

# **Une approche formelle de comparaison de modèles de volatilité en utilisant des critères statistiques et économique**

**Youssef Amadou**

Département de sciences économiques  
Université de Montréal

**Rapport de recherche rédigé en vue de l'obtention  
du grade de Maîtrise (M.Sc.) en Sciences économiques**

© Août 2014

## Résumé

Cette étude s'intéresse à évaluer les récents efforts de [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#) et [Patton and Sheppard \(2013\)](#) pour capter la composante journalière de la volatilité réalisée, consistant respectivement à décomposer l'estimateur *Realized variance* selon le signe des rendements, et décomposer l'estimateur de variance des sauts selon le signe du saut. Le grand attrait de notre évaluation n'est pas le fait qu'elle porte doublement sur des mesures statistiques et économique (le profit engendré sur des transactions d'options expirant le lendemain), mais plutôt le fait qu'elle exploite la puissance statistique du test basé sur le Model Confidence Set introduit par [Hansen et al. \(2011\)](#). Nos résultats confirment que la décomposition de l'estimateur *Realized variance* selon le signe des rendements intra-journaliers suscite une amélioration significative, laquelle est essentiellement due à l'information sur les rendements négatifs. De même, la composante négative de l'estimateur de variation des sauts suffit à produire un modèle de prévision de qualité supérieure. Par ailleurs, nous avons montré que les performances en termes économiques, sont en contradiction avec les performances statistiques pour la plupart des modèles. Ainsi par exemple, le modèle HAR-RV de [Corsi \(2009\)](#), estimé successivement avec et sans l'effet de levier, est supérieur en termes de profit sur des options, alors qu'il est inférieur sur la base des critères statistiques. Enfin, le test basé sur le Model Confidence Set nous a permis d'identifier plusieurs modèles de pouvoir prédictif supérieur, présentant très peu de différences significatives en termes de profit.

**Mots-clés :** Realized variance, realized semivariance, effet de levier, variation des sauts, model confidence set, prix des options.

## Abstract

This study is about comparing recent efforts of [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#) and [Sheppard and Patton \(2013\)](#) to better assess the daily component of realized volatility, consisting respectively in decomposing estimator *Realized variance* according to the sign of returns, and decomposing estimator for jumps variation according to the sign of jumps. The great appeal of our study is not the fact that it is based on both statistical and economic measurements (profit generated on transactions of option expiring the next day), but rather the fact that it takes advantage of the statistical power of the test based on the Model Confidence Set theory, introduced by [Hansen et al. \(2011\)](#). Our results confirm that decomposition of *Realized variance* according to the sign of intra-daily returns yields a significant improvement, mainly due to information on negative returns. Similarly, the negative component of jumps variation is sufficient to produce a superior model for prediction. Moreover, we found that profit-based performance contradict statistical performance for most of models we compared. For example, the HAR-RV model of [Corsi \(2009\)](#), estimated successively with and without leverage effect, is superior in terms of profit, but inferior based on statistical criteria. Finally, the Model Confidence Set theory allowed us to identify several models showing superior predictive capacity, and very few significant differences according in terms of profit.

**Keywords:** Realized variance, realized semivariance, leverage effect, jumps variation, model confidence set, option pricing.

# Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
1. La volatilité et ses composantes.....	3
2. Les données.....	4
3. Modèles et méthode d'évaluation des prévisions.....	5
3.1. Modèles.....	5
3.2. Évaluation des prévisions : le Model Confidence Set.....	6
a. Fonctions de perte de type statistique.....	6
b. Fonction de perte économique.....	7
4. Résultats d'estimation et de comparaison des prévisions.....	10
4.1. Résultats d'estimation .....	10
4.2. Résultats de comparaison .....	10
a. Comparaison à partir des fonctions de perte statistiques .....	10
b. Comparaison à partir du profit engendré par la transaction d'options.....	11
<b>Conclusion</b> .....	12
<b>Bibliographie</b> .....	18
<b>Annexe : Le test basé sur le Model Confidence Set</b> .....	22

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Tableau des corrélations .....	9
Tableau 2 : Tableau de statistiques .....	9
Tableau 3 : Résultats d'estimation avec le programme STATA.....	14
Tableau 4 : Résultats de la procédure MCS basée sur MAE .....	15
Tableau 5 : Résultats de la procédure MCS basée sur QLIKE .....	16
Tableau 6 : Résultats de la procédure MCS basée sur le profit engendré par la transaction d'options.....	17

## Liste des figures

Figure 1 : Prévisions de la variance réalisée.....	20
Figure 2 : Plot de ....	21
Figure 4 : Plot de $RVtm$ .....	21
Figure 5 : Plot de $RVtw$ .....	21
Figure 3 : Corrélogramme de $RVtd$ .....	21
Figure 6 : Plot de $\Delta Jtd +$ (bleu) et $\Delta Jtd -$ (rouge) .....	21
Figure 7 : Plot de $MedRVtd$ .....	21

## Introduction

La mesure de la volatilité à partir des rendements de hautes fréquences a introduit une véritable révolution par rapport aux précédentes approches basées sur le rendement journalier. [Andersen et Bollerslev \(1998\)](#) a montré que lorsque l'intervalle de temps pour le calcul du rendement décroît vers une taille infinitésimale, la somme cumulée des carrés des rendements intra-journaliers converge asymptotiquement vers la variation quadratique, laquelle représente un proxy naturel pour la volatilité en l'absence des bruits de microstructure.

Bien que les bruits de microstructure soient inhérents aux données, en choisissant une fréquence de découpage régulière du temps ou des transactions, il est possible d'en réduire l'effet de biais ([Oomen, 2006](#)). De plus, des mesures alternatives voulues robustes aux biais furent proposées, parmi lesquels l'estimateur *Realized kernel* de [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#), l'estimateur *Two-scale* de [Aït-Sahalia et al. \(2005\)](#).

Toujours afin d'améliorer la précision des prévisions, l'intérêt s'est porté sur les discontinuités courantes dans le mouvement des prix. [Barndorff-Nielsen et al. \(2004\)](#) a tenté d'isoler l'effet de ces sauts dans l'estimateur *Realized bipower variation*. Mais cette mesure n'est pas suffisamment insensible à l'occurrence d'un saut pour le calcul d'1 rendement sur 2. [Barndorff-Nielsen et Shephard, 2006](#)) proposa donc d'augmenter le nombre de rendements adjacents considérés avec des estimateurs *Realized tripower* et *Realized multipower*. Une proposition plus convaincante viendra de [Andersen et al. \(2009\)](#), qui introduisit l'estimateur *Median Realized Variance*, calculé à partir de la médiane de trois rendements adjacents. Outre sa meilleure robustesse aux sauts par rapport aux précédentes propositions, cet estimateur possède également de meilleures propriétés asymptotiques.

D'un autre côté, très peu d'études avant [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#), avaient considérées l'importance du signe des rendements intra-journaliers et à l'effet de cette distinction sur la prévision. Ces auteurs proposèrent l'estimateur *Realized semivariance*, une décomposition de *Realized variance* en deux sous-composantes : *Positive Realized semivariance* obtenue avec les rendements intra-journaliers positifs, et *Negative Realized semivariance*, obtenue avec les

rendements négatifs. L'étude a notamment mis en évidence que les rendements intra-journaliers négatifs contiennent plus d'information sur la volatilité future que les rendements positifs.

