Fonctions de Parking

Tessa Lelièvre-Osswald

Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès

IRIF - Pôle Combinatoire

6 septembre 2020

Introduction : Combinatoire

- **Combinatoire** : domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis *structurés* par leur énumération et leur comptage.
- **Branches principales** :
  - combinatoire *énumérative* : dénombrement.
  - combinatoire *bijective* : déduire une égalité entre les cardinaux de deux classes combinatoires en bijection.
- **Classe combinatoire** : ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une application $\mathcal{A} \to \mathbb{N}$, appelée *taille*.

Introduction : Exemples

- **Classes combinatoires** :
  - Mots de longueur n sur l'alphabet $\{0,1\}$: $|\{0,1\}^n| = 2^n$
  - Permutations de $\{1,\ldots,n\}$: $|\mathfrak{S}_n| = n!$
  - k-cycles de $\mathfrak{S}_n$: $|^k\mathfrak{S}_n| = \dfrac{n!}{(n-k)!k}$
- **Bijection** : $\mathfrak{S}_n \longleftrightarrow \ {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$:
  - $\mathfrak{S}_n \to \ {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$: Soit $\sigma = a_1 \ldots a_n$ notre permutation.
    $\sigma' = (n+1\ a_1 \ldots a_n) \in \ {}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1}$.
  - ${}^{n+1}\mathfrak{S}_{n+1} \to \ \mathfrak{S}_n$: Soit $\sigma' = (a_1 \ldots a_{n+1})$ notre permutation circulaire.
    Notons i l'indice tel que $a_i = n+1$. $\sigma = a_{i+1} \ldots a_{n+1} a_1 \ldots a_{i-1} \in \mathfrak{S}_n$.
  - $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-(n+1))!(n+1)} = \dfrac{(n+1)!}{0!(n+1)} = \dfrac{n!(n+1)}{n+1} = n!$

Introduction : Chemins de Dyck

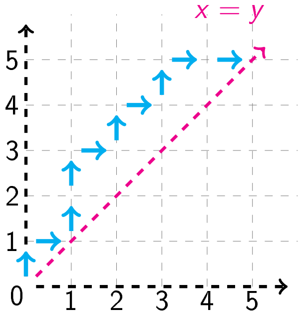
- **Mot de Dyck** : $\mathcal{D}_n$ = ensemble des $w \in \{0,1\}^{2n}$ respectant les deux conditions :
  - $|w|_0 = |w|_1 = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_1$
- **Chemin de Dyck** :
  - Chaque 1 devient un pas Nord ($\uparrow$)
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)

Théorème (Taille de $\mathcal{D}_n$)

$$d_n = |\mathcal{D}_n| = Cat(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- Exemple :

  $w = 1011010100$



Introduction : Chemins de Dyck étiquettés

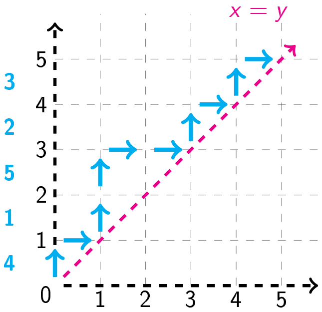
- **Mot de Dyck étiquetté** : $\mathcal{LD}_n$ = ensemble des $w \in \{0, \ldots, n\}^{2n}$ respectant les quatre conditions :
  - $|w|_0 = |w|_{\neq 0} = n$
  - Pour tout préfixe w' de w, $|w'|_0 \leqslant |w'|_{\neq 0}$
  - Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |w|_i = 1$
  - Si $w_i, w_{i+1} > 0$, alors $w_i < w_{i+1}$
- **Chemin de Dyck étiquetté** :
  - Chaque $i \neq 0$ devient un pas Nord ($\uparrow$) étiquetté par i
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)

Théorème (Taille de $\mathcal{LD}_n$)

$ld_n = |\mathcal{LD}_n| = (n+1)^{n-1}$

- Exemple :

$w = 4015002030$



Introduction : Fonctions de Parking

- **Fonction de Parking primitive** : $\mathcal{PF'}_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid 1 \leqslant a_i \leqslant i$ pour tout i entre 1 et n, et $a_i \leqslant \ldots \leqslant a_n\}$
  - Exemple : $(1, 1, 3, 3, 4) \in \mathcal{PF'}_5$
  - Contre-exemple : $(1, 1, 3, 2, 4) \notin \mathcal{PF'}_5$

