Fonctions de Parking Classiques et Rationnelles

Tessa Lelièvre-Osswald
Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès
Equipe : IRIF - Pôle Combinatoire

12 août 2020

Contexte général

La *combinatoire* est un domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis par leur énumération et leur comptage. Se divisant en plusieurs branches, nous abordons dans ce rapport deux branches principales : la *combinatoire énumérative*, domaine le plus classique, basé sur le dénombrement ; et *la combinatoire bijective*, consistant à déduire une égalité entre les résultats de comptage de deux classes combinatoires qui sont en bijection.

On s'intéresse ici en particulier à des objets combinatoires appelés *fonctions de parking*. Introduites en 1966 par Konheim et Weiss ([1]), les fonctions de parking sont les séquences d'entiers positifs dont le nombre d'éléments *inférieurs ou égaux* à i est *supérieur ou égal* à i pour tout entier i entre 1 et n.
Leur appellation vient du problème de hachage suivant : soient un parking contenant n places numérotées de 1 à n, et n voitures à garer. A chaque voiture i est associé un entier a_i, indiquant que cette voiture doit être garée à une place dont le numéro est supérieur ou égal à a_i. La séquence $(a_1, \ldots, a_n)$ est alors appelée fonction de parking si et seulement si il existe une configuration de garage des n voitures respectant les contraintes données par les entiers a_i.

Longuement étudiées, les principaux résultats de comptage émanent des travaux de Stanley ([2], [3]), Kreweras ([4]), et Edelman ([5]). Plus récemment, la notion de fonction de parking *rationnelle* à été introduite et étudiée – entre autres – dans les travaux d'Armstrong, Loehr et Warrington ([6]), ainsi que de Bodnar ([7]). Bien que les travaux mentionnées ci-dessus concernent principalement le comptage des fonctions de parking et des relations de leurs posets, ces dernières ont des applications dans de nombreux domaines tels que l'analyse et la géométrie.

Problèmes étudiés

Dans cet article, nous abordons deux principaux problèmes.

Premièrement, à notre connaissance, les posets proposés jusque là pour les fonctions de parking dépendent tous de bijections entre les fonctions de parking et une autre structure combinatoire, pour laquelle un poset était déjà défini. Cela rend la définition d'une relation de couverture assez lourde, et rajoute des étapes au processus de comparaison.

Ensuite, l'extension au cas rationnel étant en plein essor dans les travaux les plus récents, de nombreux concept restent à redéfinir en dehors du cas classique.

Contribution proposée

Nous présentons ici un nouveau poset pour les fonctions de parking, dans le cas classique ainsi que dans le cas rationnel. Ainsi, nous introduisons une relation de couverture plus élégante, définie sans structure intermédiaire. De plus, celle-ci est en bijection avec une relation naturelle que nous définissons sur les chemins de Dyck, qui sont une structure élémentaire de la combinatoire.

Enfin, nous reprenons la notion d'*arbres de parking* donnée par Delcroix-Oger, Josuat-Vergès et Randazzo ([8]), afin d'en donner une version rationnelle.

Pour ces deux contributions, le cas rationnel est traité pour toute paire d'entiers premiers entre eux – sans se limiter au cas $a < b$ comme il a pu être fait dans certains travaux.

Une version longue de ce rapport est disponible ici [1], ainsi que l'encodage en Sage des principales notions abordées dans les références 1 à 8 et des constructions que nous présentons.

Arguments en faveur de sa validité

Les posets introduits dans le cas classique sont à l'origine de nos deux résultats principaux.

Dans le cas des fonctions de parking *primitives*, nous exhibons une preuve du Théorème 5, qui donne le nombre d'intervalles dans le poset. Quant à son équivalent pour le cas non-primitif, nous établissons une Conjecture sur le nombre d'intervalles, vérifiée sur les cas $n = 1, \dots, 8$.

Bilan et perspectives

En conclusion, nous avons maintenant des posets définis de manière directe pour les quatre types de fonctions de parking : classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives.

Par la suite, il sera nécessaire de trouver une preuve de la Conjecture, ou bien si elle doit être réfutée, d'exhiber une formule comptant les intervalles dans notre poset des foncions de parking classiques. Quant au cas rationnel, il faudra également trouver des formules exprimant le nombre de relations.

Enfin, l'on pourrait également vouloir étudier les relations de couvertures sur les arbres de parking rationnels.

