# Implementacja drzewa AVL w języku Python Jarosław Madej

## Wprowadzenie:

Drzewo AVL, nazywane również drzewem dopuszczalnym – zrównoważone binarne drzewo poszukiwań (BST), w którym wysokość lewego i prawego poddrzewa każdego węzła różni się co najwyżej o jeden.

Drzewo AVL pozostaje drzewem binarnych poszukiwań, co oznacza, że wierzchołki są uporządkowane w określony sposób. Zazwyczaj przyjmuje się, że elementy w lewym poddrzewie są mniejsze od wierzchołka, zaś w prawym – większe. Zrównoważenie drzewa osiąga się, przypisując każdemu węzłowi współczynnik wyważenia, który jest równy różnicy wysokości lewego i prawego poddrzewa. Może wynosić 0, +1 lub -1. Wstawiając lub usuwając elementy drzewa (tak, by zachować własności drzewa BST), modyfikuje się też współczynnik wyważenia, gdy przyjmie on niedozwoloną wartość, wykonuje specjalną operację rotacji węzłów, która przywraca zrównoważenie.

Algorytmy podstawowych operacji na drzewie AVL przypominają te z binarnych drzew poszukiwań, ale są poprzedzane lub następują po nich jedna lub więcej "rotacji". Algorytmy te mogą być realizowane poprzez rekurencję lub, co nawet prostsze, poprzez iteracyjne przechodzenie po krawędziach w górę lub w dół drzewa. Koszt każdej operacji to O(log n).

### Współczynnik zrównoważenia:

Każdy węzeł drzewa AVL posiada dodatkowe pole o nazwie bf (ang. balance factor – współczynnik równowagi). Wartość tego pola spełnia równanie:

bf = hL - hR

gdzie: hL i hR to odpowiednio wysokości lewego i prawego poddrzewa.

Z powyższego wzoru możemy wysnuć następujące wnioski:

bf = 1 - lewe poddrzewo jest wyższe o jeden poziom od prawego poddrzewa, <math>hL > hR

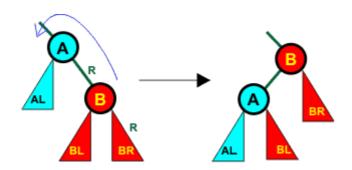
bf = 0 – oba poddrzewa są równej wysokości, hL = hR

bf = -1 – prawe poddrzewo jest wyższe o jeden poziom od lewego poddrzewa, hL < hR

Innych wartości w drzewie AVL współczynnik bf nie może przyjmować – ograniczenie to nosi nazwę własności drzewa AVL

## Rotacja RR:

W rotacji uczestniczą węzły A i B. Węzeł B zajmuje miejsce węzła A, węzeł A staje się lewym synem węzła B. Lewy syn węzła B (BL) staje się prawym synem węzła A.



# Algorytm rotacji RR dla drzewa AVL

#### Wejście:

root – referencja do zmiennej, która przechowuje adres korzenia drzewa AVL

A – wskazanie węzła głównego rotacji.

## Wyjście:

Wykonanie rotacji RR

### Dane pomocnicze:

B – wskazanie węzła B p – wskazanie ojca A

#### Lista kroków:

K01: B ← (A→right) ; w B umieszczamy adres prawego syna węzła A

K02:  $p \leftarrow (A \rightarrow up)$  ; w p umieszczamy ojca A

K03:  $(A \rightarrow right) \leftarrow (B \rightarrow left)$ ; prawym synem A staje się lewy syn B

K04: Jeśli (A $\rightarrow$ right)  $\neq$  nil, to (A $\rightarrow$ right $\rightarrow$ up)  $\leftarrow$  A ; jeśli prawy syn istnieje, to jego ojcem jest teraz A

K05:  $(B\rightarrow left) \leftarrow A$  ; lewym synem B staje się A K06:  $(B\rightarrow up) \leftarrow p$  ; ojcem B jest ojciec węzła A

K07:  $(A \rightarrow up) \leftarrow B$  ; natomiast A zmienia ojca na B

K08: Jeśli p = nil, to idź do K11 ; sprawdzamy, czy węzeł A był korzeniem

K09: Jeśli (p $\rightarrow$ left) = A, to (p $\rightarrow$ left)  $\leftarrow$  B ; jeśli nie, to uaktualniamy jego ojca Inaczej (p $\rightarrow$ right)  $\leftarrow$  B