De même, l'effet des sauts selon le signe n'avait pratiquement reçu aucune attention, notamment en raison du fait que seule la composante continue de *Realized variance* est apparue pertinente pour la prévision de la volatilité. Partant des estimateurs *Realized semivariance*, [Patton et Sheppard \(2013\)](#) est parvenu à isoler l'effet des sauts positifs et de l'effet des sauts négatifs sur la volatilité future. Il est apparu ainsi qu'un effet concret des sauts n'est observable qu'en tenant compte du signe, et que les sauts négatifs contiennent plus d'information pertinente que les sauts positifs. En plus, les auteurs ont considérés l'effet de levier, justification classique de l'effet des rendements journaliers négatifs sur la volatilité future, et n'ont noté qu'une manifestation à court-terme de cet effet.

Dans cette étude, nous revenons sur les propositions de [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#) et [Patton et Sheppard \(2013\)](#). Notre objectif est d'évaluer l'intérêt pour la prévision de décomposer la volatilité selon le signe des rendements et le signe des sauts. L'intérêt réside dans l'approche que nous proposons : un test basé sur le Model Confidence Set (MCS) introduit par [Hansen et al. \(2011\)](#). Cette approche est plus formelle et puissante pour comparer les capacités de prévision de différents estimateurs, dans le sens où elle se base sur un test statistique afin d'identifier le ou les estimateurs qui sont statistiquement significativement supérieurs.

La faiblesse majeure de l'approche élémentaire du classement d'après une fonction de perte statistique (*R2 de Mincer-Zarnowitz*, *Mean Absolute Error*, *Root Mean Square Error*), c'est que les modèles sont souvent difficiles à démarquer et le choix d'un modèle meilleur se fait souvent aux dépens d'autres modèles relativement aussi bons. En évaluant systématiquement les performances de chaque modèle de prévision par rapport à l'ensemble, le test basé sur le Model Confidence Set (MCS) permet que plus d'un seul modèle soit identifié comme le meilleur. Ainsi, l'utilisation de ce test basé sur deux fonctions de perte statistiques de notre choix, nous permettra de proposer une comparaison plus riche des estimateurs récemment développés dans le cadre d'une spécification de type HAR-RV de [Corsi \(2009\)](#). Cela nous permettra également d'offrir une critique sur les conclusions de [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#) et [Patton et Sheppard \(2013\)](#)



notamment en ce qui concerne la pertinence de l'effet de levier classique pour la prévision de la volatilité future.

Ensuite, nous étendrons le test basé sur le MCS à une fonction de perte de nature économique : l'opposé du profit total réalisé sur des transactions d'options expirant le jour suivant. Inspirée de [Bandi, Russell et Yang \(2008a\)](#), une telle comparaison des modèles de volatilité est de plus en plus considérée dans la littérature, notamment en raison de l'intérêt pour les praticiens du risque (voir par exemple [Bandi, Russell et Zhu \(2008b\)](#) pour une comparaison basée sur le choix de portefeuille).

Nous utiliserons à ces fins des données de hautes fréquences portant sur le niveau de l'indice S&P500, couvrant la période du 04 Janvier 1993 au 26 Octobre 2012. Nos données journalières sont observées entre 9h30 et 16h00 inclusivement, et ont été découpées régulièrement par intervalle de 5 minutes.

Sur ces données, nous avons mis en évidence que la prise en compte de l'effet de levier classique n'est pas intéressante, sauf pour tirer profit de transactions sur des options expirant le lendemain. De plus, nous confirmons que la décomposition de *Realized variance* selon le signe des rendements intra-journaliers suscite une significative amélioration essentiellement due à l'information sur les rendements négatifs. Ensuite, nous avons montré que les performances en termes de profit sur des options expirant le lendemain, sont en contradiction avec les performances statistiques pour la plupart des modèles.

Dans la première partie cette étude, nous présentons les différents estimateurs en compétition, tous issus des décompositions de *Realized variance*. Dans la deuxième nous décrivons plus en détails les données utilisées ainsi que la méthode de comparaison annoncée. Enfin, dans la dernière partie nous présentons les résultats.

## 1. La volatilité et ses composantes

Soit  $p$  un processus de prix continu et stochastique, les rendements intra-journaliers sont donnés par :

$$r_t(s) = \log\left(\frac{p(t+s)}{p(t+s-1)}\right), s = \{1, 2, \dots, 78\}$$

### *Realized variance*

Composante journalière :  $RV_t^d = \sum_{s=1}^{78} r_t(s)^2$

Composante hebdomadaire :  $RV_t^w = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i}^d$

Composante mensuelle :  $RV_t^m = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} RV_{t-i}^d$

### *Median Realized variance*

L'estimateur *MedRV* de [Andersen et al. \(2009\)](#) est calculé à partir de la médiane des valeurs absolues de trois rendements adjacents.

$$MedRV_t^d = \frac{\pi}{6 \sqrt{3} + \pi} \left( \frac{78}{78-2} \right) \sum_{s=2}^{77} median[|r_t(s-1)|, |r_t(s)|, |r_t(s+1)|]^2$$

### *Realized semivariances*

La décomposition complète de *Realized variance* par [Barndorff-Nielsen et al. \(2008\)](#) permet de distinguer la volatilité due aux mouvements ascendants des prix de la volatilité due aux mouvements descendants.

$$RS_t^{d+} = \sum_{s=1}^{78} r_t(s)^2 I_{r_t(s) > 0}$$

$$RS_t^{d-} = \sum_{s=1}^{78} r_t(s)^2 I_{r_t(s) < 0}$$

$$RS_t^d = RS_t^{d+} + RS_t^{d-}$$

### *Jumps variation*

[Patton et Sheppard \(2013\)](#) décompose la *Jump variation* selon le signe des sauts :

$$\Delta_t^2 = RS_t^{d+} - RS_t^{d-}$$

$$\Delta_t^{2+} = J_t^2 I_{RS_t^{d+} - RS_t^{d-} > 0}$$

$$\Delta_t^{2-} = J_t^2 I_{RS_t^{d+} - RS_t^{d-} < 0}$$

## **2. Les données**

Nous avons appliqué deux filtres aux données. Premièrement, nous avons supprimé les jours avec plus de 30 rendements 5 min nuls, engendrés par le processus d'interpolation sur les données

manquantes. Deuxièmement, nous avons retiré 61 jours pour lesquels l'autocorrélation d'ordre 1 de la série de rendements intra était négative, signal fort de la présence de bruits de microstructure. Au total, nous avons retiré 2,08% des données, pour finir avec 388518 observations couvrant 4891 jours.

Le processus de la volatilité réalisée est caractérisée ici, par une distribution leptokurtique à la queue très étalée sur la droite (d'où les pics importants observés sur la figure 2), et par la présence d'une composante longue mémoire d'après la lente décroissance exponentielle observée sur le corrélogramme (voir figure 1). De plus, pour les différents estimateurs calculés, le test d'autocorrélation de Ljung-Box rejette l'hypothèse d'absence d'autocorrélation multiple jusqu'à l'ordre 20 (voir tableau 2). Enfin, nous nous sommes assuré que tous les processus considérés sont stationnaires, sur la base d'un test augmenté de Dickey-Fuller (voir tableau 2).

### 3. Modèles et méthode d'évaluation des prévisions

#### 3.1. Modèles

Les modèles de type GARCH ne pouvant pas reproduire les caractéristiques de nos processus, nous baserons la comparaison sur une spécification de type HAR-RV. Afin de comparer les différentes mesures de la volatilité journalière, nous construisons des variantes du modèle de [Corsi \(2009\)](#), lesquelles diffèrent seulement d'après l'information utilisée pour capter la composante journalière de la variance réalisée.