1. github.com/tessalsifi/ParkingFunctions

Table des matières

1 Introduction

1.1 Fonctions de Parking

En annexe A, les exemples 1 à 4 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

Définition 1 (Fonction de Parking). *Une* fonction de parking *est une séquence d'entiers positifs* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *dont le tri croissant* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *respecte la condition suivante :* $b_i \leqslant i$ *pour tout* $i \leqslant n$.

En d'autres termes, $\#\{i \mid a_i \leqslant k\} \geqslant k \ \forall k \leqslant n$.

On note $\mathcal{PF}_n$ l'ensemble des fonctions de parking de longueur n.

Théorème 1 (Konheim et Weiss, 1966). *Soit* pf_n *le cardinal de* $\mathcal{PF}_n$. *Nous avons*

$$pf_n = (n+1)^{n-1}$$

.

Définition 2 (Fonction de Parking Primitive). *Une fonction de parking* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *est dite* primitive *si elle est déjà triée en ordre croissant.*

On note $\mathcal{PF}'_n$ l'ensemble des fonctions de parking primitives de longueur n.

Théorème 2 (Stanley, 1999)**.** *Soit pf'_n le cardinal de $\mathcal{PF'}_n$. Nous avons*

$$pf'_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ce nombre est le n^e nombre de Catalan $Cat(n)$.

1.2 Chemins de Dyck

En annexe A, les exemples 5 à 8 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

Notation. *On note par $|w|_s$ le nombre d'occurences du symbole s dans le mot w .*

Définition 3 (Mot de Dyck)**.** *Un* mot de Dyck *est un mot $w \in \{0,1\}^*$ tel que :*
- *pour tout* suffixe *w' de w, $|w'|_1 \geqslant |w'|_0$.*
- *$|w|_0 = |w|_1$.*

Un mot de Dyck de longueur $2n$ peut être représenté par un *chemin* allant du point $(0,0)$ au point (n,n), et restant au dessus de l'axe $y = x$, appelé *chemin de Dyck* :
- Chaque 1 correspond à un *pas Nord* $\uparrow$.
- Chaque 0 correspond à un *pas Est* $\rightarrow$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$.

Théorème 3 (André, 1887)**.** *Soit d_n le cardinal de $\mathcal{D}_n$. Nous avons*

$$d_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Définition 4 (Mot de Dyck Décoré)**.** *Un* mot de Dyck décoré *est un mot $w \in \{0,\ldots,n\}^*$ tel que :*
- *pour tout suffixe w' de w, $|w'|_{\neq 0} \geqslant |w'|_0$.*
- *$|w|_0 = |w|_{\neq 0}$.*
- *pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, w contient exactement une occurence de i.*
- *si $w_i \neq 0$ et $w_{i+1} \neq 0$, alors $w_i < w_{i+1}$. Autrement dit, les labels de pas Nord consécutifs doivent être croissants.*

Un mot de Dyck décoré de longueur $2n$ peut être représenté par un *chemin* allant du point $(0,0)$ au point (n,n), où chaque pas North est associé à un label :
- Chaque $i \neq 0$ correspond à un *pas Nord* $\uparrow$ de label i.
- Chaque 0 corresponds à un *pas Est* $\rightarrow$.

Ces chemins sont appelés *chemins de Dyck décorés*.
On note $\mathcal{LD}_n$ l'ensemble des mots de Dyck décorés de longueur $2n$.

Théorème 4. *Soit ld_n le cardinal de $\mathcal{LD}_n$. Nous avons*

$$ld_n = (n+1)^{n-1}$$

.

2 Un poset pour les fonctions de parking classiques

2.1 Le cas primitif

Les exemples 9 à 13 donnés en annexe B illustrent les propositions, définitions et théorèmes de cette section.

Proposition 1. *Puisque $\mathcal{PF}'_n$ et $\mathcal{D}_n$ ont le même cardinal, nous pouvons créer une* bijection *entre les fonctions de parking classiques primitives de longueur n et les mots de Dyck de longueur $2n$.*

Démonstration.

— $\mathcal{PF}'_n \to \mathcal{D}_n$: Soit $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF}'_n$ une fonction de parking classique primitive. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, notons l_i le nombre d'occurences de i dans f. Le mot de Dyck correspondant sera alors $\underbrace{1\cdots1}_{l_1}0\underbrace{1\cdots1}_{l_2}0\cdots\underbrace{1\cdots1}_{l_n}0$.

