Lineare Algebra I

Benjamin Hartmann

1 1

2 2

3 3

4 Gruppen

Definition Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $\circ$ auf G, das heißt einer Abbildung
$\circ : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \circ b$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, $\forall a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

(ii) Es gibt ein Element $e \in G$ (das "neutrale Element") mit den folgenden Eigenschaften:

  (a) $e \circ a = a \; \forall a \in G$

  (b) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$ ("inverses Element") mit $a' \circ a = e$

Eine Gruppe G heißt abelsch oder kommutativ, wenn zusätzlich gilt

  (iii) $a \circ b = b \circ a \; \forall a, b \in G$

5 Körper

Definition Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \circ)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Verknüpfungen (Abbildungen)
$+ : K \times K \to K \; (a, b) \mapsto a + b$ (Addition)
$\circ : K \times K \to K \; (a, b) \mapsto a \circ b$ (Multiplikation) mit folgenden Eigenschaften:

(i) (K,+) ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element mit 0, das zu $a \in K$ inverse Element mit -a.

(ii) Sei $K^* = K \backslash \{0\}$. Damit gelte $a \circ b \in K^* \; \forall a, b \in K^*$, und die Abbildung $\circ : K^* \times K^* \to K^*$ definiert auf K^* die Struktur einer abelschen Gruppe $(K^*, \circ)$. Wir bezeichnen das neutrale Element mit 1, das zu $a \in K^*$ inverse Element mit a^{-1}.

(iii) $\forall a, b, c \in K$ gelte: $a \circ (a + b) = (a \circ b) + (a \circ c)$ (Distributivgesetz)

6 Vektorräume

Definition Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer menge V und zwei Verknüpfungen
$+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$ (Addition)
$\cdot : K \times V \to V$, $(\lambda, w) \mapsto \lambda \cdot w = \lambda w$ (Multiplikation)
sodass gilt:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Dabei heiße $0 \in V$ das zugehörige neutrale Element, $-v$ das zu $v \in V$ inverse Element.

(ii) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

  (a) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$
  (b) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
  (c) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
  (d) $1 \cdot v = v$

Definition Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt K-Untervektorraum, falls gilt:

(i) $U \neq \emptyset$

(ii) zu $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$

(iii) zu $\lambda \in K$ und $v \in U$ ist auch $\lambda v \in U$

Lemma 6.1 *Sei $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum, dann ist auch U selber ein K-Vektorraum (für die Einschränkung von + und $\cdot$ nach U).*

Lemma 6.2 *(Kurz) Der gemeinsame Durchschnitt von K-Untervektorräumen (in V) bildet wieder einen K-Untervektorraum(in V). DAS GILT NICHT FÜR DIE VEREINIGUNG.*

Lemma 6.3 *Sei V ein K-Vektorraum, $U_1, U_2 \subseteq V$ K-Untervektorräume von V, dann ist auch $U_1 + U_2 = \{v \in V | v = u_1 + u_2, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ ein K-Untervektorraum und heißt die Summe von U_1 und U_2 in V.*

7 Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme, Basen

Definition (i) Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination der $v_1, ..., v_n \in V$, falls $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ existieren mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$

(ii) Die Menge aller Linearkombinationen der $v_1, ..., v_n$ wird mit $\langle v_1, ..., v_n \rangle$ bezeichnet

Lemma 7.1 *$\langle v_1, ..., v_n \rangle$ ist ein K-Untervektorraum von V. Es ist der kleinste K-Untervektorraum von V, der alle v_i enthält und wird daher auch als der durch $v_1, ..., v_n$ erzeugte K-Untervektorraum von V bezeichnet.*

Definition (i) $v_1, ..., v_n$ heißt (endliches) Erzeugendensystem von V, falls $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$

(ii) V heißt endlich erzeugt, falls ein endliches Erzeugendensystem von V existiert

Definition Die Familie $v_1, ..., v_r$ heißt linear abhängig, wenn $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ existieren, $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i, mit $0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$

