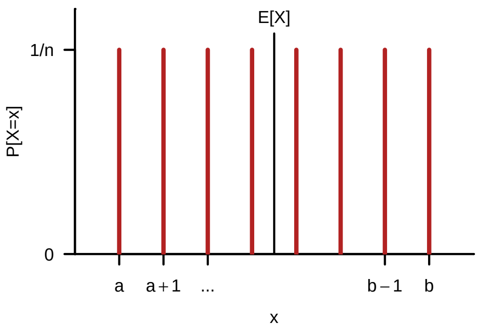
Loi uniforme discrète

Une variable aléatoire suit une loi uniforme discrète sur $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$, où a et b sont deux entiers, si toutes les valeurs de son support sont équiprobables. On rencontre souvent la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, ..., n\}$, notamment parce qu'il s'agit de la loi du rang d'un objet à l'issue d'une permutation aléatoire de n objets.

- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi uniforme discrète sur $\{a, a+1, ..., b-1, b\}$ si :
  - ⋆ Ses paramètres a et b sont deux entiers tels que : $a < b$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des entiers de a à b : $X(\Omega) = \{a, a+1, ..., b-1, b\}$
    Le nombre de valeurs du support est donc : $n = b - a + 1$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

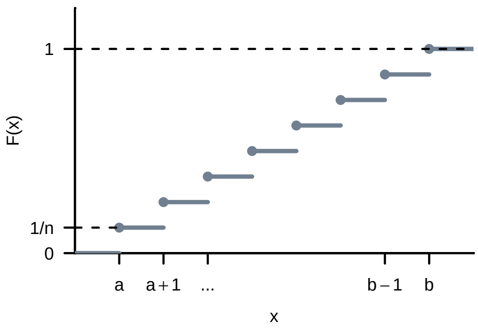
$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{n} \qquad \text{si} \qquad x \in \{a, a+1, ..., b-1, b\}$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ (\lfloor x \rfloor - a + 1)/n & \text{si} \quad a \leq x < b \\ 1 & \text{si} \quad x \geq b \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{n^2-1}{12}$$

- Loi uniforme discrète sur sur $\{1, 2, ..., n-1, n\}$:
  - ⋆ Espérance et variance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{n^2-1}{12}$$

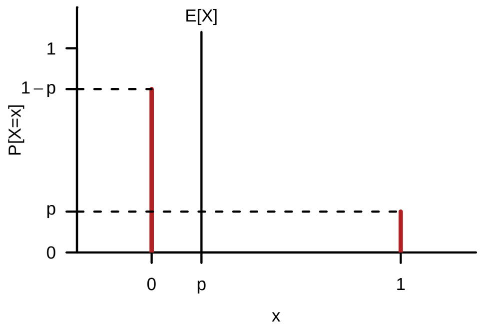
- R-project : Simulation d'un k-échantillon : `sample((a:b), k, replace=TRUE)`

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli est la loi indicatrice de la survenue d'un succès (événement de probabilité p) dans le cadre d'une épreuve à deux issues possibles (succès et échec).

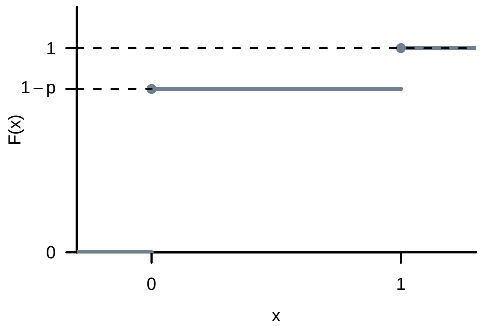
- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi de Bernoulli de paramètre (p) si :
  - ⋆ Son paramètre p est un réel compris entre 0 et 1 comme une probabilité : $0 \leq p \leq 1$
  - ⋆ Son support est constitué des seuls entiers 0 et 1 : $X(\Omega) = \{0, 1\}$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} 1-p & \text{si} \quad x = 0 \\ p & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1-p & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = p\,(1-p)$$

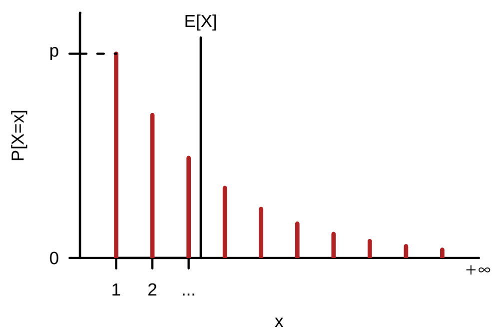
- R-project : Simulation d'un k-échantillon : `sample(c(0,1), k, replace=TRUE, prob=c(1-p, p))`
- Mathematica : `BernoulliDistribution[p]`

Loi géométrique

La loi géométrique est la loi du nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (événement de probabilité p) dans le cadre d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi géométrique de paramètre (p) si :
  - ⋆ Son paramètre p est un réel compris entre 0 et 1 comme une probabilité : $0 \leq p \leq 1$
  - ⋆ Son support est l'ensemble de entiers non nuls : $X(\Omega) = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

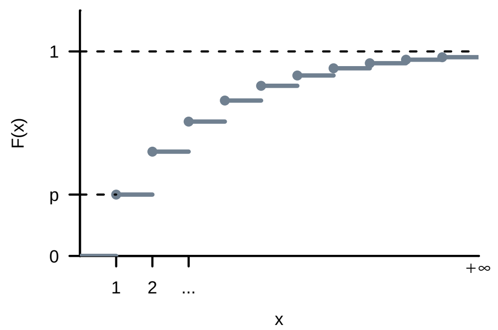
$$\mathbb{P}[X = x] = p\,(1-p)^{x-1} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{N}^*$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

