Brückenkurs Mathematik

Jonas Köppl, Maximilian Reif, Peter Mader

Universität Passau

Agenda

Agenda

Agenda

Bevor wir uns mit Beweisen beschäftigen können, müssen zunächst die dafür notwendigen logischen Grundlagen erarbeitet werden. Hierzu benötigen wir eingangs ein paar Definitionen.

Definition 2.1

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist. Dabei ist es nicht erforderlich, sagen zu können, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Am besten veranschaulichen wir uns das mit einem Beispiel und einer Übungsaufgabe.

Beispiel 2.2

1. *Es regnet. (Zeit- und ortsabhängig wahr oder falsch.)*
2. *11 ist durch 5 teilbar. (Falsch.)*
3. *Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Wahr, Beweis folgt.)*
4. *Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge. (Unbewiesen, Stand 17.10.18.)*

Wir interessieren uns vor allem für mathematische Aussagen und deren Wahrheitsgehalt. Zunächst benötigen wir jedoch noch Möglichkeiten, um mehrere Aussagen *logisch zu verknüpfen*.

Definition 2.3

Wenn P und Q Aussagen sind, dann heißt $P \wedge Q$ die Konjunktion von P und Q. Der Wahrheitswert von $P \wedge Q$ ist definiert durch die Wahrheitswerte von P und Q mittels folgender Wahrheitstafel:

P	Q	$P \wedge Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Das heißt $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q beide wahr sind und sonst falsch.

Beispiel 2.4

1. *($\sqrt{2}$ ist irrational)* $\wedge$ *($\sqrt{2} > 0$) (Wahr.)*
2. $(2 + 2 = 4) \wedge (3 + 2 = 7)$ *(Falsch.)*

Definition 2.5

Wenn P und Q Aussagen sind, so heißt $P \vee Q$ die Disjunktion von P und Q. Die definierende Wahrheitstafel ist gegeben durch:

P	Q	$P \vee Q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das heißt $P \vee Q$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

Beispiel 2.6

1. *($\sqrt{2}$ ist irrational)* $\vee$ *($\sqrt{2} > 0$) (Wahr.)*
2. $(2 + 2 = 4) \vee (3 + 2 = 7)$ *(Wahr.)*

Bemerkung 2.7

Im Gegensatz zur Umgangssprache ist mit dem mathematischen oder stets das inklusive oder gemeint. Möchte man das exklusive oder verwenden, so nutzt man den Ausdruck „entweder … oder…“.

Definition 2.8

Wenn P eine Aussage ist, dann heißt $\neg P$ die Negation von P. Definierende Wahrheitstafel:

P	$\neg P$
w	f
f	w

Definition 2.9

Wenn P und Q zwei Aussagen sind, so heißt $P \Rightarrow Q$ (sprich: wenn P, dann Q) die Implikation von Q durch P. Definierende Wahrheitstafel:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel 2.10

1. *Wenn* $3 > 2$, *dann teilt* 5 *die Zahl* 10. *(Wahr.)*
2. *Wenn* $2 > 3$, *dann ist die Erde eine Scheibe. (Wahr.)*

Definition 2.11

Wenn P und Q Aussagen sind, so heißt die Verknüpfung $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ die Äquivalenz von P und Q. Abkürzend schreibt man auch $P \iff Q$. Die definierende Wahrheitstafel ist:

P	Q	$P \iff Q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Agenda

Agenda

Definition 3.1

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die in einer Menge zusammengefassten Objekte werden auch als Elemente von M bezeichnet.

Bemerkung 3.2

Um besser über Mengen und ihre Elemente sprechen zu können, brauchen wir noch ein wenig Notation.

1. *Ist x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$.*
2. *Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$.*

Beispiel 3.3

In diesem Beispiel lernen wir einige Mengen und gängige Bezeichnungen kennen, damit wir uns später Schreibarbeit sparen können.