K10: Idź do K12

Inaczej (A $\rightarrow$ bf)  $\leftarrow$  -1, (B $\rightarrow$ bf)  $\leftarrow$  1

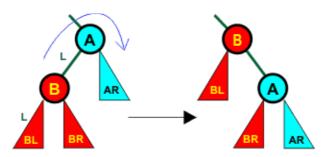
K11:  $\text{root} \leftarrow \text{B}$  ; jeśli A był korzeniem, to uaktualniamy korzeń

K12: Jeśli (B $\rightarrow$ bf) = -1, to (A $\rightarrow$ bf)  $\leftarrow$  0, ; modyfikujemy współczynniki równowagi (B $\rightarrow$ bf)  $\leftarrow$  0

K13: Zakończ

# Rotacja LL:

Rotacja LL jest lustrzanym odbiciem rotacji RR. W rotacji uczestniczą węzły A i B. Węzeł B zajmuje miejsce węzła A, węzeł A staje się prawym synem węzła B. Prawy syn węzła B (BR) staje się lewym synem węzła A.



# Algorytm rotacji LL dla drzewa AVL

#### Wejście:

root - referencja do zmiennej, która przechowuje adres korzenia drzewa AVL

A – wskazanie węzła głównego rotacji.

#### Wyjście:

Wykonanie rotacji LL

### Dane pomocnicze:

B – wskazanie węzła B p – wskazanie ojca A

#### Lista kroków:

K01: B←(A→left) ; w B umieszczamy adres lewego syna węzła A

K02:  $p \leftarrow (A \rightarrow up)$  ; w p umieszczamy ojca A

K03:  $(A \rightarrow left) \leftarrow (B \rightarrow right)$ ; lewym synem A staje się prawy syn B

K04: Jeśli(A $\rightarrow$ left)  $\neq$  nil, to(A $\rightarrow$ left $\rightarrow$ up)  $\leftarrow$ A ; jeśli lewy syn istnieje, to jego ojcem jest teraz A

K05:  $(B \rightarrow right) \leftarrow A$ ; prawym synem B staje się AK06:  $(B \rightarrow up) \leftarrow p$ ; ojcem B jest ojciec węzła AK07:  $(A \rightarrow up) \leftarrow B$ ; natomiast A zmienia ojca na B

 $K08: \quad Jeślip = nil, \ to \ id\acute{z} \ do \ K11 \\ \qquad \qquad ; \ sprawdzamy, \ czy \ węzeł \ A \ był \ korzeniem$ 

K09:  $Jeśli(p\rightarrow left) = A$ ,  $to(p\rightarrow left) \leftarrow B$  ; jeśli nie, to uaktualniamy jego ojca Inaczej  $(p\rightarrow right) \leftarrow B$ 

K10: Idź do K12

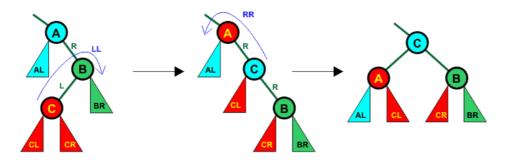
K11: root←B ; jeśli A był korzeniem, to uaktualniamy korzeń

K12:  $Jeśli(B \rightarrow bf) = 1$ , to  $(A \rightarrow bf) \leftarrow 0$ ,  $(B \rightarrow bf) \leftarrow 0$  ; modyfikujemy współczynniki równowagi Inaczej  $(A \rightarrow bf) \leftarrow 1$ ,  $(B \rightarrow bf) \leftarrow -1$ 

K13: Zakończ

## Rotacja RL:

Rotacja RL jest złożeniem rotacji LL i rotacji RR, dlatego nosi nazwę rotacji podwójnej. Pierwsza rotacja LL sprowadza gałąź drzewa do postaci dogodnej dla następnej rotacji RR.



