碩士學位論文

일변량 시계열 모형과 벡터 자기회귀모형에서의 잔차 자기상관관계에 대한 와일드 붓스트랩 Ljung-Box검정

韓國外國語大學校 大學院

統 計 學 科

盧　太　鉉

碩士學位論文

일변량 시계열 모형과 벡터자기회귀모형에서의 잔차 자기상관관계에 대한 와일드 붓스트랩 Ljung-Box검정

Wild bootstrap Ljung-Box test for residual autocorrelation in univariate time series and vector autoregressive models

指導 李 泰 旭 教授

이 論文을 碩士學位 請求論文으로 提出합니다.

2019年 8月

韓國外國語大學校 大學院

統 計 學 科

盧 太 鉉

이 論文을 盧太鉉의 碩士學位 論文으로 認定함.

2019年 6月 14日

審査委員 신 기 일 (인)

審査委員 이 석 호 (인)

審査委員 이 태 욱 (인)

韓國外國語大學校 大學院

요 약

본 논문에서는 일변량 시계열 모형과 다변량 시계열 모형의 잔차의 자기상관성 유뮤의 확인을 위해 일반 적으로 사용하는 Ljung-Box(LB) 검정통계량을 와일드 붓스트랩(wild bootstrap)을 사용하여 연구한다. 시계열 모형을 검정할 때 일반적으로 Ljung-Box(LB) 검정은 오차가 서로 독립이며 동일한 분포를 따른다는 IID(Independent and Identically Distributed) 가정하에서 점근적으로 유도되는 분포를 이용하여 검정을 시행한다. 하지만 시계열 자료 중 분산에 조건부 이분산성이 존재하는 금융시계열 자료는 일반적 가정을 만족시키지 못하여 Ljung-Box(LB) 검정에서 제 1종 오류를 범하게 된다. 이것을 극복하기 위해 일변량, 다변량 시계열 모형에 와일드 붓스트랩(wild bootstrap)을 이용한 Ljung-Box(LB) 검정법을 제안하고 성질을 연구한다.

주요용어 : AR 모형, GARCH 모형, AR−GARCH 모형, 벡터자기회귀 모형, Ljung−Box 검정통계량, 와일드 붓스트랩

목 차

1. 서론 ········· 1

2. 일변량 시계열 모형의 적합도 검정 ········· 3

3. 다변량 시계열 모형의 적합도 검정 ········· 6

4. 와일드 붓스트랩 알고리즘 ········· 9

5. 모의실험 ········· 13

6. 결론 ········· 19

참고문헌 ········· 20

[표] 목 차

[표 5.1] 14
[표 5.2] 15
[표 5.3] 15
[표 5.4] 16
[표 5.5] 16
[표 5.6] 17
[표 5.7] 18

1. 서론

시계열 자료는 주어진 자료를 가장 잘 설명해주는 모형은 모형의 식별, 모형의 추정, 모형의 검진으로 구성되는 모형 적합의 3단계를 거쳐서 선택 된다. 그 중 모형 검진은 추정된 모형을 통해 자료에 대한 설명력을 확인하는 가장 중요한 단계이다. 일반적으로 모형 검진은 오차를 백색잡음으로 가정하고 오차의 추정치인 잔차를 기반으로 이루어진다. 자기상관성의 존재 여부를 판별하는 방법 중 대표적으로 *Ljung-Box (LB)* 검정통계량이 있다. 잔차에 이분산성이 없을 경우에는 자기 상관성 검정을 하는 *Ljung-Box* 통계량을 사용하여 검정이 이루어지지만 잔차에 이분산성이 있을 경우 일반적인 *Ljung-Box* 통계량으로는 자기상관성 유무를 판단하는 것이 어렵다고 알려져 있다.

