

# Fonctions de Parking Classiques et Rationnelles

Tessa Lelièvre-Osswald  
Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès  
Equipe : IRIF - Pôle Combinatoire

20 août 2020

## Contexte général

La *combinatoire* est un domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis *structurés* par leur énumération et leur comptage. Se divisant en plusieurs branches, nous abordons dans ce rapport deux branches principales : la *combinatoire énumérative*, domaine le plus classique, basé sur le dénombrement ; et la *combinatoire bijective*, consistant à déduire une égalité entre les résultats de comptage de deux classes combinatoires qui sont en bijection.

Une *classe combinatoire* est un ensemble  $\mathcal{A}$  muni d'une application  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ , appelée *taille*. Celle ci permet de définir et compter l'ensemble des éléments de  $\mathcal{A}$  de taille  $n$ . Par exemple, il y a  $2^n$  mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , et  $n!$  permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Un exemple de bijection sur les permutations est donné en annexe A (exemple 0).

On s'intéresse ici en particulier à des objets combinatoires appelés *fonctions de parking*. Introduites en 1966 par Konheim et Weiss ([1]), les fonctions de parking sont les séquences d'entiers positifs dont le nombre d'éléments *inférieurs ou égaux* à  $i$  est *supérieur ou égal* à  $i$  pour tout entier  $i$  entre 1 et  $n$ .

Leur appellation vient du problème de hachage suivant : soient un parking contenant  $n$  places numérotées de 1 à  $n$ , et  $n$  voitures à garer. A chaque voiture  $i$  est associé un entier  $a_i$ , indiquant que cette voiture doit être garée à une place dont le numéro est supérieur ou égal à  $a_i$ . La séquence  $(a_1, \dots, a_n)$  est alors appelée fonction de parking si et seulement si il existe une configuration de garage des  $n$  voitures respectant les contraintes données par les entiers  $a_i$ .

Longuement étudiées, les principaux résultats de comptage émanent des travaux de Stanley ([2, 3]), Kreweras ([4]), et Edelman ([5]). Plus récemment, la notion de fonction de parking *rationnelle* à été introduite et étudiée – entre autres – dans les travaux d'Armstrong, Loehr et Warrington ([6]), ainsi que de Bodnar ([7]). Bien que les travaux mentionnées ci-dessus concernent principalement le comptage des fonctions de parking et des relations de leurs posets, ces dernières ont des applications dans de nombreux domaines tels que l'analyse et la géométrie.

## Problèmes étudiés

Dans cet article, nous abordons deux principaux problèmes.

Premièrement, à notre connaissance, les posets proposés jusque là pour les fonctions de parking dépendent tous de bijections entre les fonctions de parking et une autre structure combinatoire, pour laquelle un poset était déjà défini. Cela rend la définition d’une relation de couverture assez lourde, et rajoute des étapes au processus de comparaison.

Ensuite, l’extension au cas rationnel étant en plein essor dans les travaux les plus récents, de nombreux concept restent à redéfinir en dehors du cas classique.

## Contribution proposée

Nous présentons ici un nouveau poset pour les fonctions de parking, dans le cas classique ainsi que dans le cas rationnel. Ainsi, nous introduisons une relation de couverture plus élégante, définie sans structure intermédiaire. De plus, celle-ci est en bijection avec une relation naturelle que nous définissons sur les chemins de Dyck, qui sont une structure élémentaire de la combinatoire.

Enfin, nous reprenons la notion d’*arbres de parking* donnée par Delcroix-Oger, Josuat-Vergès et Randazzo ([8]), afin d’en donner une version rationnelle.

Pour ces deux contributions, le cas rationnel est traité pour toute paire d’entiers premiers entre eux – sans se limiter au cas  $a < b$  comme il a pu être fait dans certains travaux.

Une version longue de ce rapport est disponible ici<sup>1</sup>, ainsi que l’encodage en Sage des principales notions abordées dans les références [1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 8], et des constructions que nous présentons.

## Arguments en faveur de sa validité

Les posets introduits dans le cas classique sont à l’origine de nos deux résultats principaux.

Dans le cas des fonctions de parking *primitives*, nous exhibons une preuve du Théorème 14, qui donne le nombre d’intervalles dans le poset. Quant à son équivalent pour le cas non-primitif, nous établissons la Conjecture 18 sur le nombre d’intervalles, vérifiée sur les cas  $n = 1, \dots, 8$ .

## Bilan et perspectives

En conclusion, nous avons maintenant des posets définis de manière directe pour les quatre types de fonctions de parking : classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives.

Par la suite, il sera nécessaire de trouver une preuve de la Conjecture 18, ou bien si elle doit être réfutée, d’exhiber une formule comptant les intervalles dans notre poset des fonctions de parking classiques. Quant au cas rationnel, il faudra également trouver des formules exprimant le nombre de relations.

Enfin, l’on pourrait également vouloir étudier les relations de couvertures sur les arbres de parking rationnels.

---

1. [github.com/tessalsifi/ParkingFunctions](https://github.com/tessalsifi/ParkingFunctions)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Fonctions de Parking . . . . .	3
1.2	Chemins de Dyck . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Un poset pour les fonctions de parking classiques</b>	<b>5</b>
2.1	Le cas primitif . . . . .	5
2.2	Le cas général . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Un poset pour les fonctions de parking rationnelles</b>	<b>10</b>
3.1	Fonctions de parking rationnelles . . . . .	10
3.2	Chemins de Dyck rationnels . . . . .	11
3.3	Posets rationnels . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Arbres de parking rationnels</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Exemples pour l'Introduction</b>	<b>21</b>
<b>B</b>	<b>Exemples pour la Partie 2</b>	<b>23</b>
<b>C</b>	<b>Exemples pour la Partie 3</b>	<b>27</b>

## 1 Introduction

Nous commençons par rappeler les définitions et résultats principaux sur les structures utilisées dans cet article.

### 1.1 Fonctions de Parking

En annexe A, les exemples 1 à 4 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

**Définition 1** (Fonction de Parking). Une *fonction de parking* est une séquence d'entiers strictement positifs  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  dont le tri croissant  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  respecte la condition suivante :  $b_i \leq i$  pour tout  $i \leq n$ .

En d'autres termes,  $\#\{i \mid a_i \leq k\} \geq k \ \forall k \leq n$ .

On note  $\mathcal{PF}_n$  l'ensemble des fonctions de parking de longueur  $n$ .

**Théorème 2** (Konheim et Weiss, 1966). *Soit  $pf_n$  le cardinal de  $\mathcal{PF}_n$ . Nous avons*

$$pf_n = (n+1)^{n-1}.$$

**Définition 3** (Fonction de Parking Primitive). Une fonction de parking  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est dite *primitive* si elle est déjà triée en ordre croissant.

On note  $\mathcal{PF}'_n$  l'ensemble des fonctions de parking primitives de longueur  $n$ .

**Théorème 4** (Stanley, 1999). Soit  $pf'_n$  le cardinal de  $\mathcal{PF}'_n$ . Nous avons

$$pf'_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ce nombre est le  $n^e$  nombre de Catalan  $Cat(n)$ .

## 1.2 Chemins de Dyck

En annexe A, les exemples 5 à 8 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

**Notation.** On note par  $|w|_s$  le nombre d'occurrences du symbole  $s$  dans le mot  $w$ .

**Définition 5** (Mot de Dyck). Un *mot de Dyck* est un mot  $w \in \{0, 1\}^*$  tel que :

- pour tout *préfixe*  $w'$  de  $w$ ,  $|w'|_1 \geq |w'|_0$ .
- $|w|_0 = |w|_1$ .

Un mot de Dyck de longueur  $2n$  peut être représenté par un *chemin* allant du point  $(0, 0)$  au point  $(n, n)$ , et restant au dessus de l'axe  $y = x$ , appelé *chemin de Dyck* :

- Chaque 1 correspond à un *pas Nord*  $\uparrow$ .
- Chaque 0 correspond à un *pas Est*  $\rightarrow$ .

On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des mots de Dyck de longueur  $2n$ .

**Théorème 6** (André, 1887). Soit  $d_n$  le cardinal de  $\mathcal{D}_n$ . Nous avons

$$d_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

**Définition 7** (Mot de Dyck Décoré). Un *mot de Dyck décoré* est un mot  $w \in \{0, \dots, n\}^*$  tel que :

- pour tout *préfixe*  $w'$  de  $w$ ,  $|w'|_{\neq 0} \geq |w'|_0$ .
- $|w|_0 = |w|_{\neq 0}$ .
- pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $w$  contient exactement une occurrence de  $i$ .
- si  $w_i \neq 0$  et  $w_{i+1} \neq 0$ , alors  $w_i < w_{i+1}$ . Autrement dit, les labels de pas Nord consécutifs doivent être croissants.

Un mot de Dyck décoré de longueur  $2n$  peut être représenté par un *chemin* allant du point  $(0, 0)$  au point  $(n, n)$ , où chaque pas North est associé à un label :

- Chaque  $i \neq 0$  correspond à un *pas Nord*  $\uparrow$  de label  $i$ .
- Chaque 0 correspond à un *pas Est*  $\rightarrow$ .

Ces chemins sont appelés *chemins de Dyck décorés*.

On note  $\mathcal{LD}_n$  l'ensemble des mots de Dyck décorés de longueur  $2n$ .

**Théorème 8.** Soit  $ld_n$  le cardinal de  $\mathcal{LD}_n$ . Nous avons

$$ld_n = (n+1)^{n-1}.$$

Ces notions et résultats vont nous permettre de définir deux bijections et quatre posets pour les quatre ensembles présentés.

## 2 Un poset pour les fonctions de parking classiques

### 2.1 Le cas primitif

Les exemples 9 à 13 donnés en annexe B illustrent les propositions, définitions et théorèmes de cette section.

Puisque  $\mathcal{PF}'_n$  et  $\mathcal{D}_n$  ont le même cardinal, nous pouvons créer une bijection entre les deux ensembles.

**Proposition 9.** Il existe une bijection explicite entre les fonctions de parking classiques primitives de longueur  $n$  et les mots de Dyck de longueur  $2n$ .

*Démonstration.* Nous créons ici deux bijections inverse l'une de l'autre.