- Définition alternative : La loi géométrique peut également être définie comme la loi du nombre d'échecs avant l'apparition du premier succès (événement de probabilité p). Dans ce cas, la variable X' considérée ("nombre d'échecs") est une translation de la variable X précédente ("nombre d'essais") : $X' = X - 1$.
  - ⋆ Le support subit la translation : $X'(\Omega) = \{0, 1, ...\} = \mathbb{N}$
  - ⋆ La loi de probabilité et la fonction de répartition sont modifiées :

$$\mathbb{P}[X' = x'] = p\,(1-p)^{x'} \qquad \text{si} \qquad x' \in \mathbb{N}$$

$$F(x') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x' < 0 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x' \rfloor + 1} & \text{si} \quad x' \geq 0 \end{cases}$$

  - ⋆ L'espérance subit la translation : $\mathbb{E}[X'] = \frac{1-p}{p}$
  - ⋆ La variance n'est pas altérée : $\mathbb{V}[X'] = \frac{1-p}{p^2}$

- R-project ("nombre d'échecs") : `dgeom pgeom qgeom rgeom`

$$\mathbb{P}[X = x] = \texttt{dgeom(x-1, p)}$$

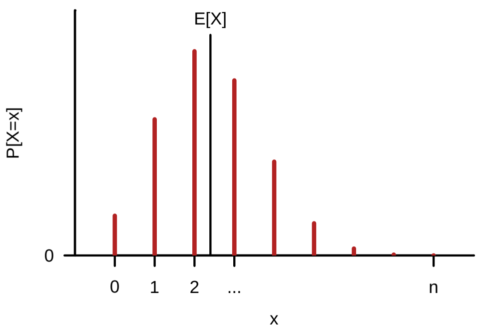
- Mathematica ("nombre d'échecs") : `GeometricDistribution[p]`

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,\ p)$

La loi binomiale est la loi du nombre de succès (événement de probabilité p) obtenus lors de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

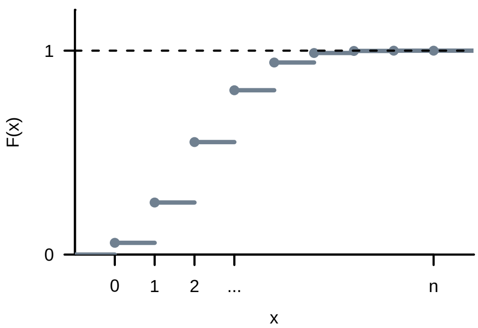
- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si :
  - ⋆ Son paramètre p est un réel compris entre 0 et 1 comme une probabilité : $0 \leq p \leq 1$
  - ⋆ Son paramètre n est un entier non nul : $n \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des entiers de 0 à n : $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \binom{n}{x}\ p^x\ (1-p)^{n-x} \qquad \text{si} \qquad x \in \{0, 1, ..., n\}$$



- Fonction de répartition :

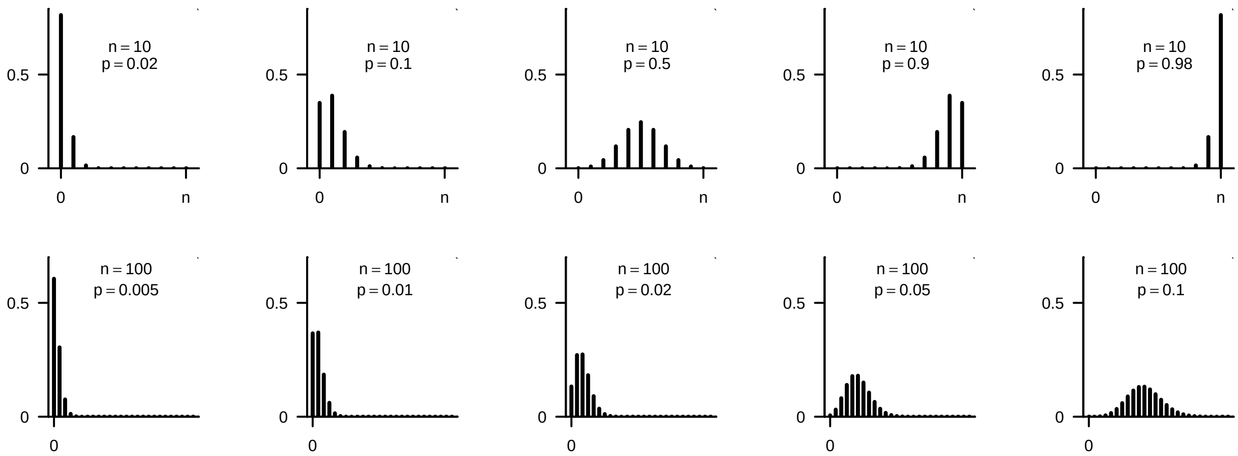
$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = n\ p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = n\ p\ (1-p)$$

- Exemples de forme de la distribution binomiale :



- R-project : `dbinom pbinom qbinom rbinom`

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \texttt{dbinom(x, n, p)}$$

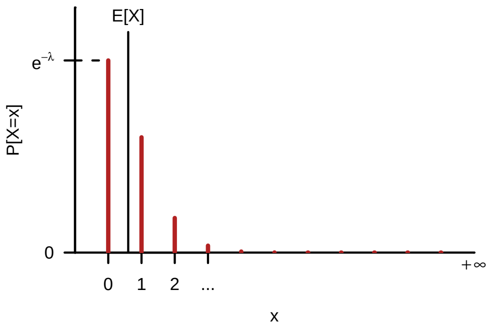
- Mathematica : `BinomialDistribution[n, p]`

Loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$

La loi de Poisson est la loi du nombre d'événements obtenus dans une période de temps t lorsque les événements apparaissent de manière indépendante et selon un taux constant par unité de temps λ. On note : $a = \lambda\ t$.