Théorème (Taille de $\mathcal{PF'}_n$)

$$pf'_n = |\mathcal{PF'}_n| = Cat(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Introduction : Fonctions de Parking

- **Fonction de Parking** : $\mathcal{PF}_n = \{(a_1, \ldots, a_n)$ dont le tri croissant $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{PF'}_n\}$
  - Exemple : $(1, 1, 3, 2, 4) \in \mathcal{PF}_5$
  - Contre-exemple : $(2, 1, 4, 5, 4) \notin \mathcal{PF}_5$, car $(1, 2, 4, 4, 5) \notin \mathcal{PF'}_5$

Théorème (Taille de $\mathcal{PF}_n$)

$pf_n = |\mathcal{PF}_n| = (n+1)^{n-1}$

Introduction : Posets

- **Poset** : Ensemble $\mathcal{E}$ partiellement ordonné : ensemble muni d'une *relation d'ordre* $\preccurlyeq$ permettant de comparer certains couples d'éléments de l'ensemble, muni de propriétés :
  - Réflexivité : Si $e \in \mathcal{E}$, alors $e \preccurlyeq e$
  - Anti-symétrie : Si $e_1 \preccurlyeq e_2$ et $e_2 \preccurlyeq e_1$, alors $e_1 = e_2$
  - Transitivité : Si $e_1 \preccurlyeq e_2$ et $e_2 \preccurlyeq e_3$, alors $e_1 \preccurlyeq e_3$

Introduction : Posets

- **Exemple** :
  - $\mathcal{E} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $\preccurlyeq$: $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$ ssi $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$.
  - $(3, 8)$ et $(2, 9)$ sont incomparables.
- **Ici** : On définira nos ordres via une *relation de couverture*, dont on construira la clôture réfléxive et transitive.
- **Exemple** : $\mathcal{E} = \mathbb{N}$
  - $e \prec e + 1$
  - Soit $\preccurlyeq$ la clôture réfléxive et transitive de $\prec$.
  - On a alors $\preccurlyeq\, = \,\leqslant$.

Plan

Plan

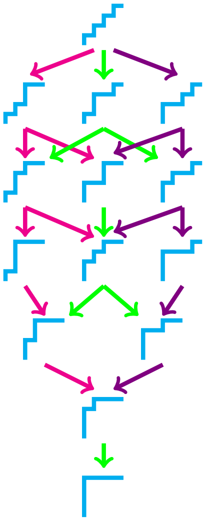
1.1) Des relations de couverture pour $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{PF'}_n$

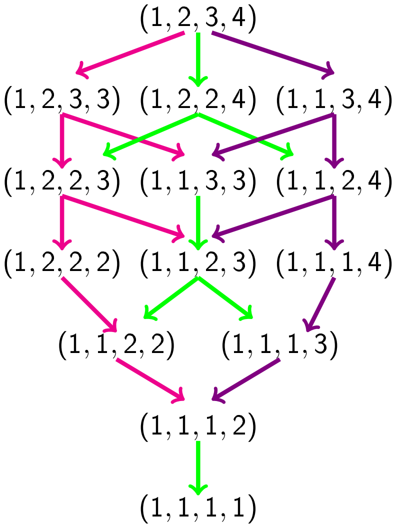
- $\mathcal{D}_n$: $w \gtrdot_d w'$, s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que :
  - $w = w_1 01 w_2$
  - $w' = w_1 10 w_2$
- Si $w_1 \gtrdot_d w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est *au dessus* de celui correspondant à w_1, et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.
- $\mathcal{PF'}_n$: $f \gtrdot g$ s'il existe i tel que :
  - $f = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, \quad a_{i+1}, \ldots, a_n)$
  - $g = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

1.1) **Bijection** entre les deux ensembles

- $\mathcal{PF'}_n \to \mathcal{D}_n$:
  - $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF'}_n$.
  - l_i = nombre d'occurences de i dans f.
  - Mot de Dyck correspondant : $\underbrace{1\cdots1}_{l_1}0\underbrace{1\cdots1}_{l_2}0\cdots\underbrace{1\cdots1}_{l_n}0$.
- $\mathcal{D}_n \to \mathcal{PF'}_n$:
  - $w \in \mathcal{D}_n$.
  - Considérons son chemin de Dyck.
  - s_i = abscisse du i^e pas Nord. $a_i = s_i + 1$.
  - Fonction de parking primitive correspondante : $(a_1, \ldots, a_n)$.