Schreibweise: $\{v_1, ..., \hat{v_j}, ..., v_r\} \setminus \{v_j\}$

Theorem 7.2 *Für eine Familie $v_1, ..., v_r \in V$ sind äquivalent:*

(i) *$v_1, ..., v_r$ ist linear abhängig*

(ii) *$\exists j \in \{1, ..., r\}$, sodass v_j eine Linearkombination von $\langle v_1, ..., \hat{v_j}, ..., v_r \rangle$ ist*

(iii) *es gibt ein $1 \leq j \leq r$, sodass $\langle v_1, ..., v_r \rangle = \langle v_1, ..., \hat{v_j}, ..., v_r \rangle$*

Lemma 7.3 *Ist $w \in V$ Linearkombination von $v_1, ..., v_r \in V$, so ist $v_1, ..., v_r, w$ linear abhängig.*

Definition linear abhängig $\Leftrightarrow \neg$ linear abhängig

Theorem 7.4 *$v_1, ..., v_r$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes Element $v \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ genau eine Darstellung als Linearkombination der $v_1, ..., v_r$ besitzt.*

Definition Die Familie $v_1, ..., v_r \in V$ heißt Basis von V, falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Theorem 7.5 *(Austauschsatz von Steinitz)*
Sei $v_1, ..., v_r$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums V, sei $u_1, ..., u_s$ eine Familie linear unabhäniger Vektoren in V. Dann lässt sich $u_1, ..., u_s$ durch hinzufügen von Vektoren aus $\{v_1, ..., v_r\}$ zu einer Basis von V ergänzen.

Corollary 7.6 *Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum enthält eine Basis. Genauer gilt:*

(i) Jedes System linear unabhängiger Vektoren lässt sich zu einer Basis ergänzen

(ii) Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis

8 Dimension

Lemma 8.1 *Sei $u_1, ..., u_n$ eine Basis des K-Vektorraums V, seien $v, w \in v$. Dann sind $v, w, u_2, ..., u_n$ linear abhängig.*

Theorem 8.2 *Ist $v_1, ..., v_r$ ein Erzeugendensystem, $u_1, ..., u_n$ eine Basis von V, so gilt $n \leq r$.*

Corollary 8.3 *Je zwei Basen eines endlich erzeugten K-Vektorraums haben dieselbe Elementezahl.*

Definition Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann heißt $dimV :=$ (Anzahl der Elemente einer basis von V) die Dimension von V.

Theorem 8.4 *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum. Dann ist auch U endlich erzeugt und es gilt $dimU \leq dimV$. Falls sogar $dimU = dimV$ gilt, so folgt $U = V$*

Definition Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum. Ein K-Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt Komplement zu U in V, wenn $U \cap W = 0$ und $U + W = V$.

Theorem 8.5 *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, U ein K-Untervektorraum. Dann existiert ein Komplement zu U in V.*

Definition Seien V_1, V_2 zwei K-Vektorräume. Mit den Verknüpfungen
+: $(V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \to V_1 \times V_2$
$((v_1, v_2), (v'_1, v'_2)) \mapsto ((v_1 + v'_1), (v_2 + v'_2)$
•: $K \times (V_1 \times V_2) \to V_1 \times V_2$
$(\lambda, (v_1, v_2)) \mapsto (\lambda v_1, \lambda v_2)$
Wird auch $V_1 \times V_2$ zu einem K-Vektorraum.

Theorem 8.6 *Seien U und V endlich erzeugte K-Untervektorräume des K-Vektorraums W. Dann gilt*

$$dim(U) + dim(V) = dim(U + V) + dim(U \cap V)$$

9 Erste Eigenschaften Linearer Abbildungen

Definition Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt K-Linear, falls gilt:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$

(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $v \in V, \lambda \in K$

Lemma 9.1 *Sei $f : V \to W$ K-linear. Dann gilt:*

(i) $f(u - v) = f(u) - f(v)$ *für alle u,v* $\in V$

(ii) $f(0) = 0$

(iii) $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)$ *für alle* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, $v_1, ...v_n \in V$

Lemma 9.2 *$Im(f)$ ist ein K-Untervektorraum in W und $ker(f)$ ist ein K-Untervektorraum in V.*

Lemma 9.3 *(i) Ist $f : V \to W$ die bijektive, K-lineare Abbildung, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}.W \to V$ eine K-lineare Abbildung*

(ii) Sind $g : U \to V$ und $f : V \to W$ zwei K-lineare Abbildungen, so ist auch $f \circ g : U \to W$ eine K-lineare Abbildung.