조건부 이분산성이 존재하는 시계열 자료에서는 대표적으로 금융 시계열 자료가 있다. 금융 시계열 자료의 모형을 추정하는 경우 조건부 이분산성 때문에 추정의 적확성과 효율이 떨어지고 모형 검정에 있어서 제 1종 오류를 만족시키기 힘듦을 Goncalves 와 Kilian (2004)을 통하여 이미 알고 있다. 이러한 문제점을 만족시키기 위해 Liu (1998) 와 Mammen (1993)은 조건부 이분산성의 유무와는 관계없이 어떤 경우에나 적용할 수 있는 와일드 붓스트랩(*wild bootstrap*) 방법을 제안하였다. Ahlgern과 Catani (2012)는 와일드 붓스트랩을 도입하여 Lagrange multiplier (*LM*) 검정으로 조건부 이분산성이 존재하는 오차의 경우에도 *LM* 검정이 유효함을 입증하였다.

본 논문에서는 와일드 붓스트랩 기법을 적용하여 *LB* 검정통계량을 연구한다.

일변량 시계열과 다변량 시계열에서 분산에 조건부 이분산성이 있는 경우와 없는 경우를 구분하여 모형 적합을 시킨다. 모형 검진 방법에 *Ljung-Box* 검정통계량을 사용함에 있어 와일드 붓스트랩을 적용한다. 와일드 붓스트랩을 적용하는 방법은 이미 다양한 알고리즘으로 실험이 되어 있지만 보통 잔차에 와일드 붓스트랩을 적용한 후 자료로 복구한 후 검정통계량을 구하는 방법이다. 하지만 본 논문에서는 자료로 복구하지 않고 잔차에 와일드 붓스트랩을 적용하는 알고리즘을 만들어 사용하였다. 일변량 시계열 모형에는 *AR(1), AR(1)-GARCH(1,1)* 모형을 사용하였고 다변량 시계열 모형은 벡터자기회귀모형 (vector autoregressive model)과 조건부 이분산성이 존재하는 모형으로는 *CCC-GARCH* 모형을 적용 하였다. *CCC-GARCH* 모형에 대한 추가 설명은 Bollerslev (1996)을 참고하여 학습하길 바란다.

본 논문은 총 5장으로 구성되어 있다. 제 2장에서는 일변량 시계열 모형을 간단히 소개한 후 적합도 검정 소개한다. 제 3장에서는 제 2장과 마찬가지로 다변량 시계열 모형과 적합도 검정을 소개한다. 제 4장에서는 잔차에 와일드 붓스트랩을 활용한 알고리즘을 제안하고 잔차에 대한 자기상관성 검정을 방법을 소개한다. 제 5장에서는 제안한 알고리즘을 통해 일변량 시계열 모형과 다변량 시계열 모형에 모의실험을 수행하고 제6장에서는 결론을 맺는다.

2. 일변량 시계열 모형의 검정

일변량 시계열 모형의 적합도 검정을 위해 자기회귀 모형 (*Autoregressive: AR*)과 평균은 자기회귀 모형(*AR*)을 따르며 분산에는 일반 자기회귀 조건부 이분산 모형 (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity: GARCH*)이 있는 *AR-GARCH* 모형을 고려하고자 한다. 일반적으로 자기회귀 모형(*AR*)은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Z_t - \mu &= \phi_1 (Z_{t-1} - \mu) + \ldots + \phi_p (Z_{t-p} - \mu) + \epsilon_t \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j (Z_{t-j} - \mu) + \epsilon_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서 $\phi_1, \ldots, \phi_p$는 p차원의 모수 행렬, μ는 평균 ϵ_t는 평균이 0, 분산 σ_ϵ^2을 갖는 백색잡음과정이다. 다음으로 분산에 조건부 $AR-GARCH$모형은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} &Z_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} \phi_j (Z_{t-j} - \mu) + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ &\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B) u_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