- $\mathcal{PF}'_n \rightarrow \mathcal{D}_n$  : Soit  $f = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{PF}'_n$  une fonction de parking classique primitive. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $l_i$  le nombre d'occurrences de  $i$  dans  $f$ . Le mot de Dyck correspondant sera alors  $\underbrace{1 \dots 1}_l 0 \underbrace{1 \dots 1}_l 0 \dots \underbrace{1 \dots 1}_l 0$ .
- $\mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{PF}'_n$  : Soit  $w \in \mathcal{D}_n$  un mot de Dyck. Considérons sa représentation sous la forme d'un chemin de Dyck. Notons  $s_i$  l'abscisse du  $i^e$  pas Nord. On pose alors  $a_i = s_i + 1$ . La fonction de parking primitive correspondante sera ainsi  $(a_1, \dots, a_n)$ .

□

Nous proposons maintenant des relations de couverture pour ces deux ensembles, telles que les posets ainsi créés soient isomorphes, et que l'un puisse être obtenu en appliquant la bijection ci-dessus à l'autre.

**Définition 10** ( $\succ_d$ ). Soient  $w$  et  $w'$  deux mots de Dyck de longueur  $2n$ . On dit que  $w$  couvre  $w'$ , noté  $w \succ_d w'$ , s'il existe deux mots  $w_1$  et  $w_2$  tels que :

- $w = w_1 0 1 w_2$
- $w' = w_1 1 0 w_2$

*Remarque.* Si  $w_1 \succ_d w_2$ , alors le chemin de Dyck correspondant à  $w_2$  est *au dessus* de celui correspondant à  $w_1$ , et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.

**Définition 11** (Chemins de Dyck Imbriqués). Deux chemins de Dyck  $w_1$  et  $w_2$  sont dits *imbriqués* si  $w_1$  est égal à  $w_2$  ou au dessus de  $w_2$ .

On déduit donc la proposition suivante de la remarque précédente.

**Proposition 12.** *S'il existe une séquence  $w_1 \succ_d w_2 \succ_d w_3 \succ_d \cdots \succ_d w_k$  avec  $k \geq 0$ , alors  $w_1$  et  $w_k$  sont imbriqués.*

Cette relation de couverture engendre notre *poset* pour  $\mathcal{D}_n$ . Ainsi, le poset contient l'*intervalle*  $[w_1; w_2]$  si et seulement si  $w_1$  et  $w_2$  sont imbriqués.

On définit maintenant la relation bijective sur les fonctions de parking. Celle-ci sera la même pour les 4 types de fonctions de parking (classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives).

**Définition 13** ( $\succ$ ). Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de parking. On dit que  $f$  couvre  $g$ , noté  $f \succ g$ , s'il existe  $i$  tel que :

- $f = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \quad a_{i+1}, \dots, a_n)$
- $g = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$

Cette relation de couverture engendre notre poset pour  $\mathcal{PF}'_n$ .

**Théorème 14** (Théorème principal). *Le nombre d'intervalles dans ces posets est égal à*

$$\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}$$

*Démonstration.* Puisque le nombre d'intervalles dans le poset de  $\mathcal{D}_n$  peut être vu comme le nombre de paires  $(w_1, w_k)$  telles que  $w_1 \succ_d w_2 \succ_d \cdots \succ_d w_k$ , alors nous pouvons décrire le nombre d'intervalles comme étant le nombre de *paires de chemins de Dyck imbriqués*.

On introduit alors une notion de chemin de Dyck *étoilé*, c'est-à-dire un chemin de Dyck dont certains pas sont annotés d'une étoile \*. Ces chemins sont une représentation des paires de chemins de Dyck imbriqués : en omettant les étoiles, on obtient le chemin du dessous. Ensuite, pour déduire le chemin du dessus :

- Un pas non étoilé est conservé
- Un pas Nord étoilé est remplacé par un pas Est
- Un pas Est étoilé est remplacé par un pas Nord.

On crée maintenant une bijection entre les chemins de Dyck étoilés de longueur  $2n$  correspondant à des paires de chemins de Dyck de longueur  $2n$ , et les chemins allant du point  $(0,0)$  au point  $(0,0)$  composées de  $2n$  pas Nord, Est, Sud, Ouest qui restent dans le premier octant. Pour cela, on effectue la transformation suivante :

- Nord non-étoilé  $\longleftrightarrow$  Nord
- Nord étoilé  $\longleftrightarrow$  Ouest
- Est non-étoilé  $\longleftrightarrow$  Sud
- Est étoilé  $\longleftrightarrow$  Est

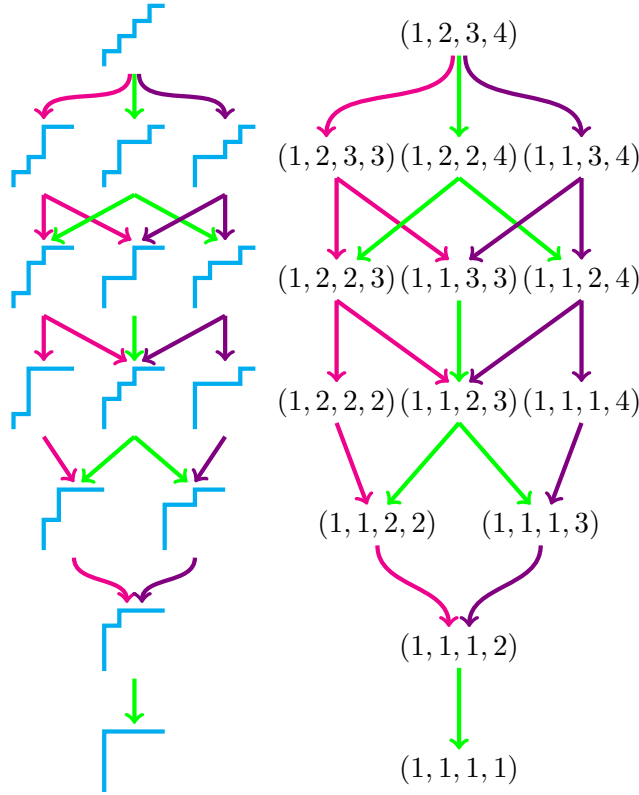
Ainsi, puisque  $\mathcal{D}_n \longleftrightarrow \{\text{Chemins de Dyck étoilés de longueur } 2n\} \longleftrightarrow \{\text{Chemins NESO de longueur } 2n\}$ , on sait que le nombre de paires de chemins de Dyck imbriqués de longueur  $2n$  est égal au nombre de chemins NESO de longueur  $2n$ .

Or, par définition, ce nombre est égal au  $n+1^e$  terme de la suite de l'OEIS A005700 <sup>2</sup> (Ce qui rejoint le commentaire de Bruce Westbury).

Alec Mihailovs a démontré que ce nombre est bien égal à  $\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}$ .  $\square$

Les premiers termes de cette suite sont 1, 1, 3, 14, 84, 594, 4719, 40898, 379236, 3711916, ...

**Exemple** (Les posets de  $\mathcal{D}_4$  et  $\mathcal{PF}'_4$ ).



Ces posets contiennent chacun  $\frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$  éléments et 84 relations.

On souhaite maintenant étendre cette construction au cas non-primitif. Bien que celle sur les fonctions de parking soit la même, il reste à expliciter la bijection, et à définir la relation de couverture sur les mots de Dyck *décorés*.

## 2.2 Le cas général

Les exemples 14 à 17 donnés en annexe B illustrent les propositions, définitions et théorèmes de cette section.

Puisque  $\mathcal{PF}_n$  et  $\mathcal{LD}_n$  ont le même cardinal, nous pouvons créer une bijection entre les deux ensembles.

2. <https://oeis.org/A005700>

**Proposition 15.** *Il existe une bijection explicite entre les fonctions de parking classiques de longueur  $n$  et les mots de Dyck décorés de longueur  $2n$ .*

*Démonstration.* Nous créons à nouveau deux bijections inverse l'une de l'autre.

- $\mathcal{PF}_n \rightarrow \mathcal{LD}_n$  : Soit  $f = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{PF}_n$  une fonction de parking. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , posons  $im_i : \{j \mid a_j = i\}$ .

Notons alors  $im_{i,1}, \dots, im_{i,k_i}$  les éléments de  $im_i$  triés par ordre croissant.

Le mot de Dyck décoré correspondant sera  $\underbrace{im_{1,1} \dots im_{1,k_1}}_{im_1} 0 \underbrace{im_{2,1} \dots im_{2,k_2}}_{im_2} 0 \dots \underbrace{im_{n,1} \dots im_{n,k_n}}_{im_n} 0$ .

- $\mathcal{LD}_n \rightarrow \mathcal{PF}_n$  : Soit  $w$  un mot de Dyck décoré. Considérons sa représentation sous la forme d'un chemin de Dyck. Notons  $s_i$  l'abscisse du  $i^e$  pas Nord.

On note alors  $label(i)$  le label du  $i^e$  pas nord, et  $dist_i = \{label(j) \mid s_j = i\}$  l'ensemble des labels des pas Nord à distance  $i$  de l'axe des ordonnées.

Ainsi, si  $j \in dist_i$ , on pose  $a_j = i + 1$ .

La fonction de parking correspondante sera donc  $(a_1, \dots, a_n)$ .

□

La relation suivante est l'extension de  $\succ_d$  au cas décoré.

**Définition 16** ( $\succ_{ld}$ ). Soient  $w$  et  $w'$  deux mots de Dyck décorés. On dit que  $w$  couvre  $w'$ , noté  $w \succ_{ld} w'$ , s'il existe  $l, r, x, x', y, z$ , et  $z'$  tels que :

- $l$  est le mot vide, ou finit par un 0
- $r$  est le mot vide, ou commence par un 0
- $x = x_1 x_2 \dots$  avec  $x_i > 0$  pour tout  $i$
- $z = z_1 z_2 \dots$  avec  $z_i > 0$  pour tout  $i$
- $x' = x$  où  $y$  est correctement inséré en ordre croissant
- $y$  apparait dans  $z$ , et  $z' = z$  où  $y$  a été supprimé
- $w = lx0zr$
- $w' = lx'0z'r$

Pour expliquer l'idée derrière cette relation de couverture, nous aurons besoin de la définition suivante.

**Définition 17** (Montée). Une *montée* d'un mot de Dyck (décoré ou non) est une sous-mot maximal ne contenant pas de 0, et suivi d'un 0.

*Remarque.* Si  $w_1 \succ_{ld} w_2$ , alors le chemin de Dyck décoré correspondant à  $w_2$  est *au dessus* de celui correspondant à  $w_1$ , et la *différence* entre les deux est un carré de côté 1.

De plus, la relation  $\succ_{ld}$  peut être vue ainsi :  $w_1$  couvre  $w_2$  si et seulement si l'on peut obtenir  $w_2$  à partir de  $w_1$  en enlevant un élément de la  $i + 1^e$  montée, et en réinsérant cet élément en ordre croissant dans la  $i^e$  montée.

