R14

$f(n) = 2n$, $g(n) = n$ pentru $n = 2k + 1$ şi $g(n) = 2n$ pentru $n = 2k$, atunci limita de mai sus nu există, dar $g \in \Theta(f)$ deoarece pentru orice n avem $\frac{1}{2}f(n) \leq g(n) \leq f(n)$.

1.6 Aplicaţii

1.6.1 Reţele de comunicaţii

O reţea de comunicaţie se poate descrie printr-o reţea $G = (N, A, b, c)$. Astfel, pot fi descrise traseele dintre localităţi pe şosele, autostradă sau cale ferată, traseele din localităţi ale autobuzelor, troleibuzelor sau tramvaielor, traseele aeriene sau maritime, reţelele cristalografice, geografice, topografice, cartografice, cadastrale, hidrografice, de irigaţii, de drenaj, de alimentare cu apă, gaze sau energie electrică, de termoficare, telefonice, telecomunicaţii, telegrafice, radio, televiziune, calculatoare. De asemenea repartiţiile de materiale sunt reţele de comunicaţii, fluxuri tehnologice, programele de investiţii, de organizare a muncii, sistemul informaţional. Totodată sunt reţele aparatul circulator al sângelui, sistemul nervos, sistemul limfatic etc.

Exemplul 1.30. În figura 1.15 este reprezentată reţeaua $G = (N, A, b)$ a traseelor pe şosele din judeţul Braşov, unde fiecare nod $x \in N$ reprezintă un oraş din judeţ, o muchie $[x, y] \in A$ reprezintă faptul că oraşele x, y sunt conectate printr-o şosea modernizată şi b reprezintă funcţia distanţă. S-a considerat reţeaua $G = (N, A, b)$ neorientată, deoarece pe o şosea $[x, y]$ se circulă în ambele sensuri. Pe fiecare muchie s-a trecut distanţa în kilometri.

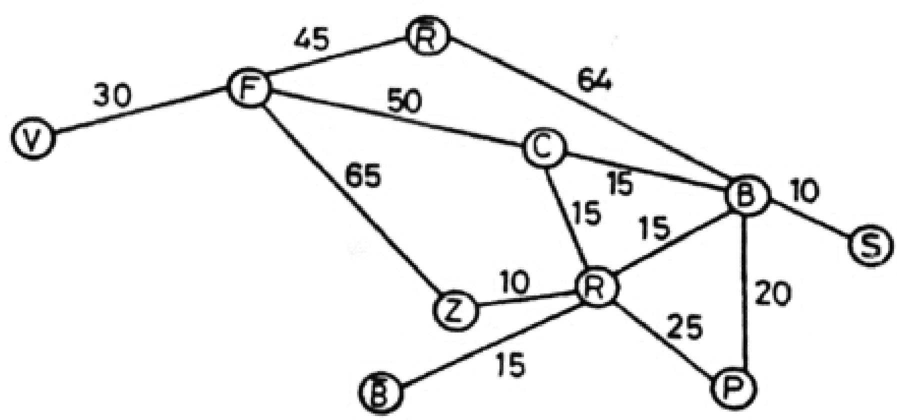

Fig.1.15 B - Braşov; $\overline{B}$ - Bran; C - Codlea; F - Făgăraş; P - Predeal; R - Râşnov; $\overline{R}$ - Rupea; S - Săcele; V - Victoria; Z - Zărneşti

Exemplul 1.31. În digraful din figura 1.16. este schematizată circulaţia sângelui în corpul omenesc.

