

Dokumentace k projektu do předmětu IMS
2018/2019

Téma 7: Celulární automaty

Pohyb osob v ohraničeném prostoru – hledání
únikového východu

1. Úvod

V této práci je řešena implementace dvourozměrného celulárního automatu pro simulování pohybu osob v ohraničeném prostoru. Jedná se o model, ve kterém se během jedné iterace může osoba (dále tzv. fermion) posunout vždy maximálně o 1 buňku, tedy $V_{\max} = 1$. Dále model zahrnuje interakce mezi osobami na delší vzdálenosti, které jsou zprostředkovány skrz tzv. dynamické pozemní pole, která mají vliv na rozhodování fermionů o dalším pohybu. Toto pole je navíc každou iteraci modifikováno pohybem ostatních fermionů. Ambicí modelu je dokázat, že zavedení abstrakce skupinové dynamiky pomocí právě tohoto pole ji dokáže do nezanedbatelné míry modelovat. Jako předmět simulace jsme zvolili evakuaci lidí z velké místnosti se sníženou viditelností (kouř, selhání světel).

1.1. Autoři a zdroje význačné literatury

Zásadním inspirativním zdrojem při sestavování tohoto modelu a vykonávání simulací nám byl vědecký článek *Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton* (Burstedde, Klauck, Schadschneider, Zittartz, 2001), který právě takový model a jeho teoretická východiska důkladně popisoval a argumentoval.

1.2. Ověření validity modelu

Důkladným studiem článku uvedeného v odstavci 1.1. jsme byli schopni náš model nadefinovat dostatečně detailně, aby byl implementovatelný v jazyce C++ a abychom si zároveň byli jistí, že předpoklady, ze kterých vycházíme, jsou podepřené výzkumem. Sady 20 simulací provedených na našem modelu s parametry, se kterými prováděli autoři simulace i ve zmíněném článku systematicky prokazovaly velmi podobné výsledky a my jsme si takto potvrdili validitu našeho modelu.

2. Rozbor tématu a použitých metod/technologií

V minulosti byl prováděn rozsáhlý výzkum týkající se toků automobilové dopravy, naopak dynamika pohybu osob do takové míry studována nebyla. Jako přínosnou informaci pro sestavení našeho modelu však vnímáme, že většina prací s tematikou automobilové dopravy se shoduje na paralelním výpočtu následující pozice pro všechny částice.

Jedním z důvodů menšího množství studií zabývajících se sociální dynamikou je pravděpodobně její dvourozměrná podstata. Tu se snažily zachytit tzv. *modely sociální síly* [2,3], ve kterých jsou fermiony na dálku ovlivňovány silami, které vznikají na základě skupinového chování jednotlivců.

Náš model, oproti tomu, je založen více na výměně částic (v textu dále tzv. *bosonů*) na mikroúrovni, které chování fermionů ovlivňují. V principu vychází z tzv. *modelů aktivních chodců* (*active walker models*) [4,5], kde za sebou chodec (v našem případě fermion) nechává stopu v podobě změny vlastností podzemí pod cestou, kterou prošel. Hlavním smyslem tohoto přístupu je transformovat efekty interakcí na delší vzdálenosti (např. následování lidí, kteří jdou kus cesty přede mnou) do lokálních interakcí „se stopou“, což umožňuje o mnoho efektivnější simulaci na počítači [1].

2.1. Základní teoretická východiska modelu

Mezi základní principy, na kterých je postaven náš model, patří:

