Función característica: propiedades y una de sus aplicaciones en Estadística

Madeline Cecere - Gustavo Muinelo

Probabilidad I (2025) - Docente Leonardo Moreno

Introducción

La **función característica (FC)** es una herramienta fundamental en Estadística, ya que permite caracterizar completamente la distribución de una variable aleatoria (VA). En este trabajo se estudian algunas de sus propiedades más relevantes y se explora su aplicación en la construcción de una prueba de simetría, basada en la función característica empírica (FCE).

Número Complejo

La FC es una función de **recorrido en el campo de los complejos**, resultando indispensable para su análisis una comprensión básica de los números complejos.

Un número complejo es una expresión de la forma $\mathbf{z = a + bi}$ (forma binómica) donde: **a** es la parte real, **b** es la parte imaginaria, e **i** es la unidad imaginaria, definida como $i^2 = -1$.

Forma polar de un número complejo:

- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo
- $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}(b/a)$ es el argumento

Propiedades de los números complejos

- **Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Producto:** $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- **Conjugado:** $\bar{z} = a - bi$
- **Módulo:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Inverso:** Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

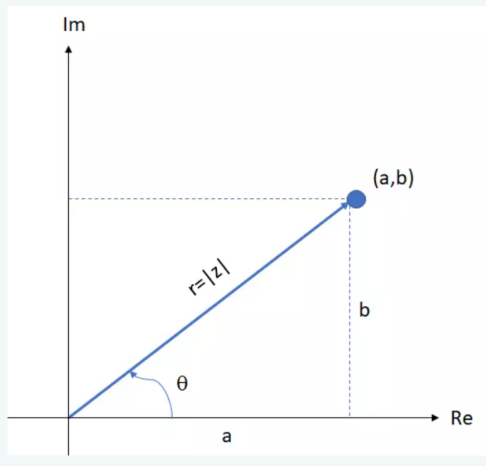


Figura 1: Representación gráfica

Fórmula de Euler para la función exponencial compleja:

$$e^{ix} = cos(x) + i * sen(x),\ x \in \mathbb{R},\ \text{que implica } |e^{ix}| = \sqrt{cos^2 x + sen^2 x} = 1$$

Función Característica: definición

Sea X una VA, su FC es una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \quad t \in \mathbb{R}$$

Usando la fórmula de Euler, se tiene que: $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[cos(tX) + i * sen(tX)\right], \quad t \in \mathbb{R}$

Si X es discreta con función de probabilidad P: $\varphi(t) = \sum_x e^{itx} P(X = x)$

Si X es continua con función de densidad $f(x)$: $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$

Unicidad y existencia

La utilidad de la FC para describir la distribución de VAs está justificada por su unicidad, es decir, que la determina de forma única: X e Y VAs tienen la misma FC si, y sólo si, tienen la misma distribución (Grimmett & Stirzaker, 2001).

- **Fórmula de Inversión:** Sea φ una FC de una VA X con función de distribución F.

  Sean a y $a + h$ (con $h > 0$) puntos de continuidad de F, es decir, $P\{X = a\} = P\{X = a + h\} = 0$. Entonces

  $$F(a + h) - F(a) = P\{a < X < a + h\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{it} e^{-ita} \varphi(t)\, dt$$

- **Teorema de Unicidad:** Sean F_1 y F_2 funciones de distribución con las FC correspondientes φ_1 y φ_2. Entonces,

  $$F_1 \equiv F_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \text{para todo } t \text{ de algún conjunto denso en } (0, \infty).$$

La función generatriz de momentos (FGM) comparte algunas de las propiedades con la FC, no obstante, la relevancia fundamental de la FC reside en que está definida y existe para cualquier VA.