1. *Die Menge der natürlichen Zahlen:* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
2. *Die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der* 0*:* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. $M = \{rot, gelb, blau\}$.
4. *Die Menge aller Geraden und Dreiecke der Ebene.*
5. *Die Menge aller Polynome* $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *mit reellen Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
6. *Die leere Menge* $\emptyset$. *Sie enthält keine Elemente.*

Definition 3.4

Seien X, Y Mengen. Die Menge X heißt Teilmenge von Y (und Y heißt Obermenge von X), falls jedes Element von X auch ein Element von Y ist. In Zeichen: $X \subseteq Y$. Für die Negation von $X \subseteq Y$ wird $X \nsubseteq Y$ geschrieben.

Beispiel 3.5

1. *Die Menge $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.*
2. *Es gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.*

Definition 3.6

Sei X eine Menge, so bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X. $\mathcal{P}(X)$ heißt die Potenzmenge von X.

Beispiel 3.7

Betrachte die Menge $X = \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Agenda

Betrachte zunächst die folgenden beiden Sätze:

(i) Für jede natürliche Zahl x gilt $x \geq 1$.

(ii) x ist kleiner als 5.

Dann ist (i) eine (wahre) Aussage, während man von (ii) nicht sagen kann, ob es wahr oder falsch ist. Also ist (ii) keine Aussage. Setzt man in (ii) für x eine beliebige natürliche Zahl ein, so erhält man aber eine Aussage. Im Satz (i) kommt x als *gebundene* Variable vor, im Satz (ii) als *freie* bzw. *ungebundene Variable*.

Definition 3.8

Sätze (hier im umgangssprachlichen Sinn), in denen eine freie Variable x vorkommt und die nach Ersetzen dieser Variablen x durch ein mathematisches Objekt zu einer Aussage werden, heißen Prädikate (= Eigenschaften) von x. Sie werden beispielsweise mit $P(x)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.9

Ein Prädikat $P(x)$ ist nicht zu verwechseln mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Letztere hat als Argument immer eine Menge.

Einige oft verwendete Prädikate erhalten eigene Symbole.

Definition 3.10

Sei X eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat.

1. *Die Aussage „Für alle $x \in X$ gilt $P(x)$“wird abgekürzt durch:*

   $$\forall x \in X: \ P(x).$$

   Das Symbol $\forall$ wird auch als Allquantor bezeichnet.

2. *Die Aussage „Es gibt ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt“wird abgekürzt durch:*

   $$\exists x \in X: \ P(x).$$

   Das Symbol $\exists$ wird auch als Existenzquantor bezeichnet.

3. *Die Aussage „Es gibt genau ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt“wird abgekürzt durch:*

   $$\exists! x \in X: \ P(x).$$

   oder

   $$\exists_1 x \in X: \ P(x).$$

Bemerkung 3.11

Es gilt:

$$[\neg(\forall x \in X\colon\ P(x))] \iff [\exists x \in X\colon\ \neg P(x)].$$
$$[\neg(\exists x \in X\colon\ P(x))] \iff [\forall x \in X\colon\ \neg P(x)].$$

Definition 3.12

Sei X eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat. Dann bezeichne

$$\{x \in X \mid P(x)\}$$

diejenige Teilmenge von X, die aus allen Elementen von X besteht, für die $P(x)$ wahr ist. Diese Darstellung einer Menge heißt auch intensional. Das bloße Aufzählen der beinhalteten Elemente wird als extensional bezeichnet.

Beispiel 3.13

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$.
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$.

Die Beschreibung auf der linken Seite ist jeweils die intensionale Schreibweise, während auf der rechten Seite die extensionale Mengenschreibweise verwendet wird.

Mit Hilfe der gerade eingeführten Notation können wir nun elementare Mengenoperationen definieren.

Definition 3.14

Seien X, Y zwei Mengen.

1. $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ *heißt Vereinigung von X und Y.*
2. $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$ *heißt Durchschnitt von X und Y.*
3. $X \setminus Y := \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$ *heißt relatives Komplement von Y in X.*
4. *Ist $Y \subset X$, so heißt $X \setminus Y$ das Komplement von Y bzgl. X und wird mit Y^c bezeichnet.*

Definition 3.15

Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen lassen sich auf beliebig viele Mengen verallgemeinern. Sei dazu I eine Menge und für alle $i \in I$ sei A_i eine Menge.