Definition Eine K-lineare abbildung $f :\to W$ heißt Isomorphismus, falls eine K-lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = id_W$ und $g \circ f = id_V$ existiert.
Zwei Vektorräume V,W heißen isomorph, falls ein K-linearer Isomorphismus $V \to W$ existiert.

Lemma 9.4 *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, seien $v_1, ..., v_n \in V$.*

(i) Ist $v_1, ..., v_n$ linear abhängig, so auch das System der Bildvektorn $f(v_1), ..., f(v_n)$

(ii) Ist $f(v_1), ..., f(v_n)$ linear unabhängig, so auch $v_1, ..., v_n$

(iii) Ist $v_1, ..., v_r$ ein Erzeugendensystem für V und f surjektiv, so ist auch $f(v_1), ..., f(v_r)$ ein Erzeugendensystem für W

(iv) Ist $v_1, ..., v_r$ linear unabhängig und f injektiv, dann ist auch $f(v_1), ..., f(v_r)$ linear unabhängig.

(v) *Wenn f ein Isomorphismus ist, so ist $v_1, ..., v_r$ eine Basis für V gdw. $f(v_1), ..., f(v_r)$ eine Basis für W ist.*

Theorem 9.5

Theorem 9.6 *Seien V, W endlich erzeugte K-Vektorräume*

(i) *V ist isomorph zu W gdw. $dim(V) = dim(W)$*

(ii) *V ist isomorph zu $K^{dim(V)}$*

Theorem 9.7 *Eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, falls $ker(f) = 0$.*

Theorem 9.8 *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, V endlich erzeugt. Dann gilt:*

$$dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

Corollary 9.9 *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, V endlich erzeugt.*

(i) *Ist f injektiv, so gilt $dim(V) \leq dim(W)$*

(ii) *Ist f surjektiv, so gilt $dim(V) \geq dim(W)$*

Corollary 9.10 *Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, so gelte*

$$dim(V) = dim(W) < \infty$$

Ist f injektiv oder surjektiv, so ist f ein Isomorphismus

Theorem 9.11 *Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis des K-Vektorraums V, seien $w_1, ..., w_n$ beliebige Elemente des K-Vektorraums.*
Dann existiert genau eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq n$.

10 Matrizen und lineare Abbildungen

Definition Sei K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume.
$Hom_K(V, W) :=$ Menge aller K-linearer Abbildungen (K-Homomorphismus) $V \to W$.

Theorem 10.1 *Die Abbildung* $Hom_K(V, W) \to Mat_{m,n}(K)$ *ist bijektiv.* $f \mapsto A_f$.

Theorem 10.2 *Seien V und W zwei K-Vektorräume*

(a) Sind $f, g \in Hom_K(V, W)$*, so ist auch* $f + g : V \to W$*, definiert durch* $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ *für alle* $v \in V$ *wieder ein Element in* $Hom_K(V, W)$.
Sind $\lambda \in K$ *und* $f \in Hom_K(V, W)$*, so ist auch* $\lambda f : V \to W$*, definiert durch* $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$ *für alle* $v \in V$*, wieder ein Element in* $Hom_K(V, W)$.
Mit diesen Operationen ist $Hom_K(V, W)$ *ein K-Vektorraum.*

(b) Sind V und W endlich erzeugt, so gilt $dim(Hom_K(V, W)) = dim(V) \cdot dim(W)$

Theorem 10.3 *Ist V endlich erzeugt und ist U ein K-Unterverktorraum in V, so ist*

$$U^\perp := \{l \in V^* | l(U) = 0\}$$

ein K-Unterverktorraum zu V^* *und es gilt*

$$dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V)$$

Theorem 10.4 *Ist V endlich erzeugt und U ein K-Unterverktorraum in* V^**, so ist*

$$^\perp L := \{v \in V | l(v) = 0 \text{ für alle } l \in L\}$$

ein K-Unterverktorraum in V und es gilt

$$dim(L) + dim(^\perp L) = dim(V)$$

Ferner: $(^\perp L)^\perp = L$.