La première classe de modèles teste la pertinence des composantes positives et négatives de l'estimateur RV, et l'effet de levier des rendements journaliers négatifs.

$$M_1 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_2 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 lev_t + \beta_3 RV_t^w + \beta_4 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_3 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 RS_t^{d+} + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_4 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 RS_t^{d-} + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_5 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 RS_t^{d+} + \beta_2 RS_t^{d-} + \beta_3 RV_t^w + \beta_4 RV_t^m + \epsilon_t$$

La seconde classe de modèles évalue l'estimateur *MedRV*, et teste la pertinence des composantes positive et négative de *Jump variation*.

$$M_6 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 MedRV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_7 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 MedRV_t^d + \beta_2 \Delta_t^2 + \beta_3 RV_t^w + \beta_4 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_8 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 MedRV_t^d + \beta_2 \Delta_t^{2-} + \beta_3 RV_t^w + \beta_4 RV_t^m + \epsilon_t$$

$$M_9 : RV_{t+1}^d = \alpha + \beta_1 MedRV_t^d + \beta_2 \Delta_t^{2+} + \beta_3 \Delta_t^{2-} + \beta_4 RV_t^w + \beta_5 RV_t^m + \epsilon_t$$

Ces modèles sont tous estimés à partir d'un échantillon de  $n_1 = 3000$  observations, par les Moindres Carrés Ordinaires avec des écarts-type de [White \(1980\)](#).

### 3.2. Évaluation des prévisions : le Model Confidence Set

#### a. Fonctions de perte de type statistique

Nous calculons  $n_2 = 500$  prévisions *one-step-ahead* en utilisant le procédé du *Rolling Windows Regression* ; chaque observation prédite exploite les 3000 réalisations antérieures. La procédure du test basé sur le MCS consiste essentiellement à éliminer progressivement les modèles significativement inférieurs (en termes d'une fonction de perte calculée avec les prévisions *one-step-ahead*) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de différence significative entre les modèles survivants. Nous avons choisis deux fonctions de perte de nature statistique : *Mean Absolute Error* (MAE) et *Negative of Gaussian Quasi Likelihood* (QLIKE).

$$MAE_i(t) \equiv |RV_i(t) - E_{t-1}(RV_i(t))|$$

$$QLIKE_i(t) \equiv \ln \left( E_{t-1}(RV_i(t)) \right) + \frac{RV_i(t)}{E_{t-1}(RV_i(t))}$$

Où l'indice  $i \in M$  ;  $t \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$

$E_{t-1}(RV_i(t)) \equiv \hat{\beta}_i \times X_i(t-1)$  ; Où  $\hat{\beta}_i$  est issu d'une régression sur les 3000 observations antérieures à la période de prévision.

Pour  $M \equiv \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9\}$  notre collection originelle de modèles, [Hansen, Lunde, and Nason \(2011\)](#) définit le Model Confidence Set théorique comme un ensemble  $M^*$  des modèles de capacité prédictive supérieure :

$$M^* \equiv \{i \in M, E(\bar{d}_i) \leq 0, \text{ pour tout } i \in M\}$$

L'objectif du test basé sur le MCS est de déterminer  $M^*$ , ou plus précisément d'identifier un sous-ensemble de  $M$  qui contient  $M^*$  avec une certaine probabilité. Il s'agit de tester itérativement  $H_{i,M} : E(\overline{d}_i) \leq 0$ , pour tout  $i \in M$ .

Le test est basé sur la statistique  $T_{max,M} = \max_{i \in M} t_i$ , où  $t_i = \frac{\overline{d}_i}{\sqrt{\text{var}(\overline{d}_i)}}$ .

La distribution asymptotique de  $T_{max,M}$  sous l'hypothèse  $H_{i,M}$  est estimée avec la technique de Moving block bootstrap (MBB) des paires  $(Y_t, -t)$ . Il s'agit du même procédé que [Gonçalves et White \(2005\)](#). Soit  $l \in \mathbb{N}, 1 \leq l < n_1$ , la taille des blocs, et soit  $B(i, l) = \{Z_t, -t+1, \dots, -t+l-1\}$  un bloc de  $l$  observations consécutives à partir de l'observation  $Z_t$ . Le MBB consiste en un tirage aléatoire avec remise de  $k = \frac{n_1}{l}$  blocs dans un ensemble de  $n_1 - l + 1$  blocs superposés  $\{B(1, l), B(2, l), \dots, B(n_1 - l + 1, l)\}$ , tel que  $n_1 = kl$ .

En cas de rejet de  $H_{i,M}$ , la règle d'élimination  $e_{max,M}$  identifie le modèle à retirer de  $M$ . La procédure est ensuite réitérée avec l'ensemble des modèles survivants  $M' \equiv M - e_{max,M}$ , jusqu'au non-rejet de  $H_0$ . L'ensemble des modèles survivants est appelé «  $(1 - \alpha)$ Model Confidence Set » et noté  $\widehat{M}_{1-\alpha}^*$ .  $\widehat{M}_{1-\alpha}^*$  s'interprète comme un sous-ensemble de  $M$  qui contient  $M^*$  avec une certaine probabilité au moins égale à  $1 - \alpha$ .

## b. Fonction de perte économique

Nous inspirant de [Bandi, Russel et Yang \(2008\)](#), nous considérons un marché où chaque agent formule une anticipation sur le prix d'une option expirant le jour suivant, à partir du modèle de Black-Scholes. En supposant que le prix d'exercice de l'option est identique au prix au comptant, et que le taux sans-risque est nul, le prix attendu pour l'option (Call ou Put) par l'agent  $i$  est donné par :

$$P_t^i = 2 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sigma_t^i\right) - 1$$

Où  $\Phi(\cdot)$  désigne la fonction de distribution cumulative de la loi normale ;  $\sigma_i(t)$  désigne la prévision de volatilité à  $t$  obtenue à partir du modèle  $i$  ( $i \in M$ ).

Nous considérerons dans un premier temps différents marchés, chaque marché formé par une paire d'agents, chaque agent identifié à un modèle de prévision. Sur un marché, le prix de

transaction est la moyenne du prix des agents. Pour l'agent  $i$ , le prix de transaction d'une option sur différents marchés est donné par :  $P_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left( \Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t^i \right) - 2 \right) + \frac{1}{2} \left( \Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t^j \right) - 2 \right)$  ;  $j \neq i, j \in M$  ;  $\sigma_t^i = E_{t-1}(RV_i(t))$

De plus, chaque agent couvre sa position sur l'option Call à hauteur de  $\Phi \left( \frac{1}{2} \sigma^t \right)$  unité de l'action et  $1 - \Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t \right)$  unité de l'action sur l'option Put. Au total, un agent achète ou vend  $1 - 2\Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t \right)$  unité de l'action pour un Straddle.

Selon le prix de la transaction,  $i$  est acheteur ou vendeur d'un Straddle. L'agent dont le prix est supérieur (inférieur), achète (vend). Les profits réalisés sur les différents marchés sont donnés par :

$$p_{ij}(t) \equiv |R_t^{SP500} - P_t^i + R_t^{SP500} \left( 1 - 2\Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t^i \right) \right)|, \text{ si } P_{ij}(t) \leq P_t^i$$

$$p_{ij}(t) \equiv 2P_t^i - |R_t^{SP500} - R_t^{SP500} \left( 1 - 2\Phi \left( \frac{1}{2} \sigma_t^i \right) \right)|, \text{ si } P_{ij}(t) \geq P_t^i$$

$$j \neq i, j \in M ; \sigma_t^i = E_{t-1}(RV_i(t))$$

Où  $R_t^{SP500}$  est le rendement journalier ;  $P_t$  est le prix anticipé d'une option.

