Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Расчетно-пояснительная записка к курсовому проекту по дисциплине «Численные методы»

«Исследование нелинейных процессов в диссипативных распределенных системах»

Выполнил(а) студент группы ИУ9-82 Атымханова М.

Проверил Каганов Ю.Т.

Москва, 2019 г.

Содержание

1 Введение

Множество различных научных, технических и социально-экономических процессов и явлений могут быть описаны системами нелинейных дифференциальных уравнений.

Огромный класс физических, химических и биологических сред, широко изучающихся нелинейной хаотической динамикой, описывается системой уравнений в частных производных реакция-диффузия. Для описания конкретных систем в экологии, химической кинетике, физике плазмы и многих других областях было предложено множество таких моделей.

В физике модели диссипативных сткутур носят конкретный характер, результаты моделирования хорошо сходятся с экспериментом. Теория диссипативных структур вошла в новую науку - синергетику, развиваемую Хакеном.[1] Математическая модель диссипативных структур имеет общий вид:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = F_i(x_1, x_2, ..x_n) + D_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial r^2}$$

В настоящее время имеется довольно много моделей диссипативных структур, построенных так, что достигается сходство решения модели с конкретными наблюдаемыми процессами. Несмотря на все многообразие этих процессов, большинство моделей содержат два уравнения вида:

$$u_t = D_1 u_{xx} + f(u, v, \mu)$$

$$v_t = D_2 v_{xx} + g(u, v, \mu)$$

где $D_i, i = \{1, 2\}$ - коэффициенты диффузии веществ u, v, которые остаются постоянными. Параметр μ отражает характеристики ткани, которые постепенно меняются в ходе развития. Особый интерес представляют задачи типа реакция-диффузия, поведение которых таково, что при всех значениях скалярного системного параметра меньше некоторого бифуркационного значения система реакция-диффузия имеет устойчивое стационарное и однородное по пространству решение, называемое термодинамической ветвью. При значениях скалярного системного параметра больше этого бифуркационного значения термодинамическая ветвь теряет устойчивость, а поведение решений усложняется. Это могут быть стационарные диссипативные структуры, периодические колебания или нерегулярные непериодические нестационарные структуры, называемые диффузионным хаосом, а также биологической (или химической) турбулентностью.

В работе [2] было показано, что любое решение системы уравнений реакция-диффузия в окрестности термодинамической ветви может быть выражено через комплекснозначную функцию

$$W_\tau = W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)W|W|^2$$

где $r = \varepsilon x, \tau = \varepsilon^2 t, c_1, c_2$ - действительные постоянные, значения которых определяются по коэффициентам D_1, D_2, функциям $f(u, v, \mu), g(u, v, \mu)$ и их производным на термодинамической ветви, а $\varepsilon = (\mu - \mu_0)^{\frac{1}{2}}$ - малый параметр.

В работе [3] была построена диаграмма, отражающая области параметров $\{c_1, c_2\}$, при которых на плоскости (x, y) наблюдаются плоские волны, спиральные волны и диффузионный хаос.

В данной работе уравнение Курамото-Цузуки решается численным методом, решение визуализируется для действительной части на пространстве четырехугольника в (x, y). Получены в сооствествии со значениями параметров из диаграммы работы [3] различные состояния системы и зафиксирован переход одного состояния в другое. Программа визуализации представляет анимацию с заданным промежутком во времени, что способствует наглядному представлению процессов, происходящих в нелинейных диссипативных средах диффузионного типа. Такие системы представляют, например, ветровые волны на воде[4] и ионно-звуковые волны в плазме[5].

2 Постановка задачи

Целью данной работы является исследование решения уравнения Курамото-Цузуки, описывающего автоколебательные среды в двумерном случае.

Для этого решаются следующие задачи:

- Задача выбора численного метода, разработка программной реализации
- Обоснование устойчивости метода и корректности аппроксимации поставленной задачи.
- Программная реализация графического отображения системы с изменением во времени с учетом приемлимой ограниченности по времени исполнения на длительных промежутках времени и больших пространственных областях.