Corollary 10.5 *Ist V endlich erzeugt, U ein K-Unterverktorraum in V, so* $^\perp(U^\perp) = U$.

Lemma 10.6 *Sei $n \in N$. Die Abbildung*
$\lambda \cdot K^n \to (K^n)^*$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \sum x_i y_i \right]$$
also $\left(\lambda(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix})\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *ist ein K-Linearer Isomorphismus.*

Theorem 10.7 *Spaltenrang(A) = Zeilenrang(A)*

Theorem 10.8 *dim(Im(f)) = Rang(A_f)*

Corollary 10.9 *(i) f ist genau dass surjektiv, wenn Rang(A_f) = dim(W) (=Zeilenzahl)*

(ii) f ist genau dann injektiv, wenn Rang(A_f) = dim(V) (=Spaltenzahl)

Corollary 10.10 *f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn Rang(A_f) maximal ist, d.h. Rang(A_f) = Zeilenanzahl = Spaltenanzahl*

Definition Eine Matrix $A \in Mat_{n,n}(K)$ heißt regulär, falls Rang(A) $= n$ gilt.

Lemma 10.11 *Seien $f : V \to W$ und $g : W \to X$ zwei K-lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten K-Untervektorräumen V,W,X. Für V,W,X sei jeweils eine Basis gewählt, seien A_f, A_g und $A_{g \circ f}$ die dies bezüglich zugehörigen darstellenden Matrizen von f,g und $g \circ f : V \to X$.*
Dann gilt $A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f$
(Kurz: Verkettung K-linearer Abbildungen entspricht der Multiplikation der darstellenden Matrizen)

Theorem 10.12 *Eine quadratische Matrix $A \in Mat_{n,n}(K)$ ist genau dann regulär, wenn ein $B \in Mat_{n,n}(K)$ existiert und $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

Theorem 10.13 *Die Menge $GL_n(K) := \{A \in Mat_{n,n}(K) | A \text{ regulär}\}$ ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.*

Kapitel 5: Lineare Gleichungssysteme, Basiswechsel, Gauß-Algorithmus

11 Lineare Gleichungssysteme

Theorem 11.1 *Es sind äquivalent:*

1. $Ax = y$ *besitzt (mindestens) eine Lösung für jedes* $y \in K^m$
2. *Rang(A)* $= m$ *(es muss dann auch* $m \leq n$ *gelten).*

Bemerkung: $Ax = y$ ist genau dann lösbar, wenn Rang(A) = Rang((A,y)).

Definition Sei U ein K-Untervektorraum des K-Vektorraums V, sei $v \in V$. Dann heißt $U + v := \{u + v | u \in U\}$ ein affiner Unterraum (der Dimension dim(U)) von V, oder auch **Nebenklasse** von U.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist $U + v$ **kein** K-Untervektorraum von V. Es **ist** ein K-Untervektorraum genau dann, wenn $v \in U$.

Lemma 11.2 *Seien* $v, w \in V$ *und* $U \subseteq V$ *ein K-Untervektorraum.*

(i) Es gilt entweder $U + v = U + w$ *oder* $(U + v) \cap (U + w) = \emptyset$

(ii) $U + v = U + w \Leftrightarrow v - w \in U$

Theorem 11.3 *(i)* $L := \{x \in K^n | Ax = 0\}$

(ii) Ist $\zeta \in K^n$ *eine Lösung von* $Ax = 0$*, so gilt* $L + \zeta = \{x \in K^n | Ax = y\}$*, das heißt die Lösungsmenge zu* $Ax = y$ *ist ein affiner Untervektorraum der Dimension n-Rang(A).*