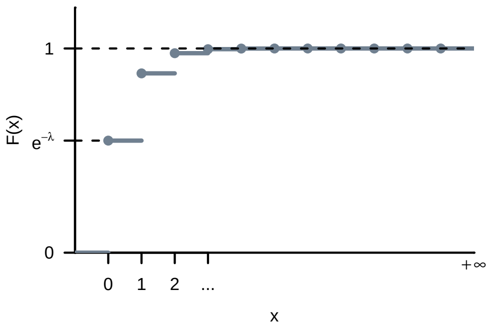
- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi de Poisson de paramètre (a) si :
  - ⋆ Son paramètre a est un réel positif : $a \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des entiers : $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \exp(-a)\ \frac{a^x}{x!} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{N}$$



- Fonction de répartition :

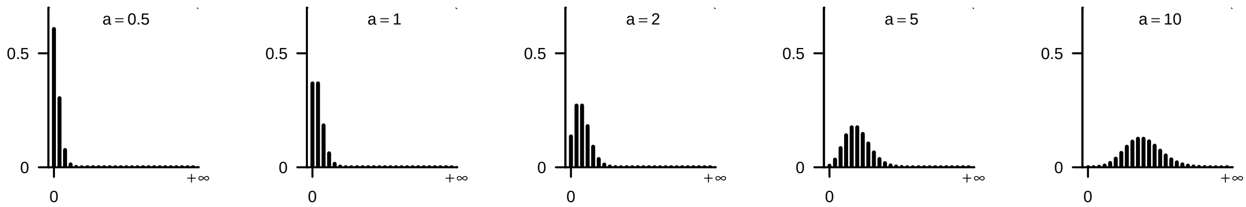
$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = a \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = a$$

- Exemples de forme de la distribution de Poisson :



- R-project : `dpois ppois qpois rpois`

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \texttt{dpois(x, a)}$$

- Mathematica : `PoissonDistribution[mu]`

Loi hypergéométrique

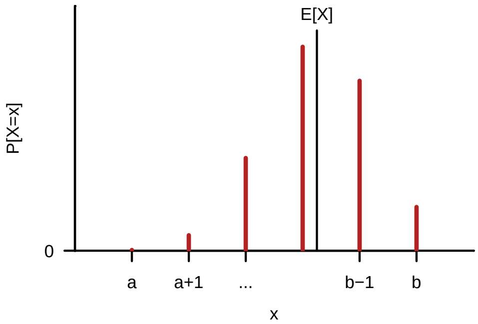
La loi hypergéométrique est la loi du nombre de boules blanches obtenues lors d'un tirage sans remise de n boules dans une urne contenant initialement N boules dont N_1 boules blanches et donc $N - N_1$ boules noires.

- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi hypergéométrique de paramètres (N, N_1, n) si :
  - ⋆ Son paramètre N est un entier non nul : $N \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son paramètre N_1 est un entier inférieur ou égal à N : $N_1 \in \{0, 1, ..., N\}$
  - ⋆ Son paramètre n est un entier non nul inférieur ou égal à N : $n \in \{1, 2, ..., N\}$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des entiers entre a et b : $X(\Omega) = \{a, a+1, ..., b-1, b\}$ où :

$$a = max(0, n - N + N_1) \qquad \text{et} \qquad b = min(n, N_1)$$

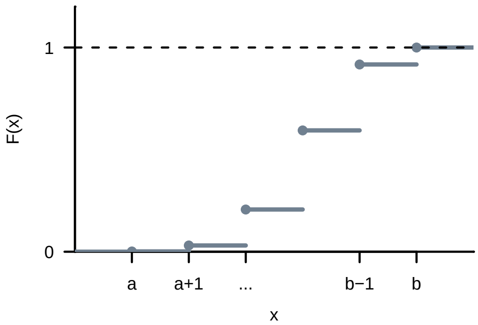
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{si} \qquad x \in \{a, a+1, ..., b-1, b\}$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = n\ p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = n\ p\ (1-p)\ \frac{N-n}{N-1} \qquad \text{avec} \qquad p = \frac{N_1}{N}$$

- Loi hypergéométrique et tirage sans remise :

	Tirée	Non Tirée	Total
Blanche	x	$N_1 - x$	N_1
Noire	$n - x$	$N - N_1 - n + x$	$N - N_1$
Total	n	$N - n$	N

- R-project : `dhyper phyper qhyper rhyper`

$\mathbb{P}[X = x] =$ `dhyper(x, N1, N-N1, n)`

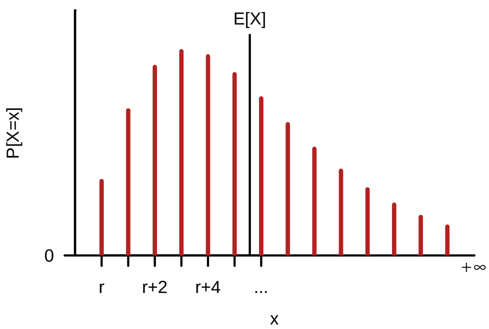
- Mathematica : `HypergeometricDistribution[n, n_succ, n_tot]`

Loi binomiale négative ou loi de Pascal

Loi binomiale négative, ou loi de Pascal, est la loi du nombre d'essais nécessaires pour obtenir r succès (événement de probabilité p) dans le cadre d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

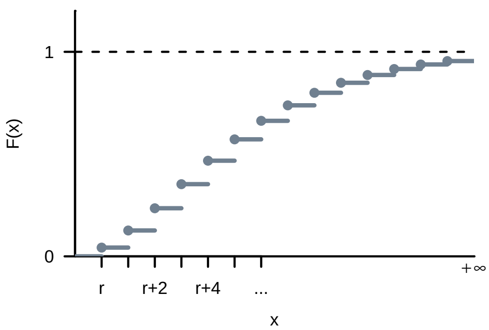
- Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi binomiale négative de paramètres (r, p) si :
  - ⋆ Son paramètre r est un entier non nul : $r \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son paramètre p est un réel compris entre 0 et 1 comme une probabilité : $0 \leq p \leq 1$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à r : $X(\Omega) = \{r, r+1, ...\}$
  - ⋆ Sa loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \binom{x-1}{r-1} \; p^r \; (1-p)^{x-r} \qquad \text{si} \qquad x \in \{r, r+1, ...\}$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = r \; \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = r \; \frac{1-p}{p^2}$$

