Fonctions de Parking Classiques et Rationnelles

Tessa Lelièvre-Osswald
Encadrant : Matthieu Josuat-Vergès
Equipe : IRIF - Pôle Combinatoire

11 août 2020

Contexte général

La *combinatoire* est un domaine des mathématiques et de l'informatique théorique étudiant les ensembles finis par leur énumération et leur comptage. Se divisant en plusieurs branches, nous abordons dans ce rapport deux branches principales : la *combinatoire énumérative*, domaine le plus classique, basé sur le dénombrement ; et *la combinatoire bijective*, consistant à déduire une égalité entre les résultats de comptage de deux classes combinatoires qui sont en bijection.

On s'intéresse ici en particulier à des objets combinatoires appelés *fonctions de parking*. Introduites en 1966 par Konheim et Weiss ([1]), les fonctions de parking sont les séquences d'entiers positifs dont le nombre d'éléments *inférieurs ou égaux* à i est *supérieur ou égal* à i pour tout entier i entre 1 et n.
Leur appellation vient du problème de hachage suivant : soient un parking contenant n places numérotées de 1 à n, et n voitures à garer. A chaque voiture i est associé un entier a_i, indiquant que cette voiture doit être garée à une place dont le numéro est supérieur ou égal à a_i. La séquence $(a_1, \ldots, a_n)$ est alors appelée fonction de parking si et seulement si il existe une configuration de garage des n voitures respectant les contraintes données par les entiers a_i.

Longuement étudiées, les principaux résultats de comptage émanent des travaux de Stanley ([2], [3]), Kreweras ([4]), et Edelman ([5]). Plus récemment, la notion de fonction de parking *rationnelle* à été introduite et étudiée – entre autres – dans les travaux d'Armstrong, Loehr et Warrington ([6]), ainsi que de Bodnar ([7]). Bien que les travaux mentionnées ci-dessus concernent principalement le comptage des fonctions de parking et des relations de leurs treillis, ces dernières ont des applications dans de nombreux domaines tels que l'analyse et la géométrie.

Problèmes étudiés

Dans cet article, nous abordons deux principaux problèmes.

Premièrement, à notre connaissance, les treillis proposés jusque là pour les fonctions de parking dépendent tous de bijections entre les fonctions de parking et une autre structure combinatoire, pour laquelle un treillis était déjà défini. Cela rend la définition d'une relation de couverture assez lourde, et rajoute des étapes au processus de comparaison.

Ensuite, l'extension au cas rationnel étant en plein essor dans les travaux les plus récents, de nombreux concept restent à redéfinir en dehors du cas classique.

Contribution proposée

Nous présentons ici un nouveau treillis pour les fonctions de parking, dans le cas classique ainsi que dans le cas rationnel. Ainsi, nous introduisons une relation de couverture plus élégante, définie sans structure intermédiaire. De plus, celle-ci est en bijection avec une relation naturelle que nous définissons sur les chemins de Dyck, qui sont une structure élémentaire de la combinatoire.

Enfin, nous reprenons la notion d'*arbres de parking* donnée par Delcroix-Oger, Josuat-Vergès et Randazzo ([8]), afin d'en donner une version rationnelle.

Pour ces deux contributions, le cas rationnel est traité pour toute paire d'entiers premiers entre eux – sans se limiter au cas $a < b$ comme il a pu être fait dans certains travaux.

Une version longue de ce rapport est disponible ici [1], ainsi que l'encodage en Sage des principales notions abordées dans les références 1 à 8 et des constructions que nous présentons.

Arguments en faveur de sa validité

Les treillis introduits dans le cas classique sont à l'origine de nos deux résultats principaux.

Dans le cas des fonctions de parking *primitives*, nous exhibons une preuve du Théorème 8, qui donne le nombre d'intervalles dans le treillis. Quant à son équivalent pour le cas non-primitif, nous établissons une Conjecture sur le nombre d'intervalles, vérifiée sur les cas $n = 1, \dots, 8$.

Bilan et perspectives

En conclusion, nous avons maintenant des treillis définis de manière directe pour les quatre types de fonctions de parking : classiques, classiques primitives, rationnelles, et rationnelles primitives.

Par la suite, il sera nécessaire de trouver une preuve de la Conjecture, ou bien si elle doit être réfutée, d'exhiber une formule comptant les intervalles dans notre treillis des foncions de parking classiques. Quant au cas rationnel, il faudra également trouver des formules exprimant le nombre de relations.

Enfin, l'on pourrait également vouloir étudier les relations de couvertures sur les arbres de parking rationnels.

1. github.com/tessalsifi/ParkingFunctions

Table des matières

1 Introduction

1.1 Fonctions de Parking

En annexe A, les exemples 1 à 4 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

Définition 1 (Fonction de Parking)**.** *Une* fonction de parking *est une séquence d'entiers positifs* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *dont le tri croissant* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *respecte la condition suivante :* $b_i \leqslant i$ *pour tout* $i \leqslant n$*.*

En d'autres termes, $\#\{i \mid a_i \leqslant k\} \geqslant k \ \forall k \leqslant n$.

