

Fonctions de Parking Classiques et Rationnelles

Tessa Lelièvre-Osswald

Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès

Equipe : IRIF - Pôle Combinatoire

11 août 2020

Contexte général

La *combinatoire* est un domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis par leur énumération et leur comptage. Se divisant en plusieurs branches, nous abordons dans ce rapport deux branches principales : la *combinatoire énumérative*, domaine le plus classique, basé sur le dénombrement ; et la *combinatoire bijective*, consistant à déduire une égalité entre les résultats de comptage de deux classes combinatoires qui sont en bijection.

On s'intéresse ici en particulier à des objets combinatoires appelés *fonctions de parking*. Introduites en 1966 par Konheim et Weiss ([1]), les fonctions de parking sont les séquences d'entiers positifs dont le nombre d'éléments *inférieurs ou égaux* à i est *supérieur ou égal* à i pour tout entier i entre 1 et n .

Leur appellation vient du problème de hachage suivant : soient un parking contenant n places numérotées de 1 à n , et n voitures à garer. A chaque voiture i est associé un entier a_i , indiquant que cette voiture doit être garée à une place dont le numéro est supérieur ou égal à a_i . La séquence (a_1, \dots, a_n) est alors appelée fonction de parking si et seulement si il existe une configuration de garage des n voitures respectant les contraintes données par les entiers a_i .

Longuement étudiées, les principaux résultats de comptage émanent des travaux de Stanley ([2], [3]), Kreweras ([4]), et Edelman ([5]). Plus récemment, la notion de fonction de parking *rationnelle* a été introduite et étudiée – entre autres – dans les travaux d'Armstrong, Loehr et Warrington ([6]), ainsi que de Bodnar ([7]). Bien que les travaux mentionnés ci-dessus concernent principalement le comptage des fonctions de parking et des relations de leurs treillis, ces dernières ont des applications dans de nombreux domaines tels que l'analyse et la géométrie.

Problèmes étudiés

Dans cet article, nous abordons deux principaux problèmes.

Premièrement, à notre connaissance, les treillis proposés jusque là pour les fonctions de parking dépendent tous de bijections entre les fonctions de parking et une autre structure combinatoire, pour laquelle un treillis était déjà défini. Cela rend la définition d'une relation de couverture assez lourde, et rajoute des étapes au processus de comparaison.

Ensuite, l'extension au cas rationnel étant en plein essor dans les travaux les plus récents, de nombreux concepts restent à redéfinir en dehors du cas classique.

Contribution proposée

Nous présentons ici un nouveau treillis pour les fonctions de parking, dans le cas classique ainsi que dans le cas rationnel. Ainsi, nous introduisons une relation de couverture plus élégante, définie sans structure intermédiaire. De plus, celle-ci est en bijection avec une relation naturelle que nous définissons sur les chemins de Dyck, qui sont une structure élémentaire de la combinatoire.

Enfin, nous reprenons la notion d'*arbres de parking* donnée par Delcroix-Oger, Josuat-Vergès et Randazzo ([8]), afin d'en donner une version rationnelle.

Pour ces deux contributions, le cas rationnel est traité pour toute paire d'entiers premiers entre eux – sans se limiter au cas $a < b$ comme il a pu être fait dans certains travaux.

Une version longue de ce rapport est disponible ici¹, ainsi que l'encodage en Sage des principales notions abordées dans les références 1 à 8 et des constructions que nous présentons.

Arguments en faveur de sa validité

Les treillis introduits dans le cas classique sont à l'origine de nos deux résultats principaux.

Dans le cas des fonctions de parking *primitives*, nous exhibons une preuve du Théorème 8, qui donne le nombre d'intervalles dans le treillis. Quant à son équivalent pour le cas non-primitif, nous établissons une Conjecture sur le nombre d'intervalles, vérifiée sur les cas $n = 1, \dots, 8$.

Bilan et perspectives

En conclusion, nous avons maintenant des treillis définis de manière directe pour les quatre types de fonctions de parking : classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives.

Par la suite, il sera nécessaire de trouver une preuve de la Conjecture, ou bien si elle doit être réfutée, d'exhiber une formule comptant les intervalles dans notre treillis des fonctions de parking classiques. Quant au cas rationnel, il faudra également trouver des formules exprimant le nombre de relations.

Enfin, l'on pourrait également vouloir étudier les relations de couvertures sur les arbres de parking rationnels.

1. github.com/tessalsifi/ParkingFunctions

Table des matières

Références

- [1] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(6) :1266–1274, 1966.
- [2] R.P. Stanley and G.C. Rota. *Enumerative Combinatorics : Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [3] R.P. Stanley and S. Fomin. *Enumerative Combinatorics : Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [4] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisees d’un cycle. *Discret. Math.*, 1 :333–350, 1972.
- [5] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discret. Math.*, 31 :171–180, 1980.
- [6] Drew Armstrong, Nicholas A. Loehr, and Gregory S. Warrington. Rational parking functions and catalan numbers. *Annals of Combinatorics*, 20 :21–58, 2014.
- [7] Michelle Bodnar. Rational noncrossing partitions for all coprime pairs, 2017.
- [8] Bérénice Delcroix-Oger, Matthier Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Some properties of the parking function poset. 2020.