- Définition alternative : La loi binomiale négative peut également être définie comme la loi du nombre d'échecs avant l'apparition du r^e succès (événement de probabilité p). Dans ce cas, la variable X' considérée ("nombre d'échecs") est une translation de la variable X précédente ("nombre d'essais") : $X' = X - r$.
  - ⋆ Le support subit la translation : $X'(\Omega) = \{0, 1, ...\} = \mathbb{N}$
  - ⋆ La loi de probabilité est modifiée :

$$\mathbb{P}\left[X' = x'\right] = \binom{x'+r-1}{x'} \; p^r \; (1-p)^{x'} \qquad \text{si} \qquad x' \in \mathbb{N}$$

  - ⋆ L'espérance subit la translation : $\mathbb{E}\left[X'\right] = r \; \frac{1-p}{p}$
  - ⋆ La variance n'est pas altérée : $\mathbb{V}\left[X'\right] = r \; \frac{1-p}{p^2}$

- Une loi binomiale négative de paramètres (r, p) peut être vue comme la somme de r lois géométriques indépendantes de paramètre p.
- R-project ("nombre d'échecs") : `dnbinom pnbinom qnbinom rnbinom`

$$\mathbb{P}\left[X = x\right] = \texttt{dnbinom(x-r, r, p)}$$

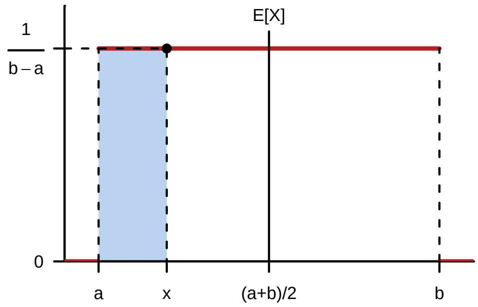
- Mathematica : `NegativeBinomialDistribution[n, p]`

Loi uniforme continue

La loi uniforme continue sur $[a,\ b]$ est la loi continue la plus simple. En particulier, la loi uniforme continue sur $[0,\ 1]$ est la loi simulée par les générateurs nombres pseudo-aléatoires et permet d'engendrer toutes les autres lois.

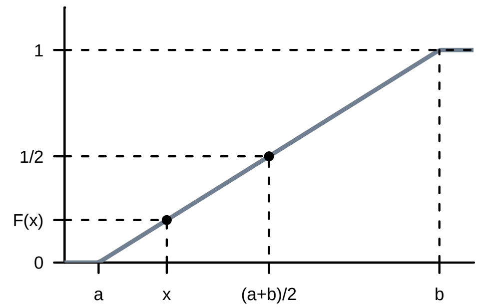
- Une variable aléatoire réelle continue X suit une <u>loi uniforme continue</u> sur $[a,\ b]$:
  - ⋆ Ses paramètres a et b sont deux réels vérifiant : $a < b$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels entre a et b : $X(\Omega) = [a,\ b]$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{si} \qquad x \in [a,\ b]$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Loi uniforme sur $[0,\ 1]$:
  - ⋆ Fonctions de densité et de répartition :

$$f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad F(x) = x \qquad \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

  - ⋆ Espérance et variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = \frac{1}{12}$$

  - ⋆ Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[0,\ 1]$, alors $a + b\ X$ est une loi uniforme sur $[a,\ a+b]$.
  - ⋆ Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[0,\ 1]$, alors $a + (b-a)\ X$ est une loi uniforme sur $[a,\ b]$.
  - ⋆ Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[a,\ b]$, alors $\frac{X-a}{b-a}$ est une loi uniforme sur $[0,\ 1]$.
  - ⋆ Méthode de transformation : Si X est une variable aléatoire uniforme sur $[0,\ 1]$ et si G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle absolument continue quelconque, alors la fonction de répartition de la variable $G^{-1}(X)$ est la fonction G. Par exemple, la variable $-\ln(1-X)$ suit une loi exponentielle de paramètre (1).

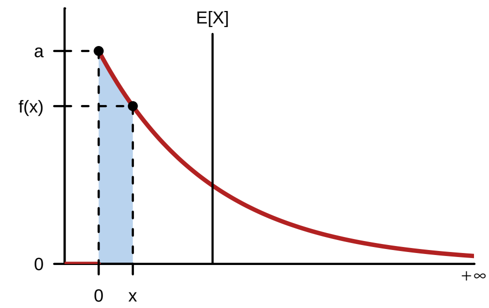
- R-project : `dunif punif qunif runif`
- Mathematica : `UniformDistribution[{min, max}]`

Loi exponentielle

La loi exponentielle est la loi du temps d'attente du premier événement lorsque les événements apparaissent de manière indépendante et selon un taux constant par unité de temps a.

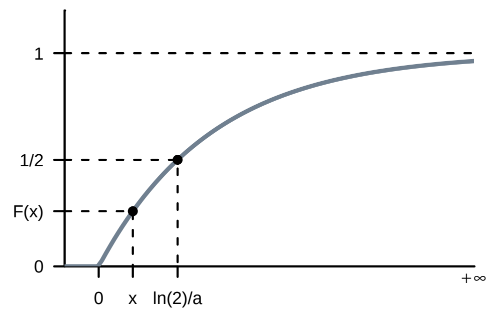
- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi exponentielle de paramètre (a) si :
  - ⋆ Son paramètre a est un réel positif non nul : $a \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels positifs : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x) = a \ \exp(-a\ x) \qquad \text{si} \qquad x \geq 0$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \exp(-a\ x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{a^2}$$