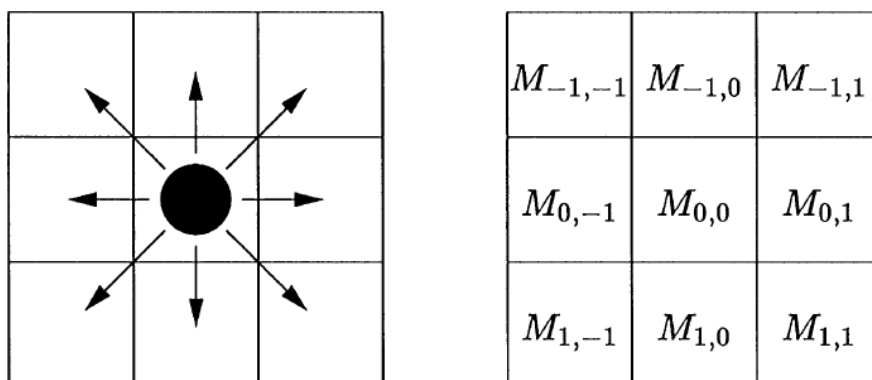
- **V_{max} = 1** – vzhledem k tomu, že graf statistického rozdělení rychlosti chůze u chodců ukazuje výrazný vrchol okolo jedné hodnoty [23] a narozdíl od automobilové dopravy je čas akcelerace a brždění zanedbatelný, je obhajitelné nastavit v diskrétním prostoru maximální rychlost pohybu 1. To v praxi znamená, že fermion se smí v rámci jedné iterace posunout pouze do svých nejbližších sousedů. Zvolení rychlosti větší než jedna by výrazně zkomplikovalo implementaci a výrazně snížilo výpočetní efektivitu. [1]
- **velmi nízká inteligence fermionů** – pro udržení jednoduchosti modelu na rozumné úrovni jsme na základě doporučení zdrojového článku nepřisoudili fermionům žádnou inteligenci (např. zkoumání terénu dopředu, případně vybrání více cílových buněk a zvolení jedné z nich podle toho, která je volná) a snažili jsme se dosáhnout efektů komplexních a skupinových efektů skrz sebeorganizaci fermionů.
- **pozemní pole** – klíčová součást modelu nahrazující prvek inteligence u fermionů. Mimo informace, zda je volná či ne, obsahuje každá buňka dále informaci v diskrétní podobě, která buňku činí méně či více lukrativní.
- **osobní prostor** – interakce mezi chodci na krátké vzdálenosti je vzájemně se vylučující. Chodci si drží od sebe odstup, aby na sebe nenaráželi. Toto je v našem modelu implementováno skrz podmínku, že v dané chvíli může být buňka obsazena pouze právě jedním fermionem.
- **pohyb v davu** – na delší vzdálenosti je naopak interakce mezi chodci vyhledávána. Například během pohybu v přelidněném prostoru je většinou výhodné přímo následovat člověka před námi. Velké davy mohou být dále atraktivní kvůli zvědavosti. Toto je zachyceno pomocí dynamické složky pozemního pole, která bude detailněji zmíněna v následujících odstavcích.

3. Koncepce – modelářská témata

Základem modelu je dvourozměrné pole („mapa“ řečí jazyka C++), na jehož některém okraji se nachází únikový východ (3 souvislé body v mapě). Každá buňka je buď volná nebo obsazená některým fermionem a odpovídá cca rozměrům 40x40 cm², což je typický rozměr prostoru zabraného chodcem v hustém davu [1]. Rozhodování o směru pohybu probíhá paralelně u všech fermionů.

3.1. Statická matice preferencí

Každému fermionu přísluší 3x3 matice preference, která obsahuje pravděpodobnosti jeho pohybu do daného směru (viz obrázek 1). Střední element $M_{0,0}$ představuje pravděpodobnost, že se částice nikam nepohne a zbylých 8 představuje pravděpodobnosti, že se fermiony vydají daným směrem.



Obrázek 1: Statická matice preferencí fermionů [1]

V praxi všechny částice stejného druhu (tedy v tomto případě člověk mířící k únikovému východu) hodnoty těchto pravděpodobností sdílejí a sdílejí tedy v důsledku tuto matici preferencí. Abstrahujeme-li od vlivu interakce s pozemním polem, jejíž mechanismus popíšeme později, každý fermion si vybere ze svého okolí cílovou buňku, do které se chce přesunout. Je-li obsazená, fermion zůstává stát na stejném místě. Je-li volná, fermion se do ní přesune. Představuje-li daná buňka cíl pohybu m fermionů v dané iteraci, je z nich vybrán pouze 1 s pravděpodobností $1/m$, zbylé fermiony zůstávají na svých pozicích [1].