- **Existencia:** Se infiere del la fórmula de Euler que

  $$|\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]| \leq \mathbb{E}|e^{itX}| = 1,$$

Teorema de Momentos

Sea X una VA tal que para algún valor $n \geq 1$, se cumple que $\mathbb{E}[X^n] < \infty$, entonces, existe la derivada k-ésima de la función característica $\varphi(t)$ para todo $k \leq n$, y además:

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

En consecuencia

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$$

VA	$\varphi_X(t)$	$\varphi'_X(t)$	$\frac{\varphi'_X(0)}{i} = \mathbb{E}[X]$
Bernoulli(p)	$1 - p + pe^{it}$	pie^{it}	p
Poisson(λ)	$\exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right)$	$\lambda i e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$	λ
Exponencial(λ)	$\frac{\lambda}{\lambda - iu}$	$\frac{\lambda i}{(\lambda - iu)^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normal(μ, σ^2)	$\exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$	$(i\mu - \sigma^2 t)e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$	μ

Cuadro 1: Uso de la FC para calcular la Esperanza

Aplicaciones a la Estadística

En Estadística la FC cuenta con diversas aplicaciones, entre las que se destacan:

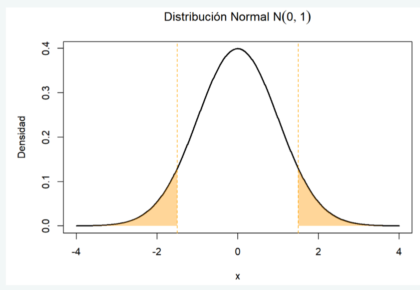
- la estimación de parámetros,
- pruebas de bondad de ajuste, y
- test de simetría para la distribución

En este trabajo se implementa un test de simetría para una mezcla de normales, fundamentado en los resultados teóricos detallados a continuación.

Test de Simetría: fundamentación teórica

- X es **simétrica** respecto de 0 si, y sólo si, X y $-X$ tienen la misma distribución. Es decir, $F(-x) = 1 - F(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- **Teorema de Simetría:** Sea X una VA con FC φ. La distribución de X es simétrica si, y sólo si, φ es real, es decir:

  $$Im\{\varphi(t)\} = \mathbb{E}[\sin(tX)] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



- **Función característica para mezcla de distribuciones:** Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funciones características de variables aleatorias, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números no negativos que satisfacen $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Entonces,

  $$\alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(t)$$

  es una FC de una VA con función de distribución $\alpha_1 F_1(t) + \cdots + \alpha_n F_n(t)$
- **Función característica empírica:** $\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itX_j}$.

  Cuando $n \to \infty$, se cumple que $\mathbb{P}\left(\varphi_n(t) \to \varphi(t)\right) = 1, \forall t$

Test de Simetría a través de la Función Característica Empírica

Por el Teorema de Simetría, se puede afirmar que una VA es simétrica respecto a cero si la parte imaginaria de su FC es igual a cero. Se plantea el siguiente **contraste de hipótesis**

- H_0) X es simétrica respecto de 0. $Im\{\varphi(t)\} = 0$
- H_1) X no es simétrica respecto de 0. $Im\{\varphi(t)\} \neq 0$

Dada una muestra $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d., el **estadístico** propuesto, del tipo Kolmogorov-Smirnov, es:

$$D_n = \sup_t \left|\mathbf{Im}\left(\varphi_n(t)\right)\right| = \sup_t \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sen(tX_i)\right|$$

La **región crítica** (RC) será de la forma $D_n > K$. Con **función de potencia**, probabilidad de rechazar H_0 bajo H_1 cierta:

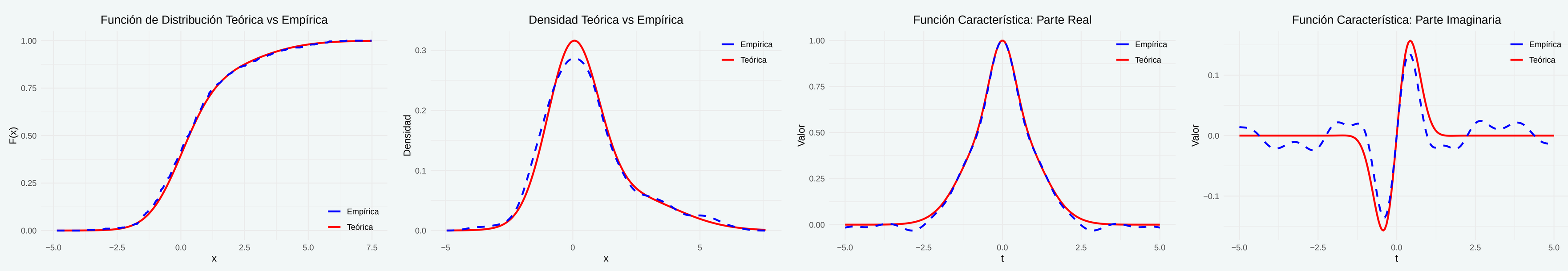
$$\text{Pot} = \mathbb{P}(\text{RC} \mid H_1 \text{ cierta})$$

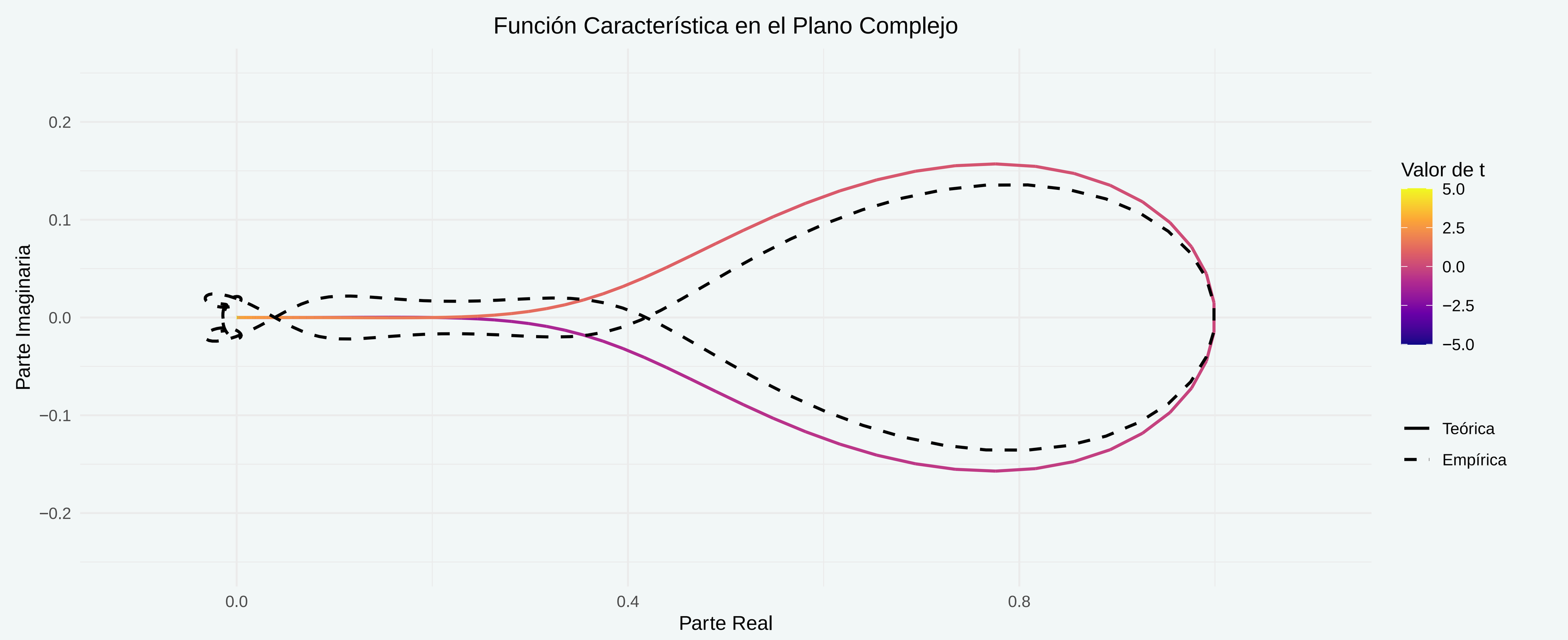
Mezcla de variables aleatorias Normales

Para la realización del test, se considera una mezcla de variables aleatorias normales dada por:

$$X = (1 - B) \cdot \mathcal{N}(0, 1) + B \cdot \mathcal{N}(2, 4), \text{ con } B \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Por ejemplo, para una muestra de tamaño de $n = 500$ y $p = 0{,}3$ se muestra la distribución empírica vs teórica.



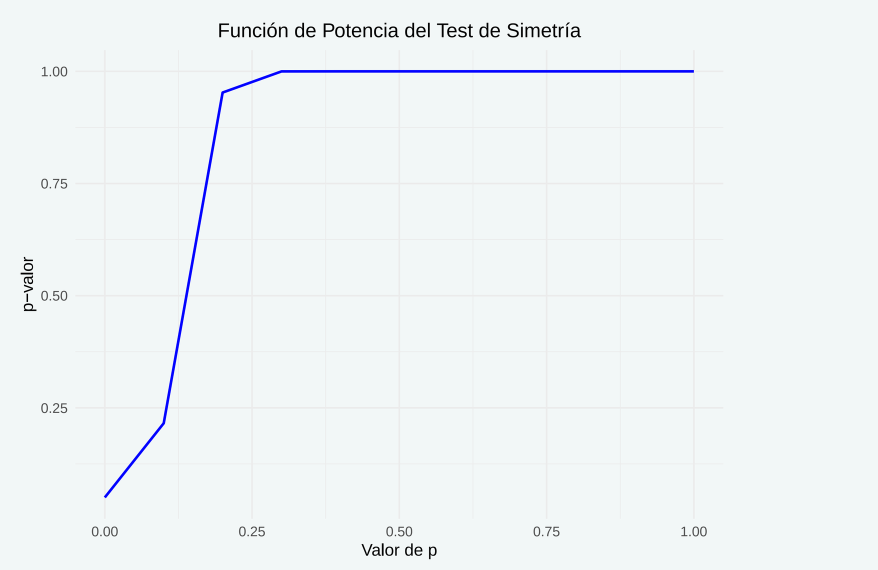


Función de Potencia

Para un **nivel de significación del 5 %** se calcula la potencia del test con datos simulados provenientes de la mezcla antes mencionada, con H_0 si $p = 0$ y H_1 si $p > 0$.

Entonces:

$$\text{Pot}(p) = \mathbb{P}(D_n > K \mid p > 0)$$



Comentarios Finales

- El test propuesto tiene un fundamento teórico sólido y una implementación computacional sencilla, lo que lo hace especialmente valioso para aplicaciones prácticas.
- A pesar de la abstracción de la función característica, su estimación empírica es simple (un promedio de exponenciales complejas) y fácilmente implementable con software estadístico.
- El enfoque puede generalizarse a contextos más complejos, como test de simetría multivariada o de otras propiedades, mediante el uso de funciones características multivariadas o conjuntas.

Referencias

Figura 2: Repositorio GitHub

[1] Alexander Iksanov. Characteristic functions and their relatives in probability theory. Department of Probability and Statistics, School of Mathematics and Statistics, Xidian University, 2019

[2] Estadística y Procesos Estocásticos Tema 2: Variables Aleatorias. Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

[3] Grimmett, G. R., & Stirzaker, D. R. (2001). Probability and random processes (3rd ed.). Oxford University Press

[4] Feuerverger A. & Mureika R. A (1977). The empirical characteristic function and its applications. The annals of Statistics, Vol. 5.