1.1) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{PF}'_4$





1.1) Théorème Principal

Théorème (Théorème principal)

Le nombre d'intervalles dans ces posets est égal à

$$\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}$$

.

Démonstration.

Puisque le nombre d'intervalles dans le poset de $\mathcal{D}_n$ peut être vu comme le nombre de paires (w_1, w_k) telles que $w_1 \gtrdot_d w_2 \gtrdot_d \cdots \gtrdot_d w_k$, alors nous pouvons décrire le nombre d'intervalles comme étant le nombre de *paires de chemins de Dyck imbriqués*.

On introduit alors une notion de chemin de Dyck *étoilé*, c'est-à-dire un chemin de Dyck dont certains pas sont annotés d'une étoile (*). □

1.1) Théorème Principal

Démonstration.

Ces chemins sont une représentation des paires de chemins de Dyck imbriqués : en omettant les étoiles, on obtient le chemin du dessous. Ensuite, pour déduire le chemin du dessus :

- Un pas non étoilé est conservé
- Un pas Nord étoilé est remplacé par un pas Est
- Un pas Est étoilé est remplacé par un pas Nord.

On créé maintenant une bijection entre les chemins de Dyck étoilés de longueur $2n$ correspondant à des paires de chemins de Dyck de longueur $2n$, et les chemins allant du point (0,0) au point (0,0) composées de $2n$ pas Nord, Est, Sud, Ouest qui restent dans le premier octant. Pour cela, on effectue la transformation suivante : □

1.1) Théorème Principal

Démonstration.

- Nord non-étoilé $\longleftrightarrow$ Nord et Nord étoilé $\longleftrightarrow$ Ouest
- Est non-étoilé $\longleftrightarrow$ Sud et Est étoilé $\longleftrightarrow$ Est

Ainsi, puisque $\mathcal{D}_n \longleftrightarrow$ {Chemins de Dyck étoilés de longueur $2n$} $\longleftrightarrow$ { Chemins NESO de longueur $2n$}, on sait que le nombre de paires de chemins de Dyck imbriqués de longueur $2n$ est égal au nombre de chemins NESO de longueur $2n$. Or, par définition, ce nombre est égal au $n+1^e$ terme de la suite de l'OEIS A005700 (Ce qui rejoint le commentaire de Bruce Westbury). Alec Mihailovs a démontré que ce nombre est bien égal à
$$\frac{6(2n)!(2n+2)!}{n!(n+1)!(n+2)!(n+3)!}.$$
$\square$

Les premiers termes de cette suite sont 1, 1, 3, 14, 84, 594, 4719, 40898 ...

1.2) Des relations de couverture pour $\mathcal{LD}_n$ et $\mathcal{PF}_n$

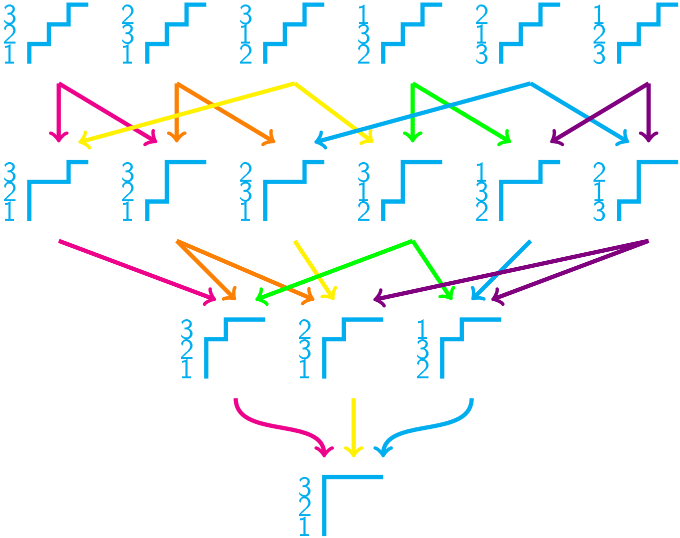
- $\mathcal{LD}_n$: $w \gtrdot_{ld} w'$ s'il existe des mots l, r, x, x', z, z', et une lettre y tels que :
  - l est le mot vide, ou finit par un 0
  - r est le mot vide, ou commence par un 0
  - $x = x_1 x_2 \cdots$ avec $x_i > 0$ pour tout i
  - $z = z_1 z_2 \cdots$ avec $z_i > 0$ pour tout i
  - $x' = x$ où y est correctement inséré en ordre croissant
  - y apparait dans z, et $z' = z$ où y à été supprimé
  - $w = lx0zr$ et $w' = lx'0z'r$
- Si $w_1 \gtrdot_{ld} w_2$, alors le chemin de Dyck correspondant à w_2 est *au dessus* de celui correspondant à w_1, et la *différence* entre les deux chemins est un carré de côté 1.
- $\mathcal{PF}_n$: on garde la même relation que pour $\mathcal{PF}'_n$.