Cette relation de couverture engendre notre poset pour  $\mathcal{LD}_n$ . En gardant la relation  $\succ$  sur l'ensemble des fonctions de parking classiques, on obtient ainsi les posets bijectifs espérés.





Il y a  $4^2 = 16$  éléments et 64 intervalles dans chacun de ces posets.

Bien que, à notre connaissance, il n'existe pas de structure combinatoire associée à cette suite, les tests effectués via Sagemath sur  $n = 1, 2, \dots, 8$  suggèrent que le nombre d'intervalles de nos posets puissent en être une.

Pour aller plus loin, la prochaine partie aborde une généralisation des fonctions de parking : les fonctions de parking *rationnelles*.

Cette extension peut être vue ainsi : Soit  $(a_1, \dots, a_n)$  une séquence d'entiers positifs, et  $(b_1, \dots, b_n)$  son tri par ordre croissant. Dans le cas classique, les limites pour  $(b_1, \dots, b_n)$  étaient  $(1, \dots, n)$ , et dépendaient donc d'un unique entier  $n$ . Dans le cas rationnel, les limites dépendront de *deux entiers premiers entre eux*  $a$  et  $b$ . Plus précisément, ces limites seront  $(1, 1 + \frac{b}{a}, 1 + \frac{2b}{a}, 1 + \frac{3b}{a}, \dots)$ , avec  $a = n$ .

### 3 Un poset pour les fonctions de parking rationnelles

Commençons par donner les définitions et résultats principaux des extensions rationnelles des fonctions de parking et des chemins de Dyck.

#### 3.1 Fonctions de parking rationnelles

Cette partie est illustrée par les exemples 18 à 20 de l'annexe C.

**Définition 19** ( $a, b$  - Fonction de Parking). Une  $a, b$  - *fonction de parking* est une séquence d'entiers positifs  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  telle que :

- $n = a$
- son tri croissant  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  respecte la condition suivante :  $b_i \leq \frac{b}{a}(i - 1) + 1$  pour tout  $i \leq n$ .

On note  $\mathcal{PF}_{a,b}$  l'ensemble des  $a, b$  - fonctions de parking. La formule comptant le nombre d'éléments de cette ensemble est similaire à celle pour  $\mathcal{PF}_n$ .

**Théorème 20** (Armstrong, Loehr et Warrington, 2014). *Soit  $pf_{a,b}$  le cardinal de  $\mathcal{PF}_{a,b}$ . Nous avons*

$$pf_{a,b} = b^{a-1}$$

*Remarque.* Le cas classique peut être vu comme le cas  $a = n, b = n + 1$ . Autrement dit,  $\mathcal{PF}_{n,n+1} = \mathcal{PF}_n$ .

Similairement au cas classique, on définit une fonction de parking *rationnelle primitive* comme une fonction de parking primitive triée en ordre croissant. On note  $\mathcal{PF}'_{a,b}$  l'ensemble des  $a, b$  - fonctions de parking primitives.

**Théorème 21.** *Soit  $pf'_{a,b}$  le cardinal de  $\mathcal{PF}'_{a,b}$ . Nous avons*

$$pf'_{a,b} = \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{b}$$

Ce nombre est appelé le *nombre de Catalan rationnel*, et on le note  $Cat(a, b)$ . Là aussi, le cas classique correspond à  $a = n, b = n + 1$ . Autrement dit,  $\mathcal{PF}'_{n,n+1} = \mathcal{PF}'_n$ .

### 3.2 Chemins de Dyck rationnels

Cette partie est illustrée par les exemples 21 à 26 de l'annexe C.

**Définition 22** (a, b - mot de Dyck). Un  $a, b$  - mot de Dyck est un mot  $w \in \{0, 1\}^*$  tel que :

- pour tout préfixe  $w'$  de  $w$ ,  $|w'|_1 \geq \frac{a}{b}|w'|_0$ .
- $|w|_0 = b$ .
- $|w|_1 = a$ .

Un  $a, b$  - mot de Dyck peut être représenté par un chemin allant du point  $(0, 0)$  au point  $(b, a)$ , et restant au dessus de l'axe  $y = \frac{a}{b}x$ , appelé  $a, b$  - chemin de Dyck :

- Chaque 1 correspond à un *pas Nord*  $\uparrow$ .
- Chaque 0 correspond à un *pas Est*  $\rightarrow$ .

On note  $\mathcal{R}_{a,b}$  l'ensemble des  $a, b$  - mots de Dyck.

**Théorème 23** (Bizley ([10]), 1954). Soit  $r_{a,b}$  le cardinal de  $\mathcal{R}_{a,b}$ . Nous avons

$$r_{a,b} = \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b-1)!}{a!b!}$$

On remarque ainsi que l'on pourra bien créer une bijection entre  $\mathcal{PF}'_{a,b}$  et  $\mathcal{R}_{a,b}$ . Cette bijection sera exactement la même que celle entre  $\mathcal{PF}'_n$  et  $\mathcal{D}_n$ .

Il reste maintenant à définir les chemins de Dyck qui seront en bijection avec  $\mathcal{PF}_{a,b}$ .

**Définition 24** (a, b - mot de Dyck décoré). Un  $a, b$  - chemin de Dyck décoré est un mot  $w \in \{0, \dots, n\}^*$  tel que :

- pour tout préfixe  $w'$  de  $w$ ,  $|w'|_{\neq 0} \geq \frac{a}{b}|w'|_0$ .
- $|w|_0 = b$ .
- $|w|_{\neq 0} = a$ .
- pour tout  $i \in \{1, \dots, a\}$ ,  $w$  a exactement une occurrence de  $i$ .
- si  $w_i \neq 0$  et  $w_{i+1} \neq 0$ , alors  $w_i < w_{i+1}$ . Autrement dit, les labels des pas Nord consécutifs sont croissants.

Un  $a, b$  - mot de Dyck décoré peut être représenté par un chemin allant du point  $(0, 0)$  au point  $(b, a)$ , où chaque pas Nord a un label :

- Chaque  $i \neq 0$  correspond à un *pas Nord*  $\uparrow$  dont le label est  $i$ .
- Chaque 0 correspond à un *pas Est*  $\rightarrow$ .

Ces chemins sont appelés  $a, b$  - chemins de Dyck décorés.

On note  $\mathcal{LR}_{a,b}$  l'ensemble des  $a, b$  - chemins de Dyck.

**Théorème 25.** Soit  $lr_{a,b}$  le cardinal de  $\mathcal{LR}_{a,b}$ . Nous avons

$$lr_{a,b} = b^{a-1}$$

On retrouve bien le même cardinal que pour  $\mathcal{PF}_{a,b}$ . A nouveau, la bijection entre  $\mathcal{PF}_{a,b}$  et  $\mathcal{LR}_{a,b}$  sera exactement la même que celle entre  $\mathcal{PF}_n$  et  $\mathcal{LD}_n$ .

Les relations de couverture restent inchangées :

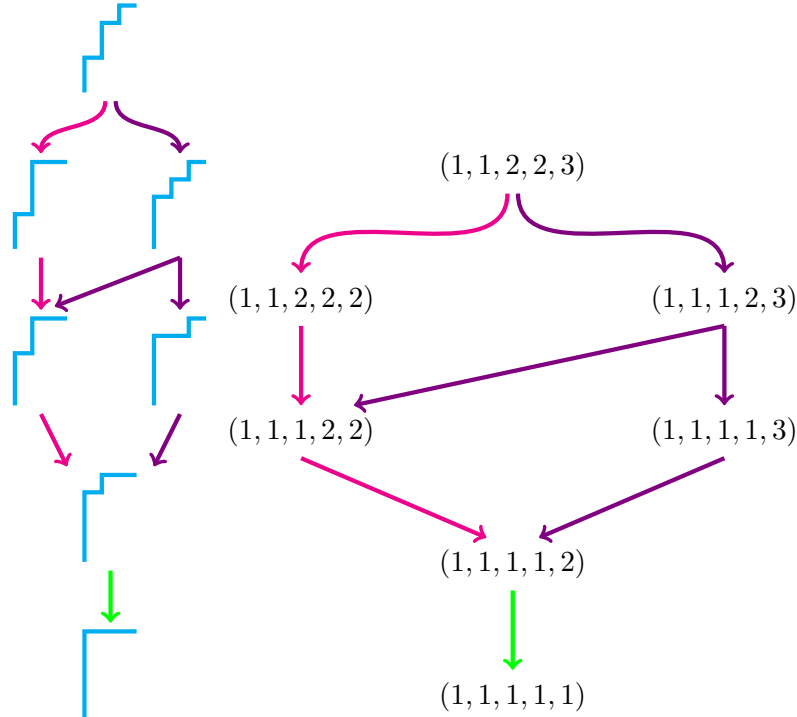
- Pour  $\mathcal{PF}'_{a,b}$  et  $\mathcal{PF}_{a,b}$  :  $\succ$
- Pour  $\mathcal{R}_{a,b}$  :  $\succ_r = \succ_d$
- Pour  $\mathcal{LR}_{a,b}$  :  $\succ_{lr} = \succ_{ld}$

On peut maintenant construire nos posets pour le cas rationnel.

