Fonctions de Parking

Tessa Lelièvre-Osswald

Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès
IRIF - Pôle Combinatoire

30 août 2020

Introduction : Combinatoire

- **Combinatoire** : domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis *structurés* par leur énumération et leur comptage.
- **Branches principales** :
  - combinatoire *énumérative* : dénombrement.
  - combinatoire *bijective* : déduire une égalité entre les cardinaux de deux classes combinatoires en bijection.
- **Classe combinatoire** : ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une application $\mathcal{A} \to \mathbb{N}$, appelée *taille*.

Introduction : Exemples

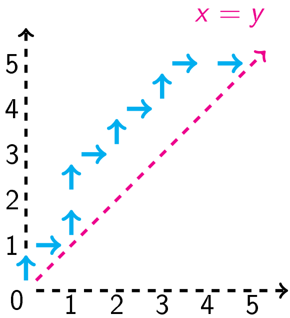
- **Classes combinatoires** :
  - Mots de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$: $|\{0,1\}^n| = 2^n$
  - Permutations de $\{1,\dots,n\}$: $|\mathfrak{S}_n| = n!$
  - k-cycles de $\mathfrak{S}_n$: $|{}^k\mathfrak{S}_n| = \dfrac{n!}{(n-k)!k}$
- **Bijection** : $\mathfrak{S}_n \longleftrightarrow {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$:
  - $\mathfrak{S}_n \to {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$: Soit $\sigma = a_1 \dots a_n$ notre permutation.
    $\sigma' = (n+1\ a_1 \dots a_n) \in {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$.
  - ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1} \to \mathfrak{S}_n$: Soit $\sigma' = (a_1 \dots a_{n+1})$ notre permutation circulaire.
    Notons i l'indice tel que $a_i = n+1$. $\sigma = a_{i+1} \dots a_{n+1} a_1 \dots a_{i-1} \in \mathfrak{S}_n$.
  - $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)} = \dfrac{(n+1)!}{0!(n+1)} = \dfrac{n!(n+1)}{n+1} = n!$

Introduction : Chemins de Dyck

- **Mot de Dyck** : $\mathcal{D}_n = \{w \in \{0,1\}^{2n}$ respectant les deux conditions $\}$:
  - $|w|_0 = |w|_1 = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_1$
- **Chemin de Dyck** :
  - Chaque 1 devient un pas Nord ($\uparrow$)
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $d_n = |\mathcal{D}_n| = Cat(n) = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

- Exemple :

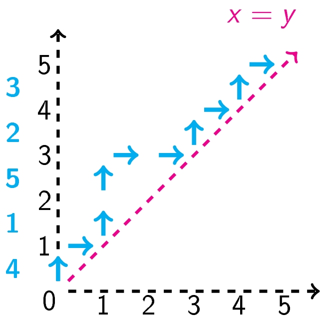
  $w = 1011010100$



Introduction : Chemins de Dyck

- **Mot de Dyck étiquetté** :
  $\mathcal{LD}_n = \{w \in \{0, \ldots, n\}^{2n}$ respectant les quatre conditions $\}$:
  - $|w|_0 = |w|_{\neq 0} = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_{\neq 0}$
  - Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |w|_i = 1$
  - Les entiers non-nuls consécutifs sont en ordre croissant.
- **Chemin de Dyck étiquetté** :
  - Chaque $i \neq 0$ devient un pas Nord ($\uparrow$) étiquetté par i
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $ld_n = |\mathcal{LD}_n| = (n+1)^{n-1}$

- Exemple :
  $w = 4015002030$



Introduction : Fonctions de Parking

- **Fonction de Parking primitive** : $\mathcal{PF'}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid 1 \leqslant a_i \leqslant i$ pour tout i entre 1 et n, et $a_i \leqslant \ldots \leqslant a_n\}$
  - Exemple : $(1,1,3,3,4) \in \mathcal{PF'}_5$
  - Contre-exemple : $(1,1,3,2,4) \notin \mathcal{PF'}_5$
- $pf'_n = |\mathcal{PF'}_n| = Cat(n) = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$
- **Fonction de Parking** : $\mathcal{PF}_n = \{(a_1, \ldots, a_n)$ dont le tri croissant $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{PF'}_n\}$
  - Exemple : $(1,1,3,2,4) \in \mathcal{PF}_5$
  - Contre-exemple : $(2,1,4,5,4) \notin \mathcal{PF}_5$
- $pf_n = |\mathcal{PF}_n| = (n+1)^{n-1}$