1. *Die Menge $\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I\colon\ x \in A_i\}$ heißt die Vereinigung der Mengen A_i, $i \in I$.*
2. *Falls $I \neq \emptyset$ heißt die Menge $\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I\colon\ x \in A_i\}$ der Durchschnitt der Mengen A_i, $i \in I$.*

Bemerkung 3.16

1. *Schreibweise für* $I = \mathbb{N}$: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ *bzw.* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
2. *Schreibweise für* $I = \{1, ..., n\}$: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *bzw.* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Agenda

Agenda

Definition 4.1

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Die Zahl a heißt Teiler von b und b heißt Vielfaches von a, wenn es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = a \cdot c$. Man schreibt dann $a \mid b$. Die Negation ist $a \nmid b$.

Definition 4.2

Sei $n \in \mathbb{Z}$.

1. *Die Zahl n heißt gerade, falls $2 \mid n$.*
2. *Falls n nicht gerade ist, so heißt n ungerade.*

Definition 4.3

Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, falls $p > 1$ ist und 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind die p teilen. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, die keine Primzahl ist, heißt zusammengesetzt.

Agenda

Unter einem mathematischen Satz (Lemma, Korollar, etc.) verstehen wir eine nicht-triviale mathematische Aussage, für die ein gültiger Beweis vorliegt.

Bemerkung 4.4

Zur Begriffsklärung:

- **Satz, Theorem**: *Dies ist das typische Resultat einer Theorie.*
- **Hauptsatz**: *So wird ein besonders wichtiger Satz in einem Teilgebiet der Mathematik genannt, beispielsweise der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis.*

Fortsetzung

- **Lemma**: Diese Bezeichnung wird in verschiedenen Zusammenhängen verwendet. Zum einen bezeichnet es ein kleines, meist technisches Resultat, einen *Hilfssatz*, der zum Beweis eines wichtigen Satzes verwendet wird. Zum anderen handelt es sich dabei um besonders wichtige *Schlüsselgedanken*, die in vielen Situationen nützlich sind. Solche Lemmata werden dann auch häufig mit dem Namen ihres Erfinders bezeichnet (z.B. Lemma von Pratt, Lemma von Urysohn, Lemma von Zorn, etc.).
- **Proposition**: Dies ist die lateinische Bezeichnung für Satz und wir manchmal synonym verwendet, meist aber um ein Resultat zu bezeichnen, dessen Wichtigkeit zwischen der eines Hilfssatzes und der eines Theorems liegt.
- **Korollar**: Dies ist die Bezeichnung für einen Satz, der aus einem anderen Satz durch triviale oder sehr einfache Schlussweise folgt. Manchmal ist es aber auch ein Spezialfall eines vorhergehenden Satzes, dem besondere Aufmerksamkeit gebührt.

Direkter Beweis

Der direkte Beweis beweist eine Aussage durch schrittweises Folgen von Aussagen auf Basis der gegebenen Voraussetzung. Sei dazu V die Voraussetzung und B die zu zeigende Behauptung. Unsere Aufgabe ist es also nun, geeignete Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n$ zu finden, sodass schließlich gilt:

$$(V \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_n \Rightarrow B)$$

Ist uns dies gelungen, so haben wir gezeigt, dass aus der Voraussetzung V stets auch die Behauptung B folgt.

Am besten veranschaulichen wir uns dies anhand eines einfachen Beispiels aus der Zahlentheorie.

Proposition 4.5

Sei $a \in \mathbb{Z}$ gerade. Dann ist auch $a^2 = a \cdot a$ gerade.