AR모형과 AR-$GARCH$모형 모두 모형을 적합 시킨 후 잔차에 LB검정을 사용하여 모형의 적합성 여부를 확인한다. 이때 일반적인 LB검정은 AR모형의 적합도는 잘 검정하지만 $AR-GARCH$ 모형의 적합도 검정은 잘되지 않는다고 알려져 있다. 즉 분산에 이분산성이 있는 모형에서 잔차의 자기상관성을 잘 검정하지 못한다는 것이다. 일변량 시계열 자료의 LB 검정 통계량은 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
Q &= n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\hat{\rho}_k^2(e)/(n-k), \\
\hat{\rho}_k(e) &= \frac{\sum_{t=p+1}^{n-k}(e_t-\bar{e})(e_{t+k}-\bar{e})}{\sum_{t=p+1}^{n}(e_t-\bar{e})^2}, \qquad e_t = Z_t - \hat{Z}_t
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

여기서 $\hat{\rho}_k(Z)$는 e_t의 시차 k인 자료의 표본자기상관계수($residual\ SACF$: $RSACF$)이며 평균이 0이고 분산이 $Var(\hat{\rho}_k(e)) \approx \frac{1}{n}$인 정규분포를 따른다. n은 표본의 크기, k는 검정에 사용되는 시차 값이다.
자기상관성 유무검정을 위한 가설은 아래와 같다.

$H_0 : X_t$에 자기상관성이 존재한다. vs. $H_0 =$ not H_1

$\hat{\rho}_k$를 이용하면 아래와 같이 가설을 세울 수 있다.

$$H_0 : \widehat{\rho_1} = \widehat{\rho_2} = \cdots = \widehat{\rho_k} = 0 \quad \text{vs.} \quad H_0 : \text{not} \;\; H_1$$

통계량 Q는 귀무가설 하에서 자유도가 점근적으로 $k-1$인 카이제곱 분포를 따른다. 따라서 유의수준 α에서 $Q \geq \chi_{\alpha}^{2}(k-1)$이면 모형이 적합하다는 귀무가설을 기각할 근거가 충분하다. 따라서 시계열 자료에 자기상관성이 존재할 가능성이 크다는 것을 나타낸다.

3. 다변량 시계열 모형의 검정

여러 형태의 다변량 시계열 모형 중에서 본 논문에서는 벡터 자기 회귀모형(*vector autoregressive models; VAR*)을 사용한다. k 차원의 다변량 시계열 자료 $\{\boldsymbol{X}_t\}$에 대하여 차수가 p인 벡터 자기회귀모형은 아래와 같다.

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\Pi}_i \boldsymbol{X}_{t-i} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{3.1}$$

모형 식에서 $\boldsymbol{\mu}$ 는 $k \times 1$ 차원의 평균 벡터, $\boldsymbol{\Pi}_{1,\ldots,}\boldsymbol{\Pi}_p$ 는 $k \times k$ 차원의 모수 행렬, 마지막으로 $\boldsymbol{\epsilon}_t$ 는 평균이 0, 공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$인 다변량 정규분포를 따르는 *IID*(*Independent and Identically Distributed*) 확률벡터이다. 공분산 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}$ 는 양정치 행렬(*positive definite*)이고 비특이 행렬(*non-singular matrix*)이다.

벡터자기회귀 모형의 오차에 대한 조건부 분산 모형으로 *CCC-GARCH*(*Constant Conditional Correlation GARCH*)모형을 적용한다.

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{z}_{t,}\ \boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^{(2)} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{h}_{t-1} \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{h}_t = (h_{1t}, h_{2t})$일 때 $\boldsymbol{D}_t = diag(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2})$이며, $\boldsymbol{\epsilon}_t^{(2)} = (\epsilon_{1t}^2, \epsilon_{2t}^2)$, $\boldsymbol{a}_0$는 양의 상수, 마

지막으로 A_1과 B_1은 2×2차원의 양의 대각원소를 갖는 모수행렬이다. $\{z_t\}$는 독립이펴 평균이 $\mathbf{0}=(0,0)'$이며 공분산 행렬이 $P=\begin{pmatrix}1 & \rho \\ \rho & 1\end{pmatrix}$를 갖는 정규분포이다.