— $\mathcal{D}_n \to \mathcal{PF}'_n$: Soit $w \in \mathcal{D}_n$ un mot de Dyck. Considérons sa représentation sous la forme d'un chemin de Dyck. Notons s_i l'abscisse du i^e pas Nord. On pose alors $a_i = s_i + 1$. La fonction de parking primitive correspondante sera ainsi $(a_1, \ldots, a_n)$.

□

Nous proposons maintenant des relations de couverture pour ces deux ensembles, telles que les posets ainsi créés soient isomorphes, et que l'un puisse être obtenu en appliquant la bijection ci-dessus à l'autre.

Définition 5 ($\gtrdot_d$)**.** *Soient w et w' deux mots de Dyck de longueur $2n$. On dit que w couvre w', noté $w \gtrdot_d w'$, s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que :*

— $w = w_1 01 w_2$

— $w' = w_1 10 w_2$

Remarque. *Si $w_1 \gtrdot_d w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est* au dessus *de celui correspondant à w_1, et La* différence *entre les deux chemins est un carré de côté 1.*

Définition 6 (Chemins de Dyck Imbriqués)**.** *Deux chemins de Dyck w_1 et w_2 sont dits* imbriqués *si w_1 est égal à w_2 ou au dessus de w_2.*

On déduit donc la proposition suivante de la remarque précédente.

Proposition 2. *IS'il existe une séquence $w_1 \gtrdot_d w_2 \gtrdot_d w_3 \gtrdot_d \cdots \gtrdot_d w_k$ avec $k \geqslant 0$, alors w_1 et w_k sont* imbriqués.

Cette relation de couverture engendre notre *poset* pour $\mathcal{D}_n$. Ainsi, le poset contient l'*intervalle* $[w_1; w_2]$ si et seulement si w_1 et w_2 sont imbriqués.

On définit maintenant la relation bijective sur les fonctions de parking. Celle-ci sera la même pour les 4 types de fonctions de parking (classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives).

Définition 7 ($\gtrdot$)**.** *Soient f et g deux fonctions de parking. On dit que f couvre g, noté $f \gtrdot g$, s'il existe i tel que :*

— $f = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \quad a_{i+1}, \ldots, a_n)$
— $g = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Cette relation de couverture engendre notre poset pour $\mathcal{PF}'_n$.

Théorème 5 (Théorème principal). *Le nombre d'intervalles dans ces posets est égal au $n+1^e$ terme de la suite de l'OEIS A005700*[2]*.*
Alec Mihailovs a démontré que le n^e terme de cette séquence est égal à

$$\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}$$

.

Les premiers termes de cette suite sont $1, 1, 3, 14, 84, 594, 4719, 40898, 379236, 3711916, \ldots$

Démonstration. Puisque le nombre d'intervalles dans le poset de $\mathcal{D}_n$ peut être vu comme le nombre de paires (w_1, w_k) telles que $w_1 \gtrdot_d w_2 \gtrdot_d \cdots \gtrdot_d w_k$, alors nous pouvons décrire le nombre d'intervalles comme étant le nombre de *paires de chemins de Dyck imbriqués*. Ce nombre est bien égal à la suite A005700 (Bruce Westbury, 2013). ☐

On souhaite maintenant étendre cette construction au cas non-primitif. Bien que celle sur les fonctions de parking soit la même, il reste à expliciter la bijection, et à définir la relation de couverture sur les mots de Dyck *décorés*.

2.2 Le cas général

Les exemples 14 à 18 donnés en annexe B illustrent les propositions, définitions et théorèmes de cette section.

Proposition 3. *Puisque $\mathcal{PF}_n$ et $\mathcal{LD}_n$ ont le même cardinal, nous pouvons créer une* bijection *entre les fonctions de parking classiques de longueur n et les mots de Dyck décorés de longueur $2n$.*

Démonstration.

— $\mathcal{PF}_n \rightarrow \mathcal{LD}_n$: Soit $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF}_n$ une fonction de parking. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, posons $im_i : \{j \mid a_j = i\}$.
Notons alors $im_{i,1}, \ldots, im_{i,k_i}$ les éléments de im_i triés par ordre croissant.
Le mot de Dyck décoré correspondant sera $\underbrace{im_{1,1} \cdots im_{1,k_1}}_{im_1} 0 \underbrace{im_{2,1} \cdots im_{2,k_2}}_{im_2} 0 \cdots \underbrace{im_{n,1} \cdots im_{n,k_n}}_{im_n} 0$.