3 Формализация задачи и выбор численного метода

Уравнение Курамото-Цузуки:

$$W_\tau = W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)W|W|^2$$

И его вторая краевая задача в двумерном случае

$$W_\tau = W + (1 + ic_1)(W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2)W|W|^2,$$

$$0 \le x \le l, 0 \le y \le l, 0 \le t < \infty,$$

$$W_x(0, y, t) = W_x(l, y, t) = W_y(x, 0, t) = W_y(x, l, t) = 0$$

$$W(x, y, 0) = W_0(x, y)$$

где $W = W(x, y, t) = u(x, y, t) + iv(x, y, t)$ - комплекснозначная функция, выражающая отклонение от термодинамической ветви, c_1, c_2 - действительные постоянные. Начальные данные несимметричны и имеют вид:

$$W_0 = u_0 + iv_0 = 0.1 \sum_{m,n=0}^{4} cos\frac{\pi mx}{l} cos\frac{\pi ny}{l}(1 + \frac{i}{m+1})$$

Относительно вещественных функций u,v задача принимает вид:
$u_t = u + u_{xx} + u_{yy} - c_1(v_{xx} + v_{yy}) - (u^2 + v^2)(u - c_2 v),$
$v_t = v + v_{xx} + v_{yy} - c_1(u_{xx} + u_{yy}) - (u^2 + v^2)(v + c_2 u),$
$0 \le x \le l, 0 \le y \le l, 0 \le t < \infty,$
$u_x(0, y, t) = u_x(l, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, l, t) = 0$
$v_x(0, y, t) = v_x(l, y, t) = v_y(x, 0, t) = v_y(x, l, t) = 0$
$u_0 = 0.1 \sum_{m,n=0}^{4} cos\frac{\pi mx}{l} cos\frac{\pi ny}{l}$
$v_0 = \sum_{m,n=0}^{4} \frac{0.1}{m+1} cos\frac{\pi mx}{l} cos\frac{\pi ny}{l}$

Для численных расчетов модели поставленной задачи использовался метод Рунге-Кутты 4-ого порядка аппроксимации. Для решения однородной системы с диффузией использовался аппарат разностных схем и метод переменных направлений[6]. Решения объединялись с использованием метода разделения по физическим процессам. В итоге на каждой итерации метода Рунге-Кутты заполнялась разностная сетка значениями действительной части функции-решения в точках сетки в текущий момент действия метода Рунге-Кутты.

4 Обзор метода

Исторически, метод переменных направлений развивался для решения задачи диффузии в прямоугольнике с помощью метода конечных разностей. Разностные схемы возникают в результате аппроксимации той или иной задачи математической физики и предназначены для ее приближенного решения.

Поэтому в теории разностных схем важное место занимают вопросы аппроксимации дифференциальных уравнений разностными и сходимости решений разностных задач к решениям исходных дифференциальных задач.

Однако, построенная разностная схема превращается в самостоятельный математический объект и может изучаться вне связи с породившей ее дифференциальной задачей. При этом отпадают проблемы аппроксимации и сходимости и остается лишь проблема корректности разностной схемы, т.е. ее разрешимости и устойчивости.

4.1 Разностная сетка

Рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, удовлетворяющую пространственной части основной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \in G, 0 < t < T \\ u(x,t) = \mu(x,t), & x \in \partial G, 0 \le t \le T \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in G + \partial G \end{cases} \quad (1)$$

Введем в $\bar{G} = G + \partial G$ равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1,\ x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1,\ h_2 N_2 = l_2;$$

$$\omega_h = \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, ..., N_1 - 1; \quad j = 1, 2, ..., N_2 - 1\};$$

$$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1 j},\ i = 1, 2, ..., N_1 - 1;\ j = 1, 2, ..., N_2 - 1\};$$

А также сетку по времени

$$\omega_t = \{t_n = n\tau; \quad n = 0, 1, ..., K - 1; \quad \tau K = T\}.$$

4.2 Минусы явной и неявной разностных схем

Условие устойчивости для явной разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу, накладывает очень жесткое ограничение на шаг τ: $\tau \leq (\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2})^{-1}/2$. Пусть, например, $h_1 = h_2 = 0.01$. Тогда устойчивость выполняется при $\tau \leq 0.25 * 10^{-4}$. Для $T = 1$ надо совершить не менее чем $n = T/\tau \geq 40000$ шагов по времени. А на практике зачастую возникает необходимость находить решение на существенно большие моменты времени, и вычисления с таким мелким шагом по времени оказываются неприемлимыми.