Introduction : Posets

- **Poset** : Ensemble $\mathcal{E}$ partiellement ordonné : ensemble muni d'une *relation d'ordre* $\preccurlyeq$ permettant de comparer certains couples d'éléments de l'ensemble, muni de propriétés :
  - Réflexivité : $e \in \mathcal{E} \rightarrow e \preccurlyeq e$
  - Anti-symétrie : $e_1 \preccurlyeq e_2 \wedge e_2 \preccurlyeq e_1 \rightarrow e_1 = e_2$
  - Transitivité : $e_1 \preccurlyeq e_2 \wedge e_2 \preccurlyeq e_3 \rightarrow e_1 \preccurlyeq e_3$
- **Exemple** :
  - $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $\preccurlyeq$: $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$ ssi $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$
  - $(3, 8)$ et $(2, 9)$ sont incomparables

Plan

Plan

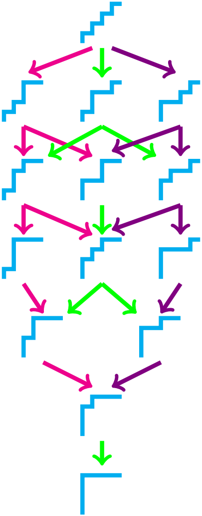
1.1) Des relations de couverture pour $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{PF'}_n$

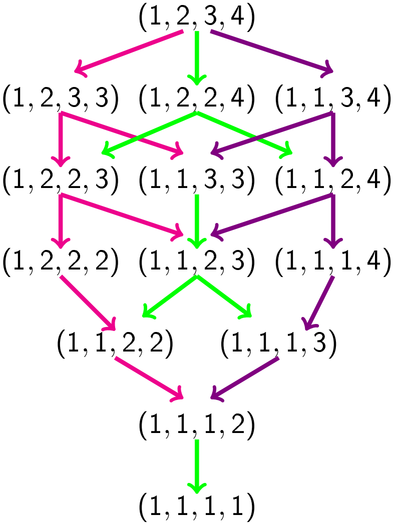
- $\mathcal{D}_n$: $w \gtrdot_d w'$, s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que :
  - $w = w_1 01 w_2$
  - $w' = w_1 10 w_2$
- Si $w_1 \gtrdot_d w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est *au dessus* de celui correspondant à w_1, et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.
- $\mathcal{PF'}_n$: $f \gtrdot g$ s'il existe i tel que :
  - $f = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \quad a_{i+1}, \ldots, a_n)$
  - $g = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

1.1) **Bijection** entre les deux ensembles

- $\mathcal{PF'}_n \to \mathcal{D}_n$:
  - $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF'}_n$.
  - l_i = nombre d'occurences de i dans f.
  - Mot de Dyck correspondant : $\underbrace{1\cdots1}_{l_1}0\underbrace{1\cdots1}_{l_2}0\cdots\underbrace{1\cdots1}_{l_n}0$.
- $\mathcal{D}_n \to \mathcal{PF'}_n$:
  - $w \in \mathcal{D}_n$.
  - Considérons son chemin de Dyck.
  - s_i = abscisse du i^e pas Nord. $a_i = s_i + 1$.
  - Fonction de parking primitive correspondante : $(a_1, \ldots, a_n)$.

1.1) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{PF}'_4$





1.1) Théorème Principal

1.2) Des relations de couverture pour $\mathcal{LD}_n$ et $\mathcal{PF}_n$

- $\mathcal{LD}_n$: $w \gtrdot_{ld} w'$ s'il existe l, r, x, x', y, z, et z' tels que :
  - l est le mot vide, ou finit par un 0
  - r est le mot vide, ou commence par un 0
  - $x = x_1 x_2 \cdots$ avec $x_i > 0$ pour tout i
  - $z = z_1 z_2 \cdots$ avec $z_i > 0$ pour tout i
  - $x' = x$ où y est correctement inséré en ordre croissant
  - y apparait dans z, et $z' = z$ où y à été supprimé
  - $w = lx0zr$ et $w' = lx'0z'r$
- Si $w_1 \gtrdot_{ld} w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est *au dessus* de celui correspondant à w_1, et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.
- $\mathcal{PF}_n$: on garde la même relation que pour $\mathcal{PF}'_n$.