다변량 시계열 자료도 일변량 시계열과 마찬가지로 자기상관성 검사를 할 때 LB통계량을 사용한다. VAR모형에서도 모형의 적합성을 확인하기 위해 잔차인 ϵ_t에 대한 자기상관성 검사를 진행한다. 잔차에 대한 자기상관성 검사를 실시할 때 본 논문에서는 오차 ϵ_t에 대하여 차수 h인 자기회귀 구조를 고려한다.

$$\epsilon_t = \psi_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \psi_h\epsilon_{t-h} + e_t \tag{3.3}$$

다변량 시계열 모형의 적합도 검정을 위한 LB 검정의 귀무가설과 대립가설은 모수 $\psi_1,\ldots,\psi_h$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$H_0 : \psi_1 = \cdots = \psi_h = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \text{ not } H_0$$

다변량 LB 검정통계량은 아래의 식과 같고 귀무가설 하에서 점근적으로 카이제곱 분포를 따른다.

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{T-l} tr(\hat{\Gamma}_l \widehat{\Gamma_0^{-1}} \hat{\Gamma}_l \widehat{\Gamma_0^{-1}})$$

T는 자료의 크기, k는 자료의 차원, l은 시차, $tr(A)$는 행렬 A의 대각원소의

합이다. Γ_i는 i번째 시차의 자료의 상관관계 행렬을 뜻한다. LB 검정통계량은 원 자료의 자기상관성 유무를 검정할 경우 자유도가 k^2m인 카이제곱분포를 점근적으로 따르지만 잔차의 자기상관성 유무를 검정할 경우의 자유도는 k^2m-k^2p를 따른다. 본 논문에서는 와일드 붓스트랩을 적용할 때 원 자료의 와일드 붓스트랩 검정은 문제가 없지만 잔차를 와일드 붓스트랩을 할 경우 k^2p를 따르게 되어 보정을 하게 된다. 보정에 따른 부분은 알고리즘 설명에서 자세히 다룬다.

4. 와일드 붓스트랩 알고리즘

크기가 정해져 있는 유한 샘플자료에서 자료의 수가 적은 경우 이를 사용한 통계량의 근사적인 분포가 유의하지 않게 된다. 이에 따라 통계적 추론의 효율성이 저하된다. 이러한 단점을 보안하는 방법으로 극한 분포를 대신하여 붓스트랩을 사용하여 표본을 얻은 후 그 표본의 분포로 대체하는 방법을 생각해 볼 수 있다. 다음은 붓스트랩을 이용한 통계적 검정절차이다. 크기가 T인 표본 $\{X_1,...,X_T\}$에 대하여 표본자료 T개를 같은 크기 T만큼 독립 복원 추출한다. 추출된 표본은 붓스트랩 표본이고 기호(*)를 사용하여 $\{X_1^*,...,X_T^*\}$로 나타낸다. 다음으로 추출된 붓스트랩 표본을 이용하여 검정통계량을 계산하다. 붓스트랩 표본을 이용한 검정통계량은 $\tau^* = \tau(X_1^*,...,X_T^*)$와 같이 τ 함수를 사용하여 표현한다. 위 두 절차를 B번 반복 시행하여 B개의 $\tau_1^*,...,\tau_B^*$ 검정통계량 값을 구한다. $\tau_1^*,...,\tau_B^*$ 로 경험적 분포함수(empirical distribution function)를 생성하는데 이 분포가 원 시계열의 검정통계량인 $\tau = \tau(X_1,...,X_T)$의 유한 표본에서의 분포를 따른다는 사실을 이용하는 방법이 일반적인 붓스트랩 검정법이다. 예를 들어 붓스트랩 검정법을 이용하여 단측 검정을 하게 되면 다음과 같이 유의확률을 계산할 수 있다.

$$\hat{p}^*(\tau) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I(\tau_b^* \geq \tau)$$

여기서 $I(\bullet)$함수는 지시함수(indecator function)이다.