А для нахождения решения по неявной схеме на каждом шаге по времени необходимо решать систему $(N_1-1)\times(N_2-1)$ уравнений с наличием разностного оператора. Решение таких систем уравнений представляет значительную трудность вследствие большой размерности системы. Так, например, если $h_1 = h_2 = 0.01$ и $l_1 = l_2 = 1$, то число неизвестных y_{ij} в системе будет равно 10000. Что неприемлимо с точки зрения быстродействия программы.

4.3 Метод переменных направлений

Метод переменных направлений сочетает положительные стороны явной и неявной схем - простоту нахождения решения и абсолютную устойчивость. Метод основан на сведении многомерной задачи к последовательности одномерных задач.

Разностная схема метода переменных направлений для уравнения (1), называемая продольно-поперечной разностной схемой или схемой Писмена-Рэчфорда. В этой схеме переход к следующему временному слою осуществляется в два этапа. На каждом этапе уравнения являются неявными только по одной из переменных :

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^{n}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^{n}, x_{ij} \in \omega_h; \tag{2}$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}, x_{ij} \in \omega_h. \tag{3}$$

$$\Lambda_1 y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}}{h_1^2},$$

$$\Lambda_2 y_{ij} = y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{h_2^2},$$
$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

На первом этапе определеяются промежуточные значения $y_{ij}^{n+1/2}$ из уравнений

$$(E - 0.5\tau\Lambda_1) y_{ij}^{n+1/2} = (E + 0.5\tau\Lambda_2) y_{ij}^{n}; \tag{4}$$

$y_{0j}^{n+1/2}, y_{N_1 j}^{n+1/2}$ будут определены далее.

При каждом фиксированном $j = 1, 2, ..., N_2 - 1$ имеем систему с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки. То есть для реализции первого этапа требуется $O(N_1 N_2)$ арифметических действий.

На втором этапе, пользуясь найденными значениями $y_{ij}^{n+1/2}$, вычисляются значения y_{ij}^{n+1} из уравнений

$$(E - 0.5\tau\Lambda_2) y_{ij}^{n+1} = (E + 0.5\tau\Lambda_1) y_{ij}^{n+1/2}; \tag{5}$$

$y_{i0}^{n+1} = \mu(x_{i0}, t_{n+1}),\ y_{iN_2}^{n+1} = \mu(x_{i,N_2}, t_{n+1})$ При каждом фиксированном $i = 1, 2, ..., N_1 - 1$ уравнения решаются прогонкой по j. Для этого требуется $O(N1N2)$ операций.

Таким образом, для осуществления шага по времени в продольно-поперечной схеме требуется $O(N_1 N_2)$ арифметических действий.

Далее исключим из (3) промежуточные значения $y_{ij}^{n+1/2}$. Просуммируем и возьмем разность (2) и (3):

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - 2y_{ij}^{n+1/2} + y_{ij}^{n}}{0.5\tau} = \Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n})$$
$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n}}{0.5\tau} = 2\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^{n})$$

Из первого уравнения выражается $y_{ij}^{n+1/2}$:

$$y_{ij}^{n+1/2} = \frac{y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^{n}}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n})$$

После чего подставим $y_{ij}^{n+1/2}$ во второе уравнение. Получим:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_{ij}^{n+1/2} + y_{ij}^{n}) - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n})$$

Последнее равенство справедливо для всех $x_{ij} \in \omega_h$, если при каждом $j = 1, 2..N_2 - 1$ определить

$$y_{0j}^{n+1/2} = \frac{\mu_{0j}^{n+1} + \mu_{0j}^{n}}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{0j}^{n+1} - \mu_{0j}^{n})$$

$$y_{N_1j}^{n+1/2} = \frac{\mu_{N_1j}^{n+1} + \mu_{N_1j}^{n}}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{N_1j}^{n+1} - \mu_{N_1j}^{n})$$