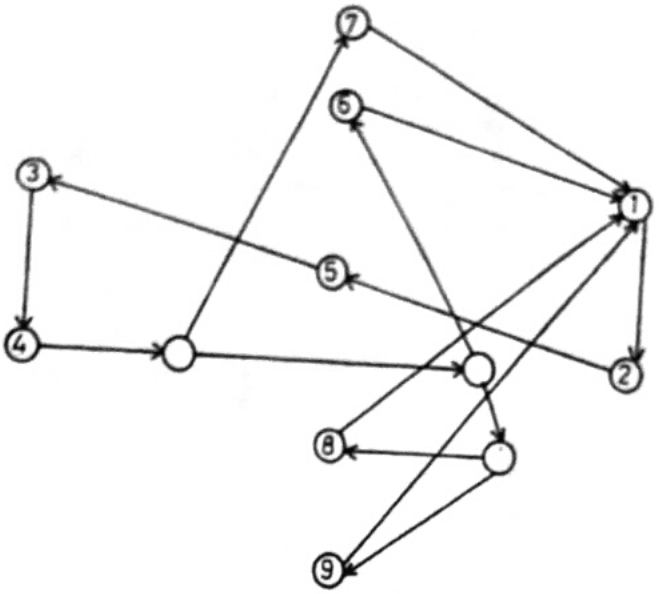

Fig.1.16 1 - auricul drept; 2 - ventricul drept; 3 - auricul stâng; 4 - ventricul stâng; 5 - plămâni; 6 - membre superioare; 7 - cap; 8 - trunchi celiac; 9 - membre inferioare.

Dacă pentru o persoană ar exista arcul $(1,3)$, atunci această persoană ar avea boala lui Roger, iar dacă pentru o persoană se instituie comunicarea directă de la nodul 4 la nodul 2, în digraf ar apărea arcul $(4,2)$, atunci persoana decedează.

Multe alte aplicaţii ale grafurilor vor fi prezentate în capitolele următoare.

1.6.2 Probleme de programare dinamică

Metoda programării dinamice se aplică problemelor de optimizare în care soluţia poate fi privită ca rezultatul unui şir de decizii din mulţimea deciziilor $D = \cup_{i=1}^{n} D_{0i}$.

Fie sistemul S cu mulţimea stărilor X. Presupunem că trecerea sistemului S dintr-o stare în alta are loc numai în urma unei decizii. Un vector $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_n), x_i \in X, i = 0, \ldots, n$ reprezintă o soluţie şi un vector $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_n), d_i \in D, i = 1, \ldots, n$ reprezintă o politică a sistemului S. Un vector $\overline{x}_{ij} = (x_i, \ldots, {}_j)$ este o soluţie parţială şi un vector $\overline{d}_{ij} = (d_{i+1}, \ldots, d_j)$ $0 \leq i < j \leq n$, este o subpolitică a sistemului S. Printre politicile $\overline{d}$ care determină evoluţia sistemului S dintr-o stare iniţială x_0 într-o stare finală x_n poate exista o politică $\overline{d}^* = (d_1^*, \ldots, d_n^*)$ care optimizează funcţia obiectiv dată. Această politică se numeşte *politică optimă* şi soluţia $\overline{x}^* = (x_0^*, \ldots, x_n^*)$ determinată de politica optimă $\overline{d}^*$ se numeşte *soluţie optimă*.

Principiul optimalităţii are următoarea formulare:

Dacă $\overline{x}^* = (x_0^*, \ldots, x_n^*)$ este o soluţie optimă atunci oricare soluţie parţială $\overline{x}_{ij} = \left(x_i^*, \ldots, x_j^*\right)$ a sa este optimă.

Deci programarea dinamică se poate aplica problemelor pentru care optimul total implică optimul parţial.

Analiza de luarea deciziilor începând cu starea iniţială x_0, continuând cu stările $x_1, x_2, \ldots$ şi terminând cu starea finală x_n se numeşte *analiza prospectivă*. Analiza de luarea deciziilor începând cu starea finală x_n, continuând cu stările $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ şi terminând cu starea iniţială x_0 se numeşte *analiza retrospectivă*.

În analiza prospectivă, dacă sistemul S se află în starea x_{i-1} şi se ia decizia $d_i \in D_{0i}(x_{i-1})$ atunci S trece în starea x_i, $i = 1, \ldots, n$. Această evoluţie poate fi descrisă prin relaţiile:

$$x_i = t_{0i}(x_{i-1}, d_i),\ d_i \in D_{0i}(x_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n.$$

Fie $u_{0i}(x_i, d_i)$ utilitatea trecerii sistemului S de la starea x_{i-1}, la starea x_i, $i = 1, \ldots, n$. utilitatea totală este funcţia $f_{0n}(u_{01}, \ldots, u_{0n})$ şi reprezintă funţia obiectiv. Considerăm cazul aditiv $f_{0n}(u_{01}, \ldots, u_{0n}) = u_{01} + \ldots + u_{0n}$.

