[c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$

$E[U] = \frac{(a+b)}{2}$ $Var(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$

• variabile aleatoare rep. exponențial $\Rightarrow f(x) = \lambda\cdot e^{-\lambda x}$ $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ $P(X>a) = e^{-\lambda a}$

↳ s.n. prob. de supraviețuire

~~Ex~~ $X \sim Exp(\lambda)$ $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ *(1)

• variabile aleatoare rep. normal $(X\sim N(\mu,\sigma^2))$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $E[X] = \mu$ $Var[X] = \sigma^2$

• repartiția normală standard $(X\sim N(0,1))$: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; Funcția de repartiție: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

φ este simetrică față de 0: $\varphi(z) = \varphi(-z)$, $\forall z\in\mathbb{R}$ pt. că φ este pară $E[X] = 0$ $Var(X) = 1$

*(1) Lipsa de memorie: X repartizată exponențial $\iff P(X\ge s+t\,|\,X\ge s) = P(X\ge t)$