Corollary 11.4 *Sei* $\zeta \in K^n$ *eine Lösung von* $Ax = y$*. Dann existieren* $\zeta_1, ...\zeta_r \in K^n$ *mit* $r = n - Rang(A)$*, sodass sämtliche lösungen von* $Ax = y$ *genau die Vektorn* $\zeta + b_1\zeta_1 + ... + b_r\zeta_r$ *mit* $b_1, ..., b_r \in K$*. dabei sind die* b_i *eindeutig bestimmt.*

Corollary 11.5 *Ist Rang(A)* $= n$ *(also A regulär), so besitzt* $Ax = y$ *höchstens eine Lösung.*

Corollary 11.6 *Es sind äquivalent:*

(i) $Ax = y$ *besitzt für jedes* $y \in K^m$ *genau eine Lösung*

(ii) $m = n$ *und A ist regulär*

w Gelten (i) und (ii), so ist für jedes $y \in K^m$ *die eindeutig bestimmte Lösung in (i) gegeben durch* $y = A^{-1}x$*.*

12 Basiswechsel

Lemma 12.1 *Bezüglich der Basen* $\{v'_j\}_j$ *und* $\{w'_h\}_h$ *wird* f *durch die Matrix* $Z \cdot A_f \cdot X^{-1}$ *dargestellt, das heißt es gilt* $A'_f = ZA_fX^{-1}$.

Theorem 12.2 *Zu einer gegebenen K-Linearen Abbildung* $f : V \to W$ *zwischen endlich dimensionalen K-Vektorräumen lassen sich Basen* $v_1, ..., v_n$ *von V und* $w_1, ..., w_m$ *zu W derart wählen, dass* $A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ *ist, mit* $r = dim(Im(f))$.

Theorem 12.3 *Sei* $A \in Mat_{m,n}(K)$

(i) Sei $Z \in Mat_{m,m}(K)$ *und* $X \in Mat_{n,n}(K)$ *beide regulär. Dann gilt* $Rang(A) = Rang(ZAX^{-1})$

(ii) Es existieren $Z \in Mat_{m,m}$ *und* $X \in Mat_{n,n}(K)$ *derart, dass* $ZAX^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ *mit* $r = Rang(A)$.

Definition Elementare Zeilenumformungen einer Matrix sind:

(I) Addition einer Zeile zu einer **anderen**

(II) Multiplikation einer Zeile mit einem $\lambda \in K, \lambda \neq 0$

Lemma 12.4 *Die Zeilenumformungen*

(III) Vertauschung zweier Zeilen

(IV) Addition des λ*-fachen (*$\lambda \in K, \lambda \neq 0$*) einer Zeile zu einer anderen.*

sind Hintereinanderausführungen elementarer Zeilenumformungen (I) oder (II).

Theorem 12.5 *Die Zeilenumformungen (I)-(IV) können durch Multiplikation mit einer regulären Matrix von* ***links*** *erreicht werden.*

Theorem 12.6 *(i) Jedes* $A \in Mat_{m,n}(K)$ *kann durch elementare Zeilenumformungen in ein* $A' \in Mat_{m,n}(K)$ *folgender Gestalt überführt werden: ist* $s = Rang(A)$*,so existiereren* $1 \leq l_1 < l_2 < ... < l_s \leq m$ *mit*

$$A' = (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_1l_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots 0 & a_2l_2 & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & & a_3l_3 & \cdots & \\ \vdots & \cdots & & & a_sl_s & \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a_il_i \neq 0$$

(ii) Jede quadratische reguläre Matrix kann durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführt werden.

Corollary 12.7 *Sei A eine reguläre $n \times n$ Matrix. Die elementaren Zeilenumformungen, welche A in I_n überführen, überführen I_n in A^{-1}. Es ist A das Produkt von Elementarmatrizen der Q^{st} und $Q^s(\lambda)$ wie in Beweis zu Satz 12.5.*

13 Faktorräume

Sei V in K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein K-Untervektorraum.