— $\mathcal{LD}_n \rightarrow \mathcal{PF}_n$: Soit w un mot de Dyck décoré. Considérons sa représentation sous la forme d'un chemin de Dyck. Notons s_i l'abscisse du i^e pas Nord.
On note alors $label(i)$ le label du i^e pas nord, et $dist_i = \{label(j) | s_j = i\}$ l'ensemble des labels des pas Nord à distance i de l'axe des ordonnées.
Ainsi, si $j \in dist_i$, on pose $a_j = i + 1$.
La fonction de parking correspondante sera donc $(a_1, \ldots, a_n)$.

2. https ://oeis.org/A005700

$\square$

La relation suivante est l'extension de $\gtrdot_d$ au cas décoré.

Définition 8 ($\gtrdot_{ld}$)**.** *Soient w et w' deux mots de Dyck décorés. On dit que w couvre w', noté $w \gtrdot_{ld} w'$, s'il existe l, r, x, x', y, z, et z' tels que :*

— *l est le mot vide, ou finit par un 0*

— *r est le mot vide, ou commence par un 0*

— *$x = x_1 x_2 \cdots$ avec $x_i > 0$ pour tout i*

— *$z = z_1 z_2 \cdots$ avec $z_i > 0$ pour tout i*

— *$x' = x$ où y est correctement inséré en ordre croissant*

— *y apparait dans z, et $z' = z$ où y à été supprimé*

— *$w = lx0zr$*

— *$w' = lx'0z'r$*

3 Le cas rationnel

4 Un poset pour les fonctions de parking rationnelles

5 Arbres de parking rationnels

6 Conclusion

Références

[1] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(6) :1266–1274, 1966.

[2] R.P. Stanley and G.C. Rota. *Enumerative Combinatorics : Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[3] R.P. Stanley and S. Fomin. *Enumerative Combinatorics : Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[4] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisees d'un cycle. *Discret. Math.*, 1 :333–350, 1972.

[5] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discret. Math.*, 31 :171–180, 1980.

[6] Drew Armstrong, Nicholas A. Loehr, and Gregory S. Warrington. Rational parking functions and catalan numbers. *Annals of Combinatorics*, 20 :21–58, 2014.

[7] Michelle Bodnar. Rational noncrossing partitions for all coprime pairs, 2017.

[8] Bérénice Delcroix-Oger, Matthier Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Some properties of the parking function poset. 2020.

A Exemples pour l'Introduction

Exemple 1 (Définition 1 : $n = 7$). — $f_1 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 2) \in \mathcal{PF}_7$

— $f_2 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 4) \notin \mathcal{PF}_7$

Exemple 2 (Théorème 1 : $n = 3$: $pf_3 = 16$). — $(1, 1, 1)$ — $(1, 1, 2)$ — $(1, 1, 3)$ — $(1, 2, 1)$ — $(1, 2, 2)$ — $(1, 2, 3)$ — $(1, 3, 1)$ — $(1, 3, 2)$ — $(2, 1, 1)$ — $(2, 1, 2)$ — $(2, 1, 3)$ — $(2, 2, 1)$ — $(2, 3, 1)$ — $(3, 1, 1)$ — $(3, 1, 2)$ — $(3, 2, 1)$

Exemple 3 (Définition 2 : $n = 4$). — $f_1 = (1, 2, 2, 3) \in \mathcal{PF'}_4$

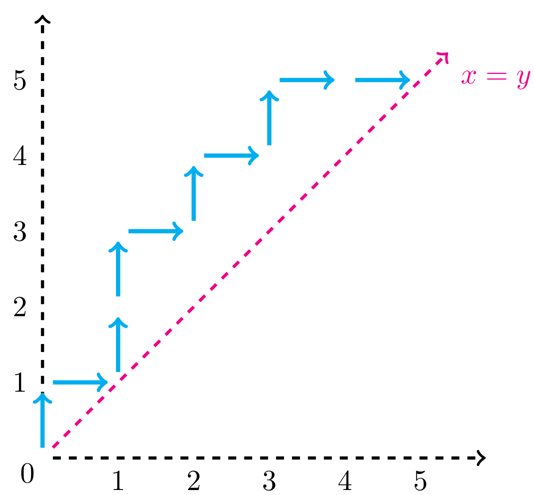
— $f_2 = (1, 2, 3, 2) \notin \mathcal{PF'}_4$, *bien que* $f_2 \in \mathcal{PF}_4$