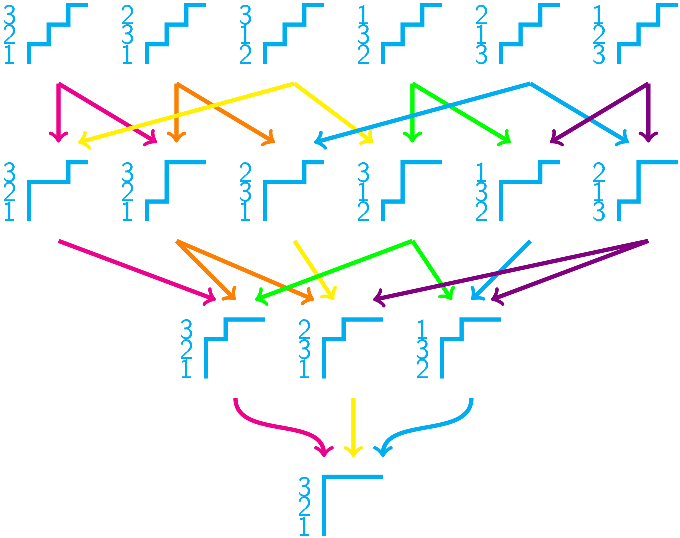
1.2) **Bijection** entre les deux ensembles

- $\mathcal{PF}_n \to \mathcal{LD}_n$:
  - $f = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{PF}_n$.
  - $im_i : \{j \mid a_j = i\}$.
  - $im_{i,1}, \dots, im_{i,k_i}$ = éléments de im_i triés par ordre croissant.
  - Mot de Dyck décoré correspondant :

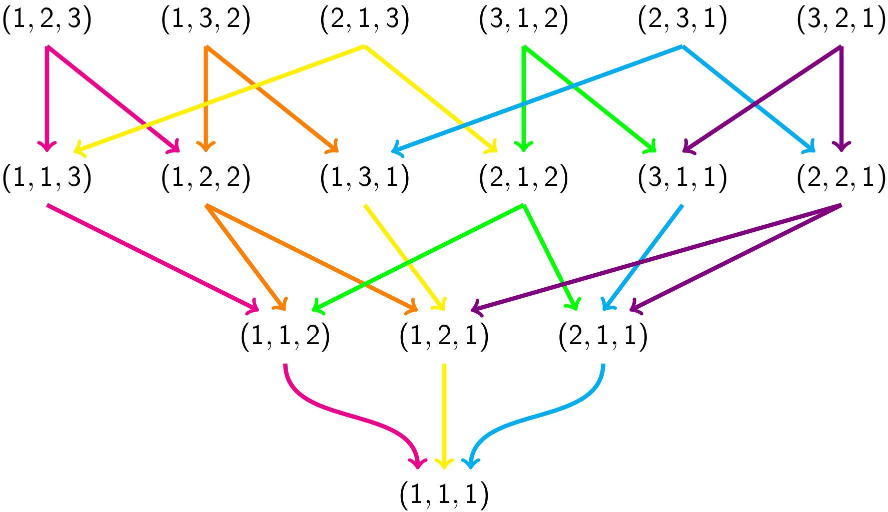
$$\underbrace{im_{1,1} \cdots im_{1,k_1}}_{im_1} 0 \underbrace{im_{2,1} \cdots im_{2,k_2}}_{im_2} 0 \cdots \underbrace{im_{n,1} \cdots im_{n,k_n}}_{im_n} 0.$$

- $\mathcal{LD}_n \to \mathcal{PF}_n$:
  - $w \in \mathcal{LD}_n$. Considérons son chemin de Dyck.
  - s_i = abscisse du i^e pas Nord.
  - $label(i)$ = étiquette du i^e pas Nord.
  - $dist_i = \{label(j) | s_j = i\}$. Si $j \in dist_i$ alors $a_j = i + 1$.
  - Fonction de parking correspondante : $(a_1, \dots, a_n)$.

1.2) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{LD}_3$ et $\mathcal{PF}_3$



1.2) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{LD}_3$ et $\mathcal{PF}_3$



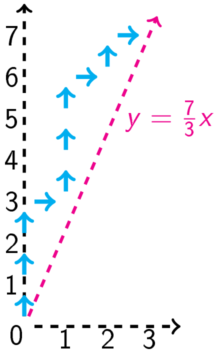
1.2) Conjecture Principale

Plan

2.1) Chemins de Dyck rationnels

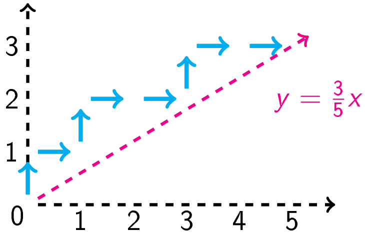
- **Mot de Dyck rationnel** :
  $\mathcal{R}_{a,b} = \{w \in \{0,1\}^{a+b}$ respectant les trois conditions $\}$:
  - Pour tout préfixe w' de w, $\frac{a}{b}|w'|_0 \leqslant |w'|_1$
  - $|w|_0 = b$
  - $|w|_1 = a$
- **Chemin de Dyck rationnel** :
  - Chaque 1 devient un pas Nord ($\uparrow$)
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $r_{a,b} = |\mathcal{R}_{a,b}| = Cat(a,b) = \dfrac{1}{a+b}\dbinom{a+b}{a}$

