Variabile aleatoare

- $\mathbb{E}[X]$ (media) $= \sum_x x f(x)$
- $Var(X)$ (varianța) $= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- $Cov(X,Y)$ (covarianța) $= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $\varphi(X,Y)$ (coef de corelație) $= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

- repr. marginală (valori ∓ Σ)
- repr. condiție. $(X|Y=4)$ $\frac{Val}{\mathbb{P}(Y=4)}$ (pt. fiecare)
- $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$
- $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow X,Y$ necorelate

$X \sim \begin{pmatrix} & & \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(\underbrace{X < 1/8}_{A} \mid \underbrace{X \geq -1/8}_{B}) = \mathbb{P}(A|B) =$

$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.2}{0.2+0.5} = \frac{0.2}{0.7} = 0,285$

La varianță se elimină term. liberi

$Var(6X+14) = Var(6X) = 36 Var(X)$

Comparații

- Cauchy-Schwartz: $\mathbb{E}[XY] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$
- Jensen: f convexă $\Rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$
  - concavă $\Rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X])$
  - afină $\Rightarrow \mathbb{E}[f(X)] = f(\mathbb{E}[X])$

- Markov: $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$ | $X \geq 0$, $a > 0$
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|X-\alpha| \geq \beta) \leq \frac{Var(X)}{\beta}$, $\beta > 0$
- Chernoff: $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}[e^{tX}] \mid e^{ta}$, $a, t > 0$

① $\mathbb{E}[\log(X)] \leq \log(\mathbb{E}[X])$ (concavă din Jensen)

② $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X]}$ (concavă din Jensen, $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$

③ $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)] = 1$ ($\mathbb{E}[\sin^2(X) + \cos^2(X)]$)

④ $\mathbb{P}(X > c) \leq \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$ (din Markov)

⑤ $\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X \geq Y)$ ($X \perp Y$, nu avem alte info)

⑥ $\mathbb{P}(|X+Y| > 2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X+Y)^4]}{10}$ (cred din Markov)

⑦ $\mathbb{E}[X^Y]$? $\mathbb{E}[X]^{\mathbb{E}[Y]}$

⑧ $\mathbb{P}(X+Y < 10) \leq \mathbb{P}(X > 5$ sau $Y \geq 5)$ (Există cazuri în care $X>5$ sau $Y<5$, dar $X+Y<10$)

⑨ $\mathbb{E}[\min(X,Y)] \geq \min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ (Depinde de $\mathbb{P}(X=x)$, $\mathbb{P}(Y=y)$) (monotonicitate)

⑩ $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}] \underset{?}{=} \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ (sau $\geq$, $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}] \cdot \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{P}(X=x)}{\mathbb{P}(Y=y)}\right]$ (const) $= \mathbb{E}[\frac{X}{Y}] \cdot \frac{\mathbb{P}(X)}{\mathbb{P}(Y)} \geq \mathbb{E}[\frac{X}{Y}]$ <0 (prop. de liniar)

⑪ $\mathbb{E}[X^2(X^2+1)]$? $\mathbb{E}[X^2(Y^2+1)]$ (nu știm nimic în rap cu ele) (sau =)

⑫ $\mathbb{E}[\frac{1}{X}] \geq \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$ (Jensen, $(\frac{1}{x})'' = \frac{2}{x^3}$, conv $x>0$) (sau =)

⑬ $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{\mathbb{E}[X^2]}$? $\frac{\mathbb{E}[X^4]}{\mathbb{E}[X^3]}$ (X poate fi subunitar sau supraunitar) (sau =)

⑭ $\mathbb{P}(|X-Y| > 2) \leq \frac{Var(X)}{2}$ (Chebyshev) (sau =)

Rep. marg: $\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{\lambda(1-p)^j}{j!} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \sim Pois(\lambda p) \Leftrightarrow X \sim Pois(906 \cdot 0,64)$. Analog $Y \sim Pois(\lambda(1-p)) \Leftrightarrow Y \sim Pois(906 \cdot 0,36)$

b) $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j) \Rightarrow X \perp Y$ | c) (semi-greșit) $\mathbb{E}[V] = \lambda = 906$, $Var(V) = \lambda = 906$ | aici voia $X - Y$

Integrala 1 X v.a, cu densitatea de repartiție $f(x) = \frac{x}{64} e^{-\frac{x^2}{128}} 1\{x \geq 0\}$. Calculați raportul: $\frac{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}{\sqrt{Var(X)}}$, unde F e funcția de repartiție a lui X