Le profit total journalier pour l'agent  $i$  est donné par :

$$p_i(t) = \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} p_{ij}(t)$$

Notre fonction de perte économique pour le test basé sur le MCS est donc  $L_i(t) = -p_i(t)$ , pour tout  $i \in M$ . Le modèle  $i$  est préféré au modèle  $j$  si  $E[L_i(t) - L_j(t)] < 0$ . La procédure du test avec la fonction de perte économique sera essentiellement la même qu'avec les fonctions de perte statistiques (voir description en Annexe).

Nous avons choisis  $B = 500$  et  $k = 2$  ;  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}$  ne change pas pour  $k \in \{1,5,10\}$ . Le tableau 1 montre les résultats des itérations de la procédure basée sur MAE.  $t\text{-stat}$  est la statistique de test individuel d'appartenance à  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}$ , et indique si un modèle est significativement supérieur ( $t\text{-stat}$  négative) ou inférieur ( $t\text{-stat}$  positive) aux autres en termes de la fonction de perte considérée.

Tableau 1 : Tableau des corrélations

	$RV_t^d$	$MedRV_t^d$	$RS_t^{d+}$	$RS_t^{d-}$	$\Delta J_t^2$	$\Delta J_t^{2+}$	$\Delta J_t^{2-}$	$r^d$	$RV_t^w$	$RV_t^m$
$RV_t^d$	1									
$MedRV_t^d$	0.95	1								
$RS_t^{d+}$	0.93	0.89	1							
$RS_t^{d-}$	0.93	0.89	0.75	1						
$\Delta J_t^2$	0.02	0.03	0.37	-0.33	1					
$\Delta J_t^{2+}$	0.51	0.40	0.73	0.21	0.75	1				
$\Delta J_t^{2-}$	-0.50	-0.38	-0.21	-0.72	0.71	0.07	1			
$r^d$	-0.03	-0.03	-0.02	-0.04	0.02	-0.01	0.04	1		
$RV_t^w$	0.74	0.69	0.71	0.68	0.04	0.45	-0.41	-0.04	1	
$RV_t^m$	0.68	0.63	0.63	0.64	0.004	0.38	-0.40	-0.04	0.87	1

Tableau 2 : Tableau de statistiques

Variables	Mean	Sd. Dev.	Skewness	Min	Max	Kurtosis	ADF	LB's Q(20)	JB
$RV_t^d$	.000108	.0002	11.75	$3.13 \times 10^{-6}$	.0075	261.03	-25.83 ***	28086.26 ***	13681886.58 ***
$MedRV_t^d$	.00008	.0002	14.49	$2.06 \times 10^{-6}$	.007	368.92	-30.12 ***	22636.50 ***	27459057.53 ***
$RS_t^{d+}$	.00005	.0001	12.31	$1.26 \times 10^{-6}$	.0039	263.94	-32.22 ***	19806.53 ***	14000171.29 ***
$RS_t^{d-}$	.00005	.0001	10.25	$3.57 \times 10^{-7}$	.0035	188.52	-30.71 ***	22953.17 ***	7099825.81 ***
$\Delta J_t^2$	$2.07 \times 10^{-7}$	.000088	1.22	-.0010244	.0015	67.02	-82.34 ***	445.03 ***	836689.83 ***
$\Delta J_t^{2+}$	.0000166	.00006	10.86	0	.0015	174.64	-56.97 ***	2131.39 ***	6100306.24 ***
$\Delta J_t^{2-}$	-.0000168	.000058	-8.68	-.0010244	0	105.59	-57.89 ***	3499.32 ***	2206477.80 ***
$r^d$	.000106	.01	-0.20	-.0945715	0.10	10.92	-74.54 ***	95.57 ***	12820.82 ***
$RV_t^w$	.000108	.0002	7.63	$5.34 \times 10^{-6}$	.003	86.18	-6.53 ***	52492.79 ***	1456153.66 ***
$RV_t^m$	.000109	.00017	6.29	$7.14 \times 10^{-6}$	.002	55.16	-2.08 **	77123.65 ***	584351.39 ***

Note : ADF représente la statistique du test augmenté de Dickey-Fuller ; LB'Q la statistique Q du test de Ljung-Box ; JB la statistique du test de Jarque-Béra ; (\*\*\*) indique la significativité de la statistique à 1% ; (\*\*) la significativité de la statistique à 5%

$P$ -Value désigne la probabilité associée à chaque test individuel. Plus la statistique est élevée, ou de façon équivalente, plus petite est la  $P$ -value, moins bon sera le modèle relativement aux autres. La  $t$ -stat et la  $P$ -Value du modèle significativement inférieur à tous les autres fournissent respectivement la statistique  $Tmax$  et la  $P$ -Value du test global pour  $H_0$ .

#### 4. Résultats d'estimation et de comparaison des prévisions

##### 4.1. Résultats d'estimation

Le coefficient de l'effet de levier introduit dans le modèle M2 (RV + Levier) n'est ni important (0.03) ni même significatif à 10% (voir tableau 3). L'effet de la composante négative de *Realized variance* du modèle M4 (RS négatif) est plus grand que celui de la composante positive du modèle M3 (RS positif). En ce qui concerne les sauts, dans le modèle M9 (MedRV + Jump positif + Jump négatif), l'effet de la *Positive Jump variation* n'est ni important (0.04), ni même significatif. Tout le contraire avec la *Negative Jump variation* des modèles M8 (MedRV + Jump négatif) et M9 (MedRV + Jump positif + Jump négatif), dont le signe négatif et significatif indique bien que pour les jours de marché dominés par des sauts négatifs dans les prix, la volatilité tend à être beaucoup plus faible le lendemain.

##### 4.2. Résultats de comparaison

###### a. Comparaison à partir des fonctions de perte statistiques

Le tableau 4 montre les résultats de la procédure basée sur MAE. Le modèle M3 (RS positif) apparaît significativement inférieur à tous les autres ; c'est donc le premier éliminé. Sont ensuite éliminés, dans cet ordre, le modèle de Corsi (2009) sans effet de levier (M1), le modèle de Corsi (2009) avec effet de levier (M2), le modèle M6 (MedRV). Le  $\widehat{M}_{1-\alpha}^*(MAE)$  est donc formé par :  $\{4, M5, 7, M8, 9\}$ . Parmi cette sélection de modèles supérieurs, les modèles M4 (RS Négatif) et M5 (RS positif + RS négatif) se distinguent nettement par leur  $t$ -stat et  $P$ -Value tout le long de la procédure. Leurs  $t$ -stat respectives, nous apprennent également que M4 (-0.76) est supérieur à M5 (-0.31). Ainsi, si la décomposition de *Realized variance* selon le signe des rendements améliore effectivement les prévisions du lendemain, il n'en est pas moins que l'information concernant les rendements négatifs est de loin meilleure à elle seule ; du moins pour la prévision de la volatilité de l'indice S&P500. Cela ressort également dans le fait que M3 n'est pas retenu



dans  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}(MAE)$ . Le modèle M2 avec l'effet de levier n'est pas non plus retenu. D'après les conclusions de [Patton et Sheppard \(2011\)](#), la prise en compte de cet effet présente un intérêt pour la prévision à court-terme à tel point que ce modèle est aussi bon que le modèle M4. Sur ces points, nos conclusions diffèrent.

Mais bien que M2 soit un modèle inférieur et inintéressant, il reste relativement supérieur au modèle M1 sans l'effet de levier, celui-ci étant éliminé bien avant M2.

