Florea Mădălin-Alexandru
Grupa 143, Seria 14, Anul 1

Examen parțial
Logică matematică și computațională

Exercițiul I

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f: A \to B$ o funcție. Să se demonstreze că:

① dacă f este injectivă, iar $(B_i)_{i \in I}$ este o partiție a lui B, atunci $(f^{-1}(B_i))_{i \in I}$ este o partiție a lui A.

rezolvare:

f este injectivă => f' este surjectivă

f' este surjectivă => $(\forall) B_i \subseteq B \ \exists f'(B_i) =$

$= f^{-1}(B_i) \subseteq P(A)$

② dacă f este surjectivă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o partiție a lui A, atunci $(f(A_i))_{i \in I}$ este o partiție a lui B.

rezolvare:

f este surjectivă => f'' este surjectivă

f'' este surjectivă => $(\forall) A_i \subseteq A \ \exists f''(A_i) =$

$= f(A_i) \subseteq P(B)$

Exercițiul II

Fie $(P, \leq)$ și $(Q, \leq)$ poseturi nevide, iar $f: P \to Q$ un morfism de poseturi. Să se demonstreze:

① dacă T este o submulțime convexă a lui Q, atunci $f^{-1}(T)$ este o submulțime convexă a lui P.

rezolvare:

Fie $x, y \in f^{-1}(T)$, $x \leq y$

Fie $\alpha \in [x, y]_P$

Demonstrez că $\alpha \in f^{-1}(T)$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq \alpha \leq y \\ f \text{ morfism} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq f(\alpha) \leq f(y) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(\alpha) \in [f(x), f(y)]_Q \\ T \text{ convexă} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\alpha) \in T \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha \in f^{-1}(T) \Rightarrow f^{-1}(T)$ submulțime convexă a lui P

② dacă f este surjectivă, iar S este o submulțime convexă a lui P, atunci $f(S)$ este o submulțime convexă a lui Q.

rezolvare:

Fie $f(x), f(y) \in f(S)$, $x, y \in S$ cu $f(x) \leq f(y)$.
Fie $\alpha \in [f(x), f(y)]_Q$
f surjectivă

$\Rightarrow \exists\, \beta \in P$ a.î. $\alpha = f(\beta)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(\beta) \leq f(y) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x \leq \beta \leq y \\ S \text{ convexă} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \in S \Rightarrow \alpha = f(\beta) \in f(S)$$

$\Rightarrow f(S)$ submulțime convexă a lui Q

Exercițiul III

Fie $(P, \leq)$ un poset. Să se demonstreze că:

① $< \circ \leq \; = \; \leq \circ < \; = \; <$

rezolvare:

Demonstrez că $< \circ \leq \; \subseteq \; <$:

Fie $(a,b) \in < \circ \leq \Rightarrow \exists c \in P$ a.î. $a < c$ și $c \leq b \Rightarrow$

$\Rightarrow a < b \Rightarrow (a,b) \in <$ (1)

Demonstrez că $< \; \subseteq \; < \circ \leq$:

Fie $(a,b) \in < \Rightarrow a < b$ și $\exists c$ a.î. $a < c$ și $c \leq b \Rightarrow (a,c) \in <$ și $(c,b) \in \leq \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in < \circ \leq$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow < \circ \leq \; = \; <$

Demonstrez că $\leq \circ < \; \subseteq \; <$:

Fie $(a,b) \in \; \leq \circ < \; \Rightarrow \exists c \in P$ a.î. $a \leq c$ și $c < b \Rightarrow$

$\Rightarrow a < b \Rightarrow (a,b) \in <$ (3)

Demonstrez că $< \; \subseteq \; \leq \circ <$

Fie $(a,b) \in < \Rightarrow a < b$ și $\exists c$ a.î. $a \leq c$ și $c < b \Rightarrow (a,c) \in \leq$ și $(c,b) \in < \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in \; \leq \circ <$ (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow \; \leq \circ < \; = \; <$

$\left.\begin{array}{l} < \circ \leq \; = \; < \\ \leq \circ < \; = \; < \end{array}\right\} \Rightarrow < \circ \leq \; = \; \leq \circ < \; = \; <$

② dacă posetul P este finit, atunci $\prec \circ \leq \;=\; \leq \circ \prec \;=\; <$.

