Fonctions de Parking

Tessa Lelièvre-Osswald

Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès

IRIF - Pôle Combinatoire

25 août 2020

Introduction : Combinatoire

- **Combinatoire** : domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis *structurés* par leur énumération et leur comptage.
- **Branches principales** :
  - combinatoire *énumérative* : dénombrement.
  - combinatoire *bijective* : déduire une égalité entre les cardinaux de deux classes combinatoires en bijection.
- **Classe combinatoire** : ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une application $\mathcal{A} \to \mathbb{N}$, appelée *taille*.

Introduction : Exemples

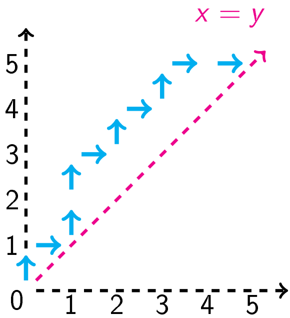
- **Classes combinatoires** :
  - Mots de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$: $|\{0,1\}^n| = 2^n$
  - Permutations de $\{1,\ldots,n\}$: $|\mathfrak{S}_n| = n!$
  - k-cycles de $\mathfrak{S}_n$: $|{}^k\mathfrak{S}_n| = \dfrac{n!}{(n-k)!k}$
- **Bijection** : $\mathfrak{S}_n \longleftrightarrow {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$:
  - $\mathfrak{S}_n \to {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$: Soit $\sigma = a_1 \ldots a_n$ notre permutation. $\sigma' = (n+1\ a_1 \ldots a_n) \in {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$.
  - ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1} \to \mathfrak{S}_n$: Soit $\sigma' = (a_1 \ldots a_{n+1})$ notre permutation circulaire. Notons i l'indice tel que $a_i = n+1$. $\sigma = a_{i+1} \ldots a_{n+1} a_1 \ldots a_{i-1} \in \mathfrak{S}_n$.
  - $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)} = \dfrac{(n+1)!}{0!(n+1)} = \dfrac{n!(n+1)}{n+1} = n!$

Introduction : Chemins de Dyck

- **Mot de Dyck** : $\mathcal{D}_n = \{w \in \{0,1\}^{2n}$ respectant les deux conditions $\}$:
  - $|w|_0 = |w|_1 = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_1$
- **Chemin de Dyck** :
  - Chaque 1 devient un pas Nord ($\uparrow$)
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $d_n = |\mathcal{D}_n| = Cat(n) = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

- Exemple :

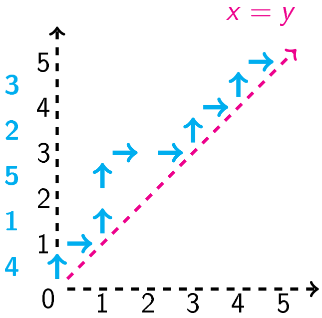
  $w = 1011010100$



Introduction : Chemins de Dyck

- **Mot de Dyck étiquetté** :
  $\mathcal{LD}_n = \{w \in \{0, \ldots, n\}^{2n}$ respectant les trois conditions $\}$:
  - $|w|_0 = |w|_{\neq 0} = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_{\neq 0}$
  - Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |w|_i = 1$
- **Chemin de Dyck étiquetté** :
  - Chaque $i \neq 0$ devient un pas Nord ($\uparrow$) étiquetté par i
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)
- $ld_n = |\mathcal{LD}_n| = (n+1)^{n-1}$

- Exemple :
  $w = 4015002030$



Introduction : Fonctions de Parking

- **Fonction de Parking primitive** : $\mathcal{PF'}_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid 1 \leqslant a_i \leqslant i$ pour tout i entre 1 et n, et $a_i \leqslant \dots \leqslant a_n\}$
  - Exemple : $(1, 1, 3, 3, 4) \in \mathcal{PF'}_5$
  - Contre-exemple : $(1, 1, 3, 2, 4) \notin \mathcal{PF'}_5$
- $pf'_n = |\mathcal{PF'}_n = Cat(n) = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$
- **Fonction de Parking** : $\mathcal{PF}_n = \{(a_1, \dots, a_n)$ dont le tri croissant $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{PF'}_n\}$
  - Exemple : $(1, 1, 3, 2, 4) \in \mathcal{PF}_5$
  - Contre-exemple : $(2, 1, 4, 5, 4) \notin \mathcal{PF}_5$
- $pf_n = |\mathcal{PF}_n = (n+1)^{n-1}$