3.2. Pozemní pole

Aby byl model schopen zachytit fenomény skupinové interakce a zachoval si jednoduchost a výpočetní efektivitu, je do něj zaveden koncept tzv.

pozemního pole s dynamickou a statickou složkou. Toto pole si lze představit jako druhou úroveň dvourozměrného pole, která je umístěna přesně pod hlavním polem. Jeho statická složka umožňuje brát v potaz tvar místnosti a je v čase neměnná. Dynamická složka je naopak průběžně měněna průchozími fermiony a následně mění přechodové pravděpodobnosti do daných bodů u fermionů, kteří přesun do těchto bodů zvažují. Právě tato složka je využívána k modelování interakce mezi fermiony na delší vzdálenosti. Každý fermion zanechává stopu v podobě d-bosonů, jejichž počet je jednou z charakteristik dané buňky v každé jednotlivé iteraci. Součástí výpočtu pravděpodobnosti přechodu do daného bodu je i počet d-bosonů obsažených v cílové buňce, jinými slovy fermiony mají tendenci následovat ostatní fermiony. Zásadní vlastností dynamického pole je dále skutečnost, že d-bosony z dlouho neobsazených buněk postupně mizí. Konkrétní parametry týkající se této problematiky budou zmíněny v následujících odstavcích.

3.3. Pohyb fermionů algoritmicky

Na základě informací z předešlých dvou sekcí můžeme sestavit rovnici výpočtu pravděpodobnosti přechodu do bodu (i, j) následovně:

$$p_{ij} = NM_{ij}D_{ij}S_{ij}(1 - n_{ij})$$

n_{ij} je buď 0 pro neobsazenou buňku, případně 1 pro obsazenou buňku, což v praxi znamená, že pravděpodobnost přechodu do obsazené sousední buňky je vždy nulová. N je normalizační faktor zajišťující, že suma pravděpodobností přechodů do všech bodů, kam je přechod realizovatelný, je rovna 1.

Algoritmickou řečí můžeme shrnout pohyb fermionů následovně [1]:

- 1) Dynamická složka pozemního pole (počet d-bosonů v buňkách) je aktualizována na základě pravidel o mizení d-bosonů (uvedených v dalších sekcích).
- 2) Pravděpodobnost přechodu fermionu do neobsazené sousední buňky (i,j) je dána statickou maticí preferencí a lokálními hodnotami statické a dynamické složky pozemního pole (viz S_{ij} a D_{ij} ve výše uvedené rovnici).
- 3) Každý fermion si zvolí svoji cílovou buňku na základě takto vypočtené matice přechodových pravděpodobností.
- 4) Fermiony cílující buňky, do kterých nemíří žádní jejich konkurenti, uskuteční svůj pohyb. Případně vyřeší konflikty s ostatními na základě metody uvedené na konci sekce 3.1.
- 5) Fermiony mění hodnotu dynamické složky pozemního pole v buňce, ve které se nacházeli před přesunem.

V následujících sekcích bude detailně rozebrána interakce fermionů a pozemního pole.

3.4. Složky pozemního pole a interakce s fermiony

Na začátku simulace je každé buňce (x,y) fixně přiřazen v čase neměnný a ničím neovlivnitelný počet s-bosonů $T_s(x,y)$. Naopak hodnota dynamického pole v dané buňce, vyjádřena počtem d-bosonů T_d je na začátku simulace vždycky nulová. Kdykoli se fermion přesune z buňky (x,y) do sousední buňky, počet d-bosonů v buňce (x,y) je inkrementován o 1 (fermiony zanechávají stopu).