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Big|_{x \geq 0} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{64} e^{-\frac{t^2}{128}} dt = -e^{-\frac{t^2}{128}}\Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{128}}$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x) = y \mid F \Rightarrow x = F(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{128}}$$

$$e^{-\frac{y^2}{128}} = 1 - x \Leftrightarrow -\frac{y^2}{128} = \ln(1-x) \Leftrightarrow y = \sqrt{128\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)} =$$

$$= 8\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} \Rightarrow F^{-1}(x) = 8\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2]$$

$$F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 8\sqrt{2\ln 4}, \quad F^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 8\sqrt{2\ln\frac{4}{3}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x \frac{x}{64} e^{-\frac{x^2}{128}} dx = \int_0^\infty (-x)\left(e^{-\frac{x^2}{128}}\right)' dx = \underbrace{-x e^{-\frac{x^2}{128}}\Big|_0^\infty}_{0}$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{128}} = \int_0^\infty (-64)\left(e^{-\frac{x^2}{128}}\right)' dx = -64 e^{-\frac{x^2}{128}}\Big|_0^\infty + 64\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{128}} dx \; ; y = \frac{x}{8}$$

$$= -64 + 64 \cdot 8 \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dx}_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}} = -64 + \frac{512\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty (-x^2)\left(e^{-\frac{x^2}{128}}\right)' dx = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{128}}\Big|_0^\infty}_{0} + 64^2\int_0^\infty$$

$$(-1)\left(e^{-\frac{x^2}{128}}\right)' dx = 64^2 \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{x^2}{128}}\Big|_0^\infty + 64^2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{128}} dx}_{8\frac{\sqrt{2\pi}}{2}} = -64^2 + 64^2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$Var(X) = -64^2 + 64^2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + 64^2 - 64 \cdot 8\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \frac{2 \cdot 64^2 \cdot 8\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$Var(X) = -2 \cdot 64^2 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(64^2 \cdot 8 - 512 + 2 \cdot 64^2 \cdot 8\right)$$ (Înlocuim și calc raportul din cerință)

Moneda Poisson Aruncăm repetat o monedă cu p. succes $p = 0.33$. Fie X v.a. care descrie nr. de succese înainte de al 4-lea eșec în aruncări repetate. Rep. lui X, $\mathbb{E}[15X-9]$, $Var(2X+7)$

~~P(X=k)~~ X – nr. de succese înainte de al 4-lea eșec.

$\cancel{P(X=k) = \binom{k-1}{3}(1-p)^{k-4}(1-p)^{...}p^4, k \geq 4}$ $Var(X) = \frac{0,33 \cdot 4}{(0,67)^2} = 3 \mid Var(2X+7) = 4 Var(X) = 12$

$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{3}$; $\mathbb{E}(X) = \frac{0,33 \cdot 4}{0,67} = 1,97$; $\mathbb{E}[15X - 9] = 15 \cdot 1,97 - 9 = 20,55$

Telefoanele lui Guță 7 tel în lot, 2 cu defecte. testăm unu după celălalt până când le depistăm pe ambele. X teste până găsim primu, și Y la fel pt. 2 (teste suplim) | a) rep. comună (X, Y) și rep. marg | b) $\mathbb{E}$, Var, ρ, $\mathbb{E}$, Var c) $X \mid Y = 2$

a) $2 \leq X + Y \leq 6$ | $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}$ | $\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}$ | $\mathbb{P}(X=1, Y=3) = \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}$ | $\mathbb{P}(X=1, Y=4) = \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$

Restul rez (rep. comună)

X\Y	0	1	2	3	4	5
1	0	1/21	1/21	1/21	1/21	2/21
2	0	1/21	1/21	1/21	2/21	0
3	0	1/21	1/21	2/21	0	0
4	0	1/21	2/21	0	0	0
5	1/21	2/21	0	0	0	0

Rep marginale $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6/21 & 5/21 & 4/21 & 3/21 & 3/21 \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/21 & 6/21 & 5/21 & 4/21 & 3/21 & 2/21 \end{pmatrix}$

b) $\mathbb{E}[X] = \frac{6 + 10 + 12 + 12 + 15}{21} = 2,61$ $\mathbb{E}[Y] = 2,38$ ....

$\mathbb{E}[XY] = \sum xy \, \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

c) $X \mid Y = 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1/21}{5/21} & \frac{1/21}{5/21} & \frac{1/21}{5/21} & \frac{2/21}{5/21} & \frac{0}{5/21} \end{pmatrix}$

Pois alegeri prin Pois(906), 0.64 șanse pt X, 0.36 Y, indep. Fie V dif. de voturi | a) rep. cuplului | b) indep c) $\mathbb{E}$, $Var(V)$

a) V – nr. aleg, N – Pois(906); $906 = \lambda$; X – pt. Orban, Y – pt. Câțu, p – prob. un votant alege Y

$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i \mid Y=j \mid V=i+j)\,\mathbb{P}(V=i+j)$ | $\mathbb{P}(X=i = Y=j \mid V=i+j) = \mathbb{P}(X=i \mid V=i+j) = \mathbb{P}(Y=j \mid V=i+j)$

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \frac{(i+j)!}{i!\,j!} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(1-p)}$$

$$\cdot \frac{\lambda(1-p)^j}{j!} = \frac{e^{-906 \cdot 0,64}(906 \cdot 0,64)^i}{i!} \cdot e^{-906 \cdot 0,36} \cdot \frac{906 \cdot 0,36^j}{j!}$$

Scanned with CamScanner

Prob. cond • $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A^c)\cdot P(A^c)}$ $Q(A|B) = \frac{Q(B|A)\cdot Q(A)}{Q(B)}$

• $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$ • A și B indep $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