4.4 Абсолютная устойчивость продольно-поперечной схемы

Для исследования устойчивости продольно-поперечной схемы рассмотрим соответсвующую ей однородную разностную задачу:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n}}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda(y_{ij}^{n+1/2} + y_{ij}^{n}) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n}), \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau$$

$y_{ij}^{n+1} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h, \quad t_n \in \omega_\tau$

$y_{ij}^{0} = u_0(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h$

В введенном ранее пространстве $H_h = \{y(x_{ij});\ x_{ij} \in \Omega_h,\ y|_{\gamma_h} = 0\}$ зададим операторы $A_1,\ A_2,\ A$ равенствами:

$A_1 y_{ij} = -\Lambda_1 y_{ij},\ A_2 y_{ij} = -\Lambda_2 y_{ij},\ x_{ij} \in \omega_h,\ y|_{\gamma_h} = 0; \quad A = A_1 + A_2$

Обозначая $y_n = y(t_n) \in H_h$, в операторной форме записи схема примет вид

$$(E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2}A(y_n + y_{n+1}) = 0,$$

откуда получается канонический вид схемы

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad B = E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2 + \frac{\tau}{2}A$$

Учитывая, что $A^* = A > 0$, условие $B \geq 0.5\tau A$, достаточное для устойчивости схемы, примет вид

$$E + \frac{\tau^2}{4}A_1A_2 + \frac{\tau}{2}A \geq \frac{\tau}{2}A$$

Это условие выполняется при любых $\tau,\ h_1\ h_2$, поскольку оператор A_1A_2 положительно определен.

Абсолютная устойчивость схемы доказана.

5 Реализация

Приведен листинг функции численного решения уравнения диффузии.

```
void Diffusion(double **f, double D){
    double **g = (double **) malloc((N1 + 1) * sizeof(double *));
    for (int i = 0; i < N1 + 1; ++i) {
        g[i] = (double *) malloc((N2 + 1) * sizeof(double));
    }

    double A = D * t / (2 * h1 * h1);
    double B = D * t / (2 * h2 * h2);
    double C = - 1 + D * (t /(h1 * h1));

    double **F = (double **) malloc((N1 + 1) * sizeof(double *));

    for (int i = 0; i < N1 + 1; ++i) {
        F[i] = (double *) malloc((N2 + 1) * sizeof(double));
    }

    double alpha[N1+1], betta[N1+1];

    for(int i = 1; i < N1; i++)
        for (int j = 1; j < N2; j++)
        F[i][j] = - f[i][j] - B * (f[i][j-1] - 2 * f[i][j] + f[i][j+1]);

    for (int j = 1; j < N2; j++){
        alpha[1] = 1;
        betta[1] = 0;
        for(int i = 1; i < N1; i++){
            alpha[i+1] = - A / (A * alpha[i] + C);
            betta[i+1] = (F[i][j] - A * betta[i])/(A * alpha[i] + C);
        }
        g[N1][j] = betta[N1] / (1 - alpha[N1]);
        for (int i = N1-1; i >= 0; i--)
            g[i][j]=(alpha[i+1] * g[i+1][j]) + betta[i+1];
    }
    C = - 1 + D * (t / (h2 * h2));

    for (int j = 1; j < N2; j++)
        for (int i = 1; i < N1; i++)
        F[i][j] = - g[i][j] - A * (g[i-1][j] - 2 * g[i][j] + g[i+1][j]);
    for (int i = 1; i < N1; i++) {
        alpha[1] = 1;
```

```
        betta[1] = 0;
        for(int j = 1; j < N2; j++){
            alpha[j+1] = - B / (B * alpha[j] + C);
            betta[j+1] = (F[i][j] - B * betta[j])/(B * alpha[j] + C);
        }
        f[i][N2] = betta[N2] / (1 - alpha[N2]);
        for (int j = N2-1; j > 0; j--){
            f[i][j] = (alpha[j+1] * f[i][j+1]) + betta[j+1];
        }
    }

    for (int i = 0; i < N1 + 1; ++i) {
        free(g[i]);
    }
    free(g);

    for (int i = 0; i < N1 + 1; ++i) {
        free(F[i]);
    }
    free(F);
}
```