Jakmile dojde k přesunu všech fermionů v rámci jedné iterace, nejstarší (nejdříve umístěný) d-boson v rámci každé buňky je odstraněn s pravděpodobností alfa (jeden z parametrů simulace vyjadřující, jak dlouho v průměru zůstávají aktivní stopy po fermionech, kteří buňky navštívili dříve).

3.5. Výsledná rovnice přechodu fermionů

Na základě specifikací interakcí s pozemním polem můžeme tedy shrnout výpočet pravděpodobnosti přechodu do bodu (i,j) v dané iteraci následovně [1]:

$$p_{ij} = N \exp(\beta J_s \Delta_s(i,j)) \exp(\beta J_d \Delta_d(i,j)) (1 - n_{ij}) d_{ij}$$

kde:

$$\Delta_s(i,j) = \tau_s(i,j) - \tau_s(0,0)$$

$$\Delta_d(i,j) = \tau_d(i,j) - \tau_d(0,0).$$

Přechodová rovnice je v nemodifikované podobě převzatá ze zdrojového článku. N je opět normalizační faktor, který má na starosti, aby suma pravděpodobností přechodu do realizovatelných bodu (tedy neobsazených) byla rovna 1. Proměnné J_s a J_d představují sílu vazby fermionů na počet s-, respektive d-bosonů dané buňky. Korekční faktor $d_{i,j}$ je proměnná, reflektující směr, ze kterého daný fermion přichází. Jeho funkcí je zajistit, aby fermion neovlivnila při dalším rozhodování stopa, kterou sám v buňce zanechal. Naopak dostal-li se fermion do současné buňky z určitého směru, může být žádoucí tuto setrvačnost dále podpořit a zvýhodnit (uměle zvýšit) pravděpodobnost přechodu tímto směrem dále. K tomuto slouží volitelný parametr J_0 , který lze uvést při spuštění simulace.

4. Koncepce – implementační témata

Pro realizaci tohoto celulárního automatu je použita pouze jedna třída, jejíž metody volané na správných místech zajišťují korektní chování programu. Tato implementace mohla být zvolena díky jednoduchosti všech využitých datových typů (hodnoty v podobě přirozených, případně reálných čísel).

Objekt vytvořený ze třídy Model po spuštění umístí náhodně fermiony do mapy a vypočítá hodnoty statické složky pozemního pole, které se radiálně snižují s rostoucí vzdáleností od únikového východu. Následně, při spuštění celého procesu, počítá veškeré dostupné pozice, kam by mohl fermion vstoupit, z nichž nakonec náhodně vybere právě jednu. Po určení cílových pozic všech fermionů se provádí jejich přesouvání, což obnáší náhodné „losování“ při kolizi fermionů (více fermionů se uchází o jednu pozici). Fermiony, kterým byla tato pozice přidělena se na ni následně přesunou, ostatní zůstávají na svých pozicích.

Pokud se fermion nachází v cílové lokaci (pole nejbliž východu), je považován za fermion, který je již „v bezpečí“ mimo ohraničený objekt a v dalších výpočtech už není brán v potaz. Program je řádně ukončen výpisem, kolik iterací bylo potřebných provést k vyprázdnění celé místnosti, jinými slovy dosažení momentu, kdy jsou všechny fermiony již mimo ohraničenou místnost. Při řádném ukončení programu se na standardní výstup vypíše celkový počet iterací, kterých bylo třeba pro přesun všech fermionů k východu.

Knihovna SIMLIB je zastoupena v našem modelu jen skrz funkci Random(), kterou využíváme při náhodném rozhodování. Pomocí této funkce generujeme náhodné číslo, které následně znormalizujeme a podle výsledku určíme, který člen vyhrál, tedy kterým směrem se fermion vydá.

5. Architektura simulačního modelu/simulátoru

Pomocí příkazu make v kořenovém adresáři dojde ke vzniku spustitelného programu s názvem IMS_CA. Spuštěním programu s níže uvedenými povinnými/volitelnými parametry je proveden jeden běh simulace a na standardní výstup vytisknut potřebný počet iterací.