- Opérations sur les lois exponentielles :
  - ⋆ Si X suit une loi exponentielle de paramètre (a) alors $b\ X$ suit une loi exponentielle de paramètre $(\frac{a}{b})$.
  - ⋆ Si X suit une loi exponentielle de paramètre (a) alors $a\ X$ suit une loi exponentielle de paramètre (1).
  - ⋆ Si X suit une loi exponentielle de paramètre (1) alors $\frac{1}{a}\ X$ suit une loi exponentielle de paramètre (a).
  - ⋆ La somme de n variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre (a) suit une loi gamma de paramètres (shape, rate) $= (n, a)$.
- Le paramètre de la loi exponentielle peut être noté λ.
- On peut aussi rencontrer une définition de la loi exponentielle faisant intervenir un paramètre d'échelle / scale (β) à la place du paramètre d'intensité / rate (a) :

$$\beta = \frac{1}{a}$$

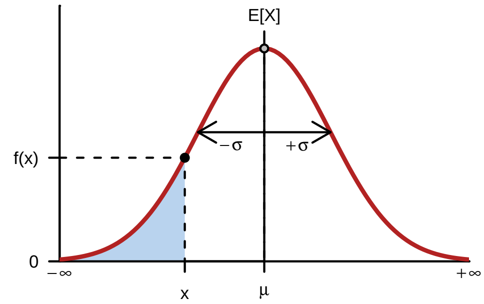
- R-project : `dexp pexp qexp rexp`
- Mathematica : `ExponentialDistribution[lambda]`

Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$

La loi normale, ou loi de Laplace-Gauss, est la loi sur laquelle repose la plupart des tests statistiques dits "paramétriques".

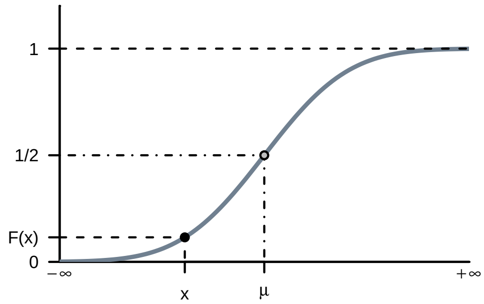
- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi normale de paramètres (μ, σ^2) si :
  - ⋆ Son paramètre μ est un réel : $\mu \in \mathbb{R}$
  - ⋆ Son paramètre σ est un réel positif non nul : $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels : $X(\Omega) = \mathbb{R}$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \mu \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \sigma^2$$

- Loi Normale Centrée-Réduite $\mathcal{N}(0, 1)$:
  - ⋆ Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{R}$$

  - ⋆ Fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - F(-x)$$

  N.B. : La fonction de répartition d'une variable normale centrée-réduite est souvent noté "Φ".

- Opérations sur les lois normales :
  - ⋆ Si X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
  - ⋆ Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $a + b\,X$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(a, b^2\right)$.
  - ⋆ Si X_1 suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ et X_2 suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{1,2}\right)$ où $\sigma_{1,2}$ est la covariance entre X_1 et X_2.
- R-project : `dnorm pnorm qnorm rnorm`
- Mathematica : `NormalDistribution[mu, sigma]`

Loi de χ^2

Si $(Y_1, Y_2, ..., Y_\nu)$ est une série de ν variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors :

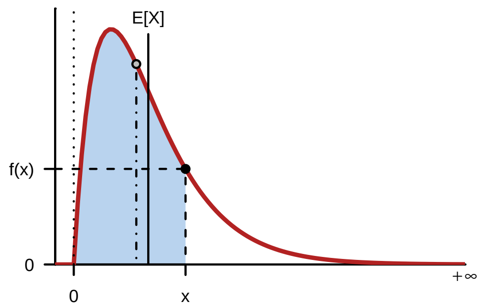
$$X = Y_1^2 + Y_2^2 + ... + Y_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i^2$$

est une variable aléatoire qui suit une distribution de χ^2 à ν degrés de liberté.

- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi de χ^2 à ν degrés de libertés si :
  - ⋆ Son paramètre ν "nombre de degrés de liberté" est un entier non nul : $\nu \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels positifs : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

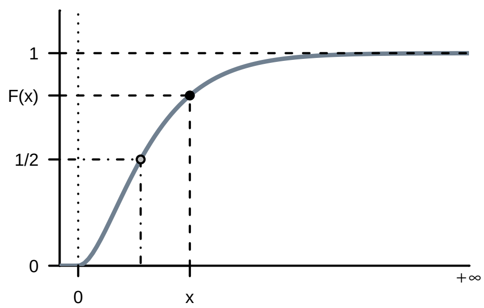
$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\; x^{(\nu-2)/2}\; \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad \text{si} \qquad x \geq 0$$

où $\Gamma(x)$ est la "fonction gamma".



- Fonction de répartition :

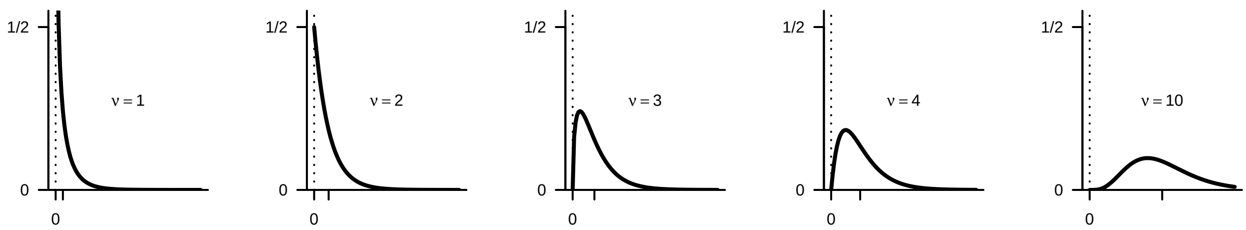
$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \nu \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = 2\nu$$

- Exemples de forme de la distribution de χ^2



- Somme de lois de χ^2 : Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des distributions de χ^2 à ν_1 et ν_2 degrés de liberté respectivement, alors : $X_1 + X_2$ suit une loi de χ^2 à $\nu_1 + \nu_2$ degrés de liberté.
- R-project : `dchisq pchisq qchisq rchisq`
- Mathematica : `ChiSquareDistribution[n]`

Loi de Student

Si Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une distribution $\mathcal{N}(0,1)$ et une distribution de χ^2 à ν degrés de liberté, alors :

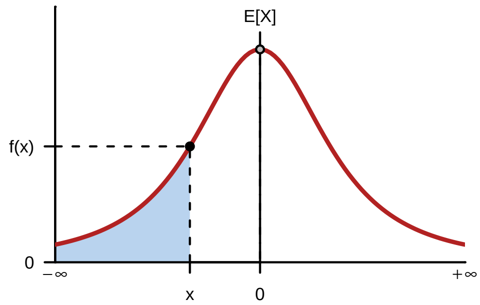
$$X = \frac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}$$

est une variable aléatoire qui suit une distribution de Student à ν degrés de liberté.

- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi de Student à ν degrés de libertés si :
  - ⋆ Son paramètre ν "nombre de degrés de liberté" est un entier non nul : $\nu \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels : $X(\Omega) = \mathbb{R}$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

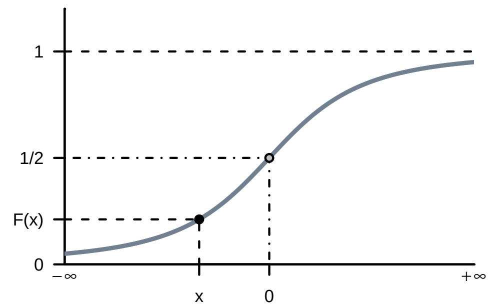
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{R}$$

où $B(x,y)$ est la "fonction bêta".



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$

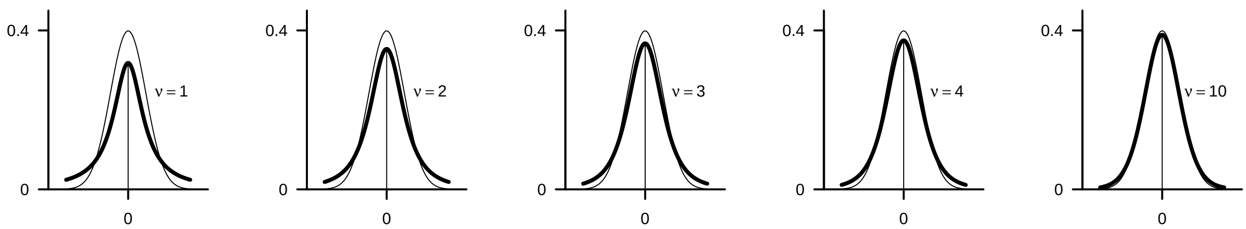


- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

L'espérance $\mathbb{E}[X]$ n'existe que si $\nu > 1$ et la variance $\mathbb{V}[X]$ n'existe que si $\nu > 2$.

- Exemples de forme de la distribution de Student :



Dans les graphiques, la courbe en trait fin représente la fonction de densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

- R-project : `dt pt qt rt`
- Mathematica : `StudentTDistribution[n]`

Loi de Fisher-Snedecor

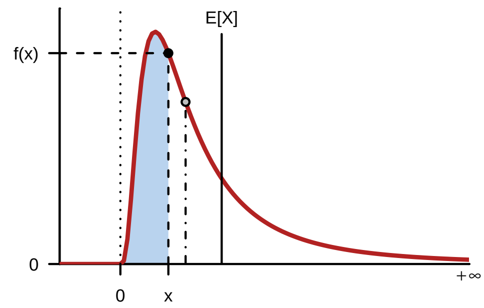
Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des distributions de χ^2 à ν_1 et ν_2 degrés de liberté respectivement, alors :

$$X = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2}$$

est une variable aléatoire qui suit une distribution de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.

- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de libertés si :
  - ⋆ Son paramètre ν_1 "nombre de degrés de liberté" est un entier non nul : $\nu_1 \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son paramètre ν_2 "nombre de degrés de liberté" est un entier non nul : $\nu_2 \in \mathbb{N}^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels positifs : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

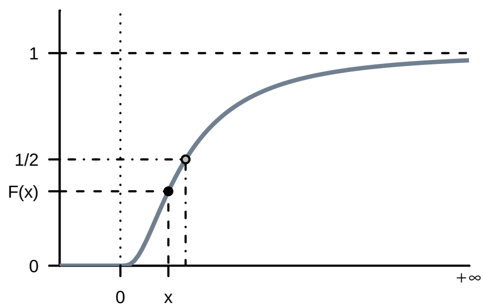
$$f(x) = \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu 2}\right)^{\nu_1/2} \, x^{(\nu_1-2)/2}}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) \, \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} \, x\right)^{(\nu_1+\nu 2)/2}} \qquad \text{si} \qquad x \geq 0$$



où $B(x, y)$ est la "fonction bêta".

- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = \frac{2 \, \nu_2^2 \, (\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1 \, (\nu_2 - 2)^2 \, (\nu_2 - 4)}$$

  L'espérance $\mathbb{E}\left[X\right]$ n'existe que si $\nu_2 > 2$ et la variance $\mathbb{V}\left[X\right]$ n'existe que si $\nu_2 > 4$.

- Si X est une variable de Student à ν degrés de liberté, alors X^2 suit une loi de Fisher-Snedecor à $(1, \nu)$ degrés de liberté.
- R-project : `df pf qf rf`
- Mathematica : `FRatioDistribution[n, m]`

Loi Log-Normale

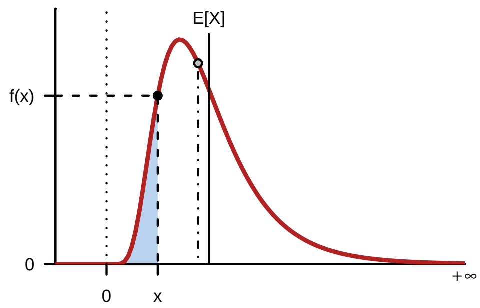
Si Y suit une loi Normale de paramètres (μ, σ^2), alors :

$$X = \exp(Y)$$

est une variable aléatoire qui suit une distribution Log-Normale de paramètres (μ, σ^2).