Demonstrez că $\prec \circ \leq \;\subseteq\; <$

Fie $(a,b) \in \prec \circ \leq \Rightarrow \exists c \in P$ a.î.

$a \prec c$ și $c \leq b \Rightarrow a < b \Rightarrow (a,b) \in <$ (1)

Demonstrez că $< \;\subseteq\; \prec \circ \leq$

Fie $(a,b) \in <$, P finit $\Rightarrow \exists c$ a.î. $a \prec c$

Atunci $c \leq b \Rightarrow (a,b) \in \prec \circ \leq$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \prec \circ \leq \;=\; <$

Demonstrez că $\leq \circ \prec \;\subseteq\; <$

Fie $(a,b) \in \leq \circ \prec \Rightarrow \exists c \in P$ a.î.

$a \leq c$ și $c \prec b \Rightarrow a < b \Rightarrow (a,b) \in <$ (3)

Demonstrez că $< \;\subseteq\; \leq \circ \prec$

Fie $(a,b) \in < \Rightarrow a < b$ și $\exists c$ a.î. $c \prec b$

$\Rightarrow (a,c) \in \leq$ și $(c,b) \in \prec \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in \leq \circ \prec$ (4)

Din (3) și (4) $\Rightarrow \leq \circ \prec \;=\; <$

$$\left.\begin{array}{l} \prec \circ \leq \;=\; < \\ \leq \circ \prec \;=\; < \end{array}\right\} \Rightarrow \prec \circ \leq \;=\; \leq \circ \prec \;=\; <$$

Exercițiul IV

Fie $(P, \leq)$ un poset. Pentru fiecare $a \in P$, notăm cu $[a) = \{x \in P \mid a \leq x\}$ și cu $Succ(a) = \{x \in P \mid a \prec x\}$

Considerăm următoarea relație binară pe P:

$\rho = \{(x, y) \in P^2 \mid [x) \cap [y) \cap (\{x, y\} \cup Succ(x) \cup Succ(y)) = \emptyset\}$

Să se demonstreze că:

① $\rho \subseteq \|$

Fie $(x, y) \in \rho$. Demonstrez că $x \| y$, i.e.
$x \nleq y$ și $y \nleq x$

Presupun că $x \not\| y$, i.e. $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Dacă $x \leq y \Rightarrow [x) \cap [y) \cap (\{x, y\} \cup Succ(x) \cup Succ(y)) \neq \emptyset$ ↯

Dacă $y \leq x \Rightarrow [x) \cap [y) \cap (\{x, y\} \cup Succ(x) \cup Succ(y)) \neq \emptyset$ ↯

(Contradicții deoarece $x, y \notin \rho$)

Deci $x \| y \Rightarrow \rho \subseteq \|$

② dacă $(P, \leq)$ este o latice (Ore) finită (și nevidă), iar ρ este nevidă, atunci laticea P este nedistributivă.

$(P, \leq)$ latice Ore finită $\Rightarrow (P, \leq)$ poset a.î.
$(\forall) x, y \in P$ $(\exists)$ $\inf\{x, y\} \in P$ și $\sup\{x, y\} \in P$

P nevidă $\Rightarrow$ pentru $(\forall)$ $x, y, z \in P$, $x \wedge (y \vee z) =$

$= (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ fals $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P nedistributivă

