TEORIA DE CONJUNTOS

Introducción

Un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos son los elementos del conjunto.

La teoría de conjuntos define que **cualquier cosa** puede formar parte de un grupo cuyos elementos **tengan las mismas características**.

Por ejemplo, podemos agrupar un bolígrafo azul en un conjunto de bolígrafos azules. En este caso, que los elementos sean bolígrafos y además azules es la condición para formar parte del conjunto. **Las condiciones de pertenencia deben ser precisas**.

Ej. Un conjunto de personas altas no es preciso, ya que no definimos la altura exacta necesaria para entrar.

Los conjuntos, por convención, se suelen representan con letras en mayúscula (A, B, K...) y los elementos en minúscula (a, b, k...).

Ej.1 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ ('b' pertenece al conjunto 'A')

Ej.2 **Pedro Sánchez** ∈ **Políticos corruptos** (Pedro Sánchez pertenece al conjunto de políticos corruptos).

Representación escrita de conjuntos

Por extensión

A = {a, b, c, d, e...}

Políticos corruptos = {Perro Sánchez, Perro Iglesias, Pablo Escobar...}

Por compresión

1. ***El símbolo ':' o '/' se usa para indicar más de una condición.***
2. ***La letra R representa los números reales.***

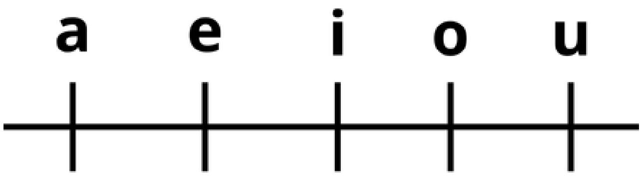
Usamos una propiedad característica. Ej. Todos los números del 0 al 1:

$I = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$ o $[0, 1]$

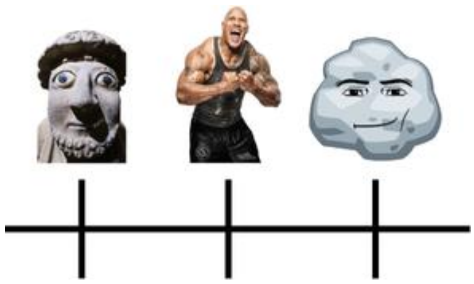
"Conjunto de todos los números reales que sean mayores o igual que 0 y que sean menores o igual a 1"

Representación gráfica de conjuntos

Diagrama lineal

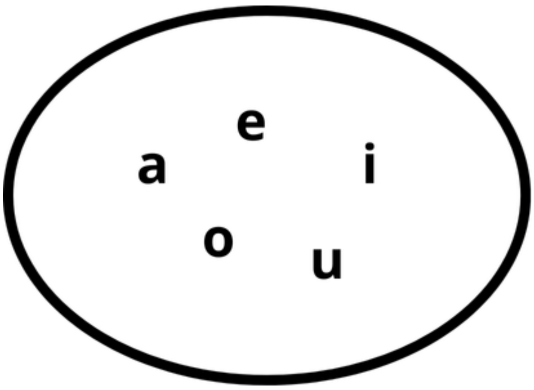


Conjunto de vocales

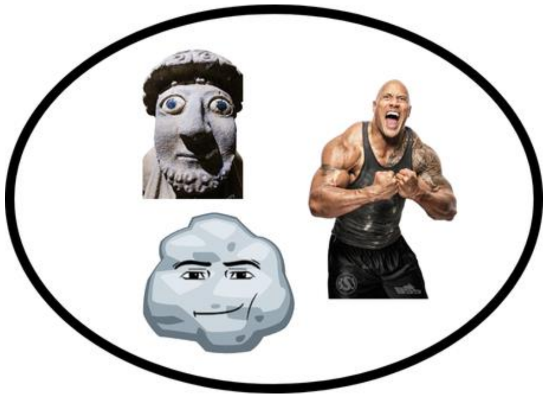


Conjunto de rocas

Diagrama Venn



Conjunto de vocales



Conjunto de rocas

Terminología y tipos de conjuntos

1. **CARDINAL**: cantidad de elementos de un conjunto.
    a. Ej. A = {a, b} tiene cardinal 2 o **Car(A) = 2**

    b. Ej. B = [0, 1] tiene cardinal infinito (todos los decimales entre ambos) o **Car(B) = ∞**

2. **CONJUNTO UNIVERSAL (U)**: se suele representar con la letra ***U***. Es el conjunto más genérico posible, ya que agrupa todos los elementos que cumplan la característica más mínima.
    a. Ej. En un estudio sobre mamíferos, agruparíamos a todos los mamíferos en ***U***, ya que este conjunto incluye a todos los mamíferos, sin importar otras características.

    b. Ej. En un estudio sobre ciudades, el grupo ***U*** serían todas las ciudades.