Algorytm rotacji RL dla drzewa AVL

#### Weiście:

root – referencja do zmiennej przechowującej adres korzenia drzewa AVL

A – wskazanie węzła głównego rotacji

### Wyjście:

Wykonanie rotacji RL

#### Dane pomocnicze:

B – wskazanie węzła B

C – wskazanie węzła C

p – wskazanie ojca A

#### Lista kroków:

K01:  $B \leftarrow (A \rightarrow right)$ 

K02:  $C \leftarrow (B \rightarrow left)$ 

K03:  $p \leftarrow (A \rightarrow up)$ 

K04:  $(B\rightarrow left) \leftarrow (C\rightarrow right)$ 

K05: Jeśli( $B \rightarrow left$ )  $\neq nil$ , to( $B \rightarrow left \rightarrow up$ )  $\leftarrow B$ 

K06:  $(A \rightarrow right) \leftarrow (C \rightarrow left)$ 

K07: Jeśli( $A \rightarrow right$ )  $\neq nil$ , to( $A \rightarrow right \rightarrow up$ )  $\leftarrow A$ 

K08:  $(C \rightarrow left) \leftarrow A$ 

K09:  $(C \rightarrow right) \leftarrow B$ 

K10:  $(A \rightarrow up) \leftarrow C$ 

K11:  $(B\rightarrow up) \leftarrow C$ 

K12:  $(C\rightarrow up) \leftarrow p$ 

K13: Jeśli p = nil, to idź do K16

K14: Jeśli $(p\rightarrow left) = A$ ,to $(p\rightarrow left) \leftarrow C$ Inaczej  $(p\rightarrow right) \leftarrow C$ 

K15: Idź do K17

K16: root←C

K17:  $Jeśli(C \rightarrow bf) = -1$ ,  $to(A \rightarrow bf) \leftarrow 1$  $Inaczej(A \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K18:  $Jeśli(C \rightarrow bf) = 1$ ,  $to(B \rightarrow bf) \leftarrow -1$  $Inaczej(B \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K19:  $(C \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K20: Zakończ

; ustawiamy adresy węzłów biorących udział w rotacji

; lewym synem B staje się prawy syn C

; jeśli lewy syn B istnieje, to B staje się jego ojcem

; prawym synem A staje się lewy syn C

; jeśli prawy syn A istnieje, to A staje się jego ojcem

; lewym synem C staje się A

; prawym synem C staje się B

; ojcem A staje się C

; ojcem B staje się C

; ojcem C staje się były ojciec A

; sprawdzamy, czy A był korzeniem

; jeśli nie, to uaktualniamy byłego ojca A, aby był

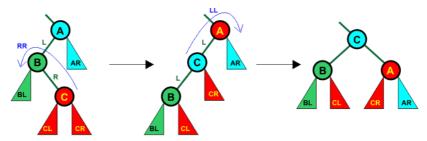
ojcem C

; w przeciwnym razie uaktualniamy korzeń

; uaktualniamy współczynniki równowagi

# Rotacja LR

Podobnie jak w przypadku rotacji pojedynczych RR i LL, rotacja LR jest lustrzanym odbiciem rotacji RL.



# Algorytm rotacji LR dla drzewa AVL

#### Wejście:

root – referencja do zmiennej przechowującej adres korzenia drzewa AVL

A – wskazanie węzła głównego rotacji

### Wyjście:

Wykonanie rotacji LR

#### Dane pomocnicze:

B – wskazanie węzła B C – wskazanie węzła C p – wskazanie ojca A

#### Lista kroków:

K01:  $B \leftarrow (A \rightarrow left)$ 

K02:  $C \leftarrow (B \rightarrow right)$ 

K03:  $p \leftarrow (A \rightarrow up)$ 

K04:  $(B \rightarrow right) \leftarrow (C \rightarrow left)$ 

K05: Jeśli( $B \rightarrow right$ )  $\neq nil$ , to( $B \rightarrow right \rightarrow up$ )  $\leftarrow B$ 

K06:  $(A \rightarrow left) \leftarrow (C \rightarrow right)$ 

K07: Jeśli(A $\rightarrow$ left)  $\neq$  nil, to(A $\rightarrow$ left $\rightarrow$ up)  $\leftarrow$ A

K08:  $(C \rightarrow right) \leftarrow A$ 

K09:  $(C \rightarrow left) \leftarrow B$ 

K10:  $(A \rightarrow up) \leftarrow C$ 

K11:  $(B\rightarrow up) \leftarrow C$ 

K12:  $(C\rightarrow up) \leftarrow p$ 

K13: Jeśli p = nil, to idź do K16

K14: Jeśli $(p\rightarrow left) = A$ , to $(p\rightarrow left) \leftarrow C$ Inaczej  $(p\rightarrow right) \leftarrow C$ 