### 3.3 Posets rationnels

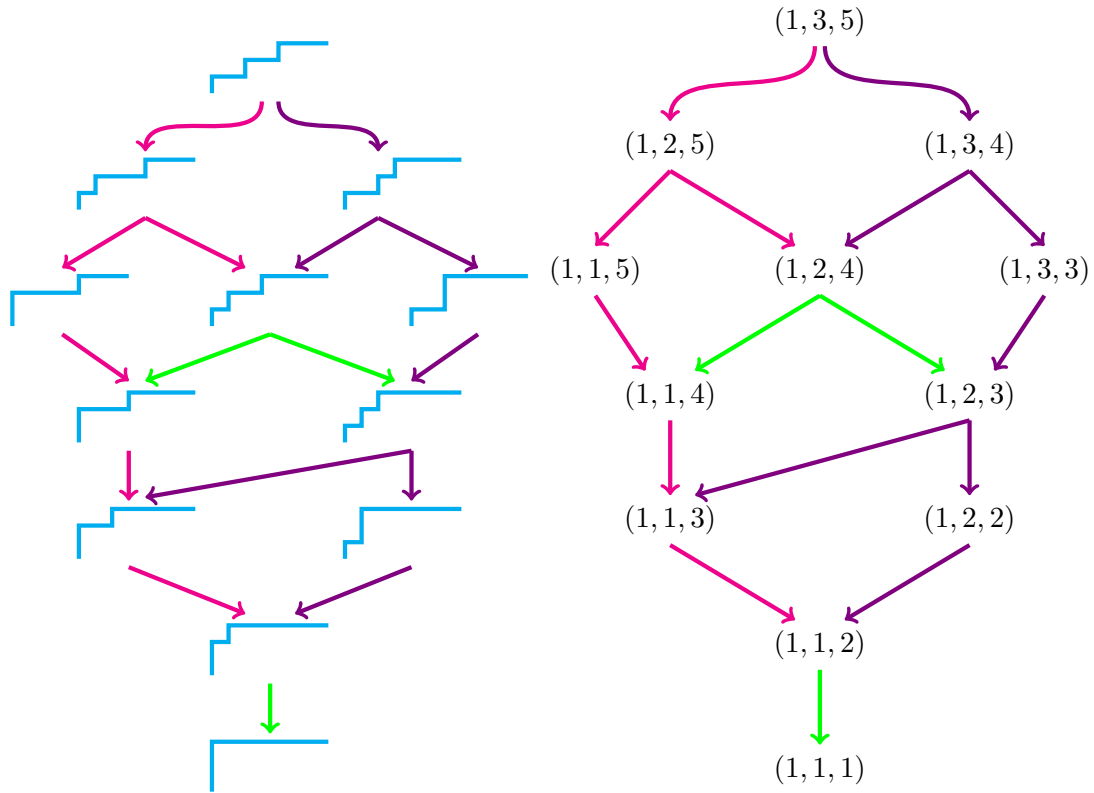
Nous présentons ici une série d'exemple des posets obtenus par les relations de couverture que nous venons de définir. Pour le cas primitif comme pour le cas non-primitif, nous étudions un exemple où  $a > b$ , et un où  $a < b$ . On remarque dans chaque cas que les posets sont bien isomorphes.

**Exemple** ( $a > b$  : Les posets de  $\mathcal{R}_{5,3}$  et  $\mathcal{PF}'_{5,3}$ ).



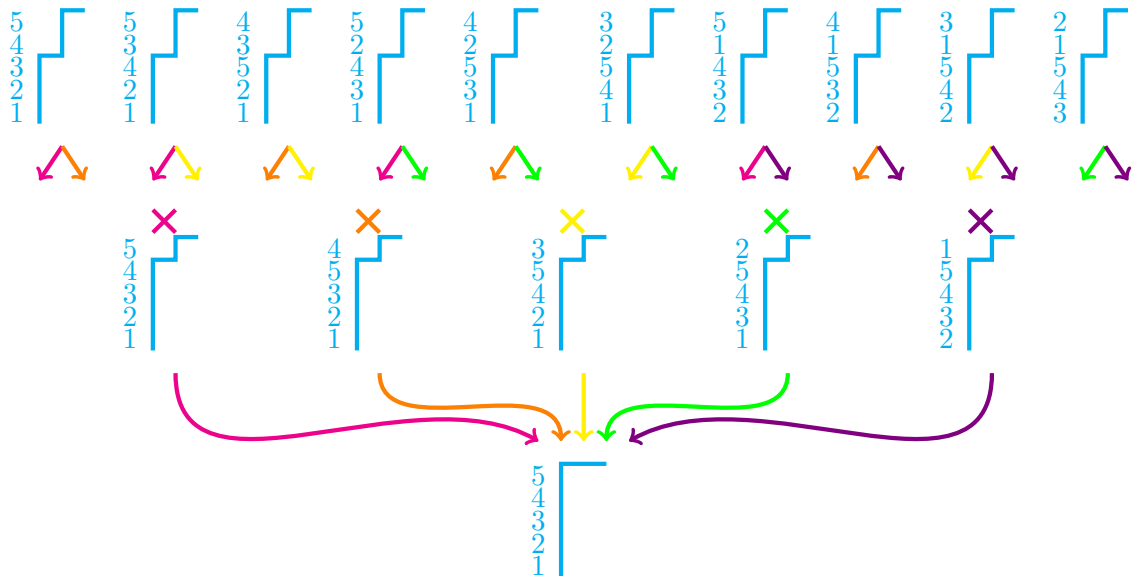
Chacun de ces posets comporte  $\frac{1}{8} \binom{8}{5} = 7$  éléments.

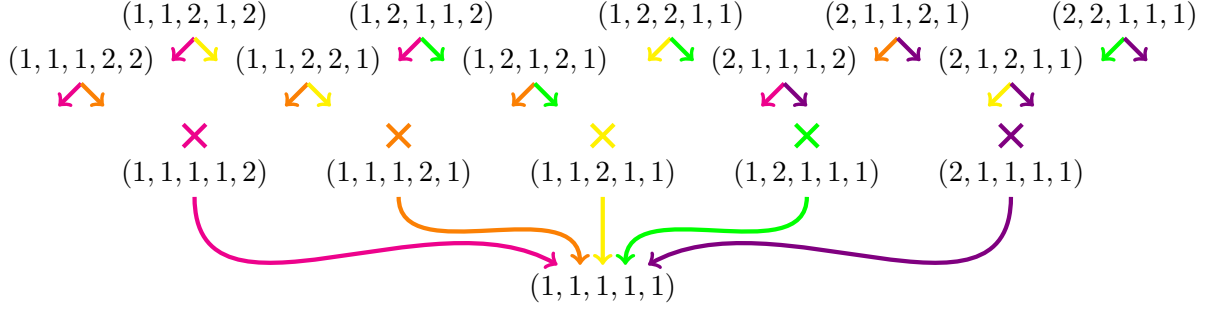
**Exemple** ( $a < b$  : Les posets de  $\mathcal{R}_{3,7}$  et  $\mathcal{PF}'_{3,7}$ ).



Chacun de ces posets comporte  $\frac{1}{10} \binom{10}{3} = 12$  éléments.

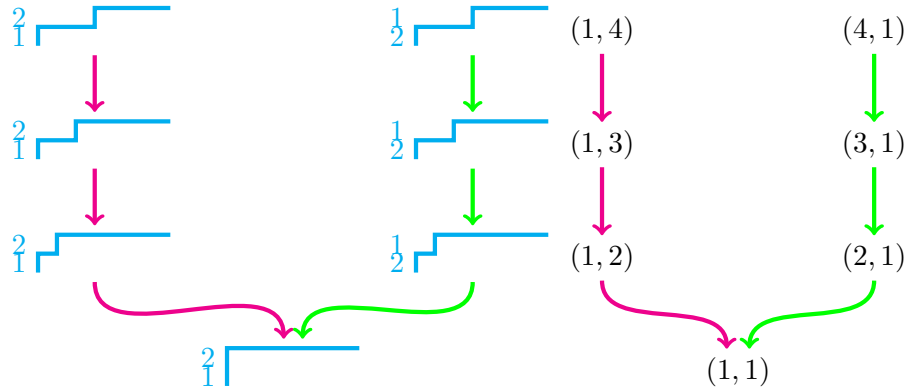
**Exemple** ( $a > b$  : Les posets de  $\mathcal{LR}_{5,2}$  et  $\mathcal{PF}_{5,2}$ ).





Pour plus de clarté, les flèches ont été simplifiées. Celles des deux plus hauts niveaux sont à comprendre ainsi : chaque flèche finit là où il y a une croix de la même couleur. Il y a  $2^4 = 16$  éléments dans chacun de ces posets.

**Exemple** ( $a < b$  : Les posets de  $\mathcal{LR}_{2,7}$  et  $\mathcal{PF}_{2,7}$ ).



Il y a  $7^1 = 7$  éléments dans chacun de ces posets.

Ceci conclut la présentation de nos posets bijectifs.

Nous passons maintenant au second problème traité par cet article, à savoir l'extension de la notion d'arbre de parking au cas rationnel. En effet, définie par B. Delcroix-Oger, M. Josuat-Vergès et L. Randazzo (2020), la structure d'arbre de parking (classique) est définie par une bijection avec les fonctions de parking classiques. Nous définissons donc les arbres de parking rationnels, extension qui sera, similairement, en bijection avec les fonctions de parking rationnelles.

## 4 Arbres de parking rationnels

Nous commençons par rappeler ce qu'est un arbre de parking.

**Définition 26** (Arbre de Parking). Un *arbre de parking* est défini à partir d'une fonction de parking  $f = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{PF}_n$  ainsi :

- Pour tout  $1 \leq i \leq n+1$ , on définit  $s_i$  comme  $\{j \mid a_j = i\}$
- $[s_1, \dots, s_{n+1}]$  décrit le parcours préfixe de l'arbre.
- Chaque noeud étiqueté par un ensemble de taille  $k$  est d'arité  $k$ .

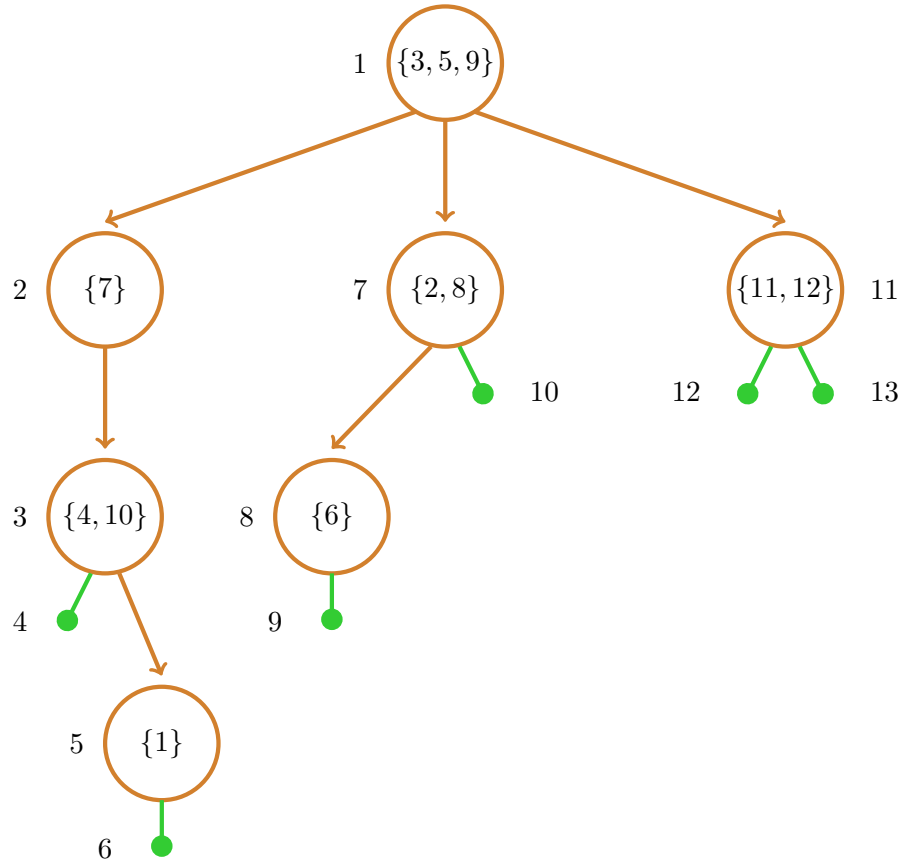
*Remarque.* Les feuilles de l'arbre correspondent aux éléments  $i$  tels que  $1 \leq i \leq n+1$ , où  $i$  n'est *pas* dans  $f$ .