1.2) **Bijection** entre les deux ensembles

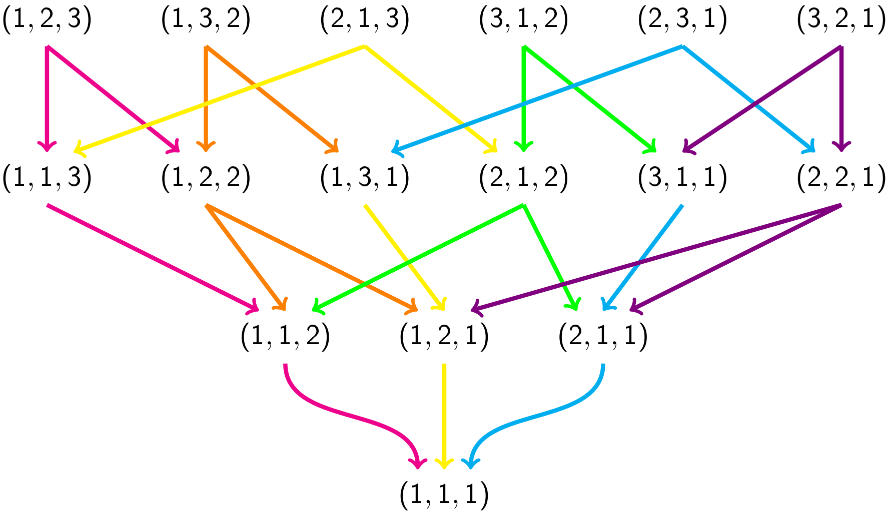
- $\mathcal{PF}_n \to \mathcal{LD}_n$:
  - $f = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{PF}_n$.
  - $im_i : \{j \mid a_j = i\}$.
  - $im_{i,1}, \ldots, im_{i,k_i}$ = éléments de im_i triés par ordre croissant.
  - Mot de Dyck décoré correspondant :

    $$\underbrace{im_{1,1} \cdots im_{1,k_1}}_{im_1} 0 \underbrace{im_{2,1} \cdots im_{2,k_2}}_{im_2} 0 \cdots \underbrace{im_{n,1} \cdots im_{n,k_n}}_{im_n} 0.$$
- $\mathcal{LD}_n \to \mathcal{PF}_n$:
  - $w \in \mathcal{LD}_n$. Considérons son chemin de Dyck.
  - s_i = abscisse du i^e pas Nord.
  - $label(i)$ = étiquette du i^e pas Nord.
  - $dist_i = \{label(j) | s_j = i\}$. Si $j \in dist_i$ alors $a_j = i + 1$.
  - Fonction de parking correspondante : $(a_1, \ldots, a_n)$.

1.2) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{LD}_3$ et $\mathcal{PF}_3$



1.2) Posets **bijectifs** obtenus pour $\mathcal{LD}_3$ et $\mathcal{PF}_3$



1.2) Conjecture Principale

Conjecture (Conjecture Principale)

Le nombre d'intervalles des posets définis ici pour $\mathcal{LD}_n$ et $\mathcal{PF}_n$ est donnée par :

- $a(1) = 1$
- $a(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \binom{n+2-k}{2}^k a(n+1-k)$

- Cette formule donne le $n+1^e$ terme de la suite de l'OEIS A196304.
- Les premiers termes de cette suite sont $1, 1, 5, 64, 1587, 65421, 4071178, 357962760, 4237910716, \ldots$.