Exemple 4 (Théorème 2 : $n = 3$: $pf'_3 = 5$). — $(1, 1, 1)$ — $(1, 1, 2)$ — $(1, 1, 3)$ — $(1, 2, 2)$ — $(1, 2, 3)$

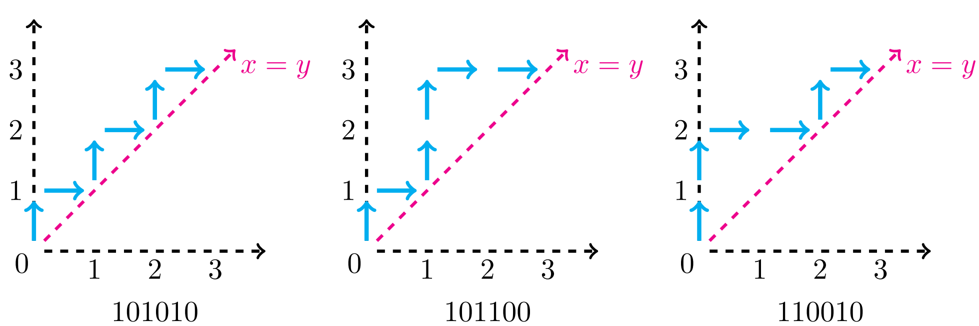
Exemple 5 (Définition 3 : $n = 5$). — $w_1 = 1011000110$ *n'est* pas *un mot de Dyck, car* $|1011000|_0 > |1011000|_1$.

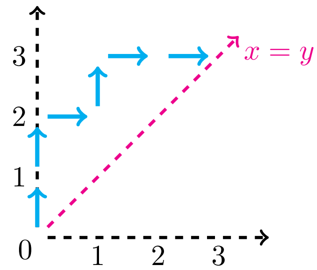
— $w_2 = 1011010101$ *n'est* pas *un mot de Dyck, car* $|w_2|_0 \neq |w_2|_1$.

— $w_3 = 1011010100$ est *un mot de Dyck :*

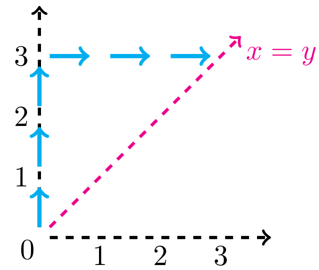


Exemple 6 (Théorème 3 : $n = 3$). $d_3 = 5$.



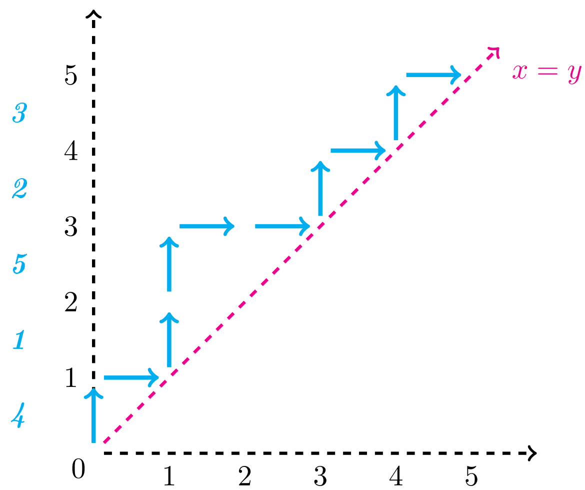


110100



111000

Exemple 7 (Définition 4 : $n = 5$). — $w_1 = 4051002030$ *n'est* pas *un mot de Dyck décoré, car* $5 > 1$.
— $w_2 = 4015002030$ est *un mot de Dyck décoré :*