K15: Idź do K17

K16: root←C

K17:  $Jeśli(C \rightarrow bf) = 1,to(A \rightarrow bf) \leftarrow -1$  $Inaczej(A \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K18:  $Jeśli(C \rightarrow bf) = -1, to(B \rightarrow bf) \leftarrow 1$  $Inaczej(B \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K19:  $(C \rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K20: Zakończ

; ustawiamy adresy węzłów biorących udział w rotacji

; prawym synem B staje się lewy syn C

; jeśli prawy syn B istnieje, to B staje się jego ojcem

; lewym synem A staje się prawy syn C

; jeśli lewy syn A istnieje, to A staje się jego ojcem

; prawym synem C staje się A

; lewym synem C staje się B

; ojcem A staje się C

; ojcem B staje się C

; ojcem C staje się były ojciec A

; sprawdzamy, czy A był korzeniem

; jeśli nie, to uaktualniamy byłego ojca A, aby był ojcem

; w przeciwnym razie uaktualniamy korzeń

; uaktualniamy współczynniki równowagi

## Algorytm wstawiania węzła do drzewa AV

Wejście

root – referencja do zmiennej, która przechowuje adres korzenia drzewa AVL

k – klucz wstawianego węzła

Wyjście:

Drzewo AVL z nowym węzłem o kluczu k

**Elementy pomocnicze:** 

w, p, r – wskazania węzłów

LL(root, x), RR(root, x), - rotacje węzłów, x jest wskazaniem węzła głównego rotacji

LR(root, x), RL(root, x)

Lista kroków:

K01: Utwórz nowy węzeł ; tworzymy nowy węzeł

K02: w← adres nowego węzła

K03: (w→left) ←nil ; inicjujemy pola węzła

K04:  $(w\rightarrow right) \leftarrow nil$ 

K05:  $(w\rightarrow key) \leftarrow k$ 

K06:  $(w\rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K07: p←root

K08: Jeśli p = nil,to root←w i zakończ ; sprawdzamy, czy drzewo jest puste

K09: Jeśli k< (p→key), to idź do K13 ; porównujemy klucze

K10:  $Jeśli(p\rightarrow right) = nil$ , to ; jeśli prawy syn nie istnieje, to

(p→right) ←w ; nowy węzeł staje się prawym synem

Idź do K16 ; i wychodzimy z pętli

K11: p← (p→right) ; inaczej przechodzimy do prawego syna

K12: Idź do K09 ; i kontynuujemy pętlę

K13 Jeśli(p $\rightarrow$ left) = nil, to: ; to samo dla lewego syna  $(p\rightarrow$ left)  $\leftarrow$ w

Idź do K16

K14:  $p \leftarrow (p \rightarrow left)$ 

K15: Idź do K09

K16:  $(w\rightarrow up) \leftarrow p$  ; uzupełniamy ojca węzła

K17: Jeśli(p→bf) = 0,to idź do K20 ; modyfikujemy współczynniki równowagi w kierunku korzenia

K18:  $(p\rightarrow bf) \leftarrow 0$ 

K19: Zakończ

K20: Jeśli( $p \rightarrow left$ ) = w, to( $p \rightarrow bf$ )  $\leftarrow 1$ 

Inaczej  $(p \rightarrow bf) \leftarrow -1$ 

K24: Jeśli $(r\rightarrow left) = p$ , to $(r\rightarrow bf) \leftarrow 1$ Inaczej  $(r\rightarrow bf) \leftarrow -1$ 

K21: r← (p→up) ; będziemy się przemieszczać w górę

drzewa AVL w poszukiwaniu węzła,

który

; stracił równowagę w wyniku dodania

elementu n.

K22: Dopóki r ≠ nil:wykonuj kroki K23...K26 ; wskazania r i p to ojciec i syn na tej

ścieżce

K23: Jeśli $(r\rightarrow bf) \neq 0$ , to idź do K28 ; jeśli r.bf = 0, to obie gałęzie r były w

równowadze przed dodaniem węzła

; zwiększamy lub zmniejszamy r.bf w

zależności od tego, w której

gałęzi węzła r został dodany węzeł w.

Gałąź ta jest cięższa!