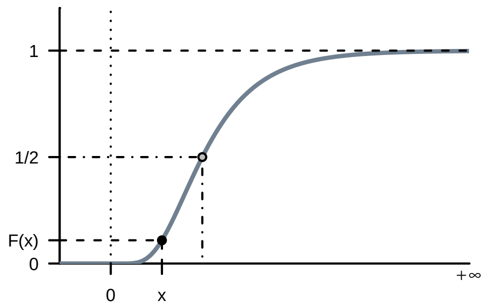
- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi Log-Normale de paramètres (μ, σ^2) si :
  - ⋆ Son paramètre μ est un réel : $\mu \in \mathbb{R}$
  - ⋆ Son paramètre σ^2 est un réel strictement positif : $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels strictement positifs : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\ \sigma^2}}\ \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{si} \qquad x > 0$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \ldots$$



- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \exp(\mu + \sigma^2/2) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \exp(2\mu + \sigma^2)\ (\exp(\sigma^2) - 1)$$

  Inversement :

$$\mu = \ln(\mathbb{E}[X]) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)$$

- R-project : `dlnorm plnorm qlnorm rlnorm`
- Mathematica : `LogNormalDistribution[mu, sigma]`

Loi de Cauchy

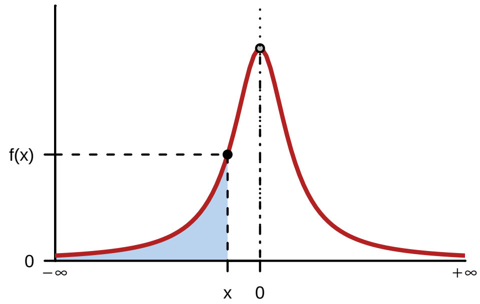
Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(0,1)$, alors :

$$X = \frac{Y_1}{Y_2}$$

est une variable aléatoire qui suit une distribution de Cauchy.

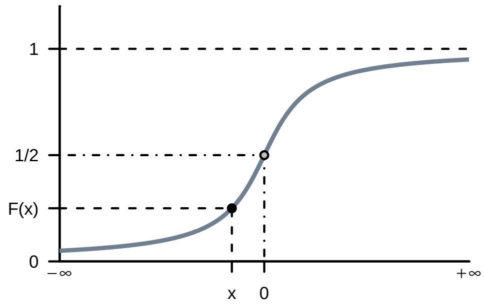
- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi de Cauchy si :
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels : $X(\Omega) = \mathbb{R}$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{R}$$



- Fonction de répartition :

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{R}$$



- Une variable de Cauchy ne possède aucun moment fini. Elle ne possède donc pas notamment d'espérance ou de variance.
- Une variable de Cauchy s'identifie à une variable de Student à 1 degré de liberté.
- On peut aussi rencontrer une définition de la loi de Cauchy faisant intervenir un paramètre de position / location (a) et un paramètre d'échelle / scale ($b > 0$), qui consiste à considérer la variable $Y = a + bX$ dont la densité est :

$$g(x) = \frac{1}{b\pi\left(1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} \qquad \text{si} \qquad x \in \mathbb{R}$$

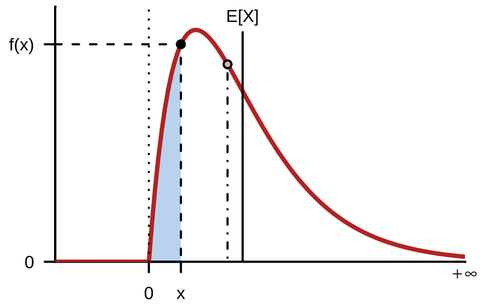
- R-project : `dcauchy pcauchy qcauchy rcauchy`
- Mathematica : `CauchyDistribution[a, b]`

Loi Gamma

- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi Gamma de paramètres (α, β) si :
  - ⋆ Son paramètre de forme "shape" α est un réel strictement positif : $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son paramètre d'échelle "rate" β est un réel strictement positif : $\beta \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels positifs : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

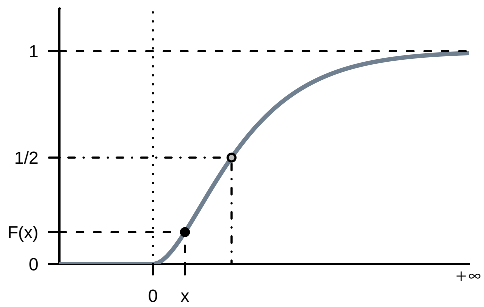
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, \beta^{-\alpha}\, \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \qquad \text{si} \qquad x \geq 0$$

où $\Gamma(x)$ est la "fonction gamma".



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$

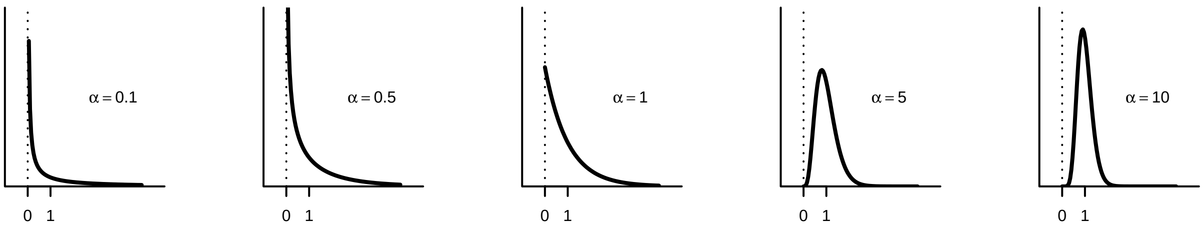


- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}[X] = \alpha\beta \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}[X] = \alpha\beta^2$$

- La loi Gamma est souvent utilisée pour modéliser l'hétérogénéité d'une grandeur d'intérêt à l'aide du paramètre de forme α. En pratique, le niveau d'hétérogénéité est relatif c'est-à-dire que $\mathbb{E}[X] = 1$. Dans ce cas, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ et $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\alpha}$. De grandes valeurs de α correspondent à peu d'hétérogénéité et de faibles valeurs de α correspondent à beaucoup d'hétérogénéité.