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{Z}$ gerade. Nach Definition existiert dann $c \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2 \cdot c$.
Somit folgt:

$$a^2 = a \cdot a = 2c \cdot 2c = 2(2c^2).$$

Wegen $2c^2 \in \mathbb{Z}$ ist also auch a^2 gerade. $\square$

Allgemeiner lassen sich die folgenden Regeln zeigen:

Satz 4.6

1. *Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$a \mid 0, \quad 1 \mid a, \quad -1 \mid a, \quad a \mid a, \quad -a \mid a, \quad a \mid -a.$$

2. *Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$(a \mid b \;\wedge\; b \mid c) \Rightarrow a \mid c.$$

3. *Seien $a, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$. Gilt $a \mid b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$:*

$$a \mid x_1 b_1 + \dots + x_n b_n.$$

4. *Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$(a \mid c \;\wedge\; b \mid d) \Rightarrow ab \mid dc.$$

Indirekter Beweis

Eine weitere oft verwendete Beweistechnik ist die des *Indirekten Beweis*. Diese beruht auf der folgenden logischen Äquivalenz: Seien V und B zwei Aussagen, dann gilt:

$$(V \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg V).$$

Diese Beweistechnik bietet sich in einigen Fällen an, da die rechte Implikation manchmal einfacher zu zeigen ist als die linke.
Zusammengefasst ergibt sich das folgende Schema um eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen:

1. Wir nehmen a n es gelte $\neg B$ (und bringen dies auch zum Ausdruck, sodass auch der Leser oder Korrektor sieht, was wir vorhaben).
2. Aus der Aussage $\neg B$ und anderen uns zur Verfügung stehenden Definitionen und Sätzen leiten wir $\neg V$ ab.
3. Wegen der oben beschrieben Äquivalenz gilt dann auch $V \Rightarrow B$.

Diese Vorgehensweise werden wir nun verwenden um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.7

Sei $n \in \mathbb{Z}$, sodass n^2 gerade ist. Dann ist auch n gerade.

Beweis:

Sei also $n \in \mathbb{Z}$ ungerade. Wir zeigen nun, dass dann auch das Quadrat von n ungerade ist. Da n ungerade ist existiert $c \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2c + 1$. Somit erhalten wir durch Anwendung der ersten binomischen Formel:

$$n^2 = (2c+1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1.$$

Also ist n^2 ungerade und die Behauptung gezeigt. $\square$

Widerspruchsbeweis

Der *Widerspruchsbeweis* (auch bekannt als *Reductio ad absurdum*) basiert auf der logischen Äquivalenz:

$$(V \Rightarrow B) \iff \neg(V \wedge \neg B)$$

Ein Beweis per Widerspruch verläuft also nach dem folgenden Schema:

1. Wir bringen zum Ausdruck, dass der Beweis per Widerspruch erfolgen soll. Meist schreibt man einfach: „Widerspruchsannahme: $\neg B$“. Auch hier ist es wichtig, dass man die Negation der Aussage B richtig formuliert.
2. Aus den Aussagen V und $\neg B$ leiten wir nun eine Aussage ab, von der wir bereits wissen, dass sie falsch ist.
3. Um zu zeigen, dass dies der gewünschte Widerspruch ist markieren wir die Stelle durch einen Blitz oder durch das Wort „Widerspruch“.

Lemma 4.8

(i) *Ist* $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *so gilt für jeden Teiler a von b:* $1 \leq |a| \leq |b|$.

(ii) *Die einzigen Teiler von* 1 *sind* 1 *und* -1.

(iii) *Für* $a, b \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$a \mid b \ \wedge \ b \mid a \iff b = a \text{ oder } b = -a.$$

Beweis:

zu (i): *Seien* $a, b \in \mathbb{Z}$ *mit* $b \neq 0$ *und gelte* $a \mid b$. *Dann existiert ein* $n \in \mathbb{Z}$ *mit* $b = n \cdot a$ *und somit gilt auch* $n \neq 0$. *Die erste Ungleichung ist wegen* $b \neq 0$ *klar. Angenommen es gilt* $|a| > |b|$. *Dann folgt unter Verwendung elementarer Rechenregeln für die Betragsfunktion:*

$$|b| = |na| = |n||a| \geq |a| > |b|,$$

ein Widerspruch. Also gilt $1 \leq |a| \leq |b|$.
zu (ii), (iii): *[Zur Übung].* □

Lemma 4.9

Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_r$, sodass:

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r \tag{1}$$

Die Zerlegung (1) wird auch als die Primfaktorzerlegung von a bezeichnet.