Les *t-stat* nous apprennent encore que, parmi les modèles M7 (MedRV + Jump total), M8 (MedRV + Jump négatif) et M9 (MedRV + Jump positif + Jump négatif), M7 est le moins bon, et que M9 est le modèle supérieur. Cela traduit bien que la décomposition de *Jump variation* selon le signe des sauts produit un modèle supérieur, et surtout que la composante négative de *Jump variation* est largement suffisante à elle seule.

Le tableau 5 montre les résultats de la procédure basée sur QLIKE. La composition de  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}(QLIKE)$  diffère ;  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}(QLIKE) \subset \widehat{M_{1-\alpha}^*}(MAE)$  et

$\widehat{M_{1-\alpha}^*}(QLIKE) \cap \widehat{M_{1-\alpha}^*}(MAE) \equiv \{4, \quad M5\}$ . Le principal constat ici est donc que la fonction de perte QLIKE a rendu une sélection plus fine des modèles, ne retenant que les deux modèles indiscutablement supérieurs, c'est-à-dire M4 et M5. Comme on peut l'observer sur la figure 1, les prévisions *one-step-ahead* de ces deux modèles obéissent bien à la dynamique de *Realized variance*.

#### **b. Comparaison à partir du profit engendré par la transaction d'options**

Le tableau 6 montre les résultats de la procédure basée sur le profit. Seul M7 (MedRV + Jump total) ne survit pas à la compétition :  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}(PROFIT) \equiv \{1, \quad M2, 3, \quad M4, 5, \quad M6, 8, \quad M9\}$ . Malgré le nombre élevé de modèles survivants, il y a suffisamment de preuves statistiques pour ne pas rejeter  $H, \widehat{M_{1-\alpha}^*}(PROFIT)$ , indiquant que les performances de ces modèles ne sont pas significativement différentes.

Les *t-stat* respectives des modèles survivants nous apprennent que le modèle de [Corsi \(2009\)](#), le modèle avec l'effet de levier ainsi que le modèle M3 (RS positif) sont les plus prometteurs en termes de profit sur des options expirant le lendemain. Parmi ces trois, le modèle avec l'effet de

levier (M2) se classe bon deuxième, devant le modèle M3 et derrière le modèle de [Corsi \(2009\)](#) sans l'effet de levier.

S'agissant des autres modèles dans  $\widehat{M_{1-\alpha}^*}$  (*PROFIT*), le modèle M8 (MedRV + Jump négatif) est relativement supérieur. Nous retiendrons donc que, en termes de profit sur des options expirant le lendemain, la prise en compte de la composante des sauts de *Realized variance* dans la valorisation des options est préférable, mais seulement dans le cas où l'on tiendrait compte exclusivement de la composante négative de *Jump variation* ; la prise en compte des deux composantes semble être ici une mauvaise idée.

## Conclusion

Nous avons mis en évidence, en exploitant la puissance statistique du test de comparaison de modèles basé sur le Model Confidence Set de [Hansen et al. \(2011\)](#) appliqué à des données de hautes fréquences sur l'indice S&P500, que la prise en compte de l'effet de levier classique ne présente pas d'intérêt statistique. Aussi à la différence de [Patton et Sheppard \(2013\)](#), seule la composante négative de *Jump variation* contribue à produire un modèle de prévision supérieur. Nos résultats confirment quand même que la décomposition de *Realized variance* selon le signe des rendements intra-journaliers suscite une amélioration significative des prévisions du lendemain, essentiellement attribuable à l'information concernant les rendements négatifs.

Cependant, en termes de profitabilité des transactions d'options expirant le lendemain, les modèles de [Corsi \(2009\)](#) avec et sans effet de levier se sont révélés beaucoup plus prometteurs. Par rapport à ceux-ci, les modèles captant l'information sur les sauts sont bien moins intéressants, bien-que la prise en compte exclusive de la composante négative de *Jump variation* dans la valorisation des options soit préférable.

Outre le fait que les performances en termes de profit sont en contradiction avec les performances statistiques pour la plupart des modèles, le test basé sur le Model Confidence Set a identifié plusieurs modèles supérieurs ayant très peu de différences significatives en termes économique. Il est donc possible que la puissance du test basé sur le Model Confidence Set n'ait pas bénéficié à

la comparaison économique. Cependant, notre configuration de marché pour les transactions d'option est peut-être en cause. Une autre approche pourrait être de définir un marché unique pour les options sur lequel le prix unique serait le prix médian, tel que suggéré par [Bandi, Russel et Yang \(2008a\)](#). Par ailleurs, notre choix de modèles concurrents ainsi que nos différents estimateurs évalués pourrait être amélioré principalement afin de proposer un modèle ou deux modèles qui présenteraient un intérêt économique significativement et indiscutablement supérieur ; ce qui n'est pas vraiment le cas ici.

Tableau 3 : Résultats d'estimation avec le programme STATA

	$\alpha$	$RV_t^d$	$RV_t^w$	$RV_t^m$	$RS_t^{d+}$	$RS_t^{d-}$	$MedRV_t^d$	$\Delta J_t^2$	$\Delta J_t^{2+}$	$\Delta J_t^{2-}$	$lev_t$
<b>M1</b>	$9.10^{e-06}$ (1.66) *	0.39 (3.37) ***	0.31 (2.52) **	0.20 (1.83) *							
<b>M2</b>	$9.05^{e-06}$ (1.69) *	0.38 (2.71) ***	0.31 (2.51) **	0.20 (1.85) *							0.03 (0.29)
<b>M3</b>	$11^{e-06}$ (2.06) **		0.42 (3.20) ***	0.25 (2.35) **	0.43 (3.66) ***						
<b>M4</b>	$9.05^{e-06}$ (1.62)		0.36 (3.12) ***	0.17 (1.58)		0.75 (4.37) ***					
<b>M5</b>	$8.91^{e-06}$ (1.61)		0.34 (2.62) ***	0.17 (1.59)	0.07 (0.42)	0.71 (4.31) ***					
<b>M6</b>	$11.2^{e-06}$ (2.05) **		0.34 (2.61) ***	0.21 (1.89) *			0.43 (2.95) ***				
<b>M7</b>	$11^{e-06}$ (1.99) **		0.36 (2.73) ***	0.19 (1.65) *			0.43 (3.09) ***	-0.33 (-2.56) **			
<b>M8</b>	$11.6^{e-06}$ (2.12) **		0.31 (2.62) ***	0.18 (1.64)			0.39 (3.07) ***			-0.70 (-3.66) ***	
<b>M9</b>	$9.57^{e-06}$ (1.8) *		0.31 (2.54) ***	0.18 (1.64) *			0.39 (2.93) ***	0.04 (0.24)		-0.72 (-3.89) ***	

Note : Les écarts-type de White sont entre parenthèses ; (\*\*\*) indique la significativité du coefficient à 1% ; (\*\*) la significativité à 5% et (\*) la significativité à 10%

Tableau 4 : Résultats de la procédure MCS basée sur MAE

	Itération 1 : REJET		Itération 2 : REJET		Itération 3 : REJET		Itération 4 : REJET		Itération 5 : ACCEPTATION	
	$Q(0.9) = 2.5$		$Q(0.9) = 2.7$		$Q(0.9) = 2.4$		$Q(0.9) = 2.5$		$Q(0.9) = 2.4$	
	$T_{\max} = 7.2$		$T_{\max} = 4.8$		$T_{\max} = 4.6$		$T_{\max} = 3.6$		$T_{\max} = 0.77$	
	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat
Modèle 1	0.02	3.2	0	4.8						
Modèle 2	0.04	3	0.002	4.5	0.002	4.6				
Modèle 3	0	7.2								
Modèle 4	1	-6	1	-4.2	1	-3.3	1	-2	1	-0.76
Modèle 5	1	-5.2	1	-3.6	1	-2.9	1	-1.6	1	-0.31
Modèle 6	1	0.66	0.07	2.7	0.03	3.1	0.008	3.6		
Modèle 7	1	-5	1	-2.9	1	-2.1	1	-0.66	0.8	0.77
Modèle 8	1	-4	1	-2.4	1	-1.9	1	-0.91	1	0.35
Modèle 9	1	-4	1	-2.6	1	-2.2	1	-1.3	1	-0.074