본 논문에서 사용한 알고리즘은 와일드 붓스트랩 방법을 사용하여 잔차의 와일드 붓스랩 표본을 이용하여 LB 통계량의 분포를 구하여 기각역과 *p-valu*를 설정 한다. 원 시계열 자료를 이용하여 차수가 p인 자기회귀 모형을 적합하여 모수 추정값 $\hat{\phi}$를 추정하고 잔차 $\{\hat{\epsilon_t}\}$를 생성한다.

$$\widehat{\epsilon_t}^* = w_t \widehat{\epsilon_t}$$

와일드 붓스트랩은 시계열 자료를 생성할 때 잔차에 w_t 평균이 0이고, 분산이 1인 IID 확률변수로서 $E|w_t|^4 < \infty$인 조건을 만족하여야 한다. Mammen(1993) 개발한 w_t의 다양한 분포 중에서 가장 대표적인 것은 다음과 같이 정의된다.

$$w_t = \begin{cases} -(\sqrt{5}-1)/2, & p_1 = (\sqrt{5}+1)/(2\sqrt{5}) \\ (\sqrt{5}-1)/2, & p_2 = (\sqrt{5}-1)/(2\sqrt{5}) \end{cases}$$

Davidson과 Flachaire (2001)은 이보다 더 우수하고 간단한 분포로서 Rademacher 분포를 아래와 같이 제안하였다.

$$w_t = \begin{cases} -1, & p_1 = 0.5 \\ 1, & p_2 = 0.5 \end{cases}$$

w_t는 확률변수로써 p_1과 p_2의 확률로 1과 -1이 관측 된다. Rademacher 분포 외에도 Mammen (1993)이 여러 분포를 활용한 와일드 붓스트랩이 개발되어 있다. 와일드 붓스트랩에 대한 점근적 유효성 증명은 Goncalves와 Kilian (2003)에 나와 있다.

와일드 붓스트랩 표본의 중요한 점은 원 시계열 자료와 다르게 평균 부분의 자기 상관성은 사라지지만 분산 부분의 자기상관성은 원 시계열 자료와 동일하다는 것이다. 아래 식은 w_t는 평균이 0, 분산이 1인 IID 확률변수에서 $\{w_t\}$와 $\{X_t\}$가 서로 독립이기 때문에 성립한다.

$$Cov(w_t X_t, w_{t+h} X_{t+h}) = E(w_t X_t, w_{t+h}, X_{t+h}) = 0$$

$$\begin{aligned} Cov(w_t^2 X_t, w_{t+h}^2 X_{t+h}) &= E(w_t^2 X_t^2 w_{t+h}^2 X_{t+h}^2) - E(w_t^2 X_t^2) E(w_{t+h}^2 X_{t+h}^2) \\ &= E(X_t^2 X_{t+h}^2) - E(X_t^2) E(X_{t+h}^2) \\ &= Cov(X_t^2, X_{t+h}^2) \end{aligned}$$

이와 같은 사실은 원 시계열 자료의 평균부분의 자기상관성은 사라지지만 분산 부분의 자기상관성은 원 시계열자료와 동일하다는 것이다. 이러한 성질은 조건부 이분산성이 있는 조건부 이분산성이 있는 금융 시계열 자료의 평균 부분의 통계적 추론에서 발생하는 문제점을 개선 할 수 있다.

본 논문에서는 시계열 자료의 LB 검정과 와일드 붓스트랩 알고리즘을 사용한 검정에 대하여 비교한다. 아래는 사용한 와일드 붓스트랩 알고리즘을 소개한다. 알고리즘 과정 중 4번에서 구해진 $Q_{LB_1}^*, \ldots, Q_{LB_B}^*$ 통계량들은 자유도 $k^2 m$의 카이

제곱 분포에서 구해진 값들이다. 하지만 $\hat{\epsilon_t}$에서의 통계량은 자유도 k^2m-k^2p의 카이제곱 분포에서 구해진 값들이다. 따라서 $\chi^2_{(0.05)}(k^2m)-\chi^2_{(0.05)}(k^2m-k^2p)$의 값만큼 보정이 필요하다. 5번에서 보는 것과 같이 잔차의 유의 확률을 구하였다.