Beweis:

Angenommen die Behauptung des Lemmas ist falsch. Dann gibt es insbesondere eine kleinste natürliche Zahl a mit $a > 1$, für die keine derartige Zerlegung existiert. Zunächst einmal halten wir fest, dass dann a keine Primzahl sein kann, denn sonst wäre a ja trivialerweise ein Produkt von Primzahlen.

Fortsetzung

Also gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N} \setminus \{1, a\}$ mit $b \mid a$. Daher existiert nach Definition $c \in \mathbb{N}$ mit $a = b \cdot c$. Nach Lemma 4.8 gilt ferner: $b < a$ und $c < a$. Da a die kleinste natürliche Zahl ist, die keine derartige Zerlegung besitzt lassen sich b und c in Primfaktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} b &= p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \\ c &= p_{s+1} \cdot \ldots \cdot p_k \end{aligned}$$

Somit folgt

$$a = bc = p_1 \ldots p_s p_{s+1} \ldots p_k$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also besitzt jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung. $\square$

Auf Basis dieses Lemmas können wir nun den folgenden, auf Euklid zurückgehenden Satz beweisen. Auch diesen werden wir per Widerspruch beweisen.

Satz 4.10

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:

Die Negation von unendlich viele ist endlich viele. Also nehmen wir an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Sei also

$$P = \{p_1, \dots, p_n\}$$

die Menge aller Primzahlen. Setze nun

$$a = p_1 \dots p_n + 1.$$

Fortsetzung

Dann gilt offensichtlich $a > 1$. Nach Lemma 4.10 lässt sich a also in Primfaktoren zerlegen. Es gilt also $p_i \mid a$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $p_i \mid p_1 ... p_n$ gilt nach Satz 4.6: $p_i \mid a - p_1 ... p_n = 1$. Also $p_i \mid 1$. Dies liefert $p_i = 1$. Im Widerspruch dazu, dass p_i eine Primzahl ist. □

Ein weiteres klassisches Resultat, welches man per Widerspruch beweist, ist folgender Satz, den wir schon zuvor als Beispiel gesehen haben.

Satz 4.11

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Das heißt falls $q \in \mathbb{Q}$, dann gilt $q \neq \sqrt{2}$.

Beweis:

Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational. Dann existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ferner seien p und q teilerfremd. Es gilt also insbesondere:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Somit folgt durch Umstellen:

$$p^2 = 2q^2.$$

Fortsetzung

Also ist p^2 eine gerade Zahl. Nach Satz 4.7 ist damit auch p gerade, folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p = 2n$. Dies liefert wiederum:

$$2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2.$$

Also gilt insbesondere $q^2 = 2n^2$. Daher ist auch q durch zwei teilbar. Im Widerspruch dazu, dass p und q teilerfremd sind. Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Agenda

Agenda

Definition 5.1

Seien A, B zwei Mengen. Dann ist das kartesische Produkt von A und B definiert durch:

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definition 5.2

Seien A, B zwei Mengen und $A \times B$ das kartesische Produkt von A und B. Eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt dann auch eine (zweistellige) Relation (zwischen X und Y). Gilt $X = Y$ so spricht man auch von einer Relation auf X. Anstatt von $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Beispiel 5.3

Die folgenden Mengen sind Relationen:

1. $R_1 := \{(a,b) | a \neq b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $R_2 := \{(a,b) | a | b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. $R_3 := \{(a,b) | a \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Eine Relation kann verschiedene Eigenschaften haben:

Definition 5.4

Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation. R heißt

1. *reflexiv, falls:* $\forall x \in X: \ (x, x) \in R$,
2. *symmetrisch, falls:* $\forall x, y \in X: \ (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$,
3. *antisymmetrisch, falls:* $\forall x, y \in X: \ (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
4. *transitiv, falls:* $\forall x, y, z \in X: \ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Beispiel 5.5

Die bereits aus der Schule bekannte Relation $\leq$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch.