K25:  $p\leftarrow r$  ; przemieszczamy się w górę drzewa

K26:  $r \leftarrow (r \rightarrow up)$ 

K27: Zakończ

K28:  $Jeśli(r\rightarrow bf) = -1$ , to idź do K32 ; sprawdzamy, która z gałęzi r była

cięższa

K29:  $Jeśli(r \rightarrow right) = p$ ,  $to(r \rightarrow bf) \leftarrow 0$  i zakończ ; prawa gałąź ze wstawionym elementem

równoważy lewą gałąź - kończymy

K30:  $Jeśli(p\rightarrow bf) = -1$ , to LR(root,r)Inaczej LL(root,r)

K31: Zakończ

K32:  $Jeśli(r \rightarrow left) = p$ ,  $to(r \rightarrow bf) \leftarrow 0$  i zakończ ; lewa gałąź ze wstawionym elementem

równoważy prawą gałąź

K33:  $Jeśli(p\rightarrow bf) = 1$ , to RL(root, r)Inaczej RR(root, r)

K34: Zakończ

## Algorytm usuwania węzła z drzewa AVL

Usuwanie węzła z drzewa AVL jest operacją dosyć skomplikowaną, ponieważ wymaga rozważenia dużej liczby przypadków przy przywracaniu równowagi. Przy wstawianiu węzła wystarczyło na ścieżce wiodącej od tego węzła do korzenia wykryć konfigurację węzłów, których rotacja przywracała równowagę w drzewie. Po wykonaniu rotacji drzewo AVL znów było w równowadze i operacja wstawiania mogła się zakończyć. Przy usuwaniu węzła mamy nieco inna sytuację. Tutaj poddrzewo, w którym dokonaliśmy usunięcia węzła, zmniejsza swoją wysokość, co może propagować się w górę aż do samego korzenia drzewa. Jedna rotacja zatem może nie być wystarczająca do przywrócenia równowagi w drzewie - rotacje należy kolejno wykonywać dla coraz wyższych węzłów dotąd, aż zniwelujemy zmniejszenie wysokości poddrzewa. Po drodze należy rozważać wiele różnych przypadków konfiguracji węzłów.

## Algorytm usuwania wezła z drzewa AVL

#### Wejście

root – referencja do zmiennej, która przechowuje adres korzenia drzewa AVL

 wskazanie węzła do usunięcia X

#### Wyiście:

Wskazanie x oraz drzewo AVL bez węzła x.

#### **Elementy pomocnicze:**

 wskazania węzłów t,y,z

LL(root, x), RR(root, x)rotacje węzłów, x jest wskazaniem węzła głównego rotacji

LR(root, x), RL(root, x)

 zwraca wskazanie poprzednika węzła x pred(x)

zmienne logiczna, która wskazuje zagnieżdżenie nest

#### Lista kroków:

K01: Jeśli( $(x\rightarrow left) = 0$ ) i ( $(x\rightarrow right) = 0$ ), to idź do K05 ; jeśli węzeł x posiada obu

synów, to

K02:  $y \leftarrow removeAVL(root, pred(x))$ ; rekurencyjnie usuwamy

poprzednik x, zapamiętując

; lewy syn x staje się lewym

go w y

K03: nest← false ; zerujemy zagnieżdżenie

K04: Idź do K08

K05: Jeśli( $x \rightarrow left$ )  $\neq nil$ , to  $y \leftarrow (x \rightarrow left)$ , ( $x \rightarrow left$ )  $\leftarrow nil$ ; wezeł posiada jednego syna

Inaczej y $\leftarrow$  (x $\rightarrow$ right), (x $\rightarrow$ right)  $\leftarrow$ nil lub wcale

K06:  $(x\rightarrow bf) \leftarrow 0$ ; x.bf = 0, ponieważ

ewentualny syn trafił do y

K07: nest← true ; ustawiamy zagnieżdżenie

K08: Jeśli y = nil, to idź do K15 ; jeśli y istnieje, to wstawiamy go za x

K09:  $(y\rightarrow up) \leftarrow (x\rightarrow up)$ ; ojcem y staje się ojciec

węzła x

synem y

K11: Jeśli(y $\rightarrow$ left)  $\neq$  nil, to(y $\rightarrow$ left $\rightarrow$ up)  $\leftarrow$ y

; jeśli lewy syn istnieje, to jego ojcem staje się y

K12:  $(y\rightarrow right) \leftarrow (x\rightarrow right)$ ; to samo dla prawego syna

K13: Jeśli(y $\rightarrow$ right)  $\neq$  nil, to(y $\rightarrow$ right $\rightarrow$ up)  $\leftarrow$ y