IMS_CA – spouštěcí parametry:

- -f <počet fermionů>
 - povinný parametr, počet přítomných fermionů v místnosti
- -m <rozměr>
 - povinný parametr, délka jedné strany čtvercové místnosti
- -a <hodnota parametru alfa>

- volitelný parametr vyjadřující pravděpodobnost zmizení nejstaršího d-bosonu ze všech buněk po ukončení iterace. Implicitně nastaven na 0,5, viz [1].
- -b <hodnota parametru beta>
 - volitelný parametr. Implicitně 10, viz [1].
- -s <hodnota parametru Js>
 - volitelný parametr vyjadřující sílu vazby fermionů na hodnoty statické složky pozemního pole. Implicitně 2, viz [1].
- -d <hodnota parametru Jd>
 - volitelný parametr vyjadřující sílu vazby fermionů na hodnoty dynamické složky pozemního pole. Implicitně 1, viz [1].

Příklad spuštění:

`./IMS_CA -f 500 -m 50`

Vzhledem k omezené vypovídací schopnosti jednoho běhu simulace s danými parametry jsme se rozhodli pro implementaci dodatečného bash skriptu (soubor `sim.sh` v kořenovém adresáři), který simulaci provede opakovaně a na standardní výstup postupně vypisuje její výsledky a nakonec i vypočte aritmetický průměr hodnot iterací všech provedených simulací.

Nad rámec parametrů uvedených výše, které jsou ve stejné podobě aplikovatelné i na něj, mezi jeho spouštěcí parametry dále patří:

`sim.sh` – spouštěcí parametry:

- -n <počet simulací>
 - počet simulací, které chceme provést. Pokud parametr není uveden, implicitně je simulací provedeno 5.
- -sens_sim <parametr> <počet kroků> <inkrementační faktor>
 - spuštění sady simulací v módu analýzy citlivosti na změnu daného <parametr>. Je provedeno <počet kroků> inkrementací/dekrementací hodnoty <parametr> pomocí <inkrementační faktor>

Příklady spuštění:

`./sim.sh -f 500 -m 50 -n 10`

- spouštím 10 simulací se zadanými parametry

`./sim.sh -f 500 -m 50 -n 20 -sens_sim a 5 1.15`

- spouštím analýzu citlivosti na změnu parametru alfa. Provede se vždy 20 simulací s danou hodnotou (v tomto případě začínáme na

implicitní hodnotě 0.5) a poté je hodnota parametru vynásobena hodnotou 1.15. Tento celý cyklus se opakuje 5x.

6. Podstata simulačních experimentů a jejich průběh

6.1. Postup experimentování

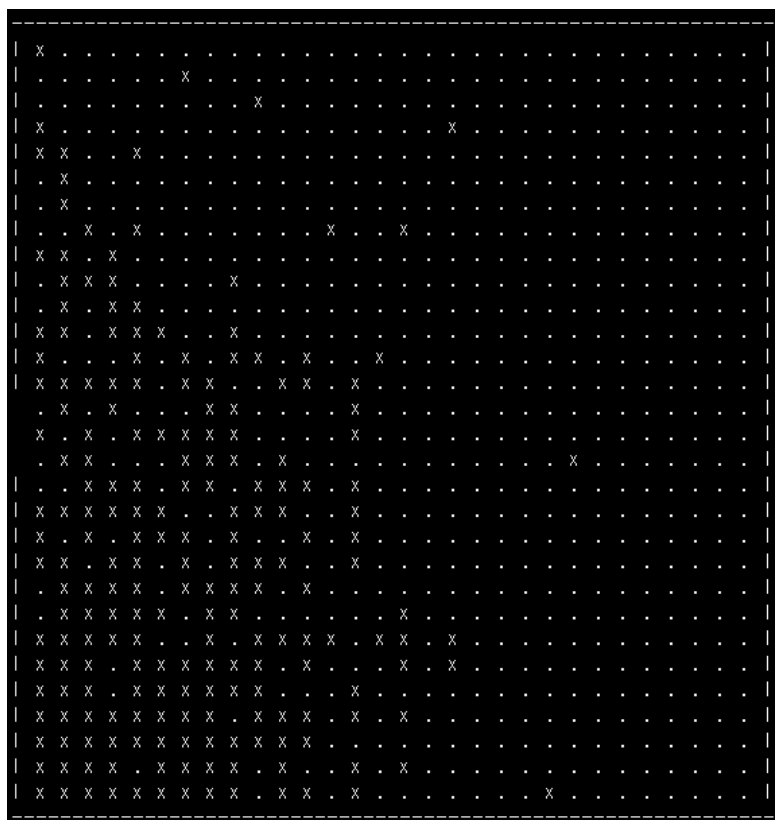
Ke spouštění simulací jsme používali výše uvedený bash skript `sim.sh`, který opakovaně spouštěl námi implementovaný model v jazyce C++. Prvním nabízejícím se krokem bylo porovnat výsledky našich simulačních běhů s výsledky simulace úniku fermionů z místnosti ve zdrojovém článku [1] a potvrdit si tak validitu našeho modelu.