Exercițiul V

Considerăm laticile $(M_k, \leq)$ și $(M_j, \leq)$ date prin diagramele Hasse de mai jos. Fie L_k duala laticii M_k, iar laticea L_j definită în funcție de paritatea lui k astfel:

$$L_j = \begin{cases} \mathcal{L}_2 \oplus M_j, & \text{dacă } 2 \mid k, \\ M_j \oplus \mathcal{L}_2, & \text{altfel}, \end{cases}$$

unde $\mathcal{L}_2$ este lanțul cu exact 2 elemente

$nr = 041$

$g = 0$

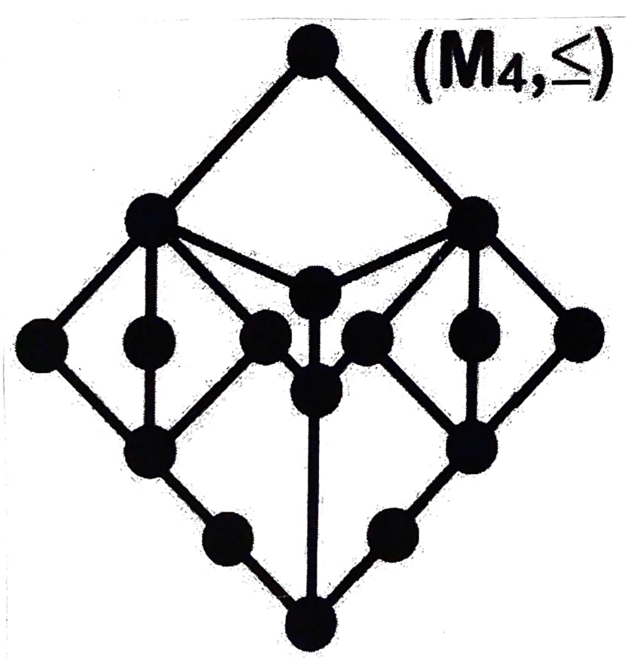
$i = 4$

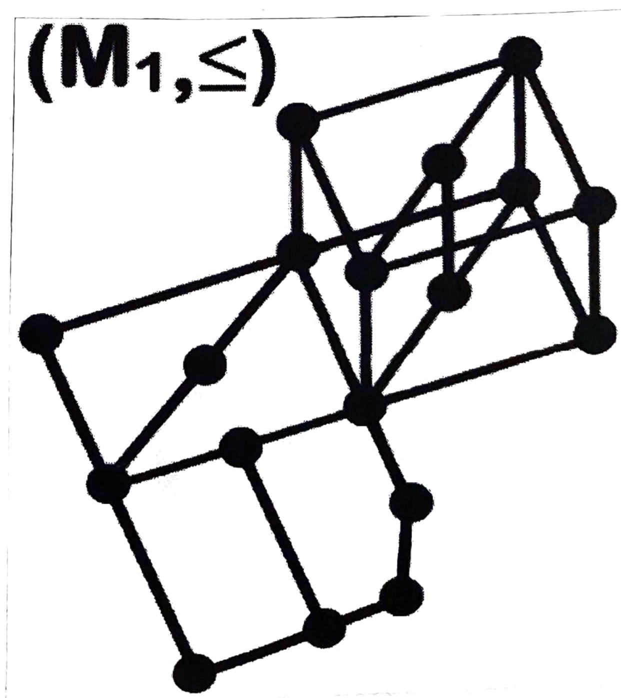
$j = 1$

$h = 10 \cdot g + i = 10 \cdot 0 + 4 = 4$

$k = h = 4$

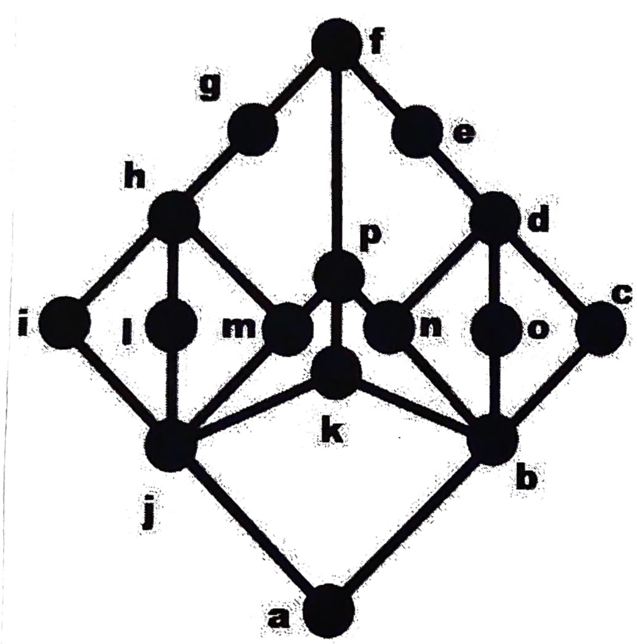
Deci $M_k = M_4$ și $M_j = M_1$.