K14:  $(y\rightarrow bf) \leftarrow (x\rightarrow bf)$ 

K10:  $(y\rightarrow left) \leftarrow (x\rightarrow left)$ 

K15: Jeśli( $x\rightarrow up$ ) = nil,to idź do K18 ; jeśli x posiada ojca, to K16: Jeśli( $x \rightarrow up \rightarrow left$ ) =x, to ( $x \rightarrow up \rightarrow left$ )  $\leftarrow y$ ; synem tego ojca staje się y Inaczej ( $x \rightarrow up \rightarrow right$ )  $\leftarrow y$ K17: Idź do K19 K18: root←y ; inaczej y wstawiamy do korzenia K19: Jeśli nest= false, to idź do K43 ; sprawdzamy zagnieżdżenie ; ustawiamy wskaźniki, K20: z←v będziemy szli w kierunku korzenia drzewa K21:  $y \leftarrow (x \rightarrow up)$ K22: Dopókiy ≠ nil, wykonuj kroki K23...K42 ; w pętli sprawdzamy różne przypadki K23: Jeśli $(y\rightarrow bf) \neq 0$ , to idź do K26 K24: Jeśli(y $\rightarrow$ left) = z, to(y $\rightarrow$ bf)  $\leftarrow$  -1 K25 Idź do K43 ; przerywamy pętlę K26: Jeśli( $((y\rightarrow bf) \neq 1) \lor ((y\rightarrow left) \neq z)) \land$  $(((y\rightarrow bf) \neq -1) \lor ((y\rightarrow right) \neq z))$ , to idź do K31 K27:  $(y\rightarrow bf) \leftarrow 0$ K28: z←y ; przechodzimy na wyższy poziom drzewa K29:  $y \leftarrow (y \rightarrow up)$ K30: Następny obieg pętli K22 K31: Jeśli( $y\rightarrow left$ ) =z, to t $\leftarrow$  ( $y\rightarrow right$ ) ; t wskazuje syna y Inaczej  $t \leftarrow (y \rightarrow left)$ przeciwnego do z K32: Jeśli( $t\rightarrow bf$ ) = 0, to idź do K35 K33: Jeśli(y $\rightarrow$ bf) = 1, to LL(root, y) Inaczej RR(root, y) K34: Idź do K43 ; przerywamy petle K35: Jeśli $(y\rightarrow bf) \neq (t\rightarrow bf)$ , to idź do K40 K36: Jeśli $(y\rightarrow bf) = 1$ , to LL(root, y)Inaczej RR(root, y) K37: z←t ; idziemy na wyższy poziom K38:  $y \leftarrow (t \rightarrow up)$ K39: Następny obieg pętli K22 K40: Jeśli $(y\rightarrow bf) = 1$ ,to LR(root,y)Inaczej RL(root, y) K41:  $z \leftarrow (y \rightarrow up)$ ; idziemy na wyższy poziom i kontynuujemy pętlę K42:  $y \leftarrow (z \rightarrow up)$ 

K43: Zakończ z wynikiem x

## **Dodatkowe** informacje

#### Opis plików:

- avlTree.py plik zawiera implementację drzewa AVL
- avlTreeTest.py plik testujący podstawowe operacje w zaimplementowanym drzewie AVL

#### Uruchamianie programu i testów

Testy uruchamiamy w terminalu komendą "avlTreeTest.py" Główny program uruchamiamy w terminalu komendą "avlTree.py"

#### Alternatywne działanie programu

Aby włączyć obsługę drzewa AVL za pomocą terminala, należy odkomentować kod poniżej napisu "Prosta obsługa drzewa AVL poprzez terminal" w linii 323.

#### Polecenia:

- 1. Wstawianie węzła do drzewa AVL.
- 2. Usuwanie węzła z drzewa AVL.
- 3. Wyświetlanie zawartości drzewa AVL.
- 4. Wyście z programu.

## **Testy**

Plik avlTreeTest.py, zawiera przetestowane podstawowe operacje drzewa AVL takie jak wstawianie, szukanie, usuwanie węzła. Wyniki zostały przyrównane do innej implementacji tego algorytmu na stronei https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

# **Bibliografia**

Program jest zmodyfikowaną wersją projektu, który wykonałem na przedmiot Algorytmy i Struktury Danych w języku C++

#### Źródła:

- https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html
- <a href="https://pl.wikipedia.org/wiki/Drzewo">https://pl.wikipedia.org/wiki/Drzewo</a> AVL
- http://eduinf.waw.pl/inf/alg/001 search/0119.php