Definition 5.6

Eine Relation R auf einer Menge X wird als Äquivalenzrelation bezeichnet, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 5.7

Eine Relation R auf einer Menge X wird als partielle Ordnung bezeichnet, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Proposition 5.8

Sei X eine Menge. Dann ist durch

$$R := \{(A, B) \mid A \subseteq B\}$$

eine partielle Ordnung auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

Proposition 5.9

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist durch

$$R_m := \{(a, b) \mid m \text{ teilt } (b - a)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Agenda

Definition 5.10

Seien A, B nichtleere Mengen und R eine Relation zwischen A und B. R heißt

1. *linkstotal, falls:* $\forall a \in A\ \exists b \in B\colon\ (a, b) \in R.$
2. *rechtseindeutig, falls:*
   $\forall a \in A \forall b, c \in B\colon\ (a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow b = c.$

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation wird als Abbildung oder auch als Funktion bezeichnet.

Bemerkung 5.11

Wenn man die Begriffe der Linkstotalität und der Rechtseindeutigkeit zusammenfasst erhält man

$$\forall a \in A\ \exists! b \in B\colon\ (a, b) \in R.$$

Dies wird in der Literatur vereinzelt auch als Funktionseigenschaft bezeichnet.

Bemerkung 5.12

Funktionen können natürlich mit der für Relationen kennengelernten Notation aufgeschrieben werden, allerdings hat sich in der heutigen Zeit die folgende Notation für eine Funktion f von A nach B durchgesetzt:

$$f\colon\ A \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

Hierbei ist es wichtig anzumerken, dass jede Funktionsdefinition aus zwei Bausteinen besteht:

1. *Angabe von Definitions- und Wertebereich,*
2. *Angabe der Abbildungsvorschrift.*

Beispiel 5.13

1. *$f\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2$.*
2. *Sei X eine nichtleere Menge. Dann heißt die Abbildung*

   $$id_X\colon\ X \to X,\ x \mapsto x$$

   die Identität auf X.
3. *Nur durch $x \mapsto x^2$ ist keine Funktion definiert, da Definitions- und Wertebereich nicht spezifiziert sind.*

Oftmals ist es notwendig, Funktionen auf spezielle Eigenschaften zu untersuchen. Einige dieser Eigenschaften, die Ihnen im Laufe des Studiums noch häufiger begegnen, werden im Folgenden vorgestellt.

Definition 5.14

Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Abbildung $f\colon\ A \to B$ heißt

1. *injektiv, falls:*
$$\forall a_1, a_2 \in A\colon\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2,$$
2. *surjektiv, falls:*
$$\forall b \in B\ \exists a \in A\colon\ f(a) = b,$$
3. *bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.*

Beispiel 5.15

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ x \mapsto x^2.$$

Dann ist f nicht injektiv, denn es gilt: $f(-5) = 25 = f(5)$ *und* $-5 \neq 5$.
Zudem ist f auch nicht surjektiv, denn es gilt $f(x) = x^2 \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{Z}$.

Agenda

Definition 5.16

Seien X, Y nichtleere Mengen und sei $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung.

1. *Sei $A \subseteq X$. Dann heißt $f(A) := \{y \in Y | \exists x \in A\colon\ f(x) = y\}$ das Bild von A unter f.*
2. *Sei $B \subseteq Y$. Dann heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}$ das Urbild von B unter f.*

Beispiel 5.17

Betrachte die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x,$$

Sowie die Mengen $A = [0, 2]$ *und* $B = \{1, 3, 8, 9\}$.
Dann gilt:

$$f(A) = [-2, 0],$$
$$f^{-1}(A) = \{-1, -3, -8, -9\}.$$

Satz 5.18

Seien X, Y nichtleere Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, I eine Menge. Weiter seien A, B sowie A_i, $i \in I$, Teilmengen von X. Dann gilt:

1. $f(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$,
3. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,
4. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, *wobei im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.*

Satz 5.19

Seien X, Y nichtleere Mengen, $f\colon\ X \to Y$ eine Abbildung. Weiter seien I eine Menge sowie A, B und A_i, $i \in I$, Teilmengen von Y. Dann gilt:

1. $f^{-1}(A) = \emptyset \iff A \cap f(X) = \emptyset$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$,
3. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,
5. $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.