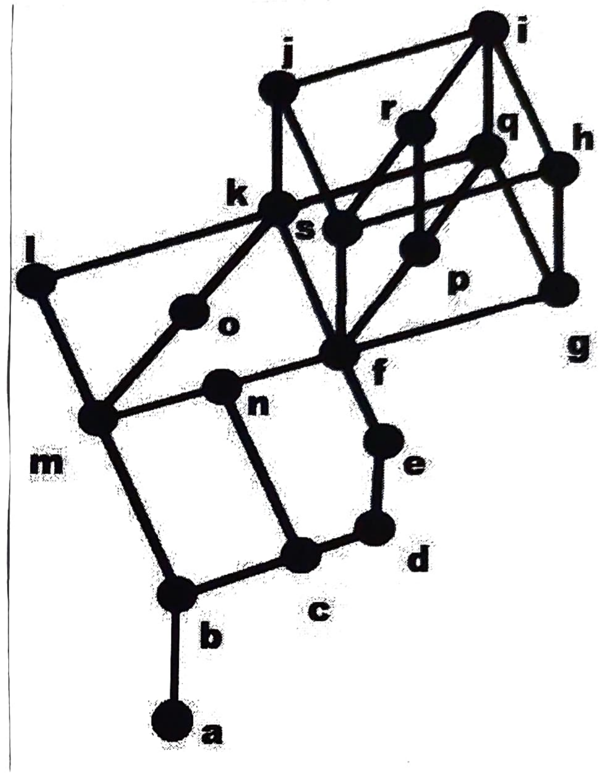


Să se desenează diagramele Hasse ale laticilor Lk și Lj și să se etichetează elementele acestor latici pe aceste diagrame.