On note $\mathcal{PF}_n$ l'ensemble des fonctions de parking de longueur n.

Théorème 1 (Konheim et Weiss, 1966)**.** *Soit* pf_n *le cardinal de* $\mathcal{PF}_n$*. Nous avons*

$$pf_n = (n+1)^{n-1}$$

.

Définition 2 (Fonction de Parking Primitive)**.** *Une fonction de parking* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *est dite* primitive *si elle est déjà triée en ordre croissant.*

On note $\mathcal{PF'}_n$ l'ensemble des fonctions de parking primitives de longueur n.

Théorème 2 (Stanley, 1999)**.** *Soit* pf'_n *le cardinal de* $\mathcal{PF'}_n$*. Nous avons*

$$pf'_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ce nombre est le n^e nombre de Catalan $Cat(n)$.

1.2 Chemins de Dyck

En annexe A, les exemples 5 à 8 illustrent les définitions et théorèmes de cette section.

Notation. *On note par* $|w|_s$ *le nombre d'occurences du symbole* s *dans le mot* w *.*

Définition 3 (Mot de Dyck)**.** *Un* mot de Dyck *est un mot* $w \in \{0,1\}^*$ *tel que :*

— *pour tout* suffixe w' *de* w, $|w'|_1 \geqslant |w'|_0$.

— $|w|_0 = |w|_1$.

Un mot de Dyck de longueur $2n$ peut être représenté par un *chemin* allant du point $(0,0)$ au point (n,n), et restant au dessus de l'axe $y = x$, appelé *chemin de Dyck* :

— Chaque 1 correspond à un *pas Nord* $\uparrow$.

— Chaque 0 correspond à un *pas Est* $\rightarrow$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$.

Théorème 3 (André, 1887)**.** *Soit* d_n *le cardinal de* $\mathcal{D}_n$. *Nous avons*

$$d_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Définition 4 (Mot de Dyck Décoré)**.** *Un* mot de Dyck décoré *est un mot* $w \in \{0, \ldots, n\}^*$ *tel que :*

— *pour tout suffixe* w' *de* w, $|w'|_{\neq 0} \geqslant |w'|_0$.

— $|w|_0 = |w|_{\neq 0}$.

— *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, w *contient exactement une occurence de* i.

— *si* $w_i \neq 0$ *et* $w_{i+1} \neq 0$, *alors* $w_i < w_{i+1}$. *Autrement dit, les labels de pas Nord consécutifs doivent être croissants.*

Un mot de Dyck décoré de longueur $2n$ peut être représenté par un *chemin* allant du point $(0,0)$ au point (n,n), où chaque pas North est associé à un label :

— Chaque $i \neq 0$ correspond à un *pas Nord* $\uparrow$ de label i.

— Chaque 0 corresponds à un *pas Est* $\rightarrow$.

Ces chemins sont appelés *chemins de Dyck décorés*.
On note $\mathcal{LD}_n$ l'ensemble des mots de Dyck décorés de longueur $2n$.

Théorème 4. *Soit* ld_n *le cardinal de* $\mathcal{LD}_n$. *Nous avons*

$$ld_n = (n+1)^{n-1}$$

.

2 Un treillis pour ...

Références

[1] Alan G. Konheim and Benjamin Weiss. An occupancy discipline and applications. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(6) :1266–1274, 1966.

[2] R.P. Stanley and G.C. Rota. *Enumerative Combinatorics : Volume 1*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[3] R.P. Stanley and S. Fomin. *Enumerative Combinatorics : Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.

[4] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisees d'un cycle. *Discret. Math.*, 1 :333–350, 1972.

[5] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discret. Math.*, 31 :171–180, 1980.

[6] Drew Armstrong, Nicholas A. Loehr, and Gregory S. Warrington. Rational parking functions and catalan numbers. *Annals of Combinatorics*, 20 :21–58, 2014.

[7] Michelle Bodnar. Rational noncrossing partitions for all coprime pairs, 2017.

[8] Bérénice Delcroix-Oger, Matthier Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Some properties of the parking function poset. 2020.

A Exemples pour l'Introduction

Exemple 1 (Définition 1 : $n = 7$). — $f_1 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 2) \in \mathcal{PF}_7$

— $f_2 = (7, 3, 1, 4, 2, 5, 4) \notin \mathcal{PF}_7$

Exemple 2 (Théorème 1 : $n = 3$: $pf_3 = 16$). — $(1, 1, 1)$ — $(1, 1, 2)$ — $(1, 1, 3)$ — $(1, 2, 1)$ — $(1, 2, 2)$ — $(1, 2, 3)$ — $(1, 3, 1)$ — $(1, 3, 2)$ — $(2, 1, 1)$ — $(2, 1, 2)$ — $(2, 1, 3)$ — $(2, 2, 1)$ — $(2, 3, 1)$ — $(3, 1, 1)$ — $(3, 1, 2)$ — $(3, 2, 1)$