- Exemple : $w = 1110111010 \in \mathcal{R}_{7,3}$



2.1) Chemins de Dyck rationnels

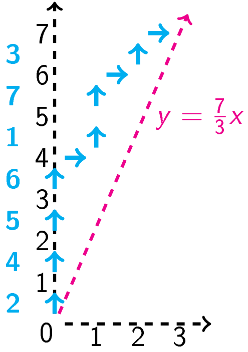
- $w = 10100100 \in \mathcal{R}_{3,5}$



2.1) Chemins de Dyck rationnels

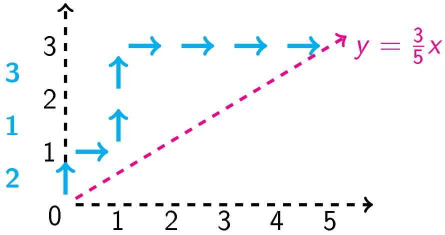
- **Mot de Dyck rationnel étiquetté** : $\mathcal{LR}_{a,b} = \{w \in \{0, \dots, a\}^{a+b}$ respectant les cinq conditions $\}$:
  - Pour tout préfixe w' de w, $\frac{a}{b}|w'|_0 \leqslant |w'|_{\neq 0}$
  - Pour tout $i \in \{1, \dots, a\}, |w|_i = 1$
  - $|w|_0 = a$ et $|w|_{\neq 0} = b$
  - Les entiers non-nuls consécutifs sont en ordre croissant.
- **Chemin de Dyck rationnel étiquetté** :
  - Chaque $i \neq 0$ devient un pas Nord ($\uparrow$) étiquetté par i
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $lr_{a,b} = |\mathcal{LR}_{a,b}| = b^{a-1}$

- Exemple : $w = 2456017030 \in \mathcal{LR}_{7,3}$



2.1) Chemins de Dyck rationnels

- Exemple : $w = 20130000 \in \mathcal{LR}_{3,5}$



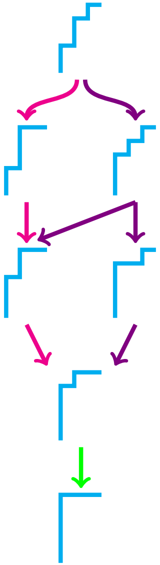
2.1) Fonctions de parking rationnelles

- **Fonction de Parking rationnelle primitive** : $\mathcal{PF'}_{a,b} = \{(a_1, \dots, a_a) \mid 1 \leqslant a_i \leqslant 1 + \frac{b}{a}(i-1)$ pour tout i entre 1 et a, et $a_i \leqslant \dots \leqslant a_a\}$
  - Exemple : $(1,1,1,2,2,2,3) \in \mathcal{PF'}_{7,3}$
  - Contre-exemple : $(1,1,2,2,2,2,3) \notin \mathcal{PF'}_{7,3}$
  - Exemple : $(1,2,4) \in \mathcal{PF'}_{3,5}$
- $pf'_{a,b} = |\mathcal{PF'}_{a,b}| = Cat(a,b) = \frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}$
- **Fonction de Parking rationnelle** : $\mathcal{PF}_{a,b} = \{(a_1, \dots, a_a)$ dont le tri croissant $(b_1, \dots, b_a) \in \mathcal{PF'}_{a,b}\}$
  - Exemple : $(3,1,2,2,1,2,1) \in \mathcal{PF}_{7,3}$
  - Exemple : $(4,1,2) \in \mathcal{PF}_{3,5}$
- $pf_{a,b} = |\mathcal{PF}_{a,b}| = b^{a-1}$

2) Relations et bijections

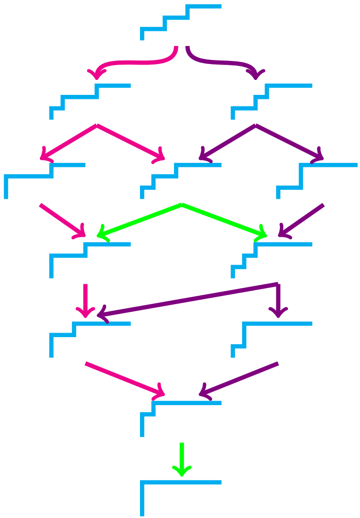
On utilise ici les mêmes relations et bijections que dans le cas classique.