Визуализации решения была спроектирована как комплекс программ, состоящий из программ с использованием библиотеки OpenGL и файлов с вершинным и фрагментным шейдерами. Программа осуществляет вызов функции просчета пространственной сетки и заполнения массива текущей итерации метода Рунге-Кутты по времени. Закончив предпросчет, с частотой обновления экрана программы пространственные решения сменяют друг друга во времени обеспечивая непрерывность процесса. Изменяя параметры системы можно наблюдать возникновение различных структур.

6 Тестирование

Известно [7], что решениями уравнения Курамото-Цузуки могут быть плоские волны, концентрические расходящиеся фазовые волны(пейсмекеры), а также спиральные волны. В некоторых областях изменения значений параметров (c_1, c_2) количество спиральных волн начинает увеличиваться, что приводит в конечном итоге к их разрушению и к установлению в активной автоколебательной среде , описываемой уравнением, хаотических или турбулентных режимов.

На рисунке 1 представлена диаграмма, отражающая области параметров $\{c_1, c_2\}$, при которых на плоскости (x, y) наблюдаются плоские волны, спиральные волны и диффузионный хаос.[3]

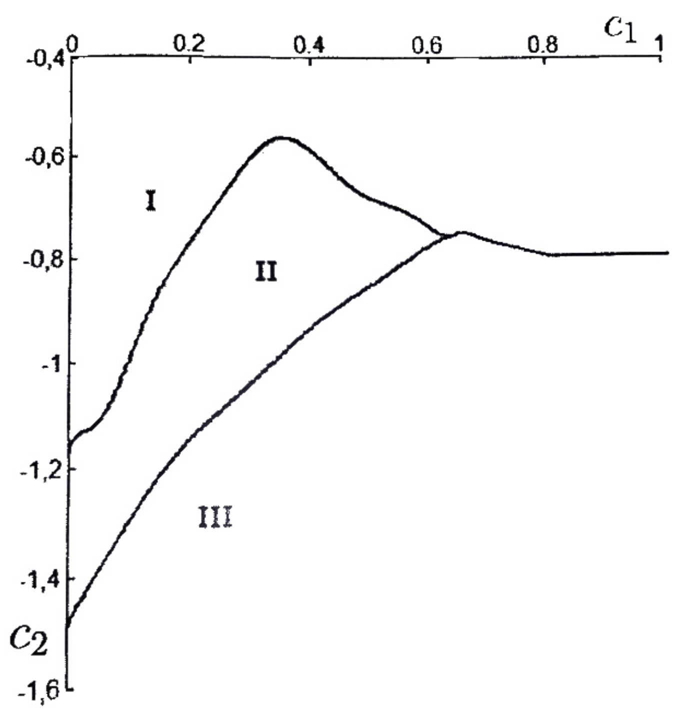

Рис. 1: Плоскость параметров $\{c_1, c_2\}$

- I - плоские волны
- II - спиральные волны
- III - диффузионный хаос

При тестировании программы для разных областей параметров удалось получить соответсвующие результаты.