• A și B indep. cond la C dacă $P(A\cap B|C) = P(A|C)\cdot P(B|C) \Leftrightarrow Q(A\cap B) = Q(A)\cdot Q(B)$

Variabile aleatoare discrete • F. de masă - $f(x) = P(X=x)$ • F. de repartiție a lui X; $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) \le P(X \le x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ ~~indep X și Y~~

• v.a. indep X și Y $\Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B) \Leftrightarrow P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)\cdot P(Y\le y)$

• $\boxed{\text{medie}}$ v.a. $E[X] = \sum_x x\cdot P(X=x)$ | $E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$ | $E[g(X)] = \sum_x g(x)\cdot P(X=x)$

• $\boxed{\text{X și Y indep}} \Rightarrow E[XY] = E[X]\cdot E[Y]$ | • $\boxed{\text{momentul de ordin k}}$: $E[X^k]$; mom de ordin k centrat în a $E[(X-a)^k]$ | • $\boxed{\text{varianța}}$ $Var(X) = E[X^2]-E[X]^2$ | $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ | • dacă X și Y independente $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$ | • abatere standard: $SD(X) = \sqrt{Var(X)}$

Repartiții comune, marginale și condiționate - discret

• F. de masă a vectorului (X,Y) - rep. comună: $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = f_{X,Y}(x,y)$ $x\in A\cap X(\Omega)$, $y\in B\cap Y(\Omega)$

• F. de rep. a vectorului (X,Y): $F_{X,Y}(x,y) = P(X\le x, Y\le y)$ | • $P((X,Y)\in A\times B) = \sum P(X=x, Y=y)$

• rep. marginală X: $P(X=x) = P_X(x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$

• rep. cond. a lui X cond. la A este $P_{X|A}(x) = P(X=x|A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$

• rep. cond. a lui X la Y=y: $P_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$

• media: $E[g(X,Y)] = \sum_x\sum_y g(x,y)P_{X,Y}(x,y)$

• media cond: $E[X|Y=y] = \sum_x x\cdot P_{X|Y}(x|y)$ | • $E[X] = \sum_y E[X|Y=y]P(Y=y)$

Covarianța și corelația • X și Y necorelate $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

• $Cov = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y]$

• $Var(X,Y) = Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$ | • coef. de corelație: $\varphi(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

Variabile aleatoare continue

• v.a. continue: $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx$ | • f densitate de rep $\Leftrightarrow f\ge 0$ și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

• fct. de repartiție $F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ | • $F'(x) = f(x)$

• momentul de ordin k: $E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$ | • mom. de ord. k centrat la a: $E[(X-a)^k] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k f(x)dx$

• media v.a. X: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ | • varianța: $Var(X) = E[(X-E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f(x)dx = E[X^2]-E[X]^2$

• $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ | • $E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$ | • $Var(aX+b) = a^2 X$? nu cred

•

• X și Y independente $E[XY] = E[X]\cdot E[Y]$ și $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$

• var. aleatoare rep. uniform $\Rightarrow f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$ $F(x) = \begin{cases}\frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a\\ 1, & x>a\end{cases}$

$P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot P(B^c)}$ $P(X\in[c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$

Poisson(λ) $E[X] = \lambda$ $Var(X) = \lambda$ $P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

$f(E(X)) \le E(f(X))$

$P(A\cap B^c) = P(A\setminus(A\cap B)) = P(A) - P(A\cap B)$

$P(A|B\cap C) = \frac{P(B|A\cap C)\cdot P(A|C)}{P(B|C)}$

Bezlin Radu-Ștefan → Puiul ♡

Dens. de rep.

• $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)\ge 0$; $\int_a^b f(x)dx = 1$

• Dens. comună: $(X,Y) \Leftrightarrow f(x,y)=0$ $\iint f(x,y) = 1$

• Dens. marginală: $f_X(x) = \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dy$

Binomială $B(n, p)$ $E[X] = np$ $Var(X) = np(1-p)$

$P(X=k) = C_n^k \cdot (1-p)^{n-k} p^k$

$X \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$; $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ $p_1, p_2 \in (0,1)$ (v.a. Neindep.)

a) $P(X=-5, Y=6) = 0{,}12$

$E[X|Y=6] = -2$

$X \backslash Y$	0	6	Σ
-5	0,12	0,12	0,24
1	$p_1 - 0{,}12$	$p_2 - 0{,}12$	0,76
Σ	p_1	p_2	

$X|Y=6 \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ \frac{0{,}12}{p_2} & \frac{p_2 - 0{,}12}{p_2} \end{pmatrix}$

$E[X|Y=6] = -0{,}6 + p_2 - 0{,}12 = -2p_2 \Leftrightarrow -3p_2 = -0{,}72 \Rightarrow p_2 = -0{,}24$

$p_1 = 1 - p_2 = 0{,}76$

b) $X \sim \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0{,}24 & 0{,}76 \end{pmatrix}$ $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0{,}76 & 0{,}24 \end{pmatrix}$

$X \backslash Y$	0	6	Σ
-5	0,12	0,12	0,24
1	0,64	0,12	0,76
Σ	0,76	0,24	

Nu avem voie $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$