Exemple 8 (Théorème 4 : $n = 3$). $ld_3 = 4^2 = 16$

— *Mots de la forme* $XXX000$ *:*

123000		

— *Mots de la forme* $XX0X00$ *:*

120300	130200	230100

— *Mots de la forme* $XX00X0$ *:*

120030	130020	230010

— *Mots de la forme* $X0XX00$ *:*

102300	201300	301200

— *Mots de la forme* $X0X0X0$ *:*

102030	103020	201030
203010	301020	302010

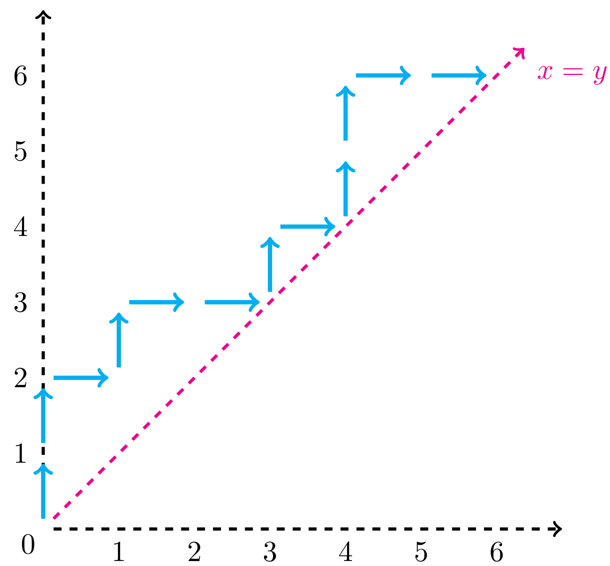
B Exemples pour la Partie 2

Exemple 9 (Proposition 1 : $n = 6, \mathcal{PF'}_n \to \mathcal{D}_n$).

— $f = (1, 1, 2, 4, 5, 5)$

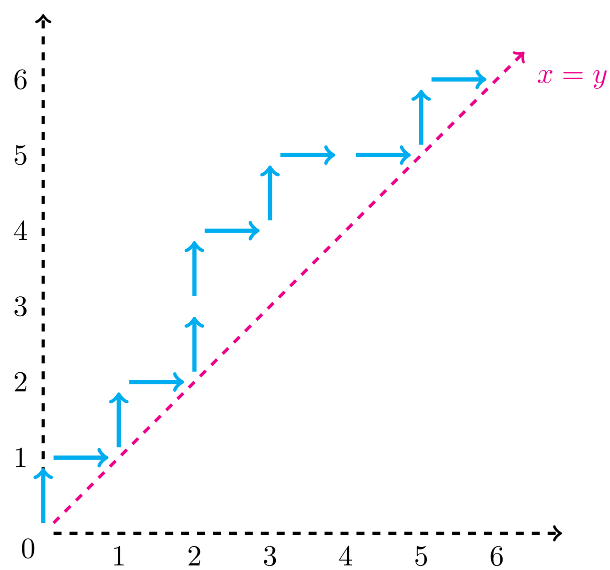
$l_1 = 2$	$l_2 = 1$	$l_3 = 0$
$l_4 = 1$	$l_5 = 2$	$l_6 = 0$

— $w = (110100101100)$



Exemple 10 (Proposition 1 : $n = 6, \mathcal{D}_n \to \mathcal{PF'}_n$).