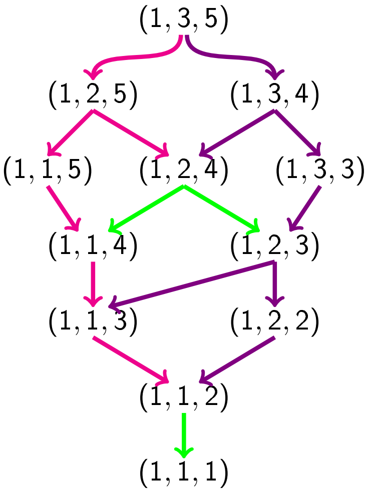
2.2) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{R}_{5,3}$ et $\mathcal{PF}'_{5,3}$



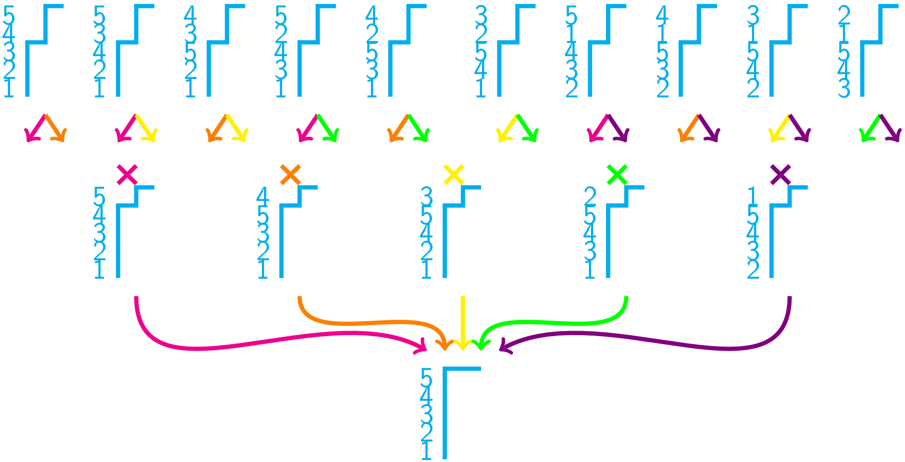
$$
\begin{tikzcd}
 & (1,1,2,2,3) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(1,1,2,2,2) \arrow[d] & & (1,1,1,2,3) \arrow[dll] \arrow[d] \\
(1,1,1,2,2) \arrow[dr] & & (1,1,1,1,3) \arrow[dl] \\
 & (1,1,1,1,2) \arrow[d] & \\
 & (1,1,1,1,1) &
\end{tikzcd}
$$

2.2) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{R}_{3,7}$ et $\mathcal{PF}'_{3,7}$





2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{5,2}$ et $\mathcal{PF}_{5,2}$



2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{5,2}$ et $\mathcal{PF}_{5,2}$

$(1,1,2,1,2)$ $(1,2,1,1,2)$ $(1,2,2,1,1)$ $(2,1,1,2,1)$ $(2,2,1,1,1)$

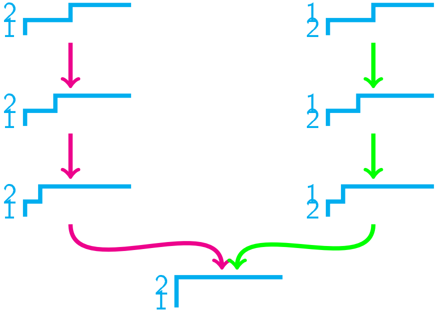
$(1,1,1,2,2)$ $(1,1,2,2,1)$ $(1,2,1,2,1)$ $(2,1,1,1,2)$ $(2,1,2,1,1)$

$\times$ $\times$ $\times$ $\times$ $\times$

$(1,1,1,1,2)$ $(1,1,1,2,1)$ $(1,1,2,1,1)$ $(1,2,1,1,1)$ $(2,1,1,1,1)$

$(1,1,1,1,1)$

2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{2,7}$ et $\mathcal{PF}_{2,7}$



$$\begin{tikzcd}
(1,4) \arrow[d] & & (4,1) \arrow[d] \\
(1,3) \arrow[d] & & (3,1) \arrow[d] \\
(1,2) \arrow[dr, bend right] & & (2,1) \arrow[dl, bend left] \\
& (1,1) &
\end{tikzcd}$$

Plan