De plus, comme l'arbre possèdera – par définition –  $n$  branches, la présence d'un noeud correspondant à  $n+1$  est nécessaire, bien que son étiquette sera toujours l'ensemble vide.

**Exemple** ( $n = 12$ ).

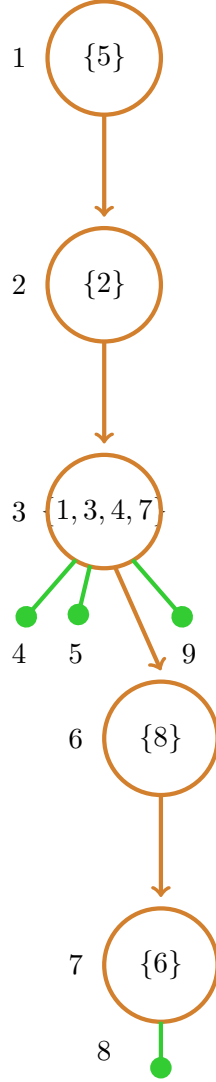
—  $f = (5, 7, 1, 3, 1, 8, 2, 7, 1, 3, 11, 11)$

— Labels :  $[\{3, 5, 9\}, \{7\}, \{4, 10\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset, \{2, 8\}, \{6\}, \emptyset, \emptyset, \{11, 12\}, \emptyset, \emptyset]$



Inversement, en lisant les étiquettes d'un arbre de parking en ordre préfixe, on obtient la liste des positions de chaque nombre dans la fonction de parking correspondante, ce qui crée ainsi une *bijection*.

**Exemple** (De l'arbre à la fonction).



- Les étiquettes sont  $[\{5\}, \{2\}, \{1, 3, 4, 7\}, \emptyset, \emptyset, \{8\}, \{6\}, \emptyset, \emptyset]$ .
- La fonction correspondante est donc  $(3, 2, 3, 3, 1, 7, 3, 6) \in \mathcal{PF}_8$ .

On cherche maintenant à étendre cette construction au cas rationnel.

**Définition 27** (Arbre de Parking Rationnel). Un *arbre de parking rationnel* est défini à partir d'une fonction de parking rationnelle  $f = (a_1, \dots, a_a) \in \mathcal{PF}_{a,b}$  ainsi :

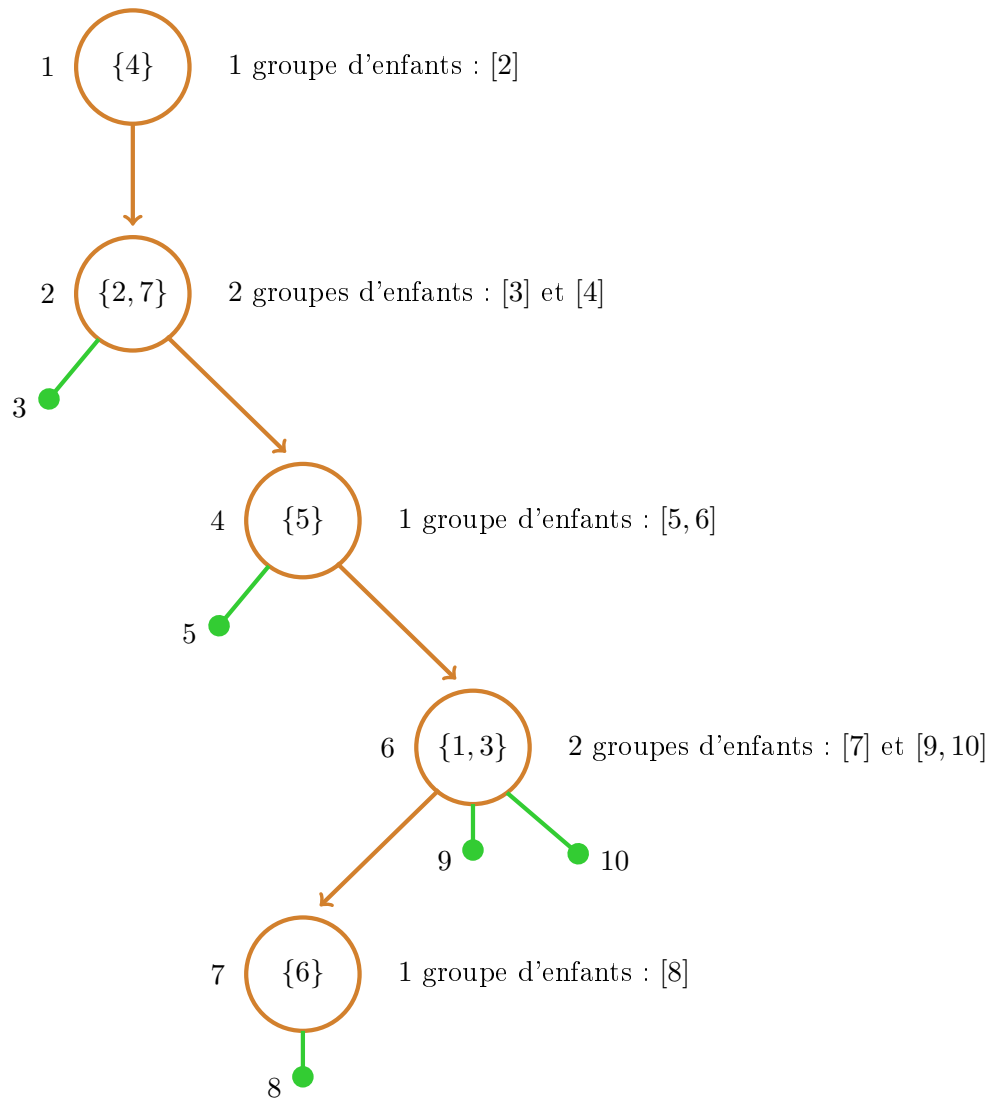
- Pour tout  $1 \leq i \leq n+1$ , on définit la limite  $l_i$  comme étant la *partie entière* de  $\frac{b}{a}(i-1)+1$ .  
Posons  $l_0 = 0$ .
- De ces limites, nous déduisons les intervalles  $itv_i = ]l_{i-1}, l_i]$  for  $1 \leq i \leq a+1$ .
- Pour tout  $1 \leq i \leq b+1$ , posons  $s_i = \{j \mid a_j = i\}$ .
- $[s_1, \dots, s_{b+1}]$  décrit alors le parcours préfixe de notre arbre.



- Chaque noeud étiquetté par un ensemble de taille  $k$  possède  $k$  groupes d'enfants, qui sont définis par les intervalles.

**Exemple** ( $a < b$ ).

- $a = 7$
- $b = 9$
- Limites :  $[1, 2\frac{2}{7}, 3\frac{4}{7}, 4\frac{6}{7}, 6\frac{1}{7}, 7\frac{3}{7}, 8\frac{5}{7}, 10]$
- Limites entières :  $[0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10]$
- Intervalles :  
 $]0, 1]$      $]1, 2]$      $]2, 3]$      $]3, 4]$      $]4, 6]$      $]6, 7]$      $]7, 8]$      $]8, 10]$
- Groupes d'enfants :  
 $[1]$      $[2]$      $[3]$      $[4]$      $[5, 6]$      $[7]$      $[8]$
- $f = (6, 2, 6, 1, 4, 7, 2)$
- Etiquettes :  $\{\{4\}, \{2, 7\}, \emptyset, \{5\}, \emptyset, \{1, 3\}, \{6\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}$

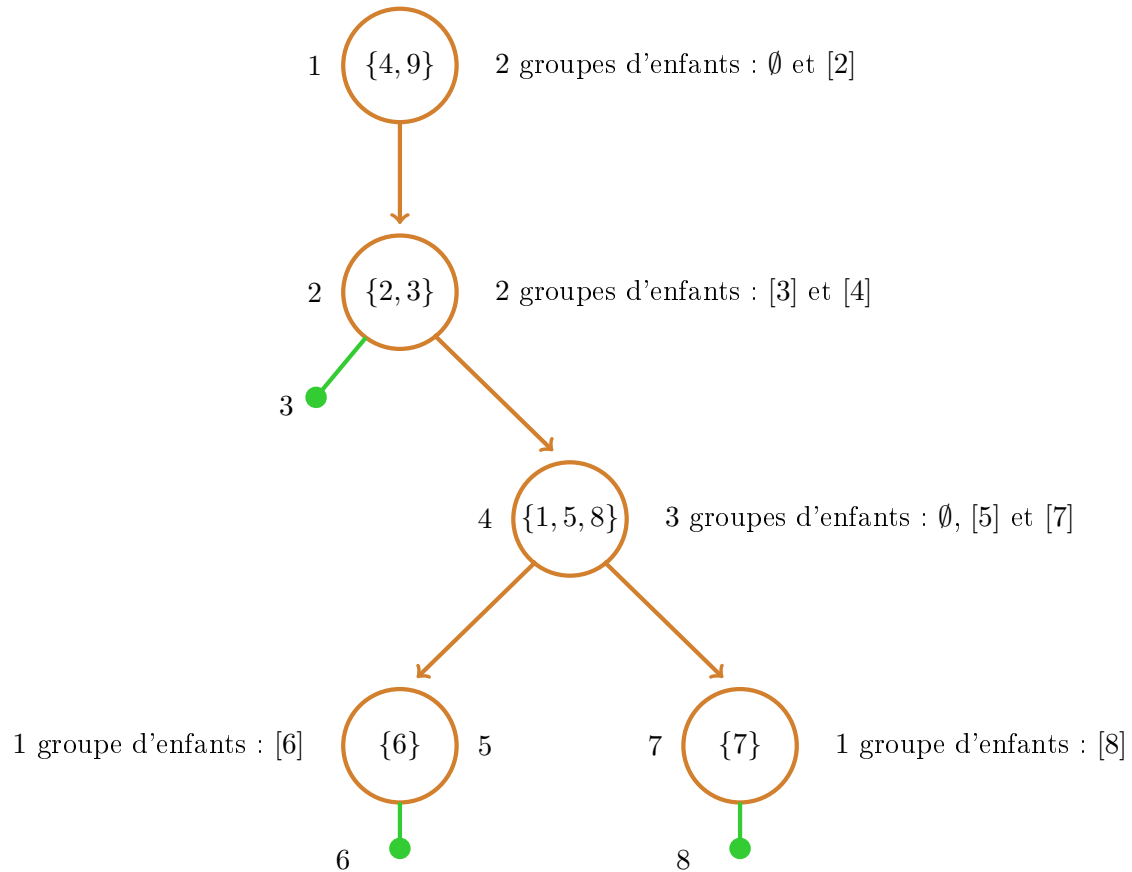


**Exemple** ( $a > b$ ).

- $a = 9$
- $b = 7$
- Limites :  $[1, 1\frac{7}{9}, 2\frac{5}{9}, 3\frac{3}{9}, 4\frac{1}{9}, 4\frac{8}{9}, 5\frac{6}{9}, 6\frac{4}{9}, 7\frac{2}{9}, 8]$
- Limites entières :  $[0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8]$
- Intervalles :
 