1.2) Conjecture Principale

Bien que, à notre connaissance, il n'existe pas de structure combinatoire associée à cette suite, les tests effectués via Sagemath sur $n = 1, 2, \cdots, 8$ suggèrent que le nombre d'intervalles de nos posets puissent en être une.

Plan

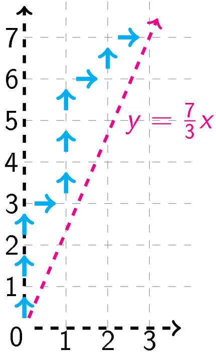
2.1) Chemins de Dyck rationnels

- **Mot de Dyck rationnel** : $\mathcal{R}_{a,b} =$ l'ensemble des $w \in \{0,1\}^{a+b}$ respectant les trois conditions :
  - Pour tout préfixe w' de w, $\frac{a}{b}|w'|_0 \leqslant |w'|_1$
  - $|w|_0 = b$
  - $|w|_1 = a$
- **Chemin de Dyck rationnel** :
  - Chaque 1 devient un pas Nord ($\uparrow$)
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)

Théorème (Taille de $\mathcal{R}_{a,b}$)

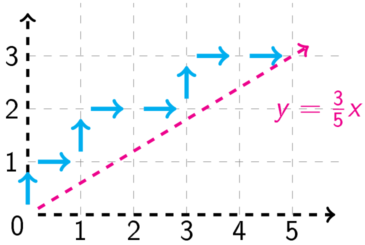
$$r_{a,b} = |\mathcal{R}_{a,b}| = Cat(a,b) = \frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}$$

- Exemple : $w = 1110111010 \in \mathcal{R}_{7,3}$



2.1) Chemins de Dyck rationnels

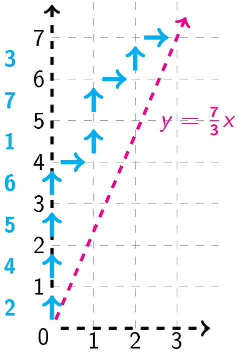
- $w = 10100100 \in \mathcal{R}_{3,5}$



2.1) Chemins de Dyck rationnels étiquettés

- **Mot de Dyck rationnel étiquetté** : $\mathcal{LR}_{a,b}$ = l'ensemble des $w \in \{0, \dots, a\}^{a+b}$ respectant les cinq conditions :
  - Pour tout préfixe w' de w, $\frac{a}{b}|w'|_0 \leqslant |w'|_{\neq 0}$
  - Pour tout $i \in \{1, \dots, a\}$, $|w|_i = 1$
  - $|w|_0 = a$ et $|w|_{\neq 0} = b$
  - Les entiers non-nuls consécutifs sont en ordre croissant.
- **Chemin de Dyck rationnel étiquetté** :
  - Chaque $i \neq 0$ devient un pas Nord ($\uparrow$) étiquetté par i
  - Chaque 0 devient un pas Est ($\rightarrow$)

- Exemple : $w = 2456017030 \in \mathcal{LR}_{7,3}$

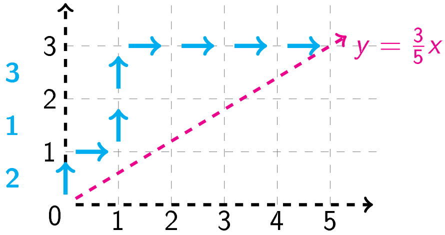


Théorème (Taille de $\mathcal{LR}_{a,b}$)

$lr_{a,b} = |\mathcal{LR}_{a,b}| = b^{a-1}$

2.1) Chemins de Dyck rationnels étiquettés

- Exemple : $w = 20130000 \in \mathcal{LR}_{3,5}$



2.1) Fonctions de parking rationnelles

- **Fonction de Parking rationnelle primitive** : $\mathcal{PF}'_{a,b} = \{(u_1, \ldots, u_a) \mid 1 \leqslant u_i \leqslant 1 + \frac{b}{a}(i-1)$ pour tout i entre 1 et a, et $u_i \leqslant \ldots \leqslant u_a\}$
  - Exemple : $(1,1,1,2,2,2,3) \in \mathcal{PF}'_{7,3}$
  - Contre-exemple : $(1,1,2,2,2,2,3) \notin \mathcal{PF}'_{7,3}$
  - Exemple : $(1,2,4) \in \mathcal{PF}'_{3,5}$