$L_k = L_4$

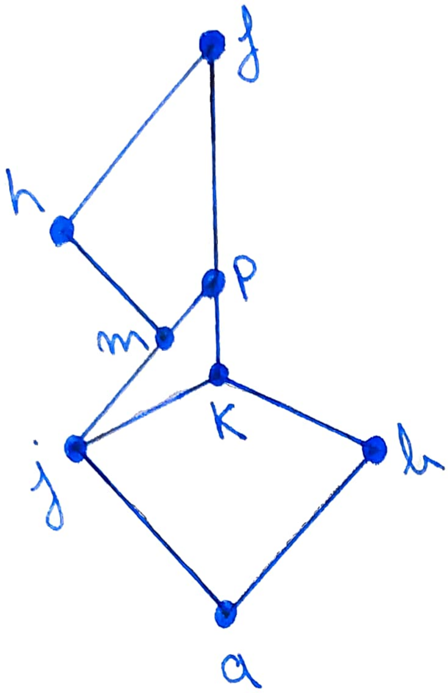


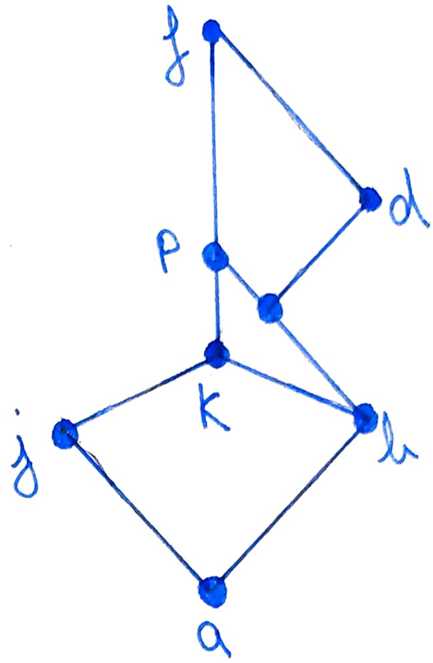
$L_j = L_1$



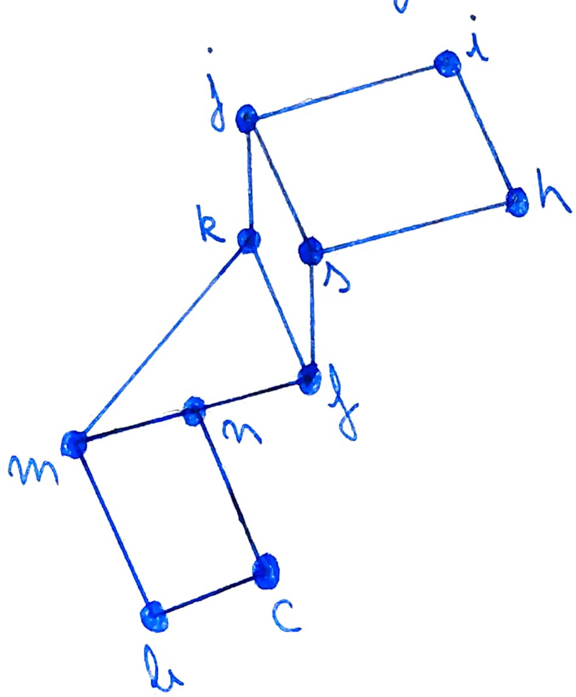
① să se enumere toate sublaticele Sk ale lui Lk și Sj ale lui Lj care sunt (izomorfe cu) produse directe de lanțuri și sunt maximale relativ la această proprietate, adică, pentru orice sublatici Tk a lui Lk și Tj a lui Lj, avem: dacă $S_k \subsetneq T_k$, atunci Tk nu este (izomorfă cu) un produs direct de lanțuri, iar, dacă $S_j \subsetneq T_j$, atunci Tj nu este (izomorfă cu) un produs direct de lanțuri.

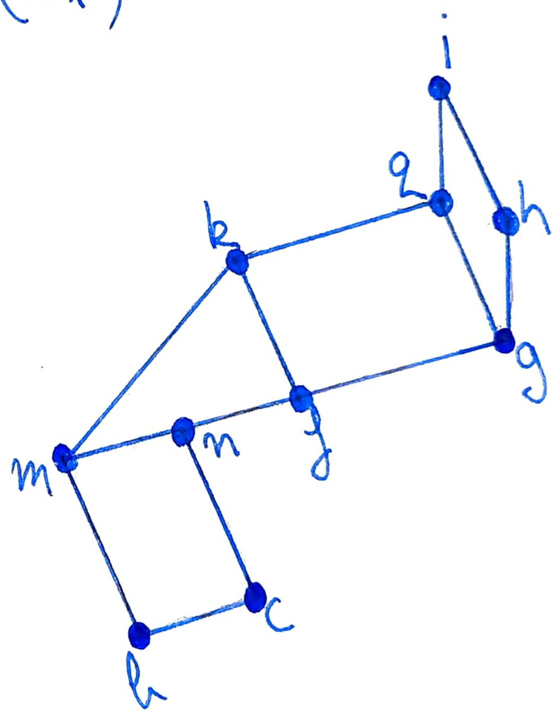
· sublaticile S_K ale lui L_K (L_4)