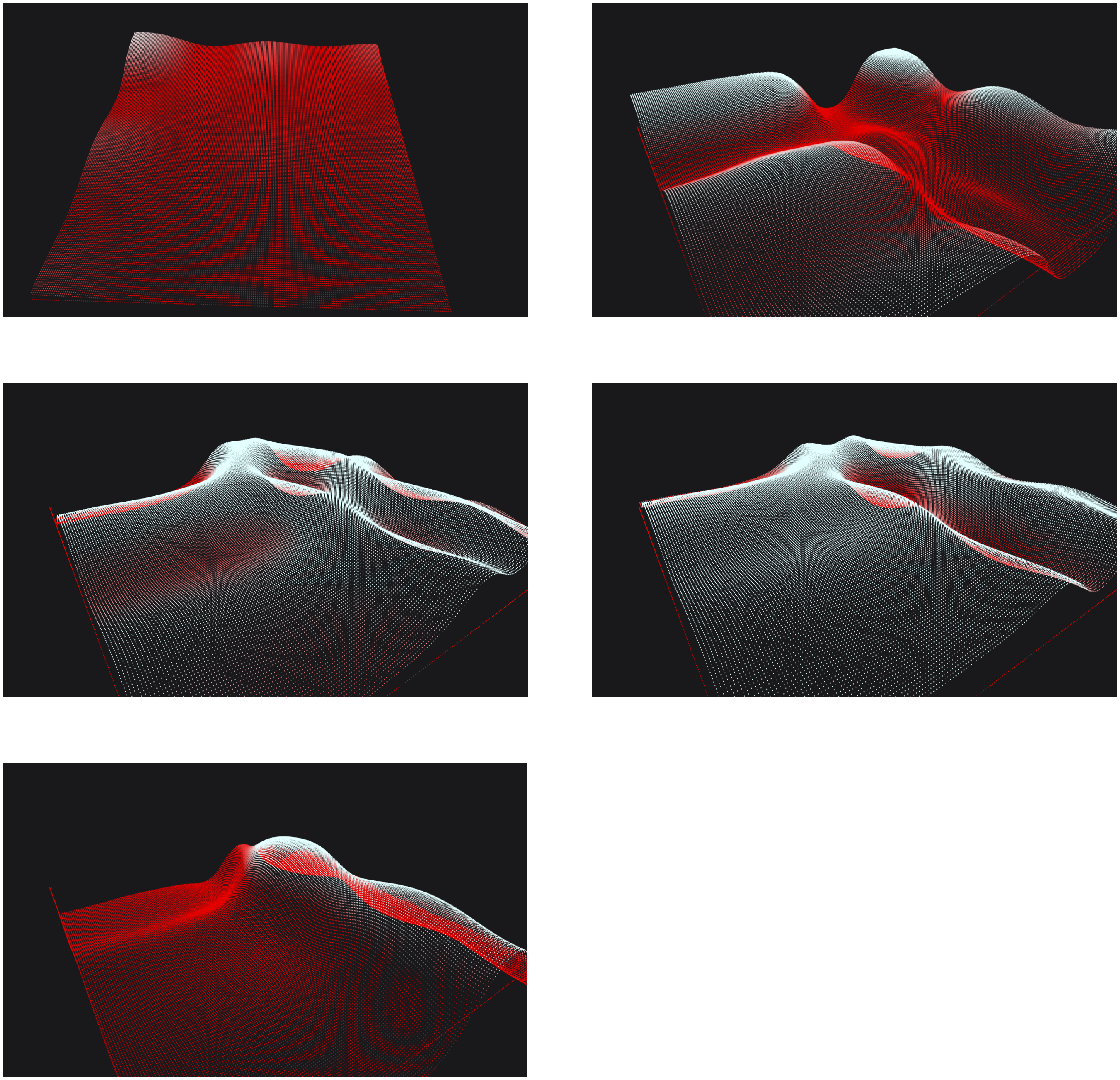

Рис. 4: Плоские волны - зарождение спиральной волны

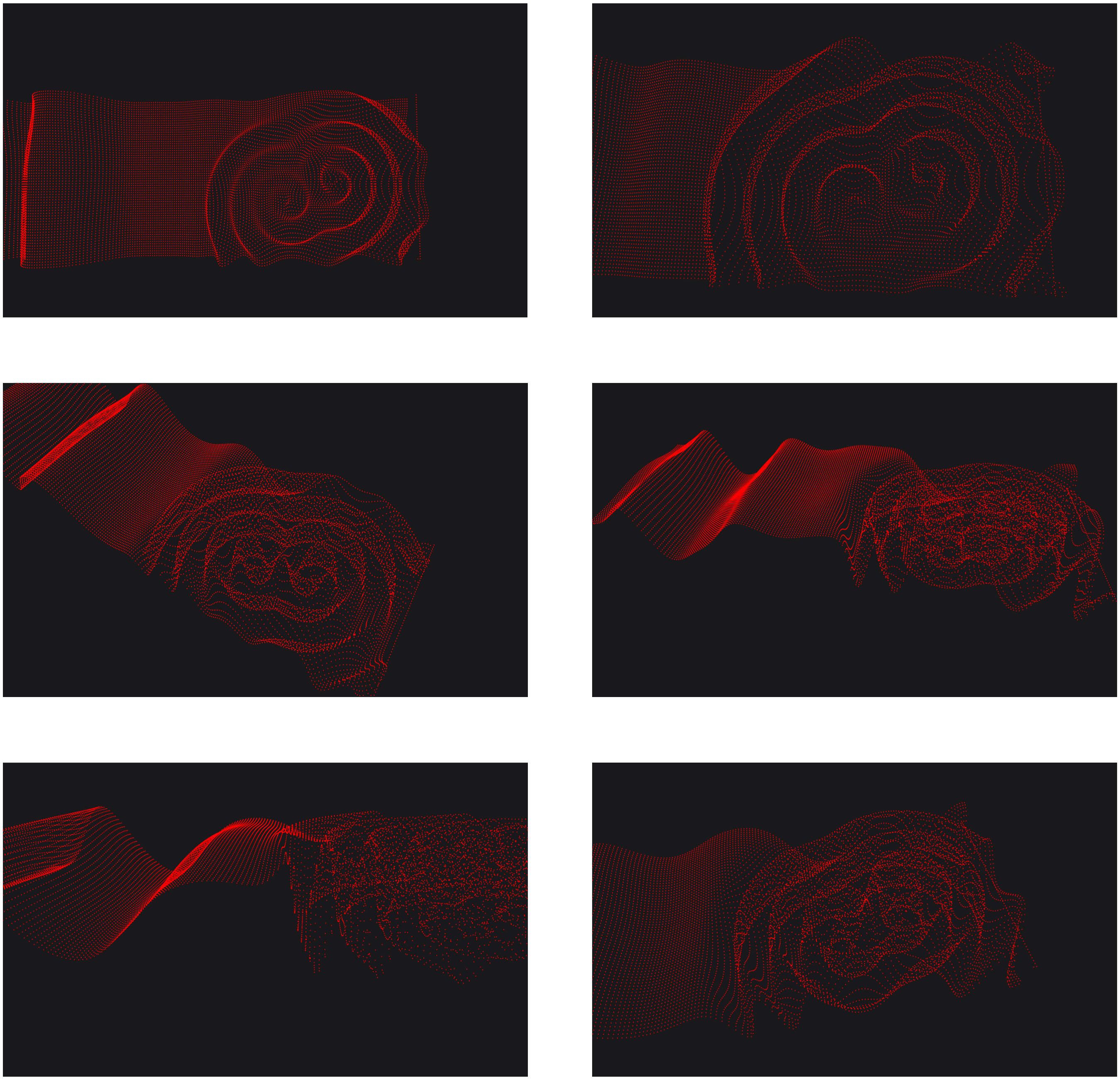

Рис. 7: Спиральные волны

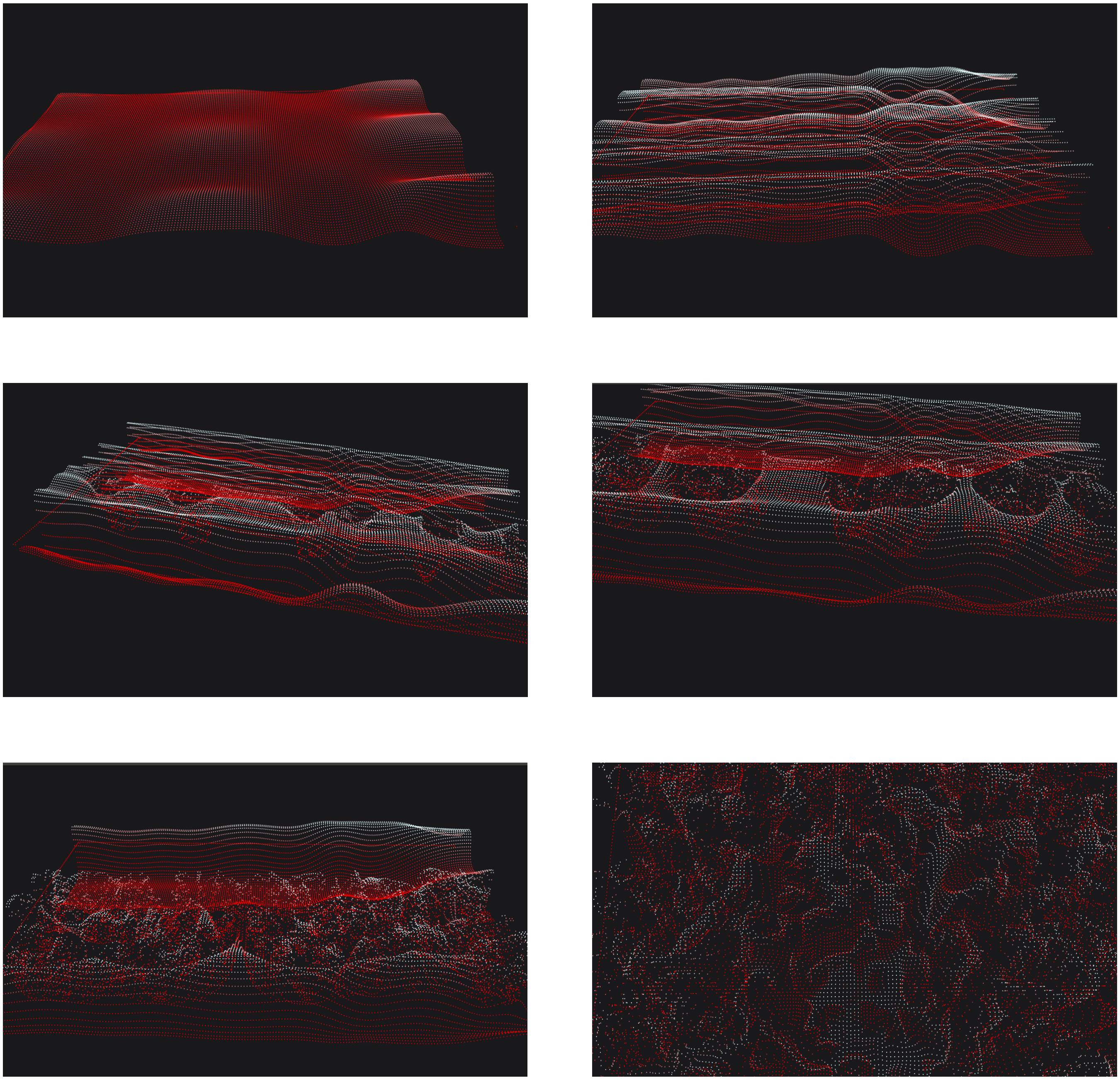

Рис. 10: Зарождение хаоса

7 Заключение

В работе была построена и исследована модель нелинейного процесса в диссипативной распределенной системе.

Наблюдались различные режимы возникновения диссипативных структур.

Исследована область параметров, отвечающая режиму взаимодействия пространственных и временных структур модели.

Получены следующие результаты:

- Корректно построенная модель с эффективным временем вычисления
- Оптимальная по времени выполнения и качеству изображения визуализация процесса в динамике.

Список литературы

[1] Хакен Г. *Синергетика.* / —М.:Мир, 1980

[2] Kuramoto Y., Tsuzuki T. *On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems.* / — Progr.Theor.Phys., 1975. Vol.54 N 3. P. 687-699.

[3] Карамышева Т.В. *Диффузионный хаос в системах уравнений реакция-диффузия* / —:дис. ... канд. физ-мат. наук: 05.13.18.

[4] Андронов А.А., Фабрикант А.Л. *Затухание Ландау, ветровые волны и свисток*// Нелинейные волны. - М.:Наука, 1979. С. 68-104.

[5] Рабинович М.И, Фабрикант А.Л. *Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах*// ЖЭТФ.1979.Т.77, Вып.2(8).С617-629.

[6] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.*// - М.:Наука, 191. 550с.

[7] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос.* / —М.:Наука, 1992, 541 с.