$]0, 1]$	$]1, 1]$	$]1, 2]$	$]2, 3]$	$]3, 4]$
$]4, 4]$	$]4, 5]$	$]5, 6]$	$]6, 7]$	$]7, 8]$
- Groupes d'enfants :
 

$[1]$	$\emptyset$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$\emptyset$	$[5]$	$[6]$	$[7]$	$[8]$
-------	-------------	-------	-------	-------	-------------	-------	-------	-------	-------
- $f = (4, 2, 2, 1, 4, 5, 7, 4, 1)$
- Etiquettes :  $\{\{4, 9\}, \{2, 3\}, \emptyset, \{1, 5, 8\}, \{6\}, \emptyset, \{7\}, \emptyset\}$



Dans les deux cas, la direction inverse de la *bijection* est obtenue – comme pour le cas classique – par un parcours préfixe.

## 5 Conclusion

Nous avons ainsi répondu aux deux problématiques abordées :

Premièrement, nous avons défini des relations de couvertures créant des posets pour les quatre types de fonctions de parking, ainsi que pour les quatre types de chemins de Dyck que nous avons mis en bijections avec ces dernières. Dans chaque cas, le poset de l'un peut être obtenu en appliquant la bijection présentée au poset de l'autre. De plus, dans le cas rationnel, nous traitons aussi bien la configuration  $a > b$  que  $a < b$ . Dans plusieurs travaux sur les fonctions de parking rationnelles et les structures en bijection avec celles-ci, seul le cas  $a < b$  avait été traité.

La particularité de notre approche réside autant dans cette généralisation que dans l'utilisation des chemins de Dyck. En effet, la plupart des travaux précédents se basaient sur les *partitions non-croisées* ([4, 5, 7, 8]). Ici, nous avons choisi de ne pas utiliser cette structure, car les posets obtenus en appliquant la bijection Partitions Non Croisées  $\rightarrow$  Fonctions de Parking ne laissaient pas paraître de relation de couverture évidente pour les fonctions de parking.

De plus, dans le cas rationnel, la définition de partitions non-croisées rationnelles est complexe. A notre connaissance, la seule définition donnée pour tous les entiers  $a$  et  $b$  premiers entre eux (et non seulement lorsque  $a < b$ ) est celle donnée par Bodnar ([7]), qui nécessite de nombreuses étapes et définitions intermédiaires.

Ensuite, nous avons étendu la notion d'arbres de parking au cas rationnel.

Une question qui émerge naturellement de ce travail est le besoin d'une preuve pour la Conjecture Principale. De plus, s'il existe une preuve entièrement combinatoire, nous pourrions ainsi obtenir une formule et une interprétation combinatoire à la suite entière A196304, sans nécessiter de passer par les séries génératrices.

Quant au cas rationnel, de futurs travaux pourront inclure la recherche de formules généralisées pour le nombre d'intervalles des posets, dans le cas primitif comme dans le cas général.

Enfin, en suivant le cheminement de [8] sur les arbres de parking, il pourra être intéressant d'étudier les relations de couverture sur les arbres de parking rationnels.

## Références

- [1] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(6) :1266–1274, 1966.
- [2] R.P. Stanley and G.C. Rota. *Enumerative Combinatorics : Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [3] R.P. Stanley and S. Fomin. *Enumerative Combinatorics : Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [4] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisees d'un cycle. *Discret. Math.*, 1 :333–350, 1972.
- [5] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discret. Math.*, 31 :171–180, 1980.
- [6] Drew Armstrong, Nicholas A. Loehr, and Gregory S. Warrington. Rational parking functions and catalan numbers. *Annals of Combinatorics*, 20 :21–58, 2014.
- [7] Michelle Bodnar. Rational noncrossing partitions for all coprime pairs, 2017.
- [8] Bérénice Delcroix-Oger, Matthieu Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Some properties of the parking function poset. 2020.
- [9] Amarpreet Rattan. Parking functions and related combinatorial structures, 2001.
- [10] M. T. L. Bizley. Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths [...]. *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)*, 80(1) :55–62, 1954.

## A Exemples pour l'Introduction

**Exemple 0.** On appelle *permutation circulaire* une permutation dont la représentation sous forme de composition de cycles contient un unique cycle de taille  $n$ . Il est ainsi possible de créer une bijection explicite entre  $\mathfrak{S}_n$  et l'ensemble des permutations circulaires de  $\mathfrak{S}_{n+1}$ . On présente ici deux bijections inverse l'une de l'autre.

- $\mathfrak{S}_n \rightarrow {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$  : Soit  $\sigma = a_1 \dots a_n$  notre permutation.  $\sigma' = (n+1 \ a_1 \dots a_n) \in {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$ .
- ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$  : Soit  $\sigma' = (a_1 \dots a_{n+1})$  notre permutation circulaire. Notons  $i$  l'indice tel que  $a_i = n+1$ .  $\sigma = a_{i+1} \dots a_{n+1} a_1 \dots a_{i-1} \in \mathfrak{S}_n$ .

L'existence d'une telle bijection implique que les deux ensembles sont de même cardinal. En effet, le cardinal de  $\mathfrak{S}_n$  est  $n!$ . Quant à celui de  ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$ , on définit tout d'abord un *k-cycle*.  $\sigma$  est un k-cycle si son écriture sous la forme d'une composition de cycles est un unique cycle de taille  $k$ . Ainsi,  ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$  est l'ensemble des  $(n+1)$ -cycles de  $\mathfrak{S}_{n+1}$ . Or, dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , le nombre de k-cycles est  $\frac{n!}{(n-k)!k}$ . Ainsi, le cardinal de  ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$  est

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-n-1)!(n+1)} = \frac{(n+1)!}{n+1} = n!. \text{ On a bien l'égalité.}$$

**Exemple 1** (Définition 1 :  $n = 7$ ).

- $f_1 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 2) \in \mathcal{PF}_7$
- $f_2 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 4) \notin \mathcal{PF}_7$

**Exemple 2** (Théorème 2 :  $n = 3$  :  $pf_3 = 16$ ).

- $(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 3) \rightarrow (1, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 1) \rightarrow (1, 3, 2)$
- $(2, 1, 1) \rightarrow (2, 1, 2) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 2, 1) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 1, 1) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (3, 2, 1)$

**Exemple 3** (Définition 3 :  $n = 4$ ).

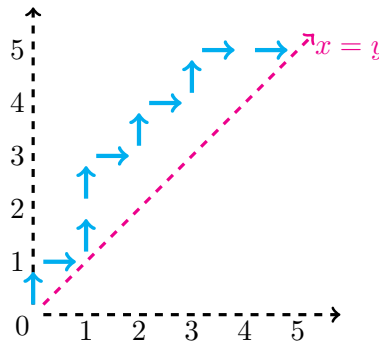
- $f_1 = (1, 2, 2, 3) \in \mathcal{PF}'_4$
- $f_2 = (1, 2, 3, 2) \notin \mathcal{PF}'_4$ , bien que  $f_2 \in \mathcal{PF}_4$

**Exemple 4** (Théorème 4 :  $n = 3$  :  $pf'_3 = 5$ ).

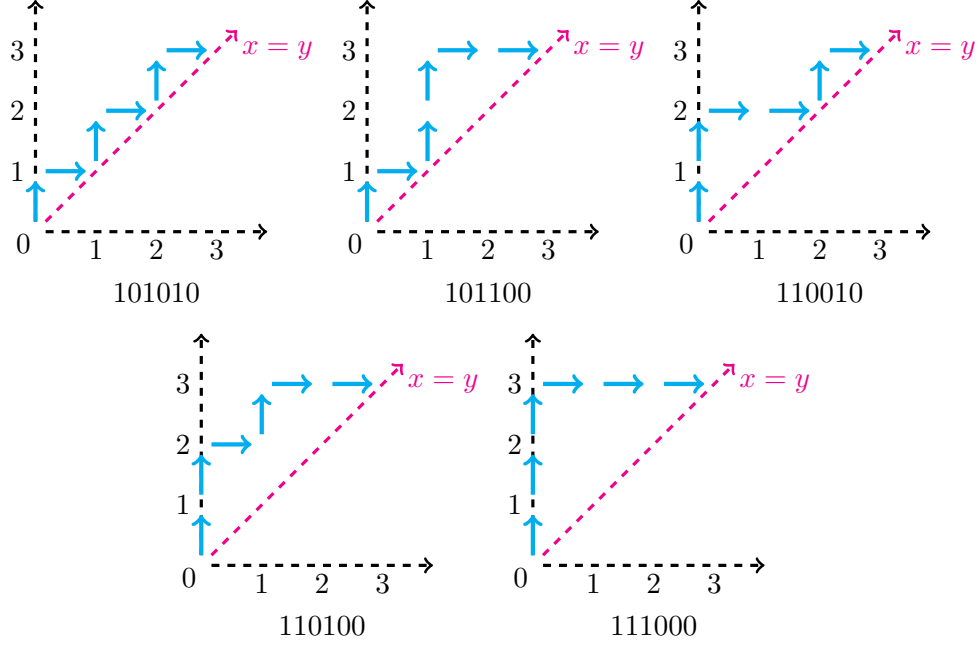
- $(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 3) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 2, 3)$