Jelikož ve zmiňovaném článku hrál klíčovou roli parametr alfa (viz sekce 6.2), prováděli jsme opakovaně analýzu citlivosti na jeho změnu. V každém takovém běhu byl kladen důraz na počet provedených simulačních běhů >10 , aby bylo dosaženo opravdu relevantních výsledků.

6.2. Ukázková simulace

```
xlancic04@merlin: ~/IMS/IMSproj$ ./IMS_CA -f 700 -m 30
-----
| x x . . x . x x . x x x x x x . x x . x x . x x x x x x x |
| . x x x x x x . . x x x x x x x x . x . . . x x x x . x x |
| x x x x x x x x x x x x x x . x . . x x x x x x x x x x . x |
| x x x x x x x x x . . x . . x x . x x x . x x x x . x x x |
| x x x x x x x x x x x x x x x x x . x x x x . x . x x x x . |
| x x . x x x x . . x x x x x x . x x x x x x x x x x x x . x |
| x x x x x . x x . . x . x x . x . x x . x x x x x x x x x |
| x x x x . . x x x x x . x x . x . x x x x . x x x x . x x |
| x x x . x x . x x x x x x . x x x x x x x x . x . x x . x . |
| x . x x . . . x x x . x x x x x . x x x x x x . . x . x x x |
| x x x x . . . x x x . x x x . . . x . x . x x x x x x . . x |
| x x x x x x . x x x x x x . . x x x x x x x x x x x x . x . |
| x x x x x x x x x x x x . x . x x x x x x x x x x . x x . x |
| x x x . x x x x x . . x x x x x x x x . x . . x . x x . x x |
| x x x . x x . x x x . . x x . x x x . x x x x x x x x x x x |
| x x . x x x x x . x x . x . x x . x . x x x x . x x . x x x |
| x . . x . x x x x x x x x x x x x . . x x . x x x x x x x x |
| x x . x x x . x x x x . x x . x . x x x . x x x x x x . x . |
| x x x x x . x x x x x x x x x x x x . x x x x x x x x . x . |
| x . x x x . . x x x x x x x . . x x x x x x x x x x x x . |
| x . x x x . x . x . x x x x . x x x x x x x x x x x x . x x |
| x x x . . x x x x x x x . x . x . x . x x x . x x x x x x . |
| x x . x . x . . x x x x x x x x x x x x . x x x x x x x x x |
| x x x x . x x . x . . x x x x x x x x . . x . x x x x . x x x |
| . . . x x x x x x x x x x . x . . x x . x x x . x x x . x x |
| . . x x x x x x x x . x x x x . x x x x x x x x x x . x x x . x |
| x x x x x x . x x x . . . x x x x x x x x x x x x . x x x x x |
| x x x x x x x x x x x x x x . x x x x x x x x x x x x x x x |
| x x x x x x x x x . . x x x x x x x x . . x . x x . x x x x . |
-----
```