Fie X_{0i}, $0 \leq i \leq n$, mulţimea stărilor accesibile la momentul i. prin urmare, avem:

$$X_{0i} = \{y | y \in X,\ \text{există } x \in X_{0i-1} \text{ şi } d \in D_{0i}(x) \text{ astfel încât } y = t_{0i}(x, d)\}.$$

Oricărui proces secvenţial de decizii i se poate asocia un digraf $G = (N, \Gamma)$ unde $N = \cup_{i=0}^{n} X_{0i}$, $\Gamma(x) = \{y | y \in X_{0i},\ y = t_{0i}(x, d),\ d \in D_{0i}(x)\}$ pentru orice $x \in X_{0i-1}$. Digraful poate fi exprimat echivalent prin $G = (N, A)$, unde $(x, y) \in A$ dacă şi numai dacă $y \in \Gamma(x)$. Un drum în digraful G de la starea $x_{i-1} \in X_{0i-1}$ la starea $x_j \in X_{oj}$, $1 \leq i < j \leq n$, determină în mod unic o subpolitică $\overline{d}_{ij} = (d_i, \ldots, d_j)$ şi reciproc. În particular, un drum de la starea iniţială $x_0 \in X_{00}$ la starea finală $x_n \in X_{0n}$ determină în mod unic o politică $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ şi reciproc. Digraful $G = (N, A)$ are o structură particulară deoarece mulţimea nodurilor N este partiţionată în $n+1$ mulţimi $X_{00}, \ldots, X_{0n}$ şi pentru orice arc $(x, y) \in A$, dacă $x \in X_{0i-1}$ atunci $y \in X_{0i}$. Un digraf $G = (N, A)$ cu aceste proprietăţi se numeşte *digraf secvenţial*. Într-un digraf secvenţial $G = (N, A)$ nu există circuite. Definim funcţia $v : A \to \Re$ prin $v(x, y) = u_{0i}(x, d)$, dacă $x \in X_{0i-1}$, $d \in D_{0i}(x)$ pentru orice arc $(x, y) \in A$. Astfel, în cazul funcţiei obiectiv aditive, problema determinării unei politici optime este echivalentă cu problema determinării unui drum de valoare optimă (minimă sau maximă) în digraful $G = (N, A)$.

Exemplul 1.32. Se consideră sistemul S cu mulţimea stărilor $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ şi mulţimea stărilor iniţiale $X_{00} = \{x_0\}$. Mulţimile deciziilor $D_{0i}(x)$ şi transformările $t_{0i}(x, d)$ sunt următoarele:

$D_{01}(x_0) = \{d_1, d_2\}$, $t_{01}(x_0, d_1) = x_1$, $t_{01}(x_0, d_2) = x_2$;
$D_{02}(x_1) = \{d_3, d_4\}$, $t_{02}(x_1, d_3) = x_1$, $t_{02}(x_1, d_4) = x_2$;
$D_{02}(x_2) = \{d_5, d_6\}$, $t_{02}(x_2, d_5) = x_1$, $t_{02}(x_2, d_6) = x_0$;
$D_{03}(x_0) = \{d_1, d_7\}$, $t_{03}(x_0, d_1) = x_1$, $t_{03}(x_0, d_7) = x_0$,
$D_{03}(x_1) = \{d_3, d_4, d_8\}$, $t_{03}(x_1, d_3) = x_1$, $t_{03}(x_1, d_4) = x_2$, $t_{03}(x_1, d_8) = x_0$,
$D_{03}(x_2) = \{d_5\}$, $t_{03}(x_2, d_5) = x_1$.