— $w = 101011010010$



— *Distances :*

$s_1 = 0$ $a_1 = 1$

$s_2 = 1$ $a_2 = 2$

$s_3 = 2$ $a_3 = 3$

$s_4 = 2$ $a_4 = 3$

$s_5 = 3$ $a_5 = 4$

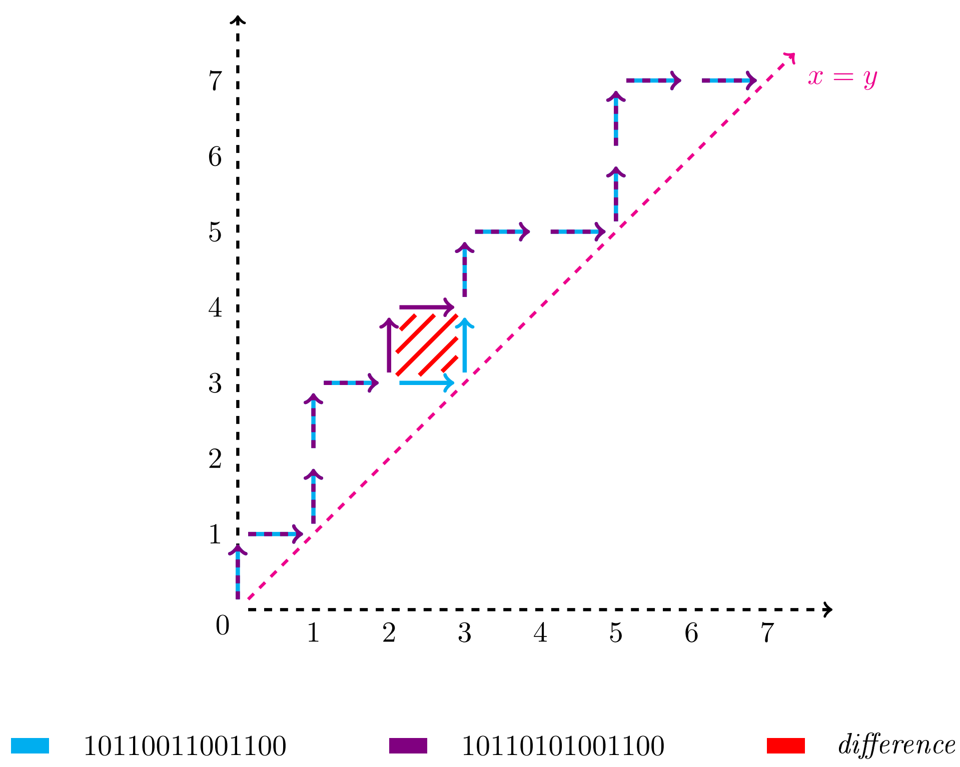
$s_6 = 5$ $a_6 = 6$

— $f = (1, 2, 3, 3, 4, 6)$

Exemple 11 (Définition 5 : $n = 7$)**.** 10110011001100 $\gtrdot_d$ 10110101001100

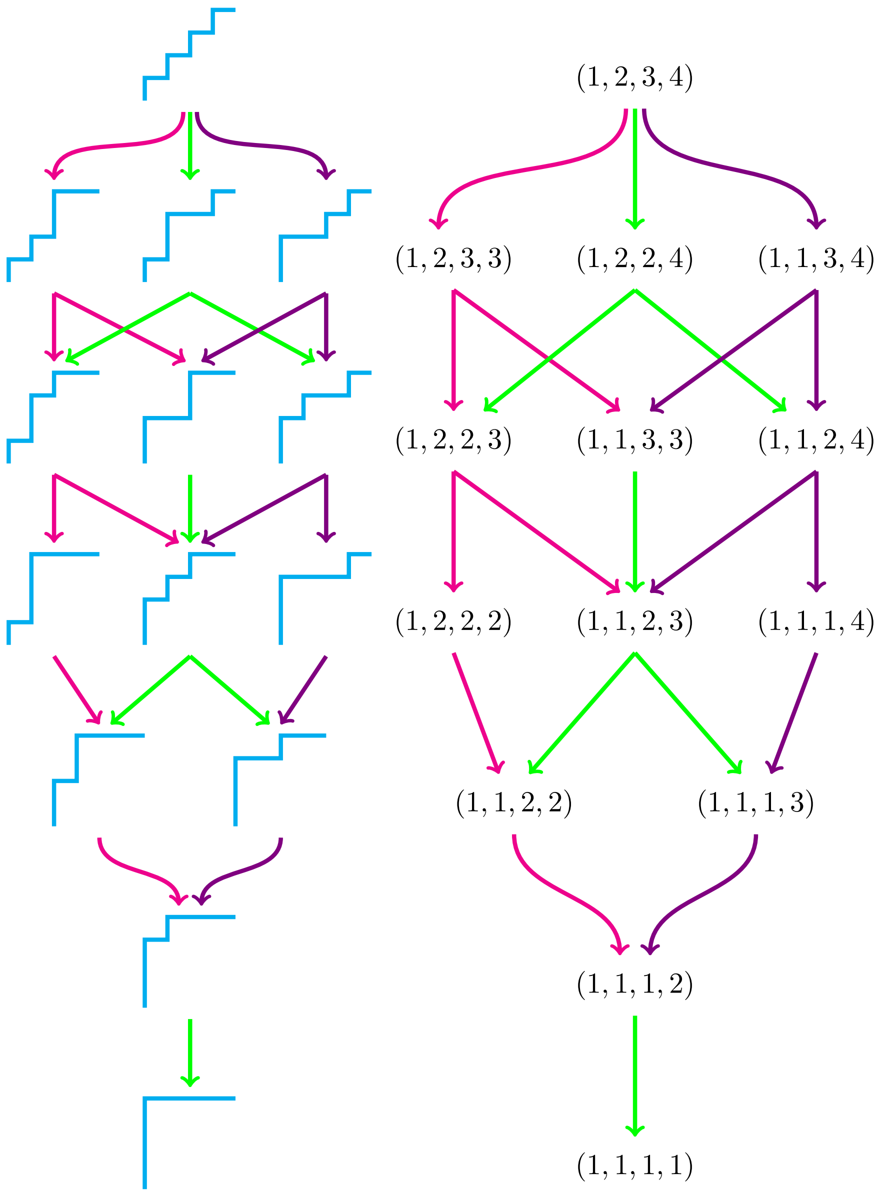
— $w_1 = 10110$

— $w_2 = 1001100$



Exemple 12 (Définition 7 : $n = 6$)**.** $(1, 1, 2, 3, 4, 5) \gtrdot (1, 1, 2, 3, 3, 5)$