Obrázek 2: Stav při začátku simulace - náhodné rozmístění fermionů



Obrázek 3: Stav matice po provedení 300 iterací simulace z Obrázku 2

6.2. Vliv životnosti d-bosonů na dobu vyklizení místnosti

Základem simulace byla čtvercová místnost daná rozměry 50x50 a 500 přítomných fermionů. Čtvercová místnost měla pouze jeden únikový východ na levé hraně místnosti. Statická složka pozemního pole jednotlivých bodů byla určena tak, že počet s-bosonů připadajících na danou buňku klesal v kružnicích z maximální hodnoty u únikového východu, až po nejnižší hodnotu v protějších rozích místnosti (ilustrace ve zmenšené podobě viz obrázek 4).

	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	
	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	
	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	
	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	
	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	
	1.0000	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	
	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	
	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	
	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	
	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	

Obrázek 4: Rozmístění s-bosonů po inicializaci simulace

Stejně jako autoři článku [1] jsme zkoumali vliv životnosti d-bosonů (pravděpodobnosti jejich zániku – viz parametr alfa) na počet iterací potřebných k vyklizení celé místnosti.

6.3. Závěry experimentů

Dosáhli jsme velmi podobných výsledků – zjistili jsme, že při silnější vazbě fermionů na statickou složku pozemního pole roste velmi výrazně počet potřebných iterací k evakuaci místnosti (viz data v Obrázku 5 a graf v Obrázku 6) s rostoucí délkou životnosti d-bosonů, a to konkrétně exponenciálně. Dále si lze povšimnout, že čím silnější je vazba na statické pole, tím déle je možné dobu evakuace udržet v rozumných mezích.

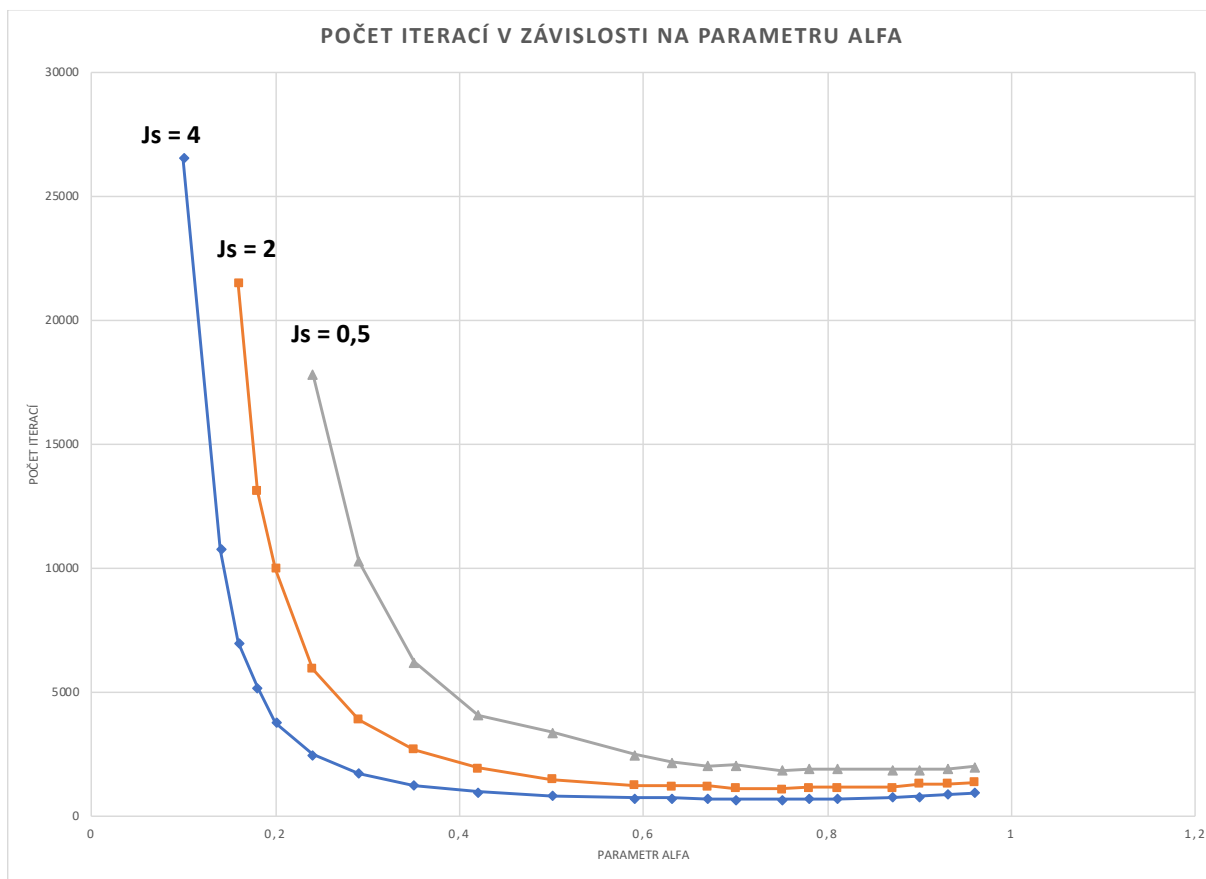
V praxi je možné tento jev interpretovat tak, že pokud osoby v místnosti mají spíše silnější povědomí o tom, kde se nachází východ, nehraje takovou roli, že lidé před nimi volili nějakou cestu (a jejich stopy déle přetrvávají). Na druhou stranu pokud je jejich povědomí o umístění východu velmi slabé a stopy mizí spíše rychle, s výrazně menší pravděpodobností se jim podaří rychle se dostat z místnosti.