**Exemple 5** (Définition 5 :  $n = 5$ ).

- $w_1 = 1011000110$  n'est *pas* un mot de Dyck, car  $|1011000|_0 > |1011000|_1$ .
- $w_2 = 1011010101$  n'est *pas* un mot de Dyck, car  $|w_2|_0 \neq |w_2|_1$ .
- $w_3 = 1011010100$  *est* un mot de Dyck :

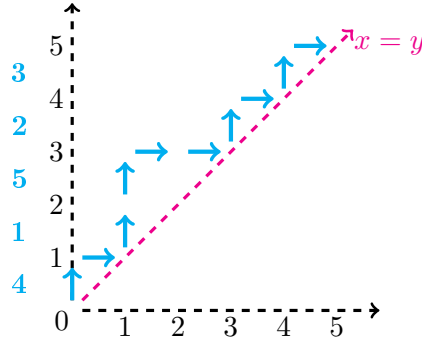


**Exemple 6** (Théorème 6 :  $n = 3$ ).  $d_3 = 5$ .



**Exemple 7** (Définition 7 :  $n = 5$ ).

- $w_1 = 4051002030$  n'est *pas* un mot de Dyck décoré, car  $5 > 1$ .
- $w_2 = 4015002030$  *est* un mot de Dyck décoré :



**Exemple 8** (Théorème 8 :  $n = 3$ ).  $ld_3 = 4^2 = 16$

- Mots de la forme  $XXX000$  :  
123000
- Mots de la forme  $XX0X00$  :  
120300      130200      230100
- Mots de la forme  $XX00X0$  :  
120030      130020      230010
- Mots de la forme  $X0XX00$  :  
102300      201300      301200

— Mots de la forme  $X0X0X0$  :

102030	103020	201030
203010	301020	302010

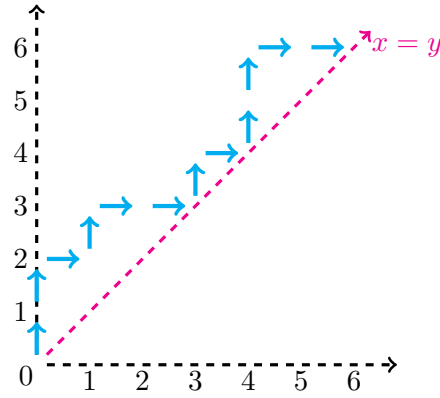
## B Exemples pour la Partie 2

**Exemple 9** (Proposition 9 :  $n = 6, \mathcal{PF}'_6 \rightarrow \mathcal{D}_6$ ).

—  $f = (1, 1, 2, 4, 5, 5)$

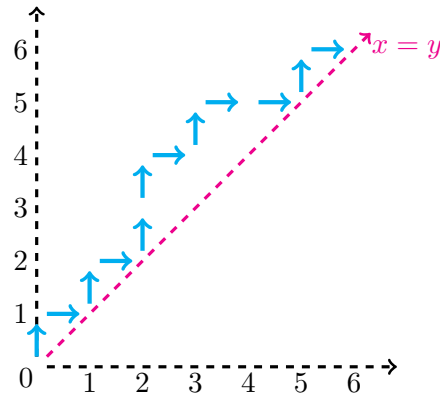
$l_1 = 2$	$l_2 = 1$	$l_3 = 0$
$l_4 = 1$	$l_5 = 2$	$l_6 = 0$

—  $w = (110100101100)$



**Exemple 10** (Proposition 9 :  $n = 6, \mathcal{D}_6 \rightarrow \mathcal{PF}'_6$ ).

—  $w = 101011010010$



— Distances :

$s_1 = 0$	$a_1 = 1$
$s_2 = 1$	$a_2 = 2$
$s_3 = 2$	$a_3 = 3$

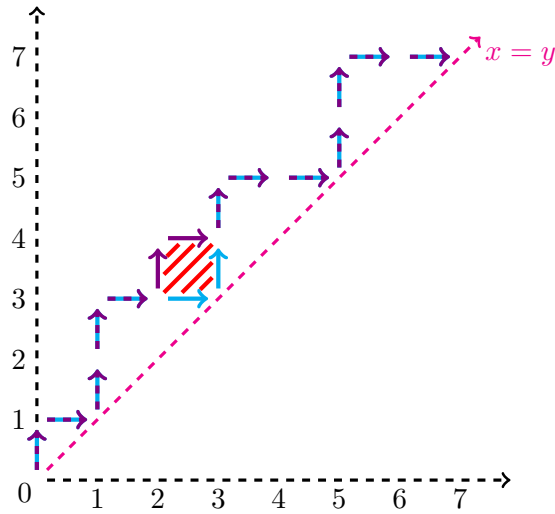
$$\begin{array}{ll}
s_4 = 2 & a_4 = 3 \\
s_5 = 3 & a_5 = 4 \\
s_6 = 5 & a_6 = 6
\end{array}$$

$$— f = (1, 2, 3, 3, 4, 6)$$

**Exemple 11** (Définition 10 :  $n = 7$ ).  $10110011001100 \succ_d 10110101001100$

$$— w_1 = 101110$$

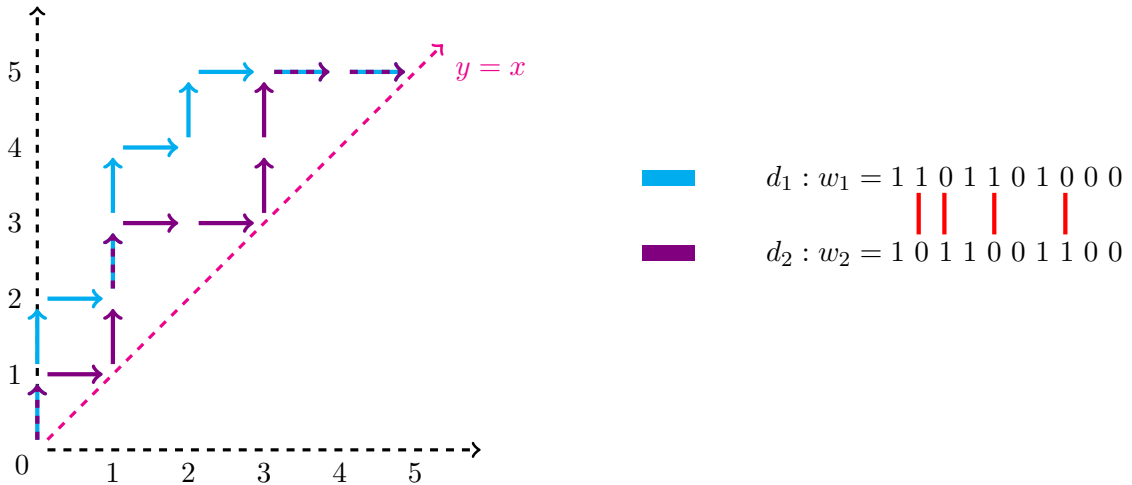
$$— w_2 = 1001100$$



$$\text{blue square} \quad 10110011001100 \quad \text{purple square} \quad 10110101001100 \quad \text{red square} \quad \text{différence}$$

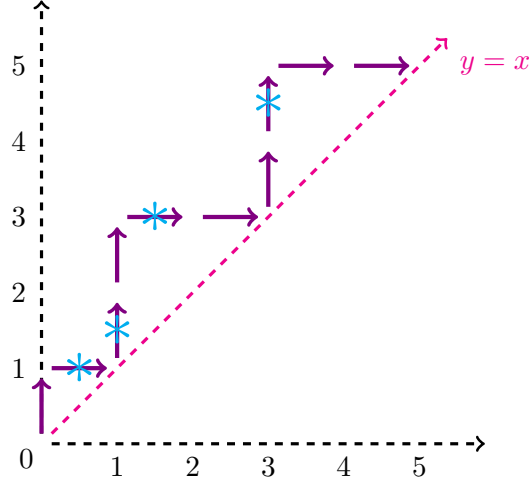
**Exemple 12** (Définition 13 :  $n = 6$ ).  $(1, 1, 2, 3, 4, 5) \succ (1, 1, 2, 3, 3, 5)$

**Exemple 13** (Preuve du Théorème Principal :  $n = 5$ ). On définit  $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_5$  deux chemins de Dyck imbriqués :

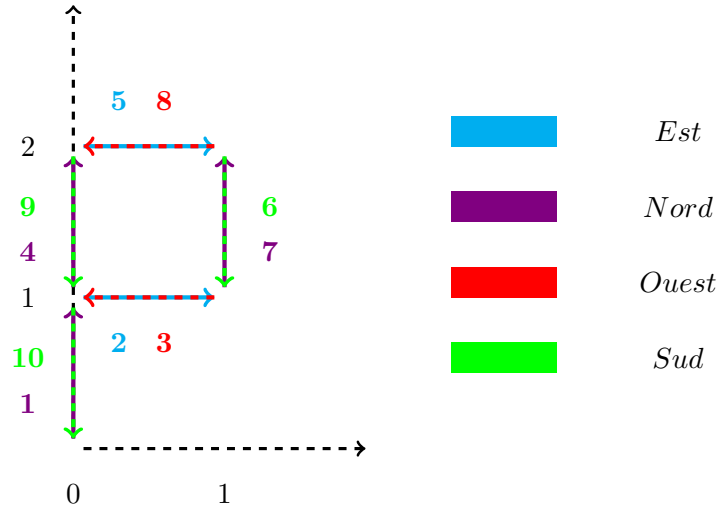




Le chemin de Dyck étoilé correspondant est le suivant :



Le chemin NESO en bijection est donc NEONESNOSS, soit  $\uparrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow \uparrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow$  :



**Exemple 14** (Proposition 15 :  $n = 6, \mathcal{PF}_6 \rightarrow \mathcal{LD}_6$ ).

—  $f = (5, 2, 1, 4, 5, 1)$

$im_1 = \{3, 6\}$

$im_4 = \{4\}$

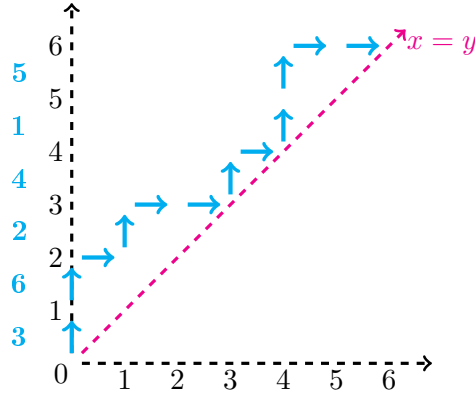
$im_2 = \{2\}$

$im_5 = \{1, 5\}$

$im_3 = \emptyset$

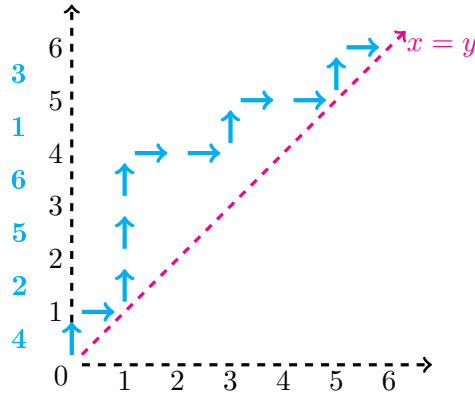
$im_6 = \emptyset$

—  $w = 360200401500$



**Example 15** (Proposition 15 :  $n = 6, \mathcal{LD}_6 \rightarrow \mathcal{PF}_6$ ).

—  $w = 402560010030$



— Distances :