알고리즘. 잔차에 대한 와일드 붓스트랩 LB 검정

1. 시계열 자료 $\{X_t\}$에 대하여 모형을 적합시키고 추정된 잔차를 이용하여 Q_{LB}를 계산한다.
2. 추정된 잔차들을 Rademacher 분포에서 랜덤표본 $\{w_t\}_{t=1}^{T}$를 T개 추출하여 와일드 붓스트랩 잔차 $\{\epsilon_t^* = w_t\hat{\epsilon_t}\}$를 만든다.
3. 와일드 붓스트랩 검정통계량 Q_{LB}^*를 계산한다.
4. 2와 3의 절차를 B번 반복 수행하여 총 B개의 와일드 붓스트랩 검정 통계량 $Q_{LB_1}^*,\dots,Q_{LB_B}^*$를 계산한다.
5. 총 B개의 Q_{LB}^* 이용하여 아래와 같이 유의 학률을 계산한다.

$$\hat{p^*} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I(Q_{LB_b}^* - \left(\chi^2_{(0.05)}(k^2m) - \chi^2_{(0.05)}(k^2m-k^2p)\right) \geq Q_{LB})$$

5. 모의실험

일변량 시계열 데이터와 다변량 시계열 데이터를 몬테카를로 모의실험을 통하여 조건부 이분산성이 존재하는 오차의 자기상관성에 대한 와일드 붓스트랩 검정법 성질과 성능을 알아보고자 한다. 2장과 3장에서 소개한 일변량 시계열 *AR*, *AR-GARCH* 모형과 벡터 자기회귀 모형을 사용해 시계열 데이터를 만든다. 여러 모형 중에서 $AR(1)$, $AR(1)$-$GARCH(1,1)$, 차수가1, 차원이 2인 벡터 자기회귀 모형과 이분산성을 주기위해 *CCC-GARCH*모형을 고려한다.

$AR(1)$모형 $$Z_t = \phi Z_{t-1} + \epsilon_t \tag{5.1}$$

$AR(1) - GARCH(1,1)$모형 $$Z_t = \phi Z_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \tag{5.2}$$
$$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

두 모형의 *AR* 계수 ϕ는 0.0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 로 설정하였다. $AR(1) - GARCH(1,1)$모형에서 $GARCH(1,1)$에 대한 모수는 w는 0.1으로 설정하였고 α_1과 β_1는 두 개의 합이 1과 가깝게 설정하기 위하여 각각 0.1, 0.89로 하였고 일변량 시계열의 경우 T는 200, 500, 1000으로 설정하였다.

벡터자기회귀 모형 $$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{Z}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{5.3}$$

$CCC-GARCH$모형 $$\boldsymbol{\epsilon}_t = \boldsymbol{D}_t \boldsymbol{z}_t,\ \boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^{(2)} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{h}_{t-1} \tag{5.4}$$

벡터자기 회귀 모형의 모수 값은 $\boldsymbol{\mu} = (0,0)'$, $\boldsymbol{\Pi}_1 = \phi_1 \boldsymbol{I}_2$, $\phi_1 = 0.8$ 그리고 $\boldsymbol{I}_2$는 2차원 단

위 행렬으로 설정하였다. *CCC-GARCH*모형의 모수 값으로는 조건(1) $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_2 = 0$으로 가정하여 오차가 분산의 지속성이 존재 하지 않는 경우 이고 조건(2)는 $\boldsymbol{A}_1$과 $\boldsymbol{B}_2$의 대각 원소의 합이 0.98로 분산의 지속성이 강한 경우로 설정 하였고 T = 100, 200으로 정하였다.