Jak již uvedli autoři článku [1], toto zjištění je velmi zajímavé, protože ukazuje na to, že vzájemná přitažlivost fermionů hraje velmi výraznou roli v jejich chování. Tento vliv je obzvláště silný, pokud fermiony nemají valnou představu o tom, kde je východ.

Na základě tohoto lze konstatovat, že při simulování evakuačních scénářů může studium průměrných evakuačních časů, a to zejména [1] v rámci jednoho vzorků lidí, vést k velmi zavádějícím závěrům a nelze opomíjet komplexitu, kterou do situace vnáší interakce těchto dvou zmíněných faktorů.

alfa	Js = 4	Js = 2	Js = 0,5
0,96	951	1367	2000
0,93	906	1314	1917
0,9	797	1303	1892
0,87	762	1165	1884
0,81	699	1168	1913
0,78	710	1173	1929
0,75	682	1099	1845
0,7	683	1137	2067
0,67	713	1216	2047
0,63	738	1226	2200
0,59	752	1269	2498
0,5	845	1493	3386
0,42	973	1937	4087
0,35	1243	2692	6230
0,29	1750	3900	10285
0,24	2480	5946	17848
0,2	3780	9987	
0,18	5189	13127	
0,16	7019	21500	
0,14	10780		
0,1	26550		

Obrázek 5: Analýza citlivosti na změnu parametru alfa při různých hodnotách parametru Js



Obrázek 6: Počet provedených iterací v závislosti na hodnotě parametru alfa.

Parametry: $J_d = J_o = 1$, $\beta = 10$

7. Zdroje

- [1] **Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton.** C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, J. Zittartz. Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, D-50923 Köln, Germany. January 2001
- [2] D. Helbing, Verkehrsdynamik: Neue Physikalische Modellierungskonzepte, Springer, Berlin, 1997
- [3] D. Helbing, P. Molnar, Phys. Rev. E 51 (1995) 4282.
- [4] D. Helbing, F. Schweitzer, J. Keltsch, P. Molnar, Phys. Rev. E 56 (1997) 2527.
- [5] D. Helbing, J. Keltsch, P. Molnar, Nature 388 (1997) 47.
- [6] SIMLIB, funkce Random()