Exemple 3 (Définition 2 : $n = 4$). — $f_1 = (1, 2, 2, 3) \in \mathcal{PF'}_4$

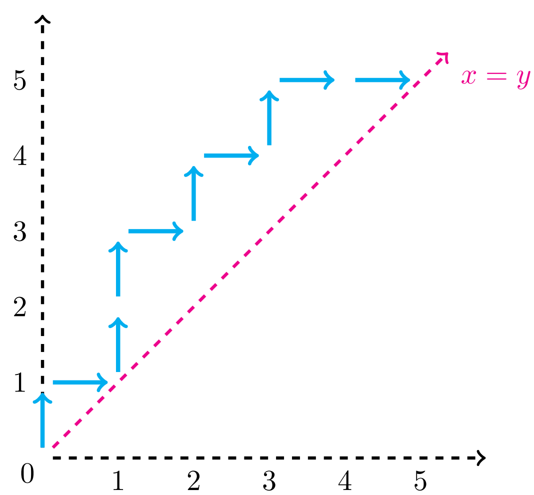
— $f_2 = (1, 2, 3, 2) \notin \mathcal{PF'}_4$, *bien que* $f_2 \in \mathcal{PF}_4$

Exemple 4 (Théorème 2 : $n = 3$: $pf'_3 = 5$). — $(1, 1, 1)$ — $(1, 1, 2)$ — $(1, 1, 3)$ — $(1, 2, 2)$ — $(1, 2, 3)$

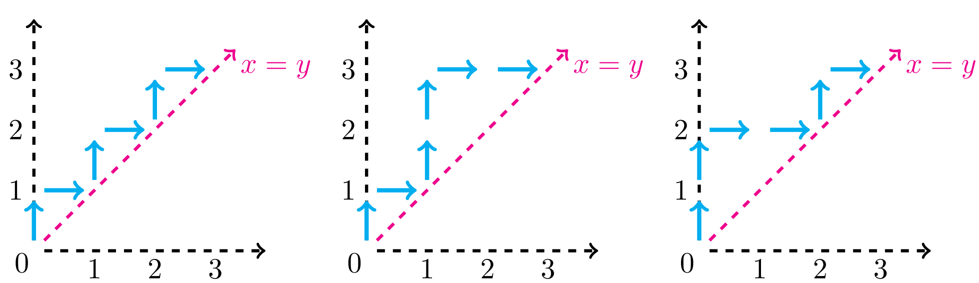
Exemple 5 (Définition 3 : $n = 5$). — $w_1 = 1011000110$ *n'est* pas *un mot de Dyck, car* $|1011000|_0 > |1011000|_1$.

— $w_2 = 1011010101$ *n'est* pas *un mot de Dyck, car* $|w_2|_0 \neq |w_2|_1$.

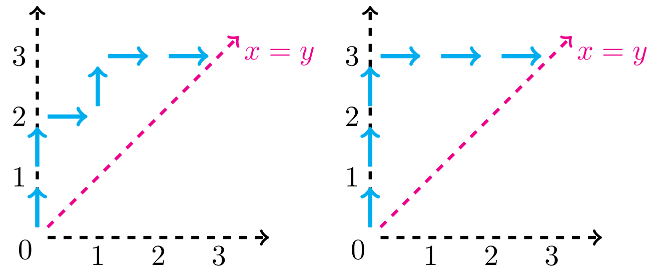
— $w_3 = 1011010100$ est *un mot de Dyck :*



Exemple 6 (Théorème 3 : $n = 3$). $d_3 = 5$.

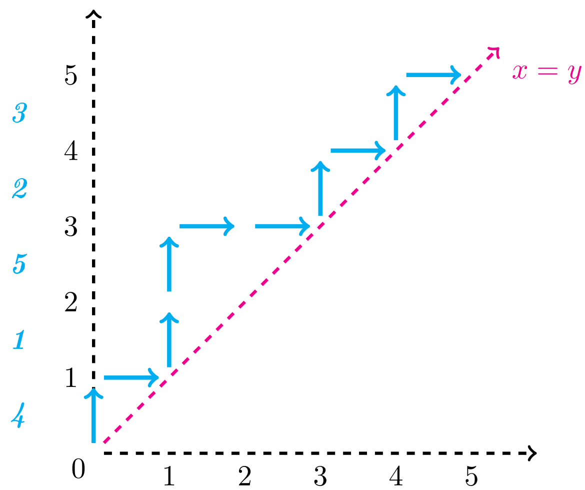


101010 101100 110010



110100 111000

Exemple 7 (Définition 4 : $n = 5$). — $w_1 = 4051002030$ *n'est* pas *un mot de Dyck décoré, car* $5 > 1$.
— $w_2 = 4015002030$ est *un mot de Dyck décoré :*



Exemple 8 (Théorème 4 : $n = 3$). $ld_3 = 4^2 = 16$

— *Mots de la forme* $XXX000$ *:*

123000

— *Mots de la forme* $XX0X00$ *:*

120300 130200 230100

— *Mots de la forme* $XX00X0$ *:*

120030 130020 230010

— *Mots de la forme* $X0XX00$ *:*

102300 201300 301200

— *Mots de la forme* $X0X0X0$ *:*

102030 103020 201030
203010 301020 302010