[표5.1] *CCC-GARCH*(1,1) 모형의 모수 값

	모수
(1)	$a_0 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = 0, \boldsymbol{B}_1 = 0, \rho = (0, 0.3, 0.9)$
(2)	$a_0 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \rho = (0, 0.3, 0.9)$

일변량, 다변량 시계열 자료의 모형 적합성을 검정하기 위해 잔차의 자기상관성 유무를 확인하는 방법으로 점근적 카이제곱 분포를 이용하는 *LB* 검정통계량 (Q_{LB}), 제안한 알고리즘을 이용한 와일드 붓스트랩 *LB*검정통계량(Q_{LB}^{WB})의 검정통계량을 통하여 제 1종의 오류와 검정력을 확인하고 비교 분석한다. 제 1종의 오류를 확인하기 위해 *AR*(1)모형과 *AR*(1)-*GARCH*(1,1)모형에서 ϕ값을 0으로 주어 검정을 한다. [표 5.2]에서 제 1종의 오류는 분산의 이분산성이 없는 *AR*(1) 모형에서는 *p-valu*가 0.05 정도로 나와 두 검정방법 모두 충분히 신뢰할 수준이었다. 하지만 [표 5.3]에서 분산에 이분산성이 있는 *AR*(1)-*GARCH*(1,1)모형에서 Q_{LB}는 제 1종의 오류 값이 0.137, 0.219, 0.272가 나와 예상대로 신뢰 할 수는 검정방법이었지만 Q_{LB}^{WB}는 0.066, 0.059, 0.054로 0.05에 상당히 근접한 값이 나왔다. 검정력 또한 두 검정방법이 유사하게 나왔다. 벡터 자기회귀 모형에서도 마찬가지로 조건부 이분산성이 없는 [표 5.4]에서 제 1종의 오류가 0.05 근방으로 두 검정법 모두 신뢰 할 수 있는 방법이다. 하지만 조건부 이분산성이 있는 [표

5.5]에서는 Q_{LB}는 제 1종의 오류 값이 T=100 일 때 0.102, 0.100, 0.145이 나왔고 T=200에서는 0.120, 0.132, 0.157이 나와 신뢰 할 수는 검정 방법이었지만 Q_{LB}^{WB}는 T=100 일 때 0.068, 0.063, 0.0.059이 나왔고 T=200에서는 0.051, 0.058, 0.069로 0.05에 상당히 근접한 값이 나왔다. 검정력 또한 두 검정방법이 유사하게 나왔다.

[표 5.2] $AR(1)$모형의 제 1종의 오류와 검정력

$T=200$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.049*	0.895	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.054*	0.911	1	1	1
$T=500$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.060*	1	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.050*	0.999	1	1	1
$T=1000$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.043*	1	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.048*	1	1	1	1

(* 는 제 1종의 오류를 나타냄)

[표 5.3] $AR(1)-GARCH(1,1)$모형의 제 1종의 오류와 검정력

$T=200$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.137*	0.907	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.066*	0.818	0.998	1	1
$T=500$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.219*	0.997	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.059*	0.987	1	1	1
$T=1000$					
ϕ	0.0*	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.272*	1	1	1	1
Q_{LB}^{WB}	0.054*	1	1	1	1

(* 는 제 1종의 오류를 나타냄)

[표 5.4] [표 5.1](1)의 경우 벡터 자기회귀 모형에서 제 1종오류

$T=100$			
ρ	0.0	0.3	0.9
Q_{LB}	0.060	0.061	0.059
Q_{LB}^{WB}	0.056	0.067	0.065
$T=200$			
ρ	0.0	0.3	0.9
Q_{LB}	0.053	0.052	0.056
Q_{LB}^{WB}	0.049	0.062	0.065

[표 5.5] [표 5.1](2)의 경우 벡터 자기회귀 모형에서 제 1종오류

$T=100$			
ρ	0.0	0.3	0.9
Q_{LB}	0.102	0.100	0.145
Q_{LB}^{WB}	0.068	0.063	0.059
$T=200$			
ρ	0.0	0.3	0.9
Q_{LB}	0.120	0.132	0.157
Q_{LB}^{WB}	0.051	0.058	0.069