Théorème (Taille de $\mathcal{PF}'_{a,b}$)

$$pf'_{a,b} = |\mathcal{PF}'_{a,b}| = Cat(a,b) = \frac{1}{a+b}\binom{a+b}{a}$$

2.1) Fonctions de parking rationnelles

- **Fonction de Parking rationnelle** : $\mathcal{PF}_{a,b} = \{(u_1, \ldots, u_a)$ dont le tri croissant $(v_1, \ldots, v_a) \in \mathcal{PF'}_{a,b}\}$
  - Exemple : $(3, 1, 2, 2, 1, 2, 1) \in \mathcal{PF}_{7,3}$
  - Exemple : $(4, 1, 2) \in \mathcal{PF}_{3,5}$

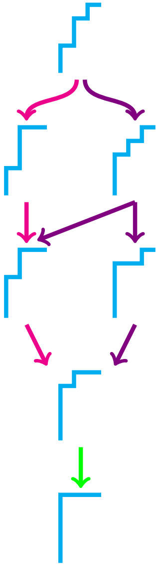
Théorème (Taille de $\mathcal{PF}_{a,b}$)

$pf_{a,b} = |\mathcal{PF}_{a,b}| = b^{a-1}$

2) Relations et bijections

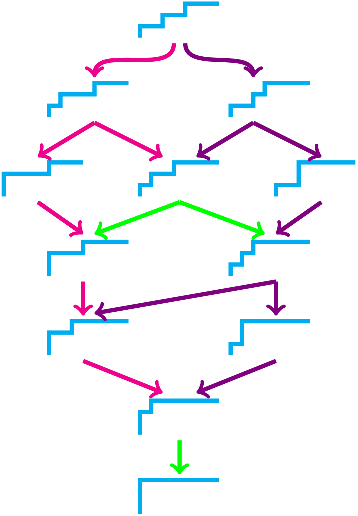
On utilise ici les mêmes relations et bijections que dans le cas classique.

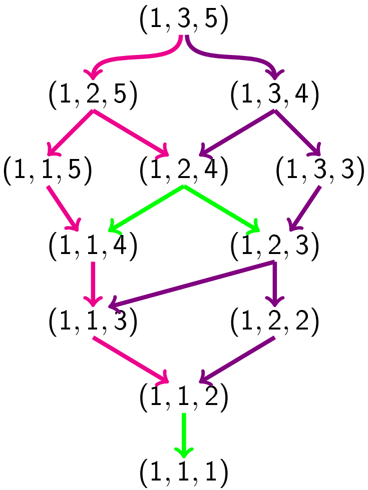
2.2) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{R}_{5,3}$ et $\mathcal{PF}'_{5,3}$



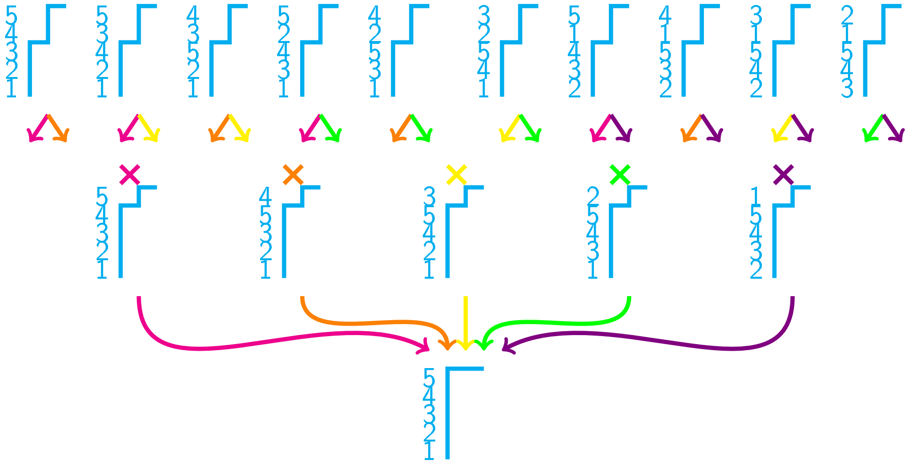
$$\begin{tikzcd}
 & (1,1,2,2,3) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
(1,1,2,2,2) \arrow[d] & & (1,1,1,2,3) \arrow[d] \arrow[dll] \\
(1,1,1,2,2) \arrow[dr] & & (1,1,1,1,3) \arrow[dl] \\
 & (1,1,1,1,2) \arrow[d] & \\
 & (1,1,1,1,1) &
\end{tikzcd}$$