Introduction : Posets

- **Poset** : Ensemble $\mathcal{E}$ partiellement ordonné : ensemble muni d'une *relation d'ordre* $\preccurlyeq$ permettant de comparer certains couples d'éléments de l'ensemble, muni de propriétés :
  - Réflexivité : $e \in \mathcal{E} \rightarrow e \preccurlyeq e$
  - Anti-symétrie : $e_1 \preccurlyeq e_2 \wedge e_2 \preccurlyeq e_1 \rightarrow e_1 = e_2$
  - Transitivité : $e_1 \preccurlyeq e_2 \wedge e_2 \preccurlyeq e_3 \rightarrow e_1 \preccurlyeq e_3$
- **Exemple** :
  - $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $\preccurlyeq$: $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$ ssi $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$
  - $(3, 8)$ et $(2, 9)$ sont incomparables

Plan

Plan

1. Des posets pour le cas classique
   - Posets classiques primitifs
   - Posets classiques non-primitifs
2. Des posets pour le cas rationnel
   - Le cas rationnel
   - Posets rationnels primitifs
   - Posets rationnels non-primitifs
3. Conclusion

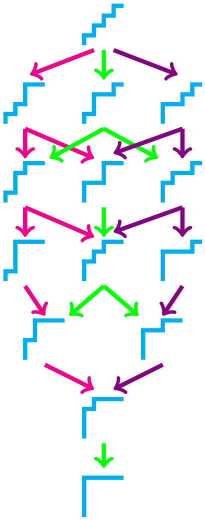
Des relations de couverture pour $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{PF'}_n$

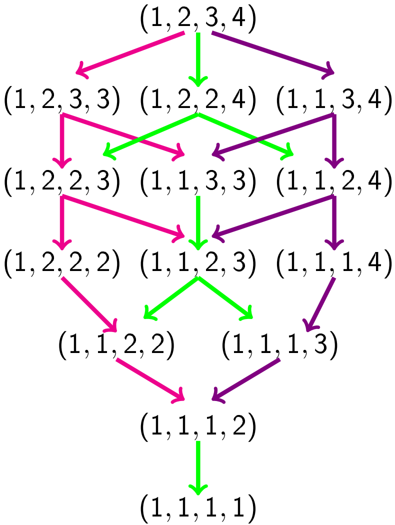
- $\mathcal{D}_n$: $w \gtrdot_d w'$, s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que :
  - $w = w_1 01 w_2$
  - $w' = w_1 10 w_2$
- Si $w_1 \gtrdot_d w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est *au dessus* de celui correspondant à w_1, et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.
- $\mathcal{PF'}_n$: $f \gtrdot g$ s'il existe i tel que :
  - $f = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \quad a_{i+1}, \ldots, a_n)$
  - $g = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Bijection entre les deux ensembles

- $\mathcal{PF'}_n \to \mathcal{D}_n$:
  - $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF'}_n$.
  - l_i = nombre d'occurences de i dans f.
  - Mot de Dyck correspondant : $\underbrace{1\cdots1}_{l_1}0\underbrace{1\cdots1}_{l_2}0\cdots\underbrace{1\cdots1}_{l_n}0$.
- $\mathcal{D}_n \to \mathcal{PF'}_n$:
  - $w \in \mathcal{D}_n$.
  - Considérons son chemin de Dyck.
  - s_i = abscisse du i^e pas Nord. $a_i = s_i + 1$.
  - Fonction de parking primitive correspondante : $(a_1, \ldots, a_n)$.

Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{PF}'_4$





Plan

Plan