[표 5.6] [표 5.1](1)경우의 벡터 자기 회귀모형 검정력

$T=100,\ \rho=0$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.513	0.970	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.524	0.973	1.000	1.000
$T=100,\ \rho=0.3$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.514	0.975	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.533	0.962	1.000	1.000
$T=100,\ \rho=0.9$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.517	0.981	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.514	0.967	1.000	1.000
$T=200,\ \rho=0$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.861	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.852	1.000	1.000	1.000
$T=200,\ \rho=0.3$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.872	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.855	1.000	1.000	1.000
$T=200,\ \rho=0.9$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.891	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.861	1.000	1.000	1.000

[표 5.7] [표 5.1](2)경우의 벡터 자기 회귀모형 검정력

$T=100,\ \rho=0$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.578	0.973	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.481	0.939	0.999	1.000
$T=100,\ \rho=0.3$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.584	0.961	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.439	0.928	1.000	1.000
$T=100,\ \rho=0.9$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.612	0.974	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.441	0.905	0.997	1.000
$T=200,\ \rho=0$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.832	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.761	0.981	1.000	1.000
$T=200,\ \rho=0.3$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.863	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.712	0.997	1.000	1.000
$T=200,\ \rho=0.9$				
ψ_1	0.3	0.5	0.7	0.9
Q_{LB}	0.901	1.000	1.000	1.000
Q_{LB}^{WB}	0.689	0.987	1.000	1.000

6. 결론

본 논문에서는 조건부 이분산성이 있는 일변량 다변량 시계열 자료인 *AR* 모형 *AR-GARCH* 모형 벡터 자기회귀모형에 대하여 오차의 자기상관성 검정을 위해 와일드 붓스트랩을 이용한 검정법을 제안하였다. 일반적인 LB통계량과 와일드 붓스트랩 방법을 이용한 검정통계량의 제 1종의 오류와 검정력에 대해 살펴 보았다. 그 결과 조건부 이분산성이 존재하는 경우 기존의 *LB*검정법과 본 논문에서 제안한 와일드 붓스트랩 방법에서 기존의 *LB*법은 제 1종의 오류를 만족시키지 못하였지만 와일드 붓스트랩을 방법에서는 제 1종의 오류를 만족하였다. 검정력 부분에서는 기존의 *LB*검정력과 거의 차이가 없는 것을 확인 하였다. 와일드 붓스트랩을 이용한 여러 논문이 있지만 본 논문에서 제시한 잔차를 직접적으로 이용한 와일드 붓스트랩은 원 시계열 자료를 복구시키는 다른 방법보다 시간적 효율이 더 좋다는 결론을 얻을 수 있었다.

참고문헌

[1] Ahlgren, N. and Catani, P. (2012). Wild bootstrap tests for autocorrelation in vector autoregressive models. Working Papers 562, Hanken Schoolof Economics. Helsinki.

[2] Bollerslev T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics, 31:307-.327.

[3] Brüuggemann, R., Lüutkepohl, H. & Saikkonen, P. (2006) Residual Autocorrelation Testing for Vector Error Correction Models, Journal of Econometrics, 134 (2), pp. 579-604.

[4] Efron, B., and Tibshirani, R. (1994). An Introduction to the Bootstrap. Chapman & Hall, New York.

[5] Goncalves, S. and Kilian, L. (2004). Bootstrap autoregressions with conditional heteroskedasticity of unknown form. Journal of Econometrics, 123:89-120.

[6] Liu, R. (1988). Bootstrap procedures under some non-i.i.d. models. Annals of Statistics, 16:1696-1708.

[7] Mammen, E. (1993). Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models. Annals of Statistics, 21:255-285.

[8] RS, Tsay. (2005) Analysis of Financial Time Series, 2nd ed. A John Wiley & Sons, Inc., Publication, pp. 122-404.