Definition ${}^V/_U := \{v + U | v \in V\}$ (= Menge der Nebenklassen von U in V)
Wir definieren
+: ${}^V/_U \times {}^V/_U \to {}^V/_U$ (Addition)
•: $K \times {}^V/_U \to {}^V/_U$ (Skalarmultiplikation)
wie folgt: sind $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit zugehörigen Nebenklassen $v_1 + U$, $v_2 + U \in {}^V/_U$, so sei
$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U$
Ist $\lambda \in K$ mit $v \in V$ mit zugehöriger Nebenklasse $v + U \in {}^V/_U$, so sei
$\lambda \cdot (v + U) := \lambda v + U$

Theorem 13.1 *${}^V/_U$ ist mit der obigen Defnition ein Vektorraum - der Faktor- oder auch Quotientenraum von V nach U. Es existiert eine natürliche,surjektive K-lineare Abbildung $p : V \to {}^V/_U$ mit $Ker(p) = U$; die Projektionsabbildung. Insbesondere gilt: $dim(U) + dim({}^V/_U) = dim(V)$ (Ker + Im = V).*

Lemma 13.2 *(Universelle Abbildungseigenschaft des Faktorraums): Sei nun $U \subseteq V$ wie oben, ferner $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung mit $U \subseteq Ker(f)$. Dann existiert genau eine K-lineare Abbildung mit $\hat{f} : {}^V/_U \to W$ mit $\hat{f} \circ p = f$.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & W \\ {}^V/_U \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Theorem 13.3 *Homomorphiesatz:*
sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Bezeichne (Inklusion) $\subset: Im(f) \to W$ die Inklusionsabbildung von $Im(f) \subseteq W$ (also $\subset(x) = x$ für alle $x \in Im(f)$), ferner $p : V \to {}^V/_{Ker(f)}$ die Projektionsabbildung auf ${}^V/_{Ker(f)}$.

Es existiert genau ein K-linearer Isomorphismus $f' : {}^{V}/_{Ker(f)} \overset{\sim}{\to} Im(f)$ mit $f = \subset \circ f' \circ p$, das heißt derart, dass

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & W \\ {}^{V}/_{Ker(f)} \arrow[r, "\exists! \hat{f}"] & Imf \arrow[u, "\subset"] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Theorem 13.4 *(1. Isomorphiesatz):*
Seien U,U' zwei K-Vektorräume eines K-Vektorraums V. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus $(U' + {}^{W}/_{U} \simeq {}^{U'}/_{(U \cap U')}$.

14 Fehlt noch

15 Permutationen

Definition Sei $n \in$ N. Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ heißt Permutation (der menge $\{1, ..., n\}$).

Theorem 15.1 *Die menge S_n der Permutationen der Menge $\{1, ..., n\}$ heißt bezüglich der Komposition eine Gruppe: die symmetrische gruppe. Das neutrale Element ist id, das zu $\pi \in S_n$ inverse Element ist die Umkehrabbildung π^{-1} von π. Ist $n > 2$, so ist S_n nicht abelsch. S_n enthält $n!$ Elemente.*

Definition Zu $1 \leq i < j \leq n$ sei die Permutation $(ij) \in S_n$ definiert durch $(ij)(i) = j$, $(ij)(j) = i$, mit $(ij)(l) = l$ für alle $l \in \{1, ..., n\}$ (ohne $\{i, j\}$). Die Permutationen $(ij) \in S_n$ zu $1 \leq i < j \leq n$ heißen Transpositionen.

Lemma 15.2 *Jede Permutation lässt sich als produkt von Transpositionen schreiben, d.h. für jedes $\pi \in S_n$ existieren $\varrho_1, ..., \varrho_k$ mit $\pi = \varrho_1 \circ ... \circ \varrho_k$ (wobei weder $\varrho_1, ..., \varrho_k$ noch k eindeutig bestimmt sind).*

16 Multilineare Abbildungen

Definition Gegeben seien K-Vektorräume $V_1, ..., V_n, W$. Eine Abbildung $m : V_1 \times ... \times V_n \to W$ heißt K-Multilinear, wenn sie K-Linear in jeder Komponente ist, das heißt wenn für jedes $1 \leq i \leq n$ gilt:
$m(v_1, ..., v_{i-1}, \lambda' v_i' + \lambda'' v_i'', v_{i+1}, ..., v_n) = \lambda' m(v_1, ..., v_i', ..., v_n) + \lambda'' m(v_1, ..., v_i'', ..., v_n)$

für alle $v_i \in V_i$ und $\lambda', \lambda'' \in K$.
Ist $W = K$, so heißt m eine Multilinearform.
Ist $n = 2$, so heißt m eine K-Lineare Abbildung und ist $n = 2$ und $W = K$, so heißt m eine K-Bilinearform.