- Exemples de forme de la distribution Gamma avec $\mathbb{E}[X] = 1$:



- On peut aussi rencontrer une définition de la loi Gamma faisant intervenir un paramètre de d'intensité / rate (λ) à la place du paramètre d'échelle / scale (β) :

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

- R-project : `dgamma pgamma qgamma rgamma`

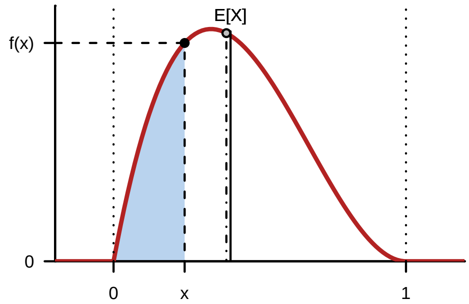
- Mathematica : `GammaDistribution[alpha, beta]`

Loi Bêta

- Une variable aléatoire réelle continue X suit une loi Bêta de paramètres (α, β) si :
  - ⋆ Ses deux paramètres de forme "shape" α et β sont des réels strictement positifs : $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son support est l'ensemble des réels entre 0 et 1 : $X(\Omega) = [0,\ 1]$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

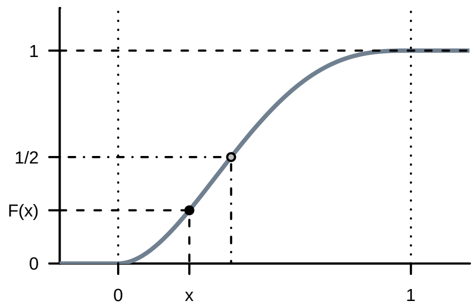
$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)}\ x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1} \qquad \text{si} \qquad x \in [0,\ 1]$$

où $B(x)$ est la "fonction bêta".



- Fonction de répartition :

$$F(x) = ...$$



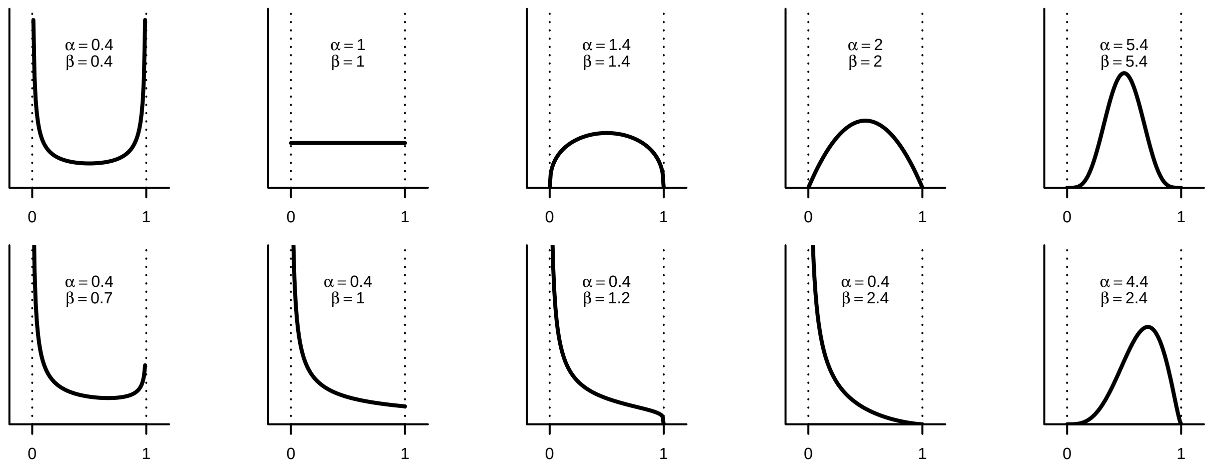
- Mode (pour $\alpha > 1$ et $\beta > 1$) :

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

- Espérance et Variance :

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}\left[X\right] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2\ (\alpha+\beta+1)}$$

- La loi Bêta est souvent utilisée, notamment en statistique bayésienne, pour modéliser la distribution d'une valeur de probabilité.
- Exemples de forme de la distribution Bêta :



- R-project : `dbeta pbeta qbeta rbeta`
- Mathematica : `BetaDistribution[alpha, beta]`

Loi Binormale

- Un couple de variables aléatoires réelles continues (X_1, X_2) suit une loi Binormale de paramètres $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ si :
  - ⋆ Ses paramètres μ_1 et μ_2 sont des réels : $\mu_1 \in \mathbb{R}$ et $\mu_2 \in \mathbb{R}$
  - ⋆ Ses paramètres σ_1^2 et σ_2^2 sont des réels strictement positifs : $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}_+^*$
  - ⋆ Son paramètre ρ est un réel compris entre -1 et +1 : $\rho \in [-1,\ +1]$
  - ⋆ Son support est le plan réel : $X(\Omega) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - ⋆ Sa fonction de densité f est :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}}\ \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2 - 2\rho\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]\left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right] + \left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]^2\right)\right]$$

$$\text{si} \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- Loi marginales :
  - ⋆ La loi marginale de X_1 est une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$
  - ⋆ La loi marginale de X_2 est une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$
- Lois conditionnelles :
  - ⋆ La loi conditionnelle de X_1 sachant $X_2 = x_2$ est une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$
  - ⋆ La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$
- Corrélation :
  - ⋆ Le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2 est ρ
  - ⋆ Si $\rho = 0$ alors X_1 et X_2 sont indépendantes
- Cas d'un couple de variables aléatoires doublement centrées et réduites :
  - ⋆ Densité :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}}\ \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x_1^2 - 2\rho\ x_1x_2 + x_2^2\right)\right]$$

  - ⋆ La loi conditionnelle de X_1 sachant $X_2 = x_2$ est une loi normale $\mathcal{N}\left(\rho\ x_2, 1-\rho^2\right)$
  - ⋆ La loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$ est une loi normale $\mathcal{N}\left(\rho\ x_1, 1-\rho^2\right)$