Rezultă că mulţimile X_{0i} ale stărilor accesibile sunt următoarele: $X_{00} = \{x_0\}$, $X_{01} = \{x_1, x_2\}$, $X_{02} = \{x_0, x_1, x_2\}$, $X_{03} = \{x_0, x_1, x_2\}$. Digraful secvenţial $G = (N, \Gamma)$ este definit în modul următor: $N = X_{00} \cup X_{01} \cup X_{02} \cup X_{03} = \{x_0, x_1, x_2\}$. Aplicaţia Γ este definită astfel:

Dacă $x \in X_{00}$ atunci $\Gamma(x) = \{x_1, x_2\}$ pentru $x = x_0$

Dacă $x \in X_{01}$ atunci

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{x_1, x_2\} & \text{pentru} \quad x = x_1 \\ \{x_0, x_1\} & \text{pentru} \quad x = x_2 \end{cases}$$

Dacă $x \in X_{02}$ atunci

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{x_0, x_1\} & \text{pentru} \quad x = x_0 \\ \{x_0, x_1, x_2\} & \text{pentru} \quad x = x_1 \\ \{x_1\} & \text{pentru} \quad x = x_2 \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a digrafului $G = (N, \Gamma)$ este prezentată în figura 1.17.

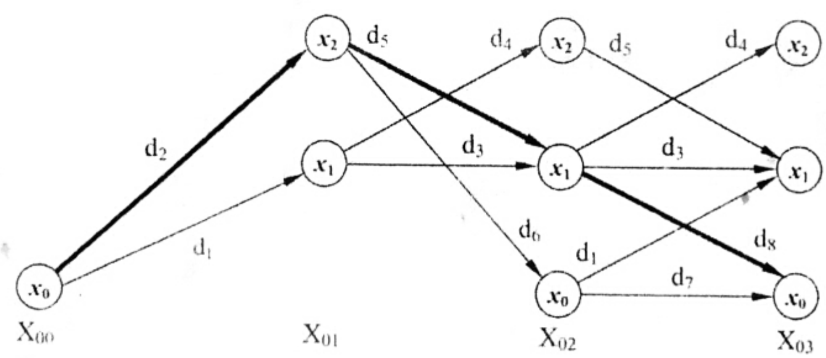

Fig.1.17

Drumul care corespunde stării iniţiale x_0 şi politicii (d_2, d_5, d_8) este trasat cu linie groasă.

Digraful secvenţial $G = (N, \Gamma)$ asociat unui proces secvenţial de decizii definit ca mai sus este un digraf dinamic care pune în evidenţă natura secvenţială în timp a procesului. Se poate asocia procesului de decizii un alt digraf care este un digraf static şi nu mai pune în evidenţă natura secvenţială a procesului. În acest caz digraful static $G' = (N', \Gamma')$ se defineşte în modul următor.

$$N' = X, \ \Gamma'(x) = \{y | y \in X, \ y = t_0(x, d), \ d \in D_0(x)\}, \ x \in N'$$

$$t_0(x, d) = t_{0i}(x_{i-1}, d_i) = \ldots = t_{0j}(x_{j1}, d_j) \text{ dacă}$$

$$d = d_i = \ldots = d_j, \ D_0(x) = \cup_{i=1}^{n} D_{0i}(x), \ x \in N'.$$

Exemplul 1.33. Se consideră sistemul S cu mulţimea stărilor X, mulţimea stărilor iniţiale X_{00}, mulţimea deciziilor $D_{0i}(x)$ şi transformările $t_{0i}(x, d)$ prezentate în exemplul 1.32. Reprezentarea grafică a digrafului $G' = (N', \Gamma')$ este prezentată în figura 1.18.

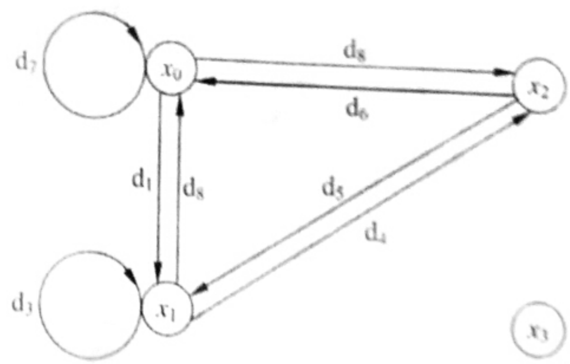

Fig. 1.18