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 1$$

$$s_3 = 1$$

$$s_4 = 1$$

$$s_5 = 3$$

$$s_6 = 5$$

— Labels :

$$dist_0 = \{4\}$$

$$dist_1 = \{2, 5, 6\}$$

$$dist_2 = \emptyset$$

$$dist_3 = \{1\}$$

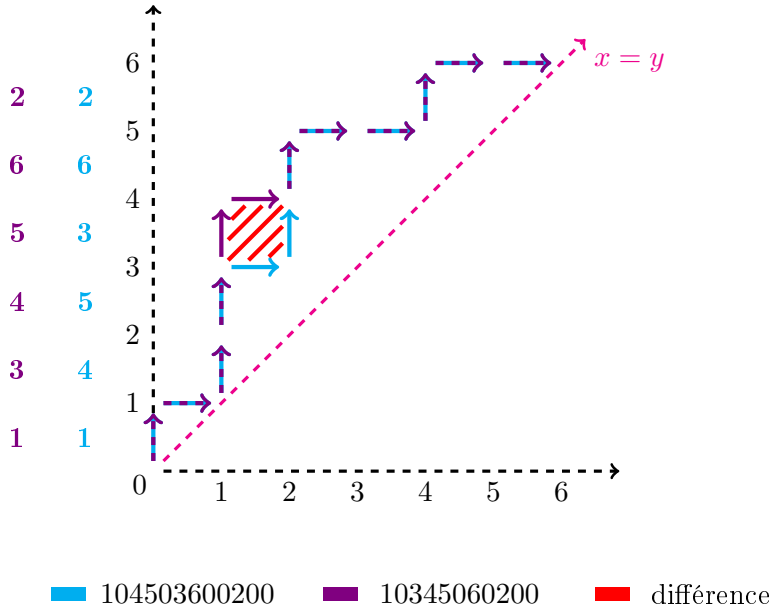
$$dist_4 = \emptyset$$

$$dist_5 = \{3\}$$

—  $f = (4, 2, 6, 1, 2, 2)$

**Example 16** (Définition 16 :  $n = 5$ ).  $104503600200 \succ_{ld} 10345060200$

—  $l = 10$  —  $r = 0200$  —  $x = 45$  —  $x' = 345$  —  $y = 3$  —  $z = 36$  —  $z' = 6$



**Exemple 17** (Définition 17 :  $n = 5$ ). Dans l'ordre, les montées de 104503600200 sont :  
 — 1 — 45 — 36 —  $\emptyset$  — 2 —  $\emptyset$

## C Exemples pour la Partie 3

**Exemple 18** (Définition 19 :  $a > b$  :  $a = 7, b = 3$ ).

- Limites pour toute séquence de  $\mathcal{PF}_{7,3}$  une fois triée :  $[1, 1\frac{3}{7}, 1\frac{6}{7}, 2\frac{2}{7}, 2\frac{5}{7}, 3\frac{1}{7}, 3\frac{4}{7}]$
- $f_1 = (2, 1, 1, 3, 2, 3, 1) \in \mathcal{PF}_{7,3}$
- $f_2 = (2, 1, 2, 3, 2, 3, 1) \notin \mathcal{PF}_{7,3}$ , bien que  $f_2 \in \mathcal{PF}_7$

**Exemple 19** (Définition 19 :  $a < b$  :  $a = 5, b = 7$ ).

- Limites pour toute séquence de  $\mathcal{PF}_{5,7}$  une fois triée :  $[1, 2\frac{2}{5}, 3\frac{4}{5}, 5\frac{1}{5}, 6\frac{3}{5}]$
- $f_3 = (6, 3, 5, 1, 2) \in \mathcal{PF}_{5,7}$ , bien que  $f_3 \notin \mathcal{PF}_5$
- $f_4 = (6, 3, 5, 1, 3) \notin \mathcal{PF}_{5,7}$

**Exemple 20** (Théorème 20 :  $a = 3, b = 5$ ).

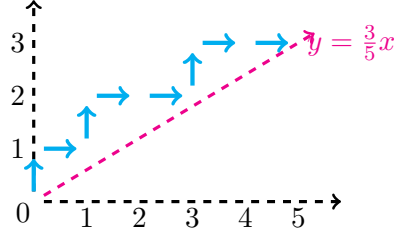
- $pf_{3,5} = 25$  — Limites :  $[1, 2\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}]$

(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 1, 3)	(1, 1, 4)	(1, 2, 1)	(1, 2, 2)	(1, 2, 3)	(1, 2, 4)
(1, 3, 1)	(1, 3, 2)	(1, 4, 1)	(1, 4, 2)	(2, 1, 1)	(2, 1, 2)	(2, 1, 3)	(2, 1, 4)
(2, 2, 1)	(2, 3, 1)	(2, 4, 1)	(3, 1, 1)	(3, 1, 2)	(3, 2, 1)	(4, 1, 1)	(4, 1, 2)
(4, 2, 1)							

**Exemple 21** (Définition 22 :  $a < b$  :  $a = 3, b = 5$ ).

- $w_1 = 10100010$  n'est *pas* un 3, 5 - mot de Dyck, car  $|101000|_1 = 2 < \frac{3}{5}|101000|_0 = 2\frac{2}{5}$ .

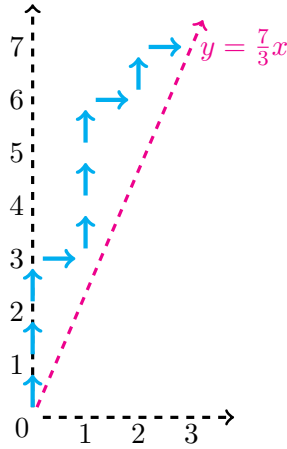
—  $w_2 = 10100100$  est un 3, 5 - mot de Dyck :



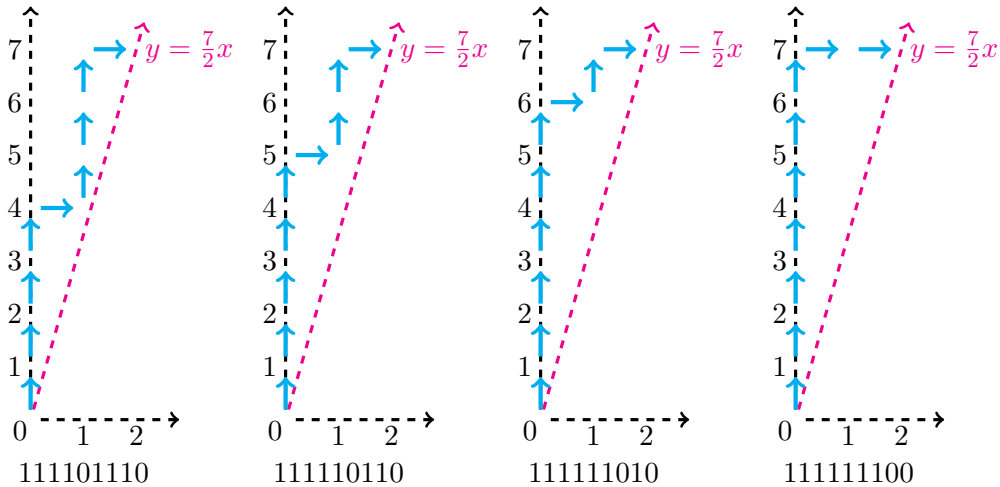
**Exemple 22** (Définition 22 :  $a > b$  :  $a = 7, b = 3$ ).

—  $w_1 = 1110011110$  n'est pas un 7, 3 - mot de Dyck, car  $|11100|_1 = 3 < \frac{7}{3}|11100|_0 = 4\frac{1}{3}$ .

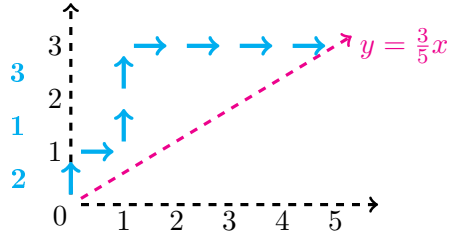
—  $w_2 = 1110111010$  est un 7, 3 - mot de Dyck :



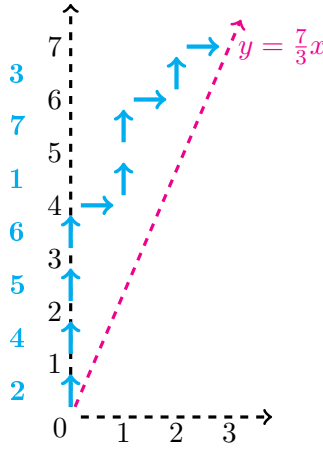
**Exemple 23** (Théorème 23 :  $a = 7, b = 2$ ).  $r_{7,2} = 4$ .



**Exemple 24** (Définition 24 :  $a < b$  :  $a = 3, b = 5$ ).  $w = 20130000$  :



**Exemple 25** (Définition 24 :  $a > b$  :  $a = 7, b = 3$ ).  $w_2 = 2456017030$  :



**Exemple 26** (Théorème 25 :  $a = 4, b = 3$ ).  $lr_{4,3} = 3^3 = 27$

— Mots de la forme  $XXXX000$  :

1234000

— Mots de la forme  $XXX0X00$  :

1230400

1240300

1340200

2340100

— Mots de la forme  $XX0XX00$  :

1203400

1302400

1402300

2301400

2401300

3401200

— Mots de la forme  $XXX00X0$  :

1230040

1240030

1340020

2340010

— Mots de la forme  $XX0X0X0$  :

1203040

1204030

1302040

1304020

1402030

1403020

2301040

2304010

2401030

2403010

3401020

3402010