Exemple 13 (Les posets de $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{PF'}_4$)**.**



Ces posets contiennent chacun $\frac{1}{5}\binom{8}{4} = 14$ *éléments.*

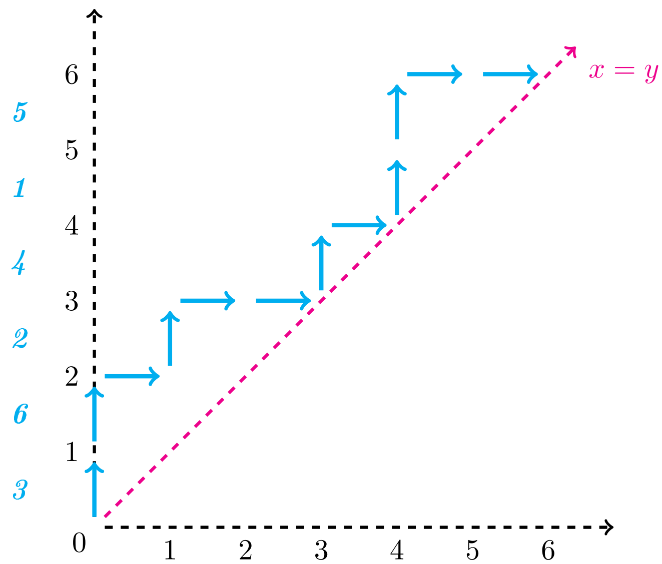
Exemple 14 (Proposition 3 : $n = 6, \mathcal{PF}_n \to \mathcal{LD}_n$)**.**

- $f = (5, 2, 1, 4, 5, 1)$

  $im_1 = \{3, 6\}$ $\quad$ $im_2 = \{2\}$ $\quad$ $im_3 = \emptyset$

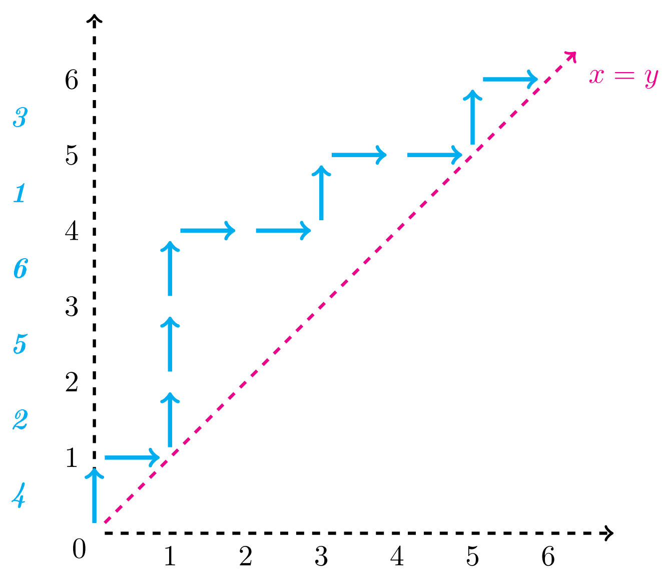
  $im_4 = \{4\}$ $\quad$ $im_5 = \{1, 5\}$ $\quad$ $im_6 = \emptyset$

- $w = 360200401500$



Exemple 15 (Proposition 3 : $n = 6, \mathcal{LD}_n \to \mathcal{PF}_n$)**.**

— $w = 402560010030$



— *Distances :*

$s_1 = 0$	$s_2 = 1$	$s_3 = 1$
$s_4 = 1$	$s_5 = 3$	$s_6 = 5$

— *Labels :*

$dist_0 = \{4\}$	$dist_1 = \{2, 5, 6\}$	$dist_2 = \emptyset$
$dist_3 = \{1\}$	$dist_4 = \emptyset$	$dist_5 = \{3\}$

— $f = (4, 2, 6, 1, 2, 2)$

Exemple 16 (Définition 8 : $n = 5$)**.** $104503600200 \gtrdot_{ld} 10345060200$

- $l = 10$
- $r = 0200$
- $x = 45$
- $x' = 345$
- $y = 3$
- $z = 36$
- $z' = 6$