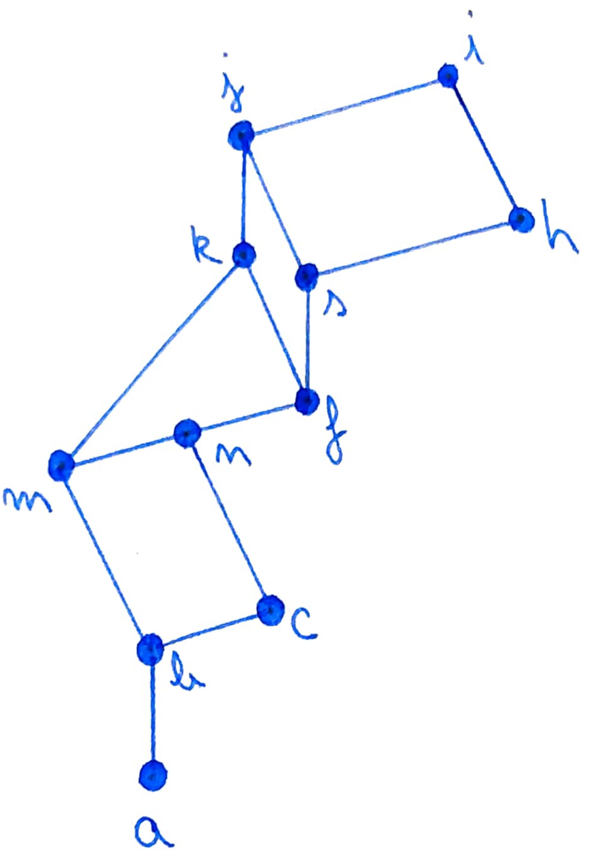


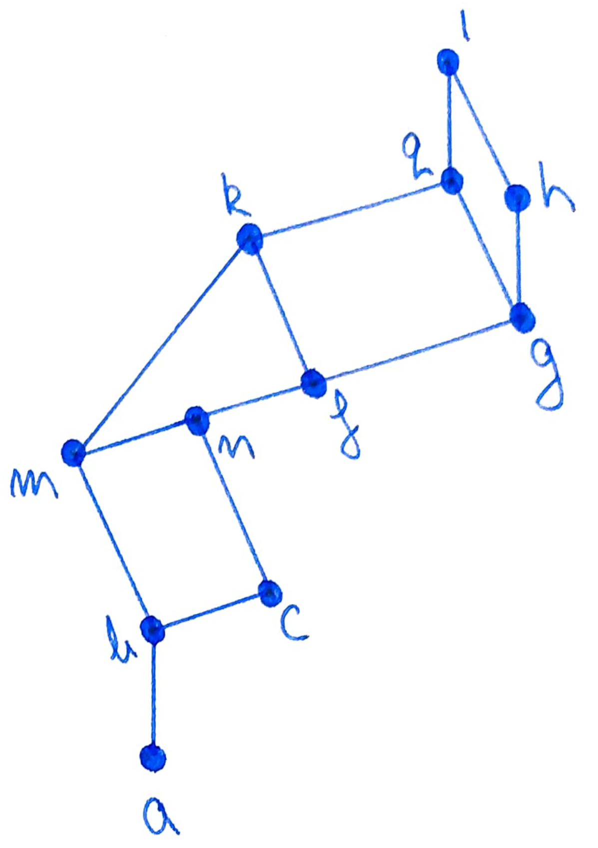
· sublaticile S_j ale lui L_j (L_1)





② să se enumere toate sublaticile distributive maximale ale lui L_j, adică toate sublaticile S_j ale lui L_j care sunt latici distributive și au proprietatea că, dacă T_j este o sublatice a lui L_j cu $S_j \subsetneq T_j$, atunci laticea T_j nu este distributivă.





③ pentru fiecare dintre sublaticile S_j ale lui L_j enumerate la punctul ① și fiecare dintre sublaticile S_j ale lui L_j enumerate la punctul ②, să se enumere toate morfismele surjective de latici de la L_k la S_j, iar, dacă nu există astfel de morfisme pentru una dintre aceste latici S_j, să se precizeze acest lucru

④ pentru fiecare dintre sublaticile S_k ale lui L_k enumerate la punctul ①, să se enumere toate morfismele injective de latici de la S_k la L_j, iar, dacă nu există astfel de morfisme pentru una dintre aceste latici S_k, să se precizeze acest lucru.