   Debido a lo genérico que es, a veces ni lo expresamos cuando hablamos de conjuntos, ya que suele ser bastante obvio.

3. **CONJUNTOS IGUALES**: dos o más conjuntos que tengan los mismos elementos. Sin importar el nombre.
    a. **Ej.** Un conjunto ***A*** = **B** (A es igual que B):

       A = {a, e, i, o, u} = {o, i, u, a, e,} = B

4. **SUBCONJUNTOS**: conjuntos dentro de conjuntos. Los subconjuntos deben cumplir los requisitos del conjunto al que pertenecen. Se define:

$$A \subset B \leftrightarrow [\forall a \in A \longrightarrow a \in B]$$

   "**'A'** está incluido ($\subset$) en **'B'** y cualquier elemento ($\forall a$) que pertenezca ($\in$) al subconjunto **'A'** también ($\longrightarrow$) pertenece ($\in$) al **'B'** "

   Ej. Felinos $\subset$ Mamíferos (Todos los felinos pertenecen a un grupo más grande, los mamíferos).

   Ej.2 Ejemplo usando un diagrama Venn:

Dentro de todo lo que conforma League of Legends existe un grupo de personajes que son los Campeones.

5. **CONJUNTO COMPLEMENTARIO**: Es un conjunto que excluye a todos los elementos del conjunto del que proviene sobre su conjunto universal.

   Ej. Dados los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} y su subconjunto B = {2, 4, 6, 8, 10} el conjunto complementario de **'A'** sería:

   $$A^c = \{1,3,5,7,9\}$$

   Ya que hemos excluido a todos los elementos del conjunto **'A'**, pero no el resto que estuvieran en el conjunto al que perteneciese. En otras palabras, su conjunto universal.

6. **CONJUNTO VACÍO**: es un conjunto que no tiene nada dentro. Se suele escribir como:

   $$\emptyset = \{\}$$

   Cualquier conjunto tiene el conjunto vacío como subconjunto. Ya que cumple los requisitos de ser el subconjunto de cualquier conjunto, porque no tiene nada dentro que lo distinga de cualquier otro elemento.

Operaciones con conjuntos

Unión

Es la suma de todos sus elementos individuales, pero que no repetidos. Se expresa como:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

"La unión de A y B es un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de A o de B, pero nunca repetidos" (me gusta llamarlo la "norma de no repetición")

El símbolo 'v' es 'or' en inglés. En otras palabras, se debe cumplir o la primera, la segunda condición o ambas para que el elemento pueda formar parte del conjunto nuevo. "O una o la otra o las dos"

Ej. Dados A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {6, 7, 8}:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

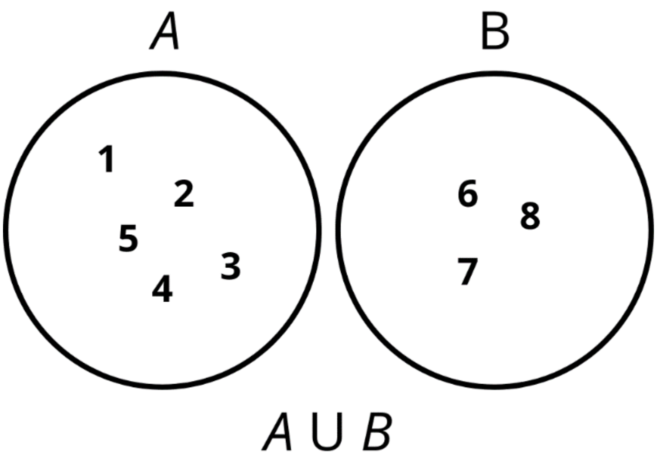
Ej.2 Dados C = {1, 2, 3} y D = {2, 3, 4}:

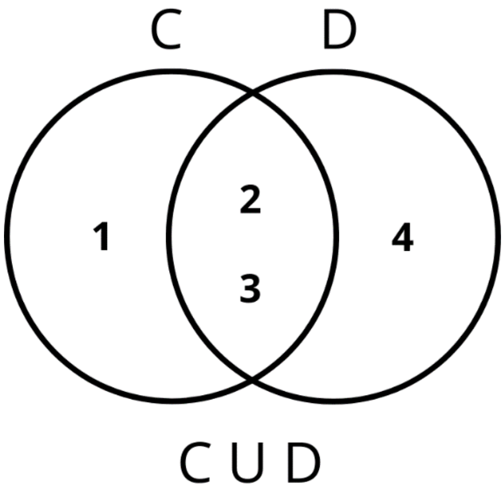
$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4\}$$

Fijaos que los elementos 2 y 3 eran comunes en ambos conjuntos, pero solo aparecen una vez en el conjunto resultante para cumplir la norma de no repetición.

Si no hay ningún elemento en común en ambos conjuntos, simplemente se agrupan todos los elementos los 2. Que es el caso del primer ejemplo que he dado.

Una representación visual:





Intersección

Es la suma de todos los elementos que son comunes en ambos conjuntos.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

"La intersección de A y B es un nuevo conjunto que solamente tiene los elementos comunes en ambos conjuntos. El símbolo '^' es 'and' en inglés. Por lo que, si 'x' pertenece a 'A' y también pertenece a 'B', se añade al nuevo conjunto"

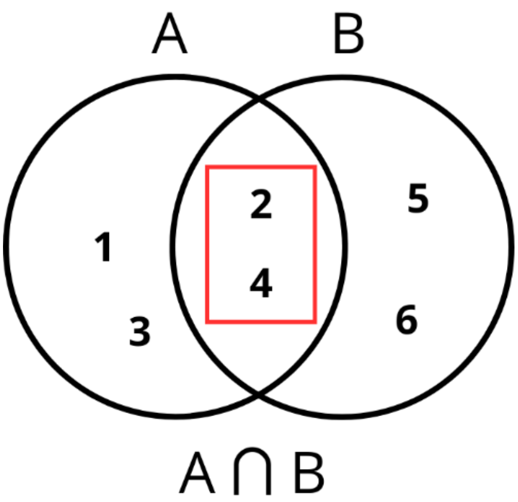
El resultado de la intersección de conjuntos que no tengan ningún elemento en común es un **conjunto vacío** (el que no tiene nada dentro) o Ø.

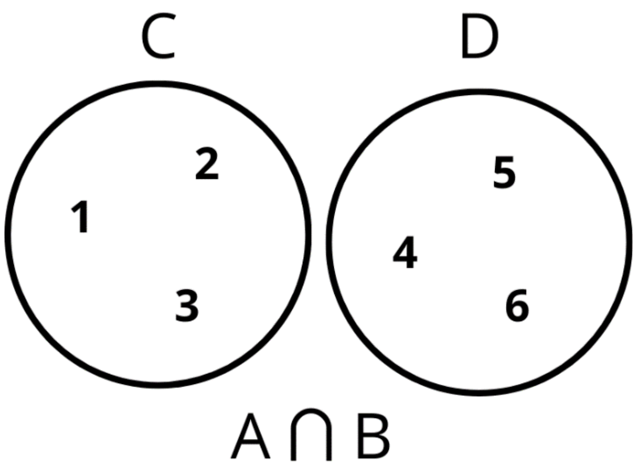
Ej. Dados A = {1, 2, 3, 4} y B = {2, 4, 5, 6}

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

Ej. Dados C = {1, 2, 3} y D = {4, 5, 6}

$$C \cap D = \emptyset$$





Propiedades de la unión y la intersección

1. **CONMUTATIVA**: el orden de los conjuntos no altera el producto.

$$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A \text{ y } A \cap B = B \cap A}$$

2. **ASOCIATIVA**: puedes reorganizar 3 conjuntos como quieras.

$$\boldsymbol{A \cup (B \cup C) = C \cup (A \cup B) \text{ y } A \cap (B \cap C) = C \cap (A \cap B)}$$

3. **DISTRIBUTIVA**: la operación del conjunto puede ser distribuida por todos los conjuntos de su paréntesis.

$$\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$
$$\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

Otras propiedades son:

$$A \cup A_c = U \text{ y } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap A^c = \emptyset \text{ y } A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$Car(A \cup B) = Car(A) + Car(B) - Car(A \cap B)$$

Conjuntos numéricos