2.2) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{R}_{3,7}$ et $\mathcal{PF}'_{3,7}$

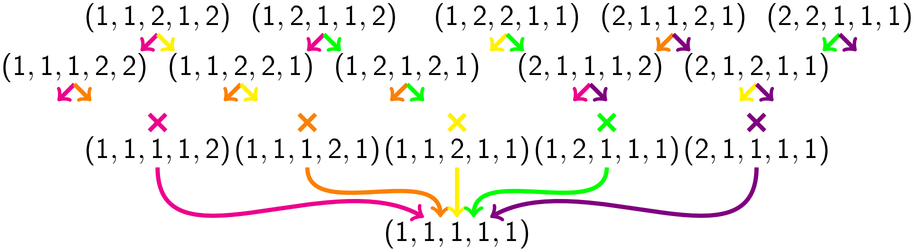




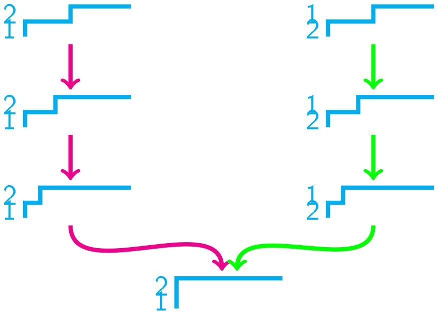
2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{5,2}$ et $\mathcal{PF}_{5,2}$

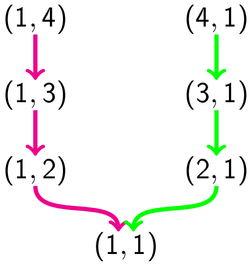


2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{5,2}$ et $\mathcal{PF}_{5,2}$



2.3) Posets **bijectifs** pour $\mathcal{LR}_{2,7}$ et $\mathcal{PF}_{2,7}$





Plan

3) Résumé

- Relations de couvertures créant des posets pour les quatre types de fonctions de parking et les quatre types de chemins de Dyck mis en bijections avec ces dernières.
- Dans chaque cas, le poset de l'un peut être obtenu en appliquant la bijection présentée au poset de l'autre.
- Cas rationnel : marche pour $a > b$ et $a < b$.
- La plupart des travaux précédents se basaient sur les *partitions non-croisées*, et ne donnaient pas de relation de couverture évidente pour les fonctions de parking.
- Une autre partie de nos travaux, non-incluse dans cette présentation, a été d'étendre la notion d'*arbre de parking* au cas rationnel, et d'encoder les notions présentées.

3) Travaux futurs

- Preuve pour la Conjecture Principale.
- Formules généralisées pour le nombre d'intervalles des posets dans le cas rationnel.
- Relation de couverture pour les arbres de parking rationnels.

3) Bibliographie

[1] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications.

[2] R.P. Stanley and G.C. Rota. *Enumerative Combinatorics : Volume 1.*

[3] R.P. Stanley and S. Fomin. *Enumerative Combinatorics : Volume 2.*

[4] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisees d'un cycle.

[5] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions.

[6] Amarpreet Rattan. Parking functions and related combinatorial structures.

[7] Drew Armstrong, Nicholas A. Loehr, and Gregory S. Warrington. Rational parking functions and catalan numbers.

[8] Michelle Bodnar. Rational noncrossing partitions for all coprime pairs.

[9] Bérénice Delcroix-Oger, Matthieu Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Some properties of the parking function poset.

[10] M. T. L. Bizley. Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths [...].