Theorem 16.1 *Für $1 \leq 1 \leq n$ sei $v_1^{(i)}, ..., v_{d_i}^{(i)}$ Basis von V_i mit $d_i = dim(V_i)$. Weiterhin seien Vektoren $w_{j_1}, ..., w_{j_n} \in W$ für $1 \leq j_1 \leq d_1, ..., 1 \leq j_n \leq d_n$ vorgegeben, dann existiert genau eine multilineare Abbildung $m : V_1 \times ... \times V_n \to W$ mit $m(v_{j_1}^{(1)}, ..., v_{j_n}^{(n)}) = w_{j_1}, ..., w_{j_n}$ $\forall 1 \leq j_1 \leq d_i, ..., 1 \leq j_n \leq d_n$.*

Lemma 16.2 *Ist $m : V \times ... \times V \to W$ K-Multilinear-alternierend, so gilt*

(i) $m(v_1, ..., v_n) = -m(v_1, ..., v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, ..., v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, ...)$, $\forall v_1, ...v_n \in V$, $\forall 1 \leq i, j \leq n$

(ii) Ist $1 + 1 \neq 0$ in K, so gilt die Umkerung in (i), d.h. ist $m : V \times ... \times V \to W$ K-Multilinear und gilt $m(..., v, ..., v', ...) = -m(..., v', ..., v, ...)$ $\forall v, v' \in V$, so ist m alternierend.

Lemma 16.3 *Ist $m : \overbrace{V \times ... \times V}^{n} \to W$ K-Multilinear und alternierend, und $\pi \in S_n$, so gilt:*
$m(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(n)}) = sgn(\pi) m(v_1, ..., v_n)$

Lemma 16.4 *Ist $n > dim(V)$, so ist jede alternierende K-Multilineare Abbildung $m : \underbrace{V \times ... \times V}_{n} \to W$ die Nullabbildung*

Theorem 16.5 *Sei $n = dim(V)$. Bis auf skalare Vielfache gibt es genau eine alternierende K-Multilinearform $m : \underbrace{V \times ... \times V}_{n} \to K \neq 0$.*

Definition Eine alternierende K-Multilinearform $\underbrace{V \times ... \times V}_{n} \to K \neq 0$ heißt Determinantenform auf V. Bezeichnung: Δ_v

Theorem 16.6 *Sei $n = dim(V)$ und $v_1, ..., v_n \in V$. Dann gilt: das System $v_1, ..., v_n$ ist genau dass linear unabhängig, wenn $\Delta_v(v_1, ..., v_n) \neq 0$.*

Definition det(f) := λ heißt Determinante von f.

Theorem 16.7 *f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $det(f) \neq 0$.*

Proof Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V, dann:

$$\begin{aligned} \text{f ist ein Isomorphismus} &\Leftrightarrow f(v_1), ..., f(v_n) \text{ ist eine Basis von V} \\ \text{Satz 16.6} &\Leftrightarrow \Delta_v(f(v_1), ..., f(v_n)) \neq 0 \\ \text{Def. von det} &\Leftrightarrow det(f)\Delta_v(v_1, ..., v_n) \neq 0 \\ \text{Satz 16.6} &\Leftrightarrow det(f) \neq 0 \end{aligned}$$

Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V, dazu $A = A_f = (a_{ij})$ die darstellende Matrix von f (bezüglich Basis $v_1, ..., v_n$ für Quelle und Ziel von f), also $f(v_j) = a_{1j}v_1 + ... + a_{nj}v_n$

Lemma 16.8 $det(f) = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1)1} \cdot ... \cdot a_{\pi(n)n}$

17 Die Determinante einer quadratischen Matrix