Note : Une cellule en Jaune indique qu'un modèle est éliminé à l'issue de l'itération ; une cellule en Noir indique qu'un modèle n'est pas en compétition lors de l'itération

Tableau 5 : Résultats de la procédure MCS basée sur QLIKE

	Itération 1 : REJET		Itération 2 : REJET		Itération 3 : REJET		Itération 4 : REJET		Itération 5 : REJET		Itération 6 : REJET		Itération 7 : REJET		Itération 8 : ACCEPTATION	
	$Q(0.9) = 2.7$		$Q(0.9) = 2.7$		$Q(0.9) = 2.6$		$Q(0.9) = 2.5$		$Q(0.9) = 2.2$		$Q(0.9) = 2.1$		$Q(0.9) = 1.8$		$Q(0.9) = 1.4$	
	$T_{\max} = 6.7$		$T_{\max} = 4.9$		$T_{\max} = 2.9$		$T_{\max} = 2.7$		$T_{\max} = 2.6$		$T_{\max} = 3.3$		$T_{\max} = 3.8$		$T_{\max} = 0.11$	
	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat
Modèle 1	1	0.44	0.1	2.4	0.06	2.9										
Modèle 2	1	0.41	0.2	2.2	0.09	2.7	0.07	2.7								
Modèle 3	0	6.7														
Modèle 4	1	-7.9	1	-7.2	1	-7.1	1	-6.8	1	-5.1	1	-4.7	1	-3.5	1	-0.11
Modèle 5	1	-8.2	1	-7.5	1	-7.5	1	-7.2	1	-5.2	1	-4.6	1	-3.4	0.9	0.11
Modèle 6	0.05	3.1	0.002	4.9												
Modèle 7	1	-1.5	1	0.47	0.6	1.1	0.3	1.8	0.06	2.6	0.02	3.3				
Modèle 8	1	-2.4	1	-0.46	1	0.37	0.6	1.2	0.06	2.6						
Modèle 9	1	-1.7	1	-0.26	1	0.34	0.7	0.94	0.1	2.1	0.06	2.4	0.006	3.8		

Note : Une cellule en Jaune indique qu'un modèle est éliminé à l'issue de l'itération ; une cellule en Noir indique qu'un modèle n'est pas en compétition lors de l'itération

Tableau 6 : Résultats de la procédure MCS basée sur le profit engendré par la transaction d'options

	Itération 1 : REJET		Itération 2 : ACCEPTATION	
	$Q(0.9) = 2.5$		$Q(0.9) = 2.2$	
	$T_{\max} = 3.3$		$T_{\max} = 1.7$	
	P-Value	t-stat	P-Value	t-stat
Modèle 1	1	-2.2	1	-2
Modèle 2	1	-0.5	1	-0.39
Modèle 3	1	-3.3	1	-2.9
Modèle 4	0.9	0.7	0.7	0.97
Modèle 5	0.6	1.4	0.3	1.7
Modèle 6	1	0.3	0.8	0.66
Modèle 7	0.02	3.3		
Modèle 8	1	-0.09	1	0.27
Modèle 9	0.6	1.4	0.3	1.7

Note : Une cellule en Jaune indique qu'un modèle est éliminé à l'issue de l'itération ; une cellule en Noir indique qu'un modèle n'est pas en compétition lors de l'itération

## Bibliographie

- Aït-Sahalia, Yacine, Per A. Mykland, and Lan Zhang (2005). Ultra high frequency volatility estimation with dependent microstructure noise. No. w11380. National Bureau of Economic Research.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2001). The distribution of realized exchange rate volatility. *Journal of the American statistical association*, 96(453), 42-55.
- Andersen, Torben G., and Tim Bollerslev (1998). "Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts." *International economic review* (1998): 885-905.
- Andersen, Torben G., Dobrislav Dobrev, and Ernst Schaumburg (2009). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. National Bureau of Economic Research. No. w15533.
- Andersen, Torben G., Tim Bollerslev, and Francis X. Diebold (2007). "Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility." *The Review of Economics and Statistics* 89.4: 701-720.
- Bandi, Federico M., Jeffrey R. Russell, and Chen Yang (2008a). "Realized volatility forecasting and option pricing." *Journal of Econometrics* 147.1: 34-46.
- Bandi, Federico M., Jeffrey R. Russell, and Yinghua Zhu (2008b). "Using high-frequency data in dynamic portfolio choice." *Econometric Reviews* 27.1-3: 163-198.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., and Neil Shephard (2004). "Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps." *Journal of financial econometrics* 2.1: 1-37.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., and Neil Shephard (2006). *Multipower variation and stochastic volatility*. Springer US.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., et al (2008). "Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise." *Econometrica* 76.6: 1481-1536.
- Barndorff-Nielsen, Ole E., Silja Kinnebrock, and Neil Shephard (2008). "Measuring downside risk: realised semivariance." CREATES Research Paper 42.
- Bollerslev, Tim (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of econometrics* 31.3: 307-327.
- Christensen, Kim, and Mark Podolskij (2007). "Realized range-based estimation of integrated variance." *Journal of Econometrics* 141.2: 323-349.



Corsi, Fulvio (2009). "A simple approximate long-memory model of realized volatility." *Journal of Financial Econometrics* 7.2: 174-196.

Engle, Robert F (1982). "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation." *Econometrica: Journal of the Econometric Society* : 987-1007.

Engle, Robert F., and Giampiero M. Gallo (2006). "A multiple indicators model for volatility using intra-daily data." *Journal of Econometrics* 131.1: 3-27.

Gonçalves, Sílvia, and Halbert White (2005). "Bootstrap standard error estimates for linear regression." *Journal of the American Statistical Association* 100.471: 970-979.

Hansen, Peter R., Asger Lunde, and James M. Nason (2011). "The model confidence set." *Econometrica* 79.2: 453-497.

Hansen, Peter Reinhard, and Zhuo Huang (2012). "Exponential garch modeling with realized measures of volatility"

Hansen, Peter Reinhard, Zhuo Huang, and Howard Howan Shek (2012). "Realized GARCH: a joint model for returns and realized measures of volatility." *Journal of Applied Econometrics* 27.6: 877-906.

McAleer, Michael, and Marcelo C. Medeiros (2008). "Realized volatility: A review". *Econometric Reviews* 27.1-3: 10-45.

Müller, Ulrich A., et al (1997). "Volatilities of different time resolutions—analyzing the dynamics of market components." *Journal of Empirical Finance* 4.2: 213-239.

Nelson, Daniel B (1991). "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*: 347-370.

Oomen, Roel C. A (2006). "Properties of realized variance under alternative sampling schemes." *Journal of Business & Economic Statistics* 24.2: 219-237.

Patton, Andrew J. and Sheppard, Kevin (2013). "Good Volatility, Bad Volatility: Signed Jumps and the Persistence of Volatility". *Economic Research Initiatives at Duke (ERID) Working Paper No. 168*. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1943825>

Shephard, Neil, and Kevin Sheppard (2010). "Realising the future: forecasting with high-frequency-based volatility (HEAVY) models." *Journal of Applied Econometrics* 25.2: 197-231.

White, Halbert (1980). "A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity." *Econometrica: Journal of the Econometric Society* : 817-838.

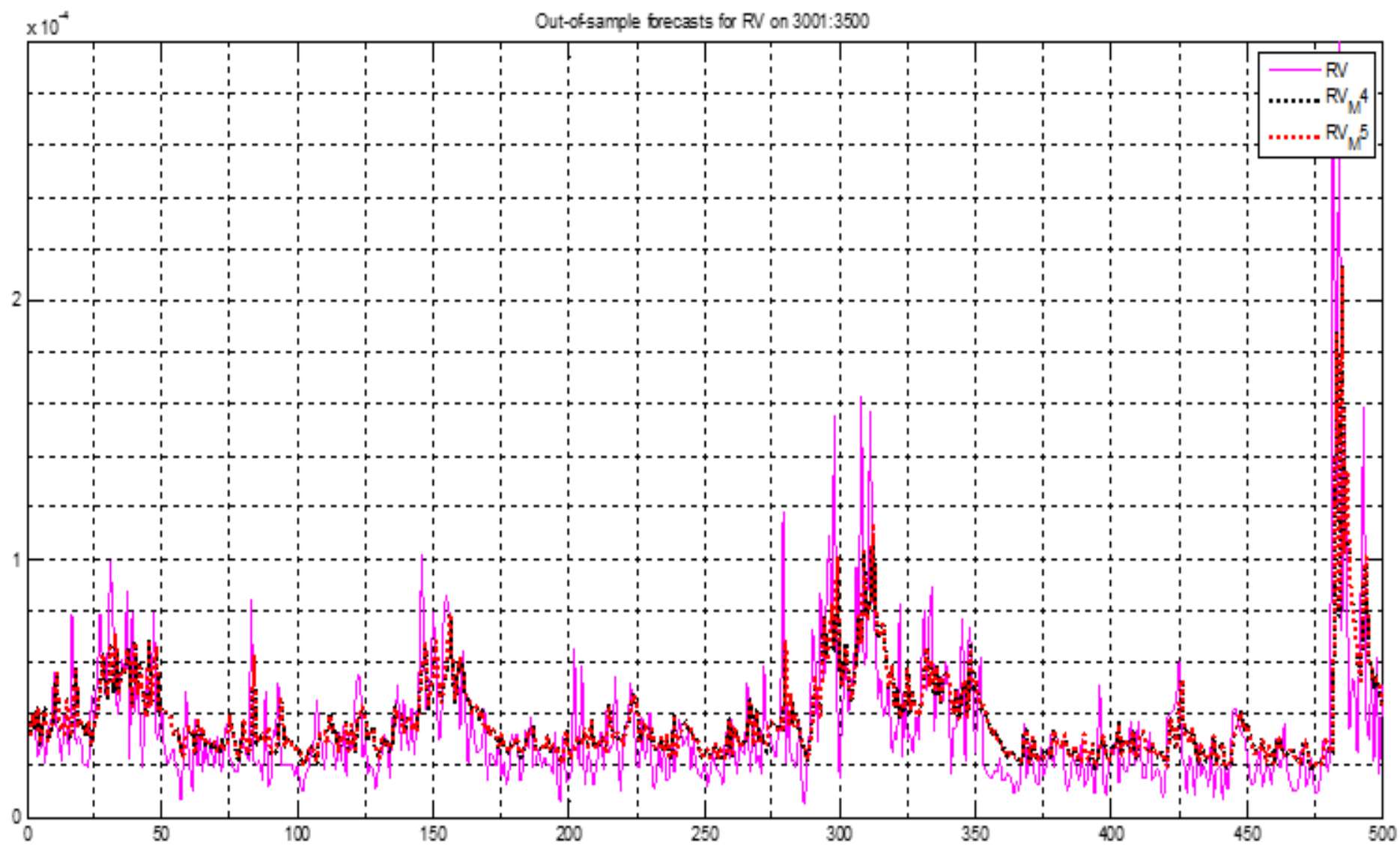


Figure 1 : Prévisions de la variance réalisée

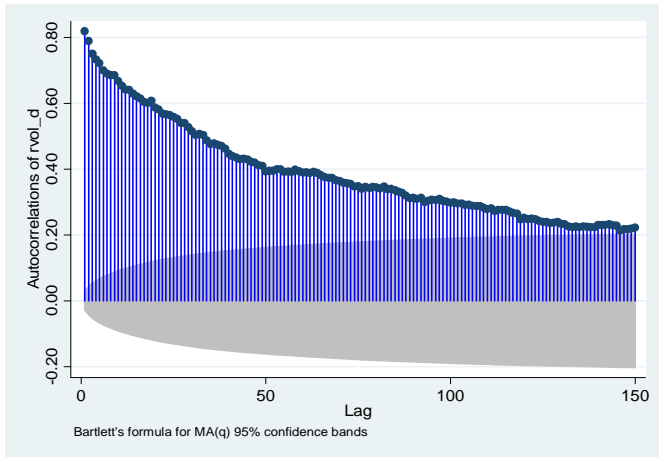


Figure 5 : Correlogramme de  $\sqrt{RV_t^d}$

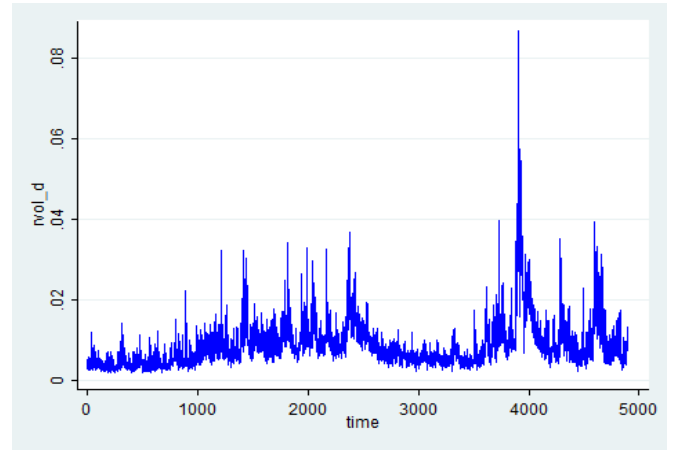


Figure 2 : Plot de  $\sqrt{RV_t^d}$

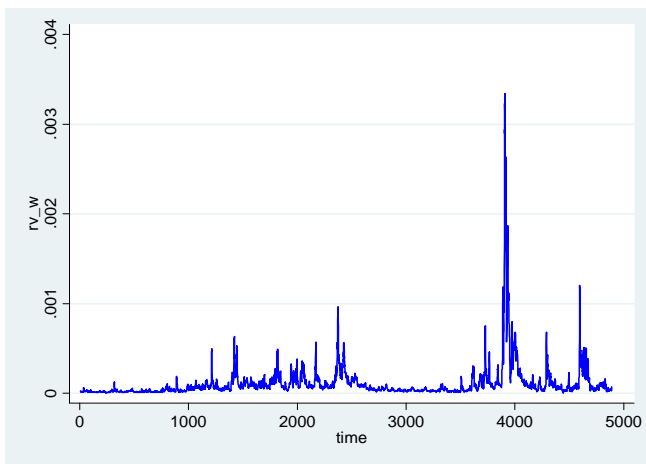


Figure 4 : Plot de  $RV_t^w$

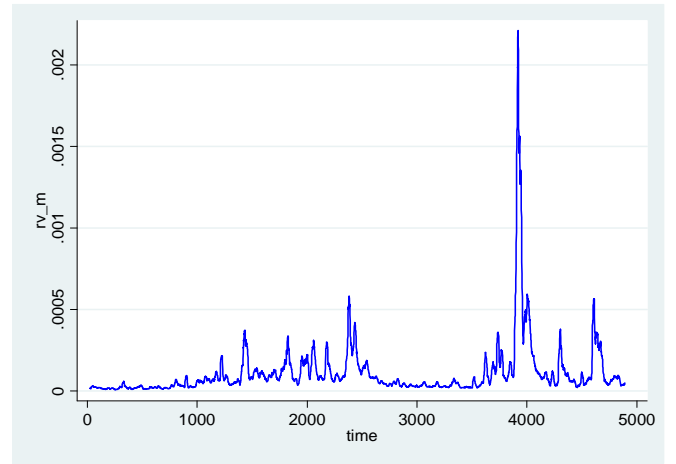


Figure 3 : Plot de  $RV_t^m$

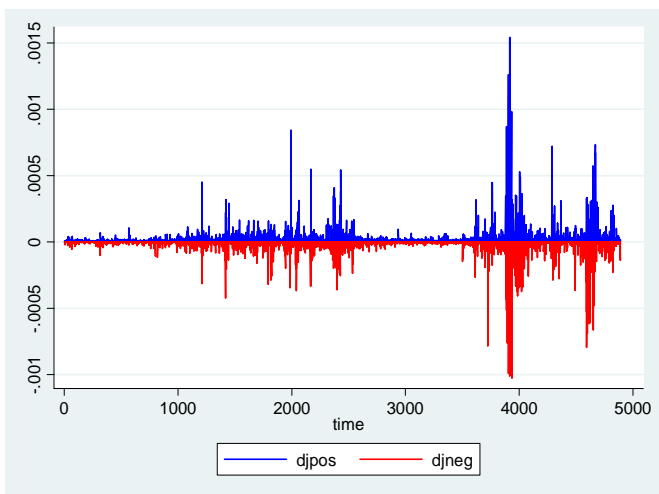


Figure 6 : Plot de  $\Delta J_t^{d+}$  (bleu) et  $\Delta J_t^{d-}$  (rouge)

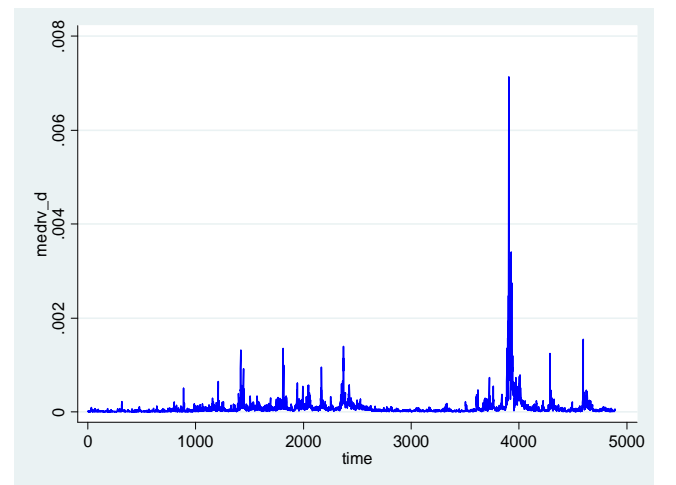


Figure 7 : Plot de  $MedRV_t^d$

## Annexe : Le test basé sur le Model Confidence Set

Soit  $M \equiv \{M_1, \dots, M_9\}$  notre collection originelle de modèles.

1. Calcul des statistiques

Soit  $L(t)$  une fonction de perte. Le modèle  $i$  est préférée au modèle  $j$  si  $E[L_i(t) - L_j(t)] < 0$ . La statistique  $d_{\cdot}(t)$  mesure l'écart-moyen de  $L_i(t)$  avec les  $L_j(t), j \in M$  :

$$d_{\cdot}(t) \equiv L_i(t) - \frac{1}{m} \sum_{j \in M} L_j(t)$$

La statistique  $\overline{d_{\cdot}}$  désigne la moyenne de  $d_{\cdot}(t)$  à travers le temps :

$$\overline{d_{\cdot}} \equiv \frac{1}{n_2} \sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2} d_{\cdot}(t)$$

2. Calcul des statistiques de test

Pour l'échantillon bootstrap  $b$ , les fonctions de perte sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} MAE_i^{b*}(t) &\equiv |RV_i(t) - E_{t-1}^{b*}(RV_i(t))| \\ QLIKE_i^{b*}(t) &\equiv \ln \left( E_{t-1}^{b*}(RV_i(t)) \right) + \frac{RV_i(t)}{E_{t-1}^{b*}(RV_i(t))} \end{aligned}$$

Avec  $t \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$  ;

$E_{t-1}^{b*}(RV_i(t)) \equiv \hat{\beta}_i^{b*} \times X_i(t-1)$  ; où  $\hat{\beta}_i^{b*}$  est obtenu à partir d'une régression sur les 3000 observations précédentes.

L'écart-moyen de  $L_i(t)$  pour l'échantillon bootstrap  $b$  est :

$$d_{\cdot}^{b*}(t) \equiv L_i^{b*}(t) - \frac{1}{m} \sum_{j \in M} L_j^{b*}(t)$$

La loss-statistic du modèle  $i$  :

$$\overline{d_{\cdot}^{b*}} \equiv \frac{1}{n_2} \sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2} d_{\cdot}^{b*}(t)$$

Nous définissons l'estimateur consistant de  $var(\overline{d_{\cdot}})$  :

$$\widehat{var}(\overline{d_{\cdot}^{b*}}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left( \overline{d_{\cdot}^{b*}} - E(\overline{d_{\cdot}^{b*}}) \right)^2$$

$$t_{\cdot} = \frac{\overline{d_{\cdot}}}{\sqrt{\widehat{var}(d_{\cdot}^{b*})}}, T_{max,M} = \max_{i \in M} t_{\cdot}$$

Les statistiques correspondantes pour les échantillons bootstrap sont :

$$t_{\cdot}^{b*} = \frac{\overline{d_{\cdot}^{b*}} - \overline{d_{\cdot}}}{\sqrt{\widehat{var}(d_{\cdot}^{b*})}}, T_{max,M}^{b*} = \max_{i \in M} t_{\cdot}^{b*}$$

3. Calcul de la p-value du test

Soit  $P_{H_0}$  la p-value associée avec  $H_{\cdot}$ ,  $M$

$$P_{H_0} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I_{\{T_{\cdot}^{b*} > T_{max,M}\}}$$

Où  $I_{\{\cdot\}}$  est une fonction indicatrice

[Hansen, Lunde, and Nason \(2011\)](#) définisse la MCS p-value est définie comme :

$$p_{e_{M_j}} = \max_{i \leq j} P_{H_0, i}$$

Nous estimons également le quantile  $1 - \alpha$  de la distribution de  $T_{max,M}$  à partir de la distribution empirique de  $T_{max,M}^{b*}$ , pour  $\alpha = 0.1$ .  $H_{\cdot}$  est rejetée lorsque  $p_{e_{M_j}} < \alpha$ , ou de façon équivalente, lorsque  $T_{max,M} > Q(T_{max,M}, 0.9)$ . En cas de rejet de  $H_{\cdot}$ , le modèle  $e_{max,M} \equiv \operatorname{argmax}_{i \in M} t_{\cdot}$ , est éliminé. Pour des raisons de brièveté, nous ne pouvons fournir plus de détails sur les principes du Model Confidence Set (voir [Hansen, Lunde, and Nason \(2011\)](#)) pour une description plus détaillée.