Operații algebrice / Legi de compoziție

Def: O operație algebrică (lege de comp) "$*$" pe mulțimea A este o funcție $*: A \times A \to A$.

Notație: În loc de $*(a,b)$ vom scrie $a * b$

Def 2: Fie "$*$" o lege de compoziție pe $A \neq \emptyset$. Atunci legea se numește:

1) asociativă: $\forall x, y, z \in A \quad (x*y)*z = x*(y*z) \; (= x*y*z)$

2) comutativă: $\forall x, y \in A \quad x*y = y*x$

~~legea "sn"~~

3) element neutru: $\exists e \in A \; \forall a \in A \quad a*e = e*a = a$

Parte stabilă

O submulțime nevidă H a lui $A (\neq \emptyset)$ s.n **parte stabilă** a lui A în raport cu $*$ dacă $x*y \in H \; \forall x, y \in H$.

Monoid

- Fie $M \neq \emptyset$ și "$*$" o lege de compoziție pe M. Atunci perechea $(M, *)$ s.n **monoid** dacă "$*$" e asociativă și are element neutru.
- Monoid abelian (comutativ) $\to$ "$*$" comutativă

Monoizi comutativi: $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$

Grupuri + monoizi: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$

- Fie $(M, *)$ un monoid cu elementul neutru e. Un element $a \in M$ s.n. element **inversabil / simetric** dacă există $a' \in M$ a.î. $a * a' = a' * a = e$
- Un element al unui monoid poate admite invers (inverse) la st (sau la dr) fără a fi inversabil

Notații:

$(M, *)$ monoid $\rightsquigarrow$ element neutru $= e \longrightarrow$ inversul lui $a = a'$

$(M, +)$ monoid $\rightsquigarrow$ " — " $= 0 \longrightarrow$ — " — $-a$

$(M, \cdot)$ $\rightsquigarrow$ " — " $= 1 \longrightarrow$ — " — a^{-1}

Reguli de calcul pt monoid $(M, \cdot)$

1. Pt $a_1, \dots, a_n \in M$, valoarea produsului $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ depinde de modul cum s-au pus parantezele

2. $a_1, \dots, a_n \in \underline{U(M)}$ atunci $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \in U(M)$, și
$(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_1^{-1}$

3. $a, b \in M$. Atunci $a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ ori}}$, $a^0 = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m \cdot a^n = (a^m)^n$ $\forall m, n \geq 0 \to$ valabil pt $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ dacă a e invers

$ab = ba \rightsquigarrow (ab)^n = a^m \cdot b^n$ $\forall n \geq 0 \to$ " ——— "a, b sunt inversi"
a inversabil, $n \in \mathbb{N}$ $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$

Grup

Def: Un monoid $(M, *)$ este grup dacă $(\forall)$ $a \in M$ este inversabil.
$(M, *)$ - monoid $\rightsquigarrow U(M) \overset{def}{=}$ mulțimea elementelor inversabile ale lui M în raport cu "$*$"
$U(M) = \{a \in M \mid (\exists) a' \in M$ a.î. $a * a' = a' * a = e\}$
$(M, *)$ e grup $\Leftrightarrow U(M) = M$
$(M, *)$ monoid $\longrightarrow (U(M), *) \to$ grup

Morfism de monoizi

Folosim pt monoizi op. multiplicativă

Fie $(M_1, \cdot), (M_2, \cdot)$ 2 monoizi. O funcție $f: M_1 \to M_2$ s.n morfism de monoizi dacă:

1. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ $\forall x, y \in M_1$
2. $f(1_{M_1}) = 1_{M_2}$ (1_{M_1} - element neutru M_1)

Un morfism de monoizi bijectiv s.n. <u>izomorfism</u> de monoizi

Proprietățile morfismelor de monoizi/Grupuri

1. Compunerea a 2 morfisme de monoizi = morfism de monoizi
2. Inversul unui izomorfism de monoizi = izomorfism
3. Dacă $f: M_1 \to M_2$ este morfism de monoizi/grupuri și $a \in M$, atunci:
   i) $f(a^n) = (f(a))^n \ \forall n \geq 1$
   ii) Dacă $a \in U(M_1) \Rightarrow f(a) \in U(M_2)$ și $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$;
   în particular: $f(a^n) = (f(a))^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Grupuri. Morfisme de grupuri. Subgrupuri

- Fie $(G_1, *)$ și $(G_2, \cdot)$ 2 grupuri. Definim produsul direct al celor 2 grupuri ~~astfel~~: $(G_1 \times G_2, \square) \to$ grup
  unde $G_1 \times G_2 = \{(a,b) \mid a \in G_1, b \in G_2\}$ și
  $$(a,b) \square (c,d) \overset{def}{=\!=} (a*c, b \cdot d)$$
- Fie $(G_1, *)$; $(G_2, \cdot)$ 2 grupuri. O funcție $f: G_1 \to G_2$ s.n morfism de grupuri dacă $f(x*y) = f(x) \cdot f(y) \ \forall x, y \in G_1$
- Un morfism de grupuri bijectiv = izomorfism de grupuri

Subgrupuri

- Fie $(G, \cdot)$ un grup. O submulțime nevidă H a lui G. s.n subgrup al lui G și notăm $H \leq G$, dacă H - parte stabilă a lui G închisă la luarea inversului, i.e $\forall x, y \in H$ avem $x \cdot y \in H$ și $x^{-1} \in H$
  $\Updownarrow$ echivalent
- Fie $(G, \cdot)$ un grup. O submulțime nevidă H a lui G este subgrup $\Leftrightarrow \forall x, y \in H$ avem $x y^{-1} \in H$ - notație aditivă pt legi

Pt $(G, +)$ scriem $\Leftrightarrow \forall x, y \in H \ x + (-y) \in H$

- Subgrupuri pt $(\mathbb{Z}, +) \to$ submulțimi de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{N}$

• Dacă $(G, \cdot)$ - grup atunci G are 2 subgrupuri ($|G| > 1$) $\{1_G\}$ și G.
(Dacă $|G| = 1 \Rightarrow G = \{e\}$)

• $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

• Fie G grup, $H_1, H_2 \leq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \leq G$.

Teoremă: Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri.

1) Dacă $H \leq G \rightsquigarrow f(H) \leq G'$ ($f(H) = \{f(x) \mid x \in H\}$)

2) Dacă $H' \leq G' \rightsquigarrow \underbrace{f^{-1}(H')}_{\text{preimaginea lui } H' \text{ prin } f} \leq G$ ($f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$)

Obs: $\underset{\substack{\| \\ f(G)}}{Im(f)} \leq G'$ și $f^{-1}(\{1_{G'}\}) \leq G$

$\{1_{G'}\} \leq G'$

Nucleul morfismului f - $Ker(f)$

$f^{-1}(\{1_{G'}\})$ s.n. cu $Ker(f)$ = nucleul morfismului f.

• Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci

f inj $\Leftrightarrow Ker(f) = \{1_G\}$. ($1_G \in Ker(f)$) $\